

DEUXIEME DIALOGUE : SUR LES APPLICATIONS DE LA MATHEMATIQUE

Alfred Renyi†

Institut de mathématiques appliquées - Budapest

Alfréd Rényi (20 mars 1921 - 1^{er} février 1970) était un mathématicien hongrois. Ses contributions portent surtout sur la combinatoire, la théorie des graphes et la théorie des probabilités. En 1950, il a fondé l'Institut de Mathématiques Appliquées de Budapest, qui porte aujourd'hui son nom (Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet). Il a publié 32 articles conjointement avec Paul Erdős (son nombre d'Erdős vaut donc 1). Il est l'auteur de la célèbre phrase (souvent attribuée de façon erronée à Paul Erdős) : *Un mathématicien est une machine à transformer du café en théorèmes*. Il avait aussi coutume de dire : *Si je suis triste, je fais des mathématiques pour être heureux. Si je suis heureux, je fais des mathématiques pour le rester*.

Une biographie plus détaillée - notamment sur les domaines de recherche de A. Renyi – peut être trouvée sur : <http://www.renyi.hu/arenyi.html>

La rédaction de *Petit x* est heureuse de publier l'un des Dialogues sur les mathématiques de ce remarquable mathématicien. La traduction (de l'allemand) est due à Colette Bloch, ex assistante à l'Université de Poitiers, qui avait traduit, pour les éditions Jacques Gabay, son ouvrage "Calcul des probabilités - avec un appendice sur la théorie de l'information". Alfred Renyi souhaitait que ses Dialogues soient également publiés en français ; il s'est toujours intéressé à la transmission des mathématiques, et nous espérons que ce texte pourra inspirer des professeurs soucieux de faire découvrir à leurs élèves les problématiques liées, depuis des siècles, à la science et à ses applications. Pourquoi ne pas envisager une étude conjointe mathématiques - histoire...

A Syracuse, Archimède vient de mettre en déroute la flotte romaine, en 215 avant JC...

Archimède : Majesté ! A cette heure tardive ! Quelle surprise ! Quel peut être le motif de cette visite, qui honore mon humble demeure ?

Hiéron : Mon cher ami, ce soir, en mon palais, je donnais un festin pour célébrer la victoire de notre petite cité de Syracuse sur la puissante Rome. Tu y étais également convié mais ta place est restée vide. Pourquoi n'es tu pas venu, toi précisément à qui nous sommes redevables de cette victoire ? Tes puissants miroirs de cuivre ont mis le feu à dix des vingt grands bateaux de guerre des Romains ; ils ont fui le port, brûlant comme des torches, poussés par le vent du Sud-Ouest, mais tous ont sombré avant d'atteindre la haute mer. Je n'ai pu me résoudre à aller dormir sans te remercier encore une fois d'avoir délivré notre ville de l'ennemi.

Archimède : Il pourrait bien revenir ; nous sommes encore assiégés du côté de la terre.

Hiéron : Nous en reparlerons. Je voudrais d'abord te faire un cadeau, le plus beau que je puisse te faire.

Archimède : Mais c'est un véritable chef-d'œuvre !

Hiéron : Cette coupe est en or massif ; même en appliquant ta célèbre méthode, tu n'y décèlerais aucune trace d'argent.

Archimède : Si je ne me trompe, les reliefs représentent des scènes de l'Odyssée. Au milieu on voit les Troyens sans défense tirer l'énorme cheval de bois jusque dans leurs murs. Je

me suis souvent demandé s'ils s'étaient servis de mouflages¹ pour le faire. Bien sûr, le cheval devait avoir des roues, mais le chemin de la citadelle était certainement escarpé...

Hiéron : Très cher ami, oublie donc tes mouflages pour un instant ! Te rappelles-tu mon étonnement lorsque, avec une triple jeu de poulies, tu as, tout seul, fait glisser de sa cale le vaisseau lourdement chargé que je voulais envoyer au roi Ptolémée ? Mais regarde plutôt les autres détails de la coupe.

Archimède : Je vois Polyphème le Cyclope, et Circé la magicienne, changeant en porcs les compagnons d'Ulysse, et ici j'aperçois les Sirènes, et Ulysse, attaché au mât, écoutant leur chant. Si on contemple son visage, on croit percevoir soi-même leurs accents envoûtants. Puis je trouve Ulysse aux Enfers, rencontrant l'âme d'Achille ; et là il effraye la charmante Nausicaa et ses servantes ; enfin voici la scène où Ulysse, déguisé en vieux mendiant, s'avance en direction des prétendants avec son arc bandé. En vérité c'est une merveilleuse œuvre d'art. Merci pour ta générosité, mon prince ; ce présent est vraiment royal.

Hiéron : C'est en effet la plus belle pièce de mon trésor, mais tu la mérites. Toutefois ce n'est pas seulement à cause de sa beauté et de sa valeur que j'ai choisi cette coupe pour te la donner, c'est encore pour une troisième raison : ce que tu as fait aujourd'hui pour Syracuse ne peut être comparé qu'à la ruse d'Ulysse. Dans les deux cas la subtilité a triomphé de la force brutale.

Archimède : Tes louanges me font rougir, mon roi. Mais puis-je me permettre de te répéter que la guerre n'est pas encore terminée ? Accepterais-tu d'écouter les conseils d'un vieil homme ?

Hiéron : En tant que roi je pourrais te l'ordonner, en tant que parent et ami je t'en prie : donne moi franchement ton avis.

Archimède : Eh ! bien, tu devrais maintenant conclure la paix avec les Romains. Durant toute la guerre nous ne nous sommes jamais trouvés en position plus favorable pour négocier. Si Marcellus ne t'envoie pas de messenger avant minuit, tu devrais lui en dépêcher un avant l'aube, de façon que la paix puisse être scellée avant qu'un autre jour ne décline. Marcellus aimerait retirer dès que possible ses troupes qui assiègent Syracuse, car il en a besoin contre Hannibal. Si vous vous mettez d'accord demain, il pourra annoncer à Rome, en même temps que la mauvaise nouvelle de la perte de sa flotte, du moins son succès diplomatique. Dès que la nouvelle de la bataille d'aujourd'hui se répandra dans Rome, les Romains auront soif de vengeance et seule la victoire définitive saurait apaiser leur rage. On tiendra des discours sur le Forum, disant qu'il faut "effacer la honte". Idée d'ailleurs typiquement barbare : comment pourrait-on faire que ce qui est arrivé ne soit pas arrivé ?

Hiéron : Tu as entièrement raison ! Dans des milliers d'années on parlera encore de notre victoire actuelle, même si un jour ou l'autre nous devons finalement être battus. Par ailleurs ton analyse de la situation est parfaitement correcte. En fait Marcellus m'a déjà envoyé un message, m'offrant, sous certaines conditions, la paix et le retrait de ses troupes. Mais si tu connaissais ces conditions tu ne serais pas si ardent à me

conseiller la paix.

Archimède : Qu'exige-t-il ?

Hiéron : D'abord il veut dix autres bateaux pour remplacer ceux qui sont maintenant coulés ; de plus nous devons raser toutes nos places fortes, à l'exception d'une seule qui sera occupée par une garnison romaine ; il demande aussi, naturellement, une quantité d'or et d'argent. Puis nous devons déclarer la guerre à Carthage. Enfin il réclame comme otages mon fils Gélon, ma fille Hélène et toi-même, mon ami. En contrepartie il promet qu'il ne sera fait aucun mal à la population tant que nous observerons ces conditions.

Archimède : On pourra vraisemblablement lui faire rabattre quelques unes de ses exigences. Mais sur mon compte il ne transigera pas.

Hiéron : Comment peux-tu dire cela avec un tel calme ? Je te jure par tous les dieux de l'Olympe que, tant que je vivrai, ni mes enfants ni toi ne serez jamais livrés à l'ennemi. L'or et l'argent ne me sont rien, il peut avoir ce qu'il veut, même à la rigueur les bateaux. Ce qui me trouble le plus dans ses exigences, c'est que, si nous les acceptons, nous serions à sa merci : qu'est-ce qui nous garantit qu'il respectera les accords ?

Archimède : Garde-toi, devant lui, d'exprimer un doute à ce sujet ! Les Romains sont très susceptibles sur les questions d'honneur. Peut-être renoncera-t-il à réclamer tes enfants.

Hiéron : Et en ce qui te concerne ? Serais-tu prêt à te sacrifier pour notre cité ?

Archimède : Est-ce une requête ou une simple question ?

Hiéron : Ce n'est qu'une question, naturellement. Que penses-tu que j'aie répondu à Marcellus ?

Archimède : Tu lui as donc déjà répondu !

Hiéron : J'ai déclaré que j'acceptais toutes ses conditions à l'exception d'une seule : te livrer en otage. Par contre j'ai consenti à me séparer de mes enfants, mais seulement si Marcellus, de son côté, me remettait deux des siens comme otages. Pour ce qui est de toi, j'ai dit qu'étant donné ton âge, tu ne supporterais pas la détention. Mais je sais bien qu'il voit en toi plus qu'un simple otage : il désire avant tout utiliser ta science ; aussi je lui ai promis que tu transcrirais pour lui en détail toutes tes découvertes d'intérêt militaire.

Archimède : Impossible ! C'est ce que je ne ferai jamais !

Hiéron : Et pourquoi pas ? Si nous avons la paix, de toutes façons, nous n'aurons plus besoin de tes inventions. Alors explique-moi pourquoi tu ne veux rien écrire à leur sujet ?

Archimède : Si tu as le loisir de m'écouter, je t'exposerai volontiers mes raisons.

Hiéron : Comme il faut que j'attende la réponse de Marcellus, je ne puis aller me coucher ; je t'entendrai donc sans impatience.

Archimède : Eh ! bien, nous avons tout le temps ; car Marcellus va être long à rédiger sa

réponse. Mais elle claquera comme un coup de fouet.

Hiéron : Tu crois qu'il va rompre les pourparlers ?

Archimède : C'est certain. Tu l'as blessé dans son honneur ; il ne te le pardonnera pas. Et aucun accord ne sera possible.

Hiéron : Tu pourrais bien avoir raison.

Archimède : J'ai toujours admiré tes talents de diplomate et la subtilité remarquable avec laquelle tu perces à jour les intentions les plus cachées de tes adversaires. Pour cette fois malheureusement tu n'as pas fait usage de ce don.

Hiéron : Je dois l'avouer. Si j'ai agi inconsidérément c'est sans doute que j'étais ivre, moins de vin, pourtant, que d'allégresse. Mais le mal est fait, nous n'y pouvons plus rien changer. Malgré tout, j'aimerais savoir pour quelles raisons tu refuses de communiquer tes découvertes par écrit.

Archimède : Maintenant la question est devenue purement académique ; mais je vais quand même t'exposer mon point de vue. Tu as comparé mes machines de guerre au cheval de Troie. La comparaison était sans doute juste, mais pas dans le sens que tu crois. Ulysse se servit du cheval de Troie pour s'introduire clandestinement avec quelques uns de ses compagnons dans la forteresse de Troie. Moi aussi, avec mes machines de guerre, je voulais introduire quelque chose en fraude : je voulais faire pénétrer dans l'opinion publique grecque l'idée que la mathématique peut être avec succès appliquée dans la pratique (non seulement ses éléments mais encore ses chapitres plus savants) ! Je le reconnais, j'ai longuement hésité avant de m'y résoudre ; car je hais la guerre et le sang versé. Mais sur ces entrefaites la guerre éclata ; désormais, mes machines étaient pour moi le seul moyen de me faire entendre ; toutes mes autres tentatives y avaient échoué. Puis-je te rappeler la pompe que j'ai inventée il y a quelques années pour aspirer l'eau de tes mines et éviter ainsi qu'on y travaille avec de l'eau jusqu'à la ceinture : mais cela ne t'intéressa pas. Le surveillant de la mine me dit que les esclaves n'étaient pas en sel et qu'il ne se souciait pas de savoir s'ils se mouillaient les jambes.

Te souviens-tu que j'ai proposé d'irriguer tes champs à l'aide de pompes ? On me répondit qu'il était moins coûteux d'y employer des esclaves. Et quand je proposai au roi Ptolémée de faire marcher ses moulins par la pression, sais-tu encore ce qu'il me dit ? Que les moulins qui avaient travaillé pour son père et son grand-père étaient encore bien assez bons pour lui.

Dois-je te citer encore d'autres exemples ? J'en aurais au moins une douzaine. Mes efforts pour montrer au monde comment la mathématique peut servir à des fins pacifiques ne trouvèrent aucun écho.

Mais quand la guerre eut éclaté, alors tu te souvins de mes leviers, de mes roues dentées et de mes moufles. En temps de paix, tout le monde avait considéré mes inventions comme des amusements indignes d'un adulte et plus encore d'un philosophe. Toi-même, qui me soutins toujours et m'aida à réaliser mes idées, tu ne prenais pas mes découvertes trop au sérieux. Tu présentais mes machines à tes hôtes

pour les distraire, et c'était tout.

Puis vint la guerre, et la flotte romaine bloqua le port. Alors, quand je fis remarquer incidemment qu'il était possible de mettre en fuite les navires romains en leur envoyant de grosses pierres au moyen de catapultes, tu te saisis immédiatement de cette proposition. Je ne pouvais pas retirer ce que j'avais dit et je dus mettre cette idée à exécution. Après un tel commencement, il n'était plus possible de s'arrêter. Dès le début je considérai ce nouveau développement avec des sentiments mitigés. Bien sûr on ne tournait plus mes inventions en dérision et j'étais heureux d'avoir enfin l'occasion de montrer au monde ce que la mathématique est capable de réaliser. Mais, à vrai dire, ce n'est justement pas sur un tel terrain que je voulais démontrer l'utilité de la mathématique. Je voyais des hommes se faire tuer par mes machines et je me sentais coupable. Torturé par ma conscience, je fis à la déesse Athénée le serment solennel que jamais, au grand jamais, je ne livrerais le secret de mes machines de guerre, ni oralement ni par écrit. J'essayai d'apaiser mes scrupules par le raisonnement suivant : la nouvelle va se répandre dans tout le monde grec que c'est grâce à la mathématique qu'Archimède a chassé les Romains de Syracuse, et l'on s'en souviendra encore quand la guerre sera finie depuis longtemps et que le secret de mes machines de guerre sera enfoui avec moi dans la tombe.

Hiéron : C'est une réalité, mon cher Archimède, la renommée de tes machines de guerre est déjà parvenue dans des contrées lointaines. De nombreux rois, qui sont mes amis, je reçois des courriers dans lesquels ils me questionnent sur tes découvertes.

Archimède : Et que leur réponds-tu ?

Hiéron : Je réponds toujours que ces inventions sont des secrets d'État, tant que nous nous trouvons en guerre.

Archimède : Je pourrais aussi tenir cachés mes secrets pour ceux qui réalisent mes idées. Chaque travailleur n'en connaît qu'une très petite partie. Je suis heureux que tu ne m'aies jamais importuné avec des questions ; même à toi, j'aurais dû refuser de répondre.

Hiéron : Jusqu'à présent, je ne t'ai effectivement rien demandé, mais à présent je souhaiterais en connaître quelque chose. Tu n'as pas besoin d'avoir peur, je ne veux pas voler tes secrets, mais seulement apprendre un peu sur les principes de tes découvertes.

Archimède : Si cela ne doit pas me faire rompre mes serments, je répondrai volontiers à tes questions.

Hiéron : D'abord je souhaiterais te demander quelque chose d'autre. Pourquoi tenais-tu tant à ce que tes pensées sur l'utilité des mathématiques soient connues de tous ?

Archimède : Peut-être suis-je déraisonnable, mais j'espérais pouvoir changer le cours de l'Histoire. Je me tourmente au sujet du destin de notre monde grec. Je croyais que si nous appliquions à grande échelle les mathématiques (qui sont à l'origine une découverte grecque et, selon moi, la plus importante conquête de cet esprit grec), nous pourrions peut-être sauver notre civilisation et notre mode de vie. Maintenant je reconnais que pour cela il est déjà trop tard. Les Romains ne vont pas conquérir

seulement Syracuse, mais aussi toutes les autres villes grecques ; notre époque est révolue.

Hiéron : Je crois que même ensuite, notre culture grecque ne sera pas perdue, car les Romains vont s'en emparer. Vois donc, comment partout et en tout ils cherchent à s'inspirer de nous ; ils copient nos statues, traduisent notre littérature, et, comme tu le vois, Marcellus s'intéresse déjà aux applications de la mathématique.

Archimède : Les Romains ne comprendront jamais vraiment les mathématiques ; leur intérêt est trop dirigé vers la pratique, ils n'ont aucun attrait pour les théories abstraites.

Hiéron : Mais ils s'en intéressent d'autant plus aux applications de la mathématique.

Archimède : On ne peut pas séparer la mathématique abstraite de ses applications pratiques. Celui qui se détourne de la mathématique abstraite se ferme le chemin de ses applications. Celui qui veut appliquer la mathématique avec succès doit posséder de l'imagination et être capable de rêver.

Hiéron : Tu parles en paradoxes. J'ai toujours pensé que l'application de la mathématique exigeait avant tout un solide sens pratique.

Archimède : Naturellement il en faut aussi pour mettre les idées en pratique. Mais il est tout à fait impossible de compenser l'absence d'idées par le sens pratique, que de faire du bouillon de viande sans viande.

Hiéron : J'en arrive à la question essentielle : où réside le secret de ton succès, quelle est la clé de cette nouvelle science que tu as inventée - appelons la mathématique appliquée - en quoi se distingue-t-elle de la mathématique - que nous appellerons mathématique pure - qui est enseignée dans les écoles ?

Archimède : Je suis désolé, mon roi, ma réponse va te décevoir : elles ne sont en réalité qu'une seule et même science. Il n'y a pas deux sortes de mathématique ; il n'y en a qu'une, celle qui t'est familière et qu'on t'enseigne dans ta jeunesse - non sans succès, paraît-il. Cette science a cependant des applications. La mathématique appliquée telle que tu l'imagines, en tant que science indépendante, séparée de la mathématique propre, n'existe pas. Si mon "secret" reste bien préservé, c'est qu'il n'est pas particulièrement gardé ; il n'est pas plus caché qu'une pièce d'or dans la poussière du chemin. Le premier qui se baisse peut la ramasser ; mais celui qui la cherche en des recoins secrets ne la trouvera jamais.

Hiéron : Tu affirmes donc que tes merveilleuses machines sont fondées sur la mathématique courante, celle que connaît tout homme cultivé ?

Archimède : Tu commences à me comprendre.

Hiéron : Donne-moi un exemple tangible !

Archimède : Prenons ces miroirs, qui nous ont rendu aujourd'hui de si bons services. je n'ai fait qu'utiliser une propriété bien connue de la parabole, qui s'énonce ainsi : si l'on relie un point P quelconque de la parabole au foyer F et si l'on mène par P une parallèle à l'axe de la parabole, ces deux droites forment des angles égaux avec la tangente à la parabole au point P ; autrement dit, un miroir parabolique fait converger

les rayons incidents parallèles à l'axe en un même point : le foyer. En conséquence, un objet placé en ce point peut s'enflammer sous l'action des rayons du soleil. Ce théorème, tu le trouveras dans les traités de mes éminents collègues d'Alexandrie.

Hiéron : Comment croire que ce théorème, apparemment anodin et semblable à ceux qu'on trouve par centaines dans tous les livres de géométrie, t'a permis d'anéantir la moitié de la flotte du fier Marcellus ! D'ailleurs je n'ai qu'un vague souvenir de cette propriété ; naturellement j'ai oublié la démonstration depuis longtemps.

Archimède : Il est probable que, le jour où tu l'appris, tu en compris aussi la démonstration, peut-être as tu admiré sa beauté, son élégance, mais tu t'en es tenu là. Certains mathématiciens approfondirent la question, poursuivirent leurs recherches, en tirèrent quelques conséquences purement géométriques, ou trouvèrent de nouvelles démonstrations, mais s'en contentèrent. Je ne fis qu'un modeste pas de plus : je réfléchis à l'usage qu'on pouvait en faire en dehors de la mathématique.

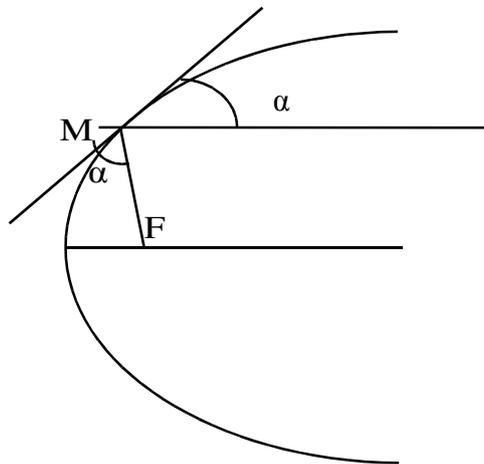


Figure 1

Hiéron : Je croyais que tu avais trouvé une nouvelle loi de l'optique.

Archimède : L'optique n'est au fond qu'un chapitre de la géométrie, ou plutôt une application de la géométrie à l'étude des rayons lumineux. D'ailleurs je n'ai utilisé de l'optique que la loi de la réflexion, qui est connue depuis longtemps.

Hiéron : Alors tu penses que l'application pratique de la mathématique ne nécessite pas de résultats mathématiques nouveaux, qu'il suffit d'associer à une situation pratique donnée l'image mathématique, le théorème bien connu, qui convient ?

Archimède : Non, mon roi, l'affaire n'est pas tout-à-fait aussi simple. Il arrive souvent que le théorème dont on a besoin ne soit pas encore connu ; il faut alors le découvrir et le démontrer soi-même. Mais même quand ce n'est pas le cas, il est souvent difficile de trouver l'image mathématique correspondant à une situation réelle - au lieu d'"image", je préférerais parler de "modèle" mathématique. Et c'est tout autre chose que de chercher le gant gauche quand on a le gant droit.

D'une part plusieurs modèles mathématiques peuvent souvent représenter une même situation, et il faut choisir celui qui convient le mieux. Il doit s'adapter le mieux possible à cette situation (il ne sera jamais parfaitement adéquat), sans être cependant trop compliqué, car il doit se prêter à une manipulation mathématique. Représentation exacte et simplicité sont, par nature, deux exigences contradictoires ; les doser judicieusement n'est généralement pas si simple. Il faut rester le plus près possible de la réalité pour tout ce qui est en relation avec le but qu'on s'est fixé, tout en négligeant l'accessoire. Il n'est pas nécessaire qu'un modèle mathématique soit, à tous points de vue, semblable à la réalité ; ce n'est d'ailleurs pas possible. Il suffit que les données caractéristiques du problème soient décrites aussi bien que possible par le modèle?

D'autre part il résulte de ce que je viens de dire qu'un même modèle mathématique peut parfois traduire des situations bien différentes. Par exemple j'ai également utilisé les propriétés de la parabole pour construire les catapultes : la trajectoire d'une pierre qu'on lance est en effet proche d'une parabole. De même, pour calculer l'enfoncement d'un navire en fonction de sa charge. Bien sûr, la section transversale d'un navire n'a pas exactement la forme d'une parabole, mais un modèle plus fiable serait mathématiquement trop compliqué, et par là-même inutilisable. Et pourtant les résultats s'accordèrent fort bien à l'expérience. En particulier, je pus en déduire la façon de construire un bateau pour qu'il se redresse toujours sous les chocs conjugués du vent et des vagues. Il importe en effet que le centre de gravité du navire soit constamment aussi bas que possible.

Dans bien des cas, un modèle mathématique, si grossier soit-il, est d'un grand secours dans l'analyse d'une situation pratique compliquée, pourvu qu'il permette d'aboutir à une conclusion qualitativement correcte - ce qui est parfois beaucoup plus important qu'un résultat quantitatif.

L'expérience m'enseigna que la recherche d'un modèle mathématique approprié, même très sommaire, conduit souvent à une meilleure compréhension du cas étudié ; car nous sommes ainsi forcés d'envisager logiquement toutes les possibilités sans exception, de définir de façon claire et catégorique les notions utilisées, de considérer tous les facteurs qui pourraient jouer un rôle et de reconnaître ceux qui sont décisifs. Quand le modèle choisi aboutit à des résultats non conformes à l'expérience, cela signifie que nous avons omis, en le construisant, une condition importante. IL faut alors modifier le modèle en tenant compte de circonstances essentielles jusqu'alors négligées. Ainsi, un modèle inadéquat pourra quand même être utile en contribuant à une meilleure compréhension de la situation étudiée.

Hiéron : J'ai l'impression qu'en cela, l'application de la mathématique ressemble à la guerre, où une défaite est parfois plus appréciable qu'une victoire car elle nous enseigne les modifications à apporter à notre stratégie ou à notre armement.

Archimède : Je vois que tu as compris la nature du problème.

Hiéron : Mais parle-moi encore de tes miroirs !

Archimède : Tu connais déjà l'idée fondamentale. Quand je me fus aperçu que les propriétés

de la parabole que j'ai évoquées étaient utilisables, j'eus encore une série de problèmes pratiques à résoudre. Et avant tout celui de tailler un miroir métallique concave en forme de paraboïde de révolution. Bien sûr il fallait aussi trouver le matériau convenable ; mais permets moi de n'en rien dire non plus.

Hiéron : Bien, bien, je ne veux pas t'arracher tes secrets par la ruse. Mais il ressort de ce que tu viens de dire qu'une connaissance approfondie du travail des métaux et de leurs qualités te fut aussi nécessaire que la dite propriété de la parabole. Cela prouve, je crois, que pour appliquer la mathématique il ne suffit pas de la connaître. Celui qui veut appliquer la mathématique n'est-il pas en quelque sorte dans la situation de quelqu'un qui voudrait monter deux chevaux à la fois ?

Archimède : Je voudrais apporter à ta comparaison une toute petite rectification. Appliquer la mathématique, c'est un peu atteler deux chevaux à sa voiture. Ce n'est pas tellement difficile en soi à condition de s'y connaître en chevaux et en voitures. Le premier cocher venu en est capable.

Hiéron : Maintenant je ne sais plus du tout où j'en suis. Chaque fois que la mathématique appliquée me paraît énigmatique, tu me démontres que c'est en réalité une chose toute simple ; mais à peine suis-je convaincu que tout est vraiment clair comme le jour, tu viens me dire que c'est beaucoup plus compliqué que je ne croyais.

Archimède : C'est que dans le principe tout est très simple, mais parfois bien embrouillé dans le détail.

Hiéron : Je n'ai pas encore bien saisi ce que tu entends au juste par modèle mathématique.

Archimède : Te souviens-tu de l'appareil que j'ai mis au point voilà quelques années pour reproduire le mouvement du Soleil, de la Lune et des planètes ? Il permettait d'expliquer comment se produit une éclipse de Soleil ou de Lune.

Hiéron : Si je m'en souviens ! Il est encore dans mon palais ; je le montre à tous mes hôtes. Ils en restent bouche bée. Est-ce un modèle mathématique de l'Univers ?

Archimède : Non, je dirais plutôt un modèle physique. Les modèles mathématiques sont invisibles, ils n'existent que dans nos pensées et s'expriment en formules. Un modèle mathématique de l'Univers serait justement ce qui est commun à l'Univers réel et à mon modèle physique. Dans le modèle physique, à chaque planète correspond une sphère et la plus petite est au moins grosse comme une pomme. Dans le modèle mathématique, ce sont des points, sans étendue, qui correspondent aux planètes.

Hiéron : Je commence à comprendre ce que tu appelles modèle mathématique. Mais reprenons l'exemple des chevaux. C'est une chose d'atteler et de conduire des chevaux, et c'en est une autre de les élever. N'en est-il pas de même en mathématique ? N'est-il pas bien différent d'appliquer la mathématique et de la faire progresser en découvrant de nouveaux théorèmes qu'on démontre ensuite ?

Archimède : Pour les chevaux, tu as raison en gros, et pourtant celui qui a élevé un cheval le connaît sûrement mieux et peut donc mieux que tout autre le conduire et le monter. En ce qui concerne la mathématique, comme je l'ai déjà dit, voici ce qui se passe : pour l'appliquer avec succès il faut la connaître à fond dans toutes ses parties.

Cependant le mathématicien qui ne se contente pas de répéter d'une façon ou d'une autre ce que d'autres ont déjà fait avant lui dans des circonstances analogues, mais essaie de suivre sa propre voie et de déduire de nouvelles possibilités d'application, celui-là doit être lui-même un créateur. Inversement la recherche appliquée peut apporter beaucoup à la mathématique pure.

Hiéron : Comment est-ce possible ? Pourrais-tu me donner un exemple ?

Archimède : Tu te souviens peut-être que je me suis beaucoup intéressé, il y a quelque temps, à un problème de mécanique : à la détermination du centre de gravité de certains corps. Les résultats auxquels j'arrivai par la mécanique ne m'aidèrent pas seulement à atteindre mon but premier (à cette époque je cherchais la forme optimale des coques de bateaux), mais ils me conduisirent à de nouveaux théorèmes de géométrie. J'ai imaginé une méthode originale qui consiste à analyser des problèmes géométriques à l'aide de considérations mécaniques faisant intervenir le centre de gravité. J'ai trouvé par cette méthode de nombreux théorèmes ; elle n'a d'ailleurs qu'un caractère heuristique et ne fournit pas de démonstrations rigoureuses. J'ai alors démontré ces théorèmes par les méthodes propres à la géométrie pure. Mais trouver la démonstration précise d'un théorème, quand on est guidé par des analogies mécaniques et qu'on a ainsi quelque idée de ce qu'on doit démontrer, est plus facile que de chercher sans savoir quelle direction prendre.

Hiéron : Cite-moi au moins un théorème que tu aies découvert de cette curieuse façon.

Archimède : *La surface d'un segment de parabole est d'un tiers plus grande que celle du triangle de même base et de même hauteur.* Je parvins à ce théorème par des méthodes appartenant à la mécanique, et plus tard je le démontrai rigoureusement par les méthodes habituelles de la géométrie.

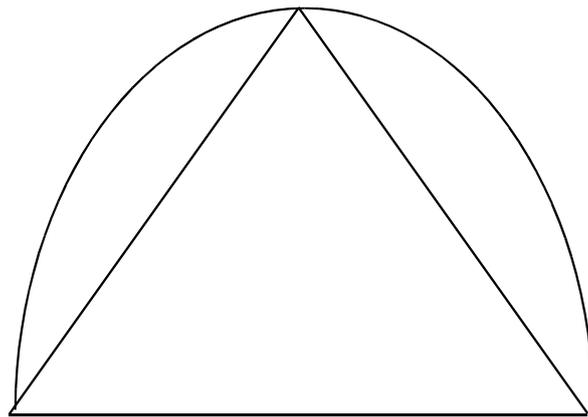


Figure 2

Hiéron : Puisque tu as trouvé ce théorème par la mécanique, pourquoi a-t-il encore fallu le démontrer par les méthodes traditionnelles ?

Archimède : Quand j'eus étendu ma méthode, je remarquai que, parmi les premiers résultats, certains étaient faux. C'est en analysant ces cas pour lesquels ma méthode m'induisait en erreur que je pus la modifier de façon à obtenir toujours des résultats corrects. Mais je n'ai pas encore démontré que tout résultat obtenu par cette voie est certainement exact ; il se peut que je réussisse un jour à trouver cette démonstration, ou qu'un autre y parvienne, mais jusque là je ne pourrai pas me fier à ma méthode et devrai contrôler chaque résultat en le démontrant par les méthodes ordinaires et indiscutables.

Hiéron : Je comprends très bien cela. Mais je ne vois pas du tout en quoi des démonstrations rigoureuses sont indispensables pour les applications ? Après tout, tu disais tout-à-l'heure qu'un modèle mathématique n'était qu'une grossière approximation de la réalité. Si donc on emploie une formule à peu près juste, le résultat lui-même sera à peu près conforme à la réalité. Et il ne peut de toutes façons jamais être tout-à-fait exact, comme tu l'as souligné toi-même.

Archimède : Tu te trompes, mon roi. C'est justement parce qu'un modèle mathématique n'est qu'une approximation de la réalité et ne reproduit jamais exactement les données, que nous devons nous garder d'accroître encore, par un maniement peu scrupuleux de la mathématique, l'écart entre modèle et réalité. Dans les applications de la mathématique, il faut faire régner la même rigueur logique que dans la mathématique pure. D'ailleurs, l'opinion si répandue selon laquelle l'utilisation d'approximations serait une dérogation à la rigueur mathématique, est absolument erronée. La théorie des approximations est aussi rigoureuse que toute autre et les propositions concernant des approximations, des inégalités par exemple, doivent être démontrées aussi strictement que, disons, des propositions sur les égalités. Tu te souviens peut-être des approximations que j'ai données, il y a quelques années, pour l'aire du cercle ; leurs démonstrations sont aussi rigoureuses que celle des théorèmes d'Euclide.

Hiéron : Quels résultats nouveaux as-tu trouvés par ta méthode ?

Archimède : Cette méthode me conduisit au résultat suivant : *Le volume et l'aire du cylindre qui a pour base le grand cercle d'une sphère et pour hauteur le diamètre de cette sphère sont égaux, respectivement, à une fois et demi le volume et l'aire de la sphère.*

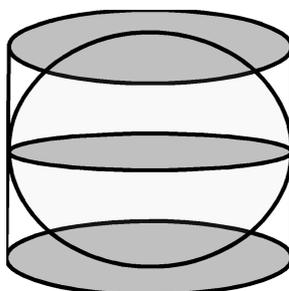


Figure 3

Hiéron : Tu souhaites, paraît-il, que ce théorème soit gravé sur ta tombe. Cela signifierait-il que tu le considères comme ta découverte la plus remarquable ?

Archimède : J'y attache effectivement beaucoup d'importance ; je crois cependant que la méthode employée, qui m'a permis, entre autres, de trouver ce théorème, est plus importante que tous les résultats concrets trouvés grâce à elle. Mais comme je l'ai dit, je n'en suis pas encore pleinement satisfait, puisque je n'ai pas encore réussi à montrer qu'elle conduit toujours à des résultats justes.

Te souviens-tu, un jour, comme nous parlions de leviers, j'ai dit : *Donne-moi un point d'appui et je soulèverai le monde*. Bien sûr un tel point n'existe pas. Mais si l'on fait des mathématiques, il existe un tel point fixe : c'est l'ensemble des axiomes et de la logique. C'est pourquoi j'estime que des démonstrations et une logique rigoureuse sont indispensables même dans les applications. Appliquer la mathématique, c'est ébranler le monde en s'appuyant sur le point fixe de la mathématique !

Hiéron : Tu parles toujours d'applications de la mathématique, mais bon nombre de tes exemples sont liés à la géométrie. En ce qui concerne la géométrie, je crois voir clairement comment on peut l'appliquer. Le travail d'une machine dépend visiblement de la forme et de la taille de ses différentes parties ; la trajectoire d'une pierre catapultée est, comme tu l'as dit, proche d'une parabole. Ces exemples me font comprendre comment s'établit une relation entre géométrie et réalité. Mais qu'en est-il pour les autres branches de la mathématique, la théorie des nombres par exemple ? Comprends-moi bien, je ne parle pas d'arithmétique, dont on se sert évidemment pour le moindre calcul ; je pense, entre autres, à la divisibilité, aux nombres premiers, au plus petit commun multiple...

Archimède : Prenons par exemple des roues dentées n'ayant pas le même nombre de dents, et s'entraînant mutuellement ; si nous commençons à les faire tourner, on peut se demander quand le système reviendra à sa position initiale - c'est la notion du plus petit commun multiple qui nous permet de donner la réponse. Cet exemple te satisfait-il ou dois-je en donner d'autres ?

Hiéron : Cela me suffit.

Archimède : J'aimerais pourtant ajouter quelque chose. J'ai reçu récemment une lettre de mon bon ami Ératosthène de Cyrène, par laquelle il me communiquait une méthode simple mais extrêmement ingénieuse, qu'il a découverte pour isoler, ou comme il dit pour "filtrer" les nombres premiers. En réfléchissant à cette méthode, j'eus l'idée d'une machine qui matérialiserait le "crible" d'Ératosthène. Cette machine comprendrait un système de grandes roues dentées de tailles différentes sur un axe ; quand on fait tourner n fois l'axe à l'aide d'une manivelle, n n'étant pas un trop grand nombre si n est un nombre premier, on voit un trou ; par contre, si n n'est pas premier, une dent de l'un des rouages vient masquer le trou. à l'aide de cette machine, on pourra savoir si n est un nombre premier.

Hiéron : C'est très étonnant. Quand la guerre sera finie, il faudra que tu me construises cette machine. Mes hôtes seront charmés.

Archimède : Si je vis encore à ce moment-là, je te la construirai. Elle aura surtout l'avantage

de montrer que des machines sont en mesure de résoudre des problèmes mathématiques. Cela convaincra peut-être les mathématiciens qu'en s'intéressant aux rapports entre mathématique et machines on peut faire progresser la recherche en mathématique pure.

Hiéron : Tes paroles me rappellent une anecdote sur Euclide, tu la connais probablement. Un élève à qui il enseignait la géométrie lui demanda : "*Que gagnerai-je à savoir tout cela ?*" En réponse, Euclide appela son esclave et lui ordonna : "*Donne une obole à cet homme qui veut tirer profit de ce qu'il étudie.*" Cette histoire semble donc prouver que, d'après Euclide, un mathématicien n'a pas à se préoccuper du profit matériel que peut lui apporter sa science.

Archimède : Je connais naturellement cette anecdote et je te surprendrai sans doute en te disant que je partage l'opinion d'Euclide. Dans un tel cas j'aurais répondu à peu près de la même façon.

Hiéron : Voilà que tu me déroutes encore. Tu as parlé jusqu'ici avec tant d'enthousiasme des applications de la mathématique, et tout d'un coup, tu te declares d'accord avec le puriste qui considère la joie de connaître comme le seul bénéfice auquel doit aspirer un mathématicien.

Archimède : Je crois que tu as tout aussi mal interprété l'anecdote sur Euclide que la plupart des gens. En fait elle ne dit pas qu'Euclide ne soit pas intéressé aux applications de la mathématique, ou qu'il ait tenu cette étude pour indigne d'un savant ; c'est tout simplement absurde ! Tu sais certainement qu'Euclide a composé lui-même un livre sur l'astronomie, auquel il a donné le titre de "*Phaenomena*", ainsi qu'un livre sur l'Optique, et il est encore l'auteur présumé de "*Katoptrika*" dont je me suis servi pour construire mes miroirs. Il s'est aussi beaucoup occupé de mécanique. A mon avis, Euclide voulait souligner ce fait remarquable que la mathématique ne profite vraiment qu'à ceux qui l'étudient non seulement pour l'amour du profit mais pour l'amour d'elle-même.

La mathématique est comme ta fille Hélène, qui, chaque fois qu'un prétendant surgit, le soupçonne de demander sa main, non par amour pour elle, mais parce qu'il désire devenir le gendre du roi. Elle souhaiterait un époux qui l'aimât pour elle-même, pour sa beauté, pour son charme, pour l'éclat de son esprit, et non pour la richesse et la puissance qui reviennent en partage au gendre du roi. De la même façon, la mathématique ne donne droit de regard dans ses secrets qu'à ceux qui, enthousiasmés par sa beauté, l'approchent par pur désir de savoir. Mais si, au moindre pas, on se demande : qu'aurai-je de plus quand je serai venu à bout de cette question ? - alors on n'ira pas loin en mathématique. Je t'ai déjà dit que les Romains ne feraient pas grand-chose de la mathématique et de ses applications ; tu dois maintenant comprendre pourquoi : ils appréhendent tout par le point de vue étroit de l'utilité immédiate.

Hiéron : A mon avis nous devrions prendre exemple sur les Romains : nous pourrions ensuite les combattre plus sûrement !

Archimède : Je ne suis pas d'accord. Si nous essayions de gagner le combat en renonçant dès l'abord aux idées que nous représentons, et en imitant nos ennemis, nous serions

perdus avant même qu'il y ait combat ; une telle victoire est pire qu'une défaite.

Hiéron : Laissons-là la guerre et revenons à la mathématique ! Comment construis-tu en fait tes modèles mathématiques ?

Archimède : Il est difficile de répondre à une question aussi générale. Peut-être une comparaison nous aidera-t-elle ; le modèle mathématique d'une situation pratique est un peu comme sa projection sur l'écran de la raison.

Hiéron : Il me semble que ta philosophie est tout à l'opposé de celle de Platon. Il dit, lui, que les objets réels sont les ombres des idées, cependant que toi, si je te comprends bien, tu considères que les pensées sont les ombres des objets réels.

Archimède : Ces deux conceptions ne sont pas si éloignées l'une de l'autre qu'il y paraît à première vue. Platon s'est préoccupé du rapport entre les notions mathématiques et la réalité ; pour lui, la tâche principale de la philosophie était d'expliquer leur remarquable concordance. Jusqu'à ce point précis je suis tout-à-fait d'accord avec lui. Si je n'approuve pas la réponse qu'il a donnée à cette question, je dois reconnaître qu'il fut le premier à formuler ce problème capital et à proposer une solution logiquement possible.

Mais je crois qu'il nous faut maintenant laisser la philosophie et revenir sur terre, car j'entends qu'on frappe à la porte ; je vais ouvrir.

Hiéron : Laisse-moi y aller ; je crois que mon messenger revient avec la réponse de Marcellus... C'est bien cela, la voici.

Archimède : Qu'écrit-il ?

Hiéron : Lis toi-même !

Archimède : ... Marcellus salue le roi Hiéron et lui fait savoir qu'il aura conquis Syracuse avant la nouvelle lune. Le roi Hiéron sera ainsi convaincu qu'un Romain n'a qu'une parole.

Hiéron : Qu'en dis-tu ?

Archimède : Son grec n'est pas mauvais. Et pour ce qui est du fond, il correspond à mon attente.

Hiéron : Effectivement ta supposition s'est vérifiée aussi rigoureusement que si tu l'avais déduite par ta méthode.

Archimède : Eh ! bien, nous savons du moins à quoi nous attendre.

Hiéron : Je m'en vais maintenant ; il faut me reposer. Demain nous aurons à nous armer en vue d'un nouvel assaut. Merci pour cette intéressante discussion.

Archimède : Ces derniers temps j'ai eu trop rarement l'occasion de parler mathématique ; je suis heureux que tu m'en aies fourni le prétexte. Et grand merci, encore une fois, pour cette précieuse coupe.

Hiéron : Je suis content qu'elle te plaise. Bonne nuit, ami, je crois qu'un peu de sommeil te fera du bien à toi aussi.

Archimède : Bonne nuit, mon roi ! Je ne peux pas encore me coucher car j'ai une lettre à finir, par laquelle j'informe mon ami, Dositheus de Pelusium, de mes nouveaux résultats. Maintenant que la flotte romaine s'est retirée, des bateaux quitteront probablement le port demain, tandis qu'après-demain les Romains prendront la précaution de fermer le port de nouveau. Je veux profiter de cette occasion, ce pourrait bien être la dernière...

Bibliographie

Sur Archimède : notamment <http://histoiredechiffres.free.fr/mathematiciens/archimede.htm>
(consulté le 19/09/2011)

Sur A. Renyi : <http://www.renyi.hu/arenyi.html>

Note :

1 Un mouflage est une association de poulies et de cordes, permettant de démultiplier la force de façon à pouvoir tracter des charges très lourdes.