

L'HISTOIRE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES : SUR LA MÉTHODOLOGIE DE RECHERCHE

David Guillemette, doctorant en Éducation
Université du Québec à Montréal
guillemette.david@uqam.ca

Résumé : Cette recension des écrits jette un regard critique sur les aspects méthodologiques de plusieurs recherches empiriques autour de l'utilisation de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques. Malgré une réelle effervescence du milieu de recherche et la formation de nombreux groupes de recherches, les avancées demeurent limitées et de nombreuses questions centrales subsistent. L'analyse de sept études a permis de cerner plusieurs difficultés d'ordre méthodologique rencontrées par les chercheurs. Des éléments de réflexions concernant l'apport de la recherche qualitative sont apportés afin d'alimenter l'effort d'asseoir les travaux dans ce secteur sur des bases solides.

Mots-clés : Histoire des mathématiques, enseignement des mathématiques, méthodologie de recherche.

1. Introduction

Le texte qui suit tente de mettre en lumière les dernières avancées de la recherche concernant l'utilisation de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Depuis plusieurs décennies, de nombreux penseurs, chercheurs et enseignants se sont penchés sur le « comment » et le « pourquoi » du recours à l'histoire dans la classe de mathématiques. Dès le début du 20^e siècle, pédagogues (Barwell, 1913), philosophes (Bachelard, 1938) et mathématiciens (Poincaré, 1889; Klein, 1908; Toeplitz, 1927; Pólya, 1962) s'y intéressaient. À partir des années 70, ce champ d'intérêt connut une hausse importante de popularité. Un nombre important d'articles, publications, livres, recueils, conférences, groupes de recherches touchant plus ou moins directement l'histoire et l'enseignement des mathématiques sont issus de cette féconde effervescence. Lors du deuxième International Congress on Mathematics Education (ICME) en 1972, apparut un premier groupe de chercheurs international : The international study group on the relation between the History and Pedagogy of Mathematics (HPM). Depuis, HPM organise une conférence internationale tous les quatre ans et publie son propre journal en ligne trois fois par année. En France, l'European Summer University on the epistemology and history in mathematics education (ESU) est une initiative plus récente (1993) des Instituts Universitaires de Formation de Maîtres (IUFM) (voir Barbin, Stehlikova, & Tzanakis, 2007). L'ESU tient d'importantes conférences tous les trois ans. Enfin, lors du dernier Congress of the European society for Mathematical Education (CERME) à Lyon en 2009, le groupe de recherche sur The role of History of mathematics in Mathematics Education : Theory and Research (WG12 pour working group 12) est apparu. Ce nouveau groupe de jeunes chercheurs se concentre exclusivement sur la recherche empirique (voir Jankvist, 2009a, pp. 2-3).

Il n'est pas nécessaire de mentionner l'énorme quantité de textes et d'études issus de ces divers groupes de recherche. Ces derniers publient de nombreux actes de colloques qui rassemblent les travaux les plus importants (Furinghetti, Kaijser, & Tzanakis, 2008). De nombreuses études apparaissent aussi dans des revues portant sur l'enseignement des mathématiques en général comme; *Educationnal Studies in Mathematics (ESM)*, *For the learnig of Mathematics (FLM)*, ou encore *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education (MJRME)*. Malgré l'activité fiévreuse de ce secteur de recherche, de nombreuses questions fondamentales persistent.

2. L'ICMI et après

Depuis maintenant 10 ans la recherche autour de l'utilisation de l'histoire des mathématiques se restructure. De nouveaux questionnements font suite à la parution d'un ouvrage important : *History in mathematics éducation - The ICMI Study* (Fauvel & van Maanen, 2000). Véritable bilan de santé du secteur de recherche, le livre rassemble les réflexions, interrogations et inquiétudes des chercheurs de l'époque. Ces derniers prendront dorénavant du recul face à leurs travaux et tenteront de construire des outils d'investigations plus efficaces. Depuis, on doute de l'efficacité et de la pertinence de nombreux exemples d'application en classe (Siu, 2000 ; Bakker, 2004). On questionne la transférabilité des expériences positives rapportées par des enseignants de différents niveaux académiques (Tzanakis, 2000 ; Schubring, 2007). On fait preuve d'une plus grande prudence quant aux capacités des étudiants et des enseignants devant les difficultés liées à l'étude de l'aspect historique de certaines notions (Charbonneau, 2002 ; van Gulik-Gulikers, 2005 ; Jankvist, 2009b). Plusieurs chercheurs montrent plutôt les difficultés rencontrées par les enseignants désireux d'introduire l'histoire des mathématiques dans leurs cours (Burn, 1998 ; Fried, 2001; 2007). Pire, en voulant jouer à l'avocat du diable, Siu (2007) dresse la liste des 12 raisons pour lesquelles il n'utilise pas l'histoire des mathématiques dans sa classe. D'autres observent que les cas d'utilisation de l'histoire sont isolés et qu'il semble exister un certain fossé entre les études « générales » sur l'utilisation de l'histoire et les « expériences pratiques » rapportées par d'autres (Gulikers & Blom, 2001). Enfin, le manque d'évidences empiriques quant à l'efficacité et à l'apport de l'histoire des mathématiques à l'apprentissage est encore rapporté par plusieurs (Lederman, 2003 ; Siu & Tzanakis, 2004 ; Siu, 2007 ; Jankvist, 2009b).

Parallèlement, une tentative d'humanisation des mathématiques est ressentie dans les curriculums. À travers le monde, de nombreuses associations prônent l'inclusion de l'histoire dans la classe de mathématiques afin de fournir des situations d'apprentissage variées et nombreuses permettant aux étudiants d'apprécier le rôle des mathématiques dans le développement des sociétés (Fauvel & van Maanen, 2000 p. 1-29). Au Québec, l'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe se voit même prescrite par le Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (MELS). Il y est souligné l'importance pour l'élève de reconnaître l'apport des mathématiques à la science, aux technologies et à la culture des sociétés et des individus. Les éléments culturels et historiques font partie intégrante de l'application du programme. Le caractère obligatoire de l'insertion de repères culturels dans l'enseignement est nouveau et caractéristique de ce programme. Ce dernier y présente l'histoire comme un moyen de dynamiser les mathématiques par la prise de conscience de son aspect évolutif

(Charbonneau, 2006), dans le programme de formation québécois en mathématiques autant au niveau primaire que secondaire. On remarque que l'histoire des mathématiques y occupe une place importante et que la présence d'éléments culturels et historiques fait partie intégrante de l'application du programme. Au primaire, le programme prescrit que l'élève devra établir des liens entre les besoins des sociétés et l'évolution de la mathématique ou de la technologie. Au premier cycle du secondaire, le programme indique, dans la présentation de la matière, que les élèves devront, par l'entremise de l'histoire, saisir mieux le sens et l'utilité des mathématiques, découvrir que l'évolution des mathématiques est liée à des besoins ressentis dans les sociétés et découvrir que les savoirs mathématiques sont le fruit de longs travaux de chercheurs. Dans la section contenu de formation, le programme indique que : « Les élèves devront être amenés à situer les concepts mathématiques dans un contexte historique et social, à voir leur évolution et à cerner les problématiques qui ont suscité leur développement et les concepts comblés par ce processus. » (MELS, 2003, p. 248) Dans l'esprit du programme, on remarque que l'histoire vise à placer les mathématiques dans un contexte sociohistorique et culturel plus large. Elle permet d'humaniser les mathématiques et d'y associer le visage de mathématiciens ayant œuvré à leurs développements. Dans le second cycle, le programme fournit des repères culturels encore plus précis et nombreux.

3. Tentatives de catégorisations

En parcourant la littérature récente, on remarque un désir important dans la communauté de chercheurs de construire des outils critiques afin de porter un regard aiguisé sur la recherche actuelle (Jankvist, 2009c). On cherche à classer, à catégoriser et à évaluer les recherches de l'heure dans le secteur. On tente d'éclaircir le discours en répertoriant les objectifs poursuivis par les chercheurs, les moyens employés et les concepts utilisés. Plusieurs tentatives de catégorisation concernant essentiellement le « comment » et le « pourquoi » de l'utilisation de l'histoire ont paru suite à l'ICMI Study (Tzanakis, 2000 ; Tzanakis & Arcavi, 2000 ; Fried, 2001 ; Gulikers & Blom, 2001 ; Furinghetti, 2004 ; Tang, 2007).

Récemment Uffe Thoma Jankvist (2009c) a fait paraître un article important dans lequel un travail intéressant de catégorisation est entrepris. Il tente de répertorier l'ensemble des méthodes utilisées afin d'introduire l'histoire des mathématiques dans la classe (le comment) et l'ensemble des arguments appuyant cette introduction soulignés par les chercheurs, enseignants et mathématiciens (le pourquoi). Pour l'auteur, cette distinction vise, d'une part, à éviter une confusion répandue dans plusieurs études entre méthodes et arguments et, d'autre part, à faciliter l'observation et l'analyse des interrelations entre ces deux aspects de la recherche. Ces interrelations restent d'ailleurs très peu discutées dans la littérature.

Concernant le « comment » de l'utilisation de l'histoire, Jankvist regroupe les méthodes proposées en trois catégories : l'approche anecdotique, l'approche par modules d'apprentissages et l'approche historique intégrée. La première correspond à l'introduction de faits isolés, de capsules historiques ou d'anecdotes particulières. Il donne l'exemple de Lindstrøm (1995) qui, à la fin de chaque chapitre de son manuel, présente une petite rubrique concernant le développement dans l'histoire des notions abordées. Jankvist donne l'image « d'épices » ajoutées à la casserole mathématique. Mentionnons que les approches adoptées

par la grande majorité des collections de manuels de mathématiques au Québec entrent dans cette catégorie. L'approche par modules d'apprentissages, très répandue, propose des situations problèmes ou des séquences d'enseignement, s'étendant plus ou moins dans la durée, basées sur l'histoire autour d'un sujet mathématique précis. Il s'agit d'opportunités précises dans l'histoire qui sont étayées mathématiquement et didactiquement et qui peuvent inclure l'utilisation de sources primaires ou secondaires, la lecture de textes historiques, l'élaboration de projets recherches par les étudiants, etc. Quant à l'approche historique intégrée, elle s'inspire ou se base sur les développements historiques de l'objet mathématique étudié pour l'élaboration d'une séquence complète d'enseignement. De façon directe ou indirecte, l'histoire se retrouve dans la classe de mathématiques au travers des stratégies adoptées par l'enseignant, de son attitude face à la présentation des sujets d'études, des questions soulevées à partir du contexte historique ou de l'enchaînement des concepts abordés. Essentiellement, cette troisième catégorie regroupe l'ensemble des pratiques basées sur la très connue approche génétique issue des travaux de Toeplitz (1963) et plus tard remise au goût du jour par Freudenthal (1991). Pour une profonde analyse de cette approche voir Schubring (1978). Dans son article, Jankvist (2009c, p. 245-247) dresse une liste importante de travaux associés à chacune de ces catégories.

La question du « pourquoi » est quant à elle divisée en deux catégories liées à deux visions particulières et distinctes de l'utilisation de l'histoire. Celle-ci peut être perçue comme un outil motivationnel ou cognitif pouvant venir en aide ou accompagner l'enseignement ou l'apprentissage des mathématiques. Les facteurs motivationnels, l'humanisation des mathématiques, le support cognitif pour l'élève, l'approfondissement épistémologique et didactique de la réflexion de l'enseignant sur la matière, l'accès à des problèmes variés et enrichissants ou la réflexion didactique autour d'obstacles épistémologiques précis sont des arguments associés à cette perception de l'histoire comme un outil. D'un autre côté, un certain type de discours clame que l'enseignement de l'histoire des mathématiques en tant que telle apporte à l'apprentissage des mathématiques dans le sens où elle nous apprend ce que sont les mathématiques. Jankvist n'hésite pas à parler de l'apprentissage de « l'esprit » des mathématiques au travers de l'histoire des mathématiques (2009c, p. 239). Dans ce sens, l'histoire des mathématiques est perçue comme un objectif en soi. Montrer que les mathématiques existent et sont en constante évolution dans le temps et dans l'espace, qu'elles ne descendent pas du ciel, qu'elles sont une activité humaine arborant de multiples facettes au gré des cultures, des sociétés et de l'histoire, et que leur évolution est issue de motivations intrinsèques et extrinsèques animant les mathématiciens dans leur époque sont des visées qui relèvent d'une vision de l'histoire perçue comme un objectif en soi. D'une certaine façon, on peut classer les études portant sur l'histoire des mathématiques en observant l'intention pédagogique de l'activité d'apprentissage proposée. Si l'intention concerne plus spécifiquement l'objet mathématique, les arguments seront associés à l'histoire perçue comme un outil. Si l'intention concerne principalement des réflexions métamathématiques (les aspects « méta » des mathématiques), les arguments seront alors associés à l'histoire perçue comme un objectif en soi. Mais, certaines approches s'agencent-elles mieux avec un type particulier d'objectifs ? Autrement dit, y a-t-il des agencements plus efficaces que d'autres entre méthodes et arguments concernant l'utilisation de l'histoire ? Jankvist (2009c, p. 251) mentionne qu'il n'y a pas de recette miracle et que l'ensemble des agencements

argument/méthode sont possibles. Cependant, il souligne que certaines catégories de « comment » et de « pourquoi » s'agencent plus naturellement. Par exemple, l'approche anecdotique se rapproche plutôt de l'histoire perçue comme un outil. En effet, il serait difficile de s'engager dans des réflexions métamathématiques profondes à partir de simples capsules historiques ou d'anecdotes ponctuelles. Pour rencontrer les visées d'une activité à travers laquelle l'histoire est perçue comme un objectif en soi, il serait préférable d'opter pour l'approche par modules permettant un certain ancrage des réflexions métamathématiques à l'objet mathématique même. Pour une étude plus poussée de ces interrelations argument/méthode, on peut consulter Jankvist (2009c, p. 251-252).

4. Difficultés et réticences

Les réticences quant à l'utilisation de l'histoire sont nombreuses. Deux aspects des critiques se profilent. D'une part, plusieurs auteurs ne semblent pas accorder une réelle importance à son introduction en classe et, d'autre part, certains y voient de nombreuses possibilités, mais redoutent les difficultés liées à son utilisation. Fried, dans une importante série d'articles (Fried, 2001 ; 2007 ; 2008), discute en profondeur de ces deux aspects. Il met d'abord en relief la difficulté de traiter convenablement de l'histoire en classe de mathématiques. Très souvent l'histoire prend la forme d'anecdotes et de capsules historiques qu'il voit d'un très mauvais œil. Déjà, au milieu des années 90, LeGoff (1994) critiquait l'introduction d'une histoire plaquée formant un écran devant les mathématiques. Fried, lui, y voit le risque d'une dénaturation de l'histoire, celle-ci pouvant être contaminée par la vision moderne des mathématiques qui écrase l'historicité des concepts et aseptise la lecture. Les risques d'anachronisme et de lectures faussement progressives de l'histoire contaminée par le présent sont fort probables. Il souhaite que l'histoire soit prise au sérieux et que son étude soit prudente et attentive. Il propose les approches d'« accommodation radicale » et de « séparation radicale ». Radicales, car elles doivent viser la réflexion profonde de ce que sont les mathématiques (ce qui sous-entend une perception de l'histoire comme un objectif en soi au sens de Jankvist). L'étude des mathématiques d'une époque donnée doit s'accommoder en symbiose ou se séparer carrément du contenu mathématique moderne enseigné. Mais, ne risquons-nous pas d'entrer dans l'étude de l'histoire en tant que telle et de nous éloigner des objectifs immédiats de l'enseignant ? L'histoire et les mathématiques sont-elles finalement conciliables ? Qu'en est-il maintenant de la pertinence de l'histoire, devrait-elle rester à sa place ? Avec une telle accommodation ou séparation, est-il maintenant illusoire de penser introduire l'histoire avec un temps de classe limité ?

Fried répond (2007) à ces critiques soulevées par Nooney (2002) en précisant le rôle de l'enseignant. Il souligne que la lecture d'un document historique est différente pour le mathématicien et pour l'historien. L'objectif de l'historien est de se plonger dans l'époque du mathématicien, de percevoir les idiosyncrasies de ce dernier et de situer l'ouvrage dans un continuum de développement des mathématiques. Le regard du mathématicien tente de décoder les symboles désuets, de les restituer au langage moderne et de saisir l'aspect mathématique des propos de l'auteur. Il qualifie de diachronique la lecture de l'historien et de synchronique la lecture du mathématicien, termes qu'il emprunte au linguiste et sémiologue Ferdinand de Saussure. Fried affirme que connaître véritablement un concept mathématique

est le connaître synchroniquement, c'est-à-dire en considérant sa situation à l'intérieur du système de concepts mathématiques actuel, et le connaître diachroniquement, c'est-à-dire en considérant son historicité, son évolution dans le temps et l'espace. Selon lui, la lecture synchronique des objets mathématiques est trop souvent renforcée par les enseignants et les mathématiciens. Aussi, le rôle de l'enseignant serait-il précisément de faire basculer l'élève constamment entre ces deux visions. C'est ce travail de va-et-vient continu qui doit faire émerger, chez l'apprenant, une certaine conscience de ses propres conceptions des mathématiques, de son individualité face à la matière et de la possibilité pour lui la confronter de façon constructive avec celles des autres. Dans ce sens, Fried tente de répondre à la question de la pertinence de l'utilisation de l'histoire en classe.

Le travail le plus exhaustif quant aux critiques liées à l'utilisation de l'histoire est sans doute celui de Siu (2007), dans lequel il dresse la liste d'une quinzaine de facteurs qui s'avèrent être les raisons les plus fréquemment invoquées pour ne pas utiliser l'histoire en classe. Ces facteurs exprimés sous forme de questions ou d'exclamations, comme celles qui seraient posées par les enseignants eux-mêmes, ont pour but de ramener le chercheur sur Terre et de lui permettre de voir plus clairement les problématiques et inquiétudes du milieu scolaire. D'une certaine façon, il vise à mettre en garde les chercheurs par rapport à leur possible trop plein d'enthousiasme et il les charge d'être à l'écoute des enseignants. Ainsi, ces derniers n'adhèrent pas toujours aux arguments liés à l'histoire perçue comme un objectif en soi et clament que « l'histoire ce n'est pas vraiment des mathématiques », qu'« il est déjà difficile dans le temps qui nous est imparti de couvrir les notions prévues » ou qu'« il est ridicule de regarder en arrière quand il faut constamment progresser avec les élèves ». Quant aux arguments liés à l'histoire perçue comme un outil, plusieurs mentionnent que « les étudiants ne deviennent pas véritablement meilleurs en mathématiques », que « les étudiants n'aiment pas l'histoire en général », que « cela risque de rendre la matière encore plus complexe à leurs yeux », que « l'étude de textes originaux est trop difficile » ou que « les étudiants n'ont pas encore assez de culture générale pour apprécier ce genre d'activité ».

Les réticences associées aux méthodes d'utilisation et à l'implémentation en classe sont aussi très nombreuses. Entre autres, les enseignants se plaignent du manque de ressources et de formations et questionnent leurs propres capacités à aborder adéquatement l'aspect historique des notions enseignées. Craignant de faire paraître un certain chauvinisme culturel ou de teindre leur discours d'un aspect nationaliste, plusieurs évitent débats et réflexions autour de l'aspect socioculturel des mathématiques. D'autres jugent difficile, voire impossible, d'évaluer les compétences de leurs étudiants en ce qui concerne l'aspect historique des notions abordées. Ces critiques, toutes plus ou moins discutées dans la littérature, sont issues du milieu de l'enseignement et relèvent, à notre avis, du « comment » de l'utilisation de l'histoire.

Enfin, Siu relève un 16^e et ultime argument en posant la question : « Existe-t-il de véritables évidences empiriques montrant un meilleur apprentissage chez les étudiants lorsque l'histoire des mathématiques est introduite dans la classe? ». Bien entendu, cette question interpelle de façon directe le chercheur et en soulève de nombreuses autres concernant le statut de la recherche empirique dans le secteur.

5. Les études empiriques

Le 16e argument de Siu basé sur le manque d'études empiriques dans le secteur de recherche est rapporté par bon nombre de chercheurs depuis plusieurs années (Barbin, 2000 ; Gulikers & Blom, 2001 ; Lederman, 2003 ; Jankvist, 2009b ; 2010). Il semble être difficile de discuter, par l'expérimentation et l'analyse systématique de données, du discours théorique concernant l'histoire et l'enseignement des mathématiques. Sur ces difficultés du point de vue de la recherche, Rogers (1993) soulignait l'impossibilité d'évaluer, au travers des résultats académiques des apprenants, l'atteinte des objectifs associés à l'introduction de l'histoire. Il serait intéressant, dans le cadre du renouveau pédagogique en cours et suite au courant d'humanisation des curriculums, de reconsidérer aujourd'hui cette affirmation. De plus, avec le travail de catégorisation du « pourquoi » et du « comment » entrepris lors de la dernière décennie, les objectifs poursuivis ont été répertoriés et clarifiés. Il serait donc envisageable de revoir les contextes de recherche dans lesquels les résultats académiques des étudiants pourraient être utilisés. Pour Barbin (2000), la compréhension ou l'intérêt d'un étudiant face à une notion ne peuvent être appréciés que de manière qualitative. L'approche quantitative lui apparaît encore moins efficace lorsque l'histoire est utilisée de manière globale, lorsque l'histoire est perçue comme un objectif en soi au sens de Jankvist. Les tentatives auraient toutes échoué au point de vue méthodologique.

De telles affirmations laissent paraître des particularités méthodologiques, du point de vue de la recherche, selon les objectifs poursuivis par l'utilisation de l'histoire, ce qui nous amène au cœur du sujet de ce texte. Dans sa thèse de doctorat, Jankvist (2009a) tente de recenser, pour une période allant de 1998 à 2009, l'ensemble des études empiriques parues dans *ESM*, *FLM*, *MJRME*, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)*, thèses, conférences et actes de colloques concernant l'utilisation de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques. Il entend par études empiriques, les recherches allant de la petite étude qualitative à la grande étude quantitative qui, par l'expérimentation et l'emploi de tests, questionnaires, entrevues ou d'une méthodologie quelconque, discutent et élaborent des conclusions à partir de données recueillies sur le terrain. En parcourant la littérature, il n'a sélectionné que les études qui présentaient d'une manière ou d'une autre des données empiriques sur lesquelles les auteurs appuyaient leurs remarques et conclusions. Il en a trouvé 81, dont seulement six d'entre elles concernent l'histoire comme un objectif en soi. Il s'agit des études de Demattè & Furinghetti (1999), Isaacs, Ram, & Richards (2000), Greenwald (2005) Demattè (2007), Smestad (2007) et Kjeldsen & Blomhøj (2009). Selon Jankvist, le nombre restreint d'études empiriques proposant l'histoire comme un objectif en soi s'expliquerait par la difficile tâche d'évaluer l'efficacité de son introduction. Ces difficultés seraient avant tout d'ordre méthodologique. Il souligne, dans ce sens, qu'à travers les 78 études paraissant dans le *Proceedings HPM2004 & ESU4* seulement 10 % d'entre elles environ sont des études empiriques (percevant l'histoire comme un outil ou comme un objectif en soi) et que ces dernières ne concernent pas toutes l'évaluation de l'efficacité de la démarche proposée (Jankvist, 2007). Depuis trois ou quatre ans, il remarque, tout de même, une recrudescence du nombre de ces études, ce qui indique, selon lui, une certaine prise de conscience dans le secteur de recherches.

Nous proposons donc de jeter un regard plus approfondi sur le cadre méthodologique employé dans chacune de ces études empiriques portant sur l'efficacité de l'utilisation de l'histoire

perçue comme un objectif en soi. À la liste des six études mentionnées plus haut, nous ajoutons le travail de Jankvist (2010) parue par la suite. Nous tenterons d'observer et d'analyser plus en profondeur les méthodologies employées pour cerner clairement les difficultés rencontrées par les chercheurs. Ainsi, nous espérons dégager les éléments d'une stratégie de recherche pour d'éventuels travaux dans ce secteur.

6. Regard méthodologique sur quelques études empiriques

Demattè & Furinghetti (1999)

Adriano Demattè est un professeur de mathématiques et de physiques au niveau secondaire. Cet enseignant s'est associé à Fulvia Furinghetti, professeur de didactique des mathématiques de l'Université de Gênes, afin d'enquêter sur les façons dont les élèves du secondaire développent une perception sociale et humaine de l'activité mathématique. Cette perception sociale s'articule autour de certains points particuliers : l'historicité des mathématiques évoluant dans des contextes sociohistoriques différents, l'apport des mathématiques aux sociétés, l'aspect ludique des mathématiques, les liens étroits qu'entretiennent les mathématiques avec d'autres disciplines et l'importance de la communauté pour l'apprentissage et l'évolution des connaissances en mathématiques. Ces différents points sont associés à plusieurs mythes répandus chez les élèves et discutés dans la littérature. Pour les auteurs, une lutte pour la démystification de ces éléments aurait pour objectif de créer un climat en classe de mathématiques plus favorable à la discussion, au débat et à l'exploration.

Les chercheurs ont confectionné un questionnaire de 39 questions divisées en trois catégories. Des questions se centrent sur l'historicité des mathématiques, d'autres sur l'importance de la communauté dans l'apprentissage et le développement des connaissances en mathématiques et enfin les dernières sur les processus de résolution de problèmes. L'ensemble des questions peut être divisé en 14 sous-groupes de questions. Chaque sous-groupe est constitué d'une à cinq questions toutes orientées autour d'un même sujet particulier. Le questionnaire a été soumis à 288 élèves de même niveau âgés d'environ 13 ans après avoir été évalué dans une classe du secondaire et validé par les enseignants associés à l'étude.

Pour l'analyse des résultats, les auteurs ont tenté de mettre en lumière l'existence d'une certaine cohérence entre les réponses des participants à l'intérieur d'un même sous-groupe de questions. Pour chaque sous-groupe de questions, une interprétation des réponses est proposée. Par exemple, on peut lire :

Question #3, 21, 31 et 32 : Ces questions suggèrent l'idée que les enseignants de mathématiques en connaissent autant (voir plus) que les mathématiciens de l'Antiquité. Les réponses des étudiants montrent une incertitude de leur part à cet égard. Cependant, les étudiants soulignent que les compétences des enseignants en résolution de problèmes sont sans doute plus développées. (p. 42)

L'ensemble de ces commentaires sur chacun des sous-groupes de question a mené à la description d'un élève typique et représentatif du groupe. Cet élève virtuel censé porter les croyances et les perceptions généralement admises par les élèves du groupe d'âge s'adresse au

lecteur dans la partie finale de l'article. La description qu'il donne de lui-même constitue les conclusions de l'étude sur les perceptions des aspects sociaux et humains de l'activité mathématique des élèves du secondaire. Ainsi, les auteurs souhaitent fournir aux enseignants du secondaire un portrait global de leurs élèves autour de ces aspects pour faciliter la création d'un environnement d'apprentissage ouvert au débat, à la discussion et à l'exploration.

Isaacs, Ram, & Richards (2000)

L'expérimentation proposée dans cette étude visait à modifier les perceptions que les étudiants de première année en enseignement au primaire entretiennent sur les mathématiques. À l'Université des Territoire-du-Nord (NTU) en Australie, les futurs enseignants de l'école primaire montrent de nombreuses lacunes concernant le contenu mathématique du niveau secondaire et entretiennent, en plus, un rapport souvent négatif aux mathématiques en général. Par exemple, celles-ci sont perçues comme n'ayant de l'utilité qu'en matière d'économie et se réduiraient qu'à des calculs comptables. Le fait qu'il n'existe qu'une seule bonne façon de résoudre un problème et que l'algèbre et la géométrie soient inutiles dans la vie de tous les jours sont aussi des exemples de croyances généralement entretenues par ces étudiants.

Pour tenter de faire évoluer ces perceptions négatives et réductrices de la nature et de l'objet des mathématiques, les chercheurs ont introduit un module d'enseignement lors de la première année du programme de baccalauréat en enseignement au primaire de l'université. Ce module, intitulé « L'origine culturelle des mathématiques », devait mettre l'accent sur l'influence des aspects sociaux et culturels dans le développement historique des mathématiques élémentaires. L'objectif était de fournir aux étudiants une vision plus large et enrichie de la place que les mathématiques ont occupée dans différentes cultures et sociétés depuis plus de 5000 ans jusqu'à aujourd'hui. Les professeurs responsables du module devaient mettre en relief les différentes façons d'aborder et de décrire certains concepts et notions de géométrie de base en Chine, en Inde, en Égypte et en Grèce à différentes époques. Le module d'enseignement s'étendait sur deux semestres d'études et était dispensé par les professeurs de mathématiques du département en question.

Les étudiants participants ont abordé cinq thèmes précis lors du module d'enseignement; 1) la géométrie comme outils de résolution de problèmes concrets, 2) la géométrie comme médium esthétique, 3) les aspects mythologiques, mystiques et rituels de certaines constructions géométriques, 4) la mesure comme introduction aux nombres irrationnels et 5) les justifications et la logique de la preuve en géométrie. Pour chacun de ces thèmes, une série d'activités soulignant les variabilités interculturelles et l'historicité des concepts et méthodes était proposée. Le texte ne mentionne pas si les professeurs responsables du module ont participé à l'élaboration de ces activités.

À la fin des deux semestres de cours, les étudiants ont été évalués selon plusieurs modalités. D'abord, ils devaient présenter oralement un article de revue scientifique touchant un ou plusieurs thèmes abordés lors du module d'enseignement. Aussi, ils devaient tenir un journal de bord tout au long des deux semestres. Enfin, un examen écrit a eu lieu à la fin du module en lien avec les sujets abordés. Les chercheurs se sont penchés plus spécifiquement sur le journal de bord. Ce dernier devait contenir les productions des étudiants pour chacune des

activités, leurs réactions face aux cours et aux activités et leurs réflexions sur la nature et la pertinence de l'activité mathématique en général. Les chercheurs ont aussi recueilli un questionnaire administré aux étudiants de la cohorte à la fin des deux semestres. Ce questionnaire avait pour but de sonder les perceptions des étudiants sur la nature des mathématiques et de l'apport des mathématiques dans l'évolution des sociétés. Les journaux et les réponses aux questionnaires ont constitué les données de l'étude. Le texte ne mentionne pas le nombre de participants

À travers les réflexions des étudiants contenues dans leur journal de bord tout au long du module, les auteurs ont relevé que près du tiers d'entre eux soulignaient le manque de pertinence des activités proposées dans leur formation par rapport à leur futur rôle d'enseignant au primaire. Les chercheurs ont souligné certains passages des journaux des étudiants pour illustrer les réactions typiques des participants. Concernant les réflexions sur la nature et la pertinence des mathématiques, 33 % des étudiants n'ont pas fait de commentaires clairs et directs.

À la fin du module, les réponses aux questionnaires montrent que 35 % d'entre eux ne croient toujours pas à la pertinence des activités proposées par rapport à celles qui sont abordées dans les classes au niveau primaire, 23 % sont plutôt indécis et 42 % d'entre eux y ont vu clairement de la pertinence. De plus, une majorité (57 %) pense que le module d'enseignement basé sur l'histoire des mathématiques leur aura permis de changer leurs perceptions et attitudes face aux mathématiques. D'autre part, 25 % des étudiants se sont dits indécis et 18 % n'ont pas vu leurs perceptions et attitudes évoluer.

Enfin, les professeurs chargés du module d'enseignement ont souligné que beaucoup de travail restait à faire pour la grande majorité des étudiants. Ils mentionnent aussi que l'accent aurait pu être mis aussi sur le besoin des enseignants du primaire d'entretenir une vision plus profonde et riche des mathématiques que leurs élèves. Pour un futur module d'enseignement, les liens avec les sujets abordés au primaire devront, selon eux, être renforcés.

Greenwald (2005)

Dans cet article, Sarah Greenwald, professeure de mathématiques à l'Appalachian State University en Caroline du Nord, décrit une activité d'apprentissage qu'elle a expérimentée dans le cadre de trois cours de mathématiques de niveau universitaire. Cette activité visait à sensibiliser les étudiants aux accomplissements des femmes et des membres de minorités ethniques en mathématiques. D'autre part, elle visait l'identification des étudiants à des personnalités accomplies œuvrant dans le domaine. Cette identification devait permettre à tous (femmes et membres de minorités ethniques inclus) de s'inspirer de modèle et de comprendre l'importance des mentors pour se construire une identité en tant que mathématiciens ou professeurs de mathématiques. Dans un cadre plus large, cette mise en relief des accomplissements des femmes et des membres des minorités ethniques visait à faire en sorte que les étudiants universitaires perçoivent les mathématiques comme une discipline pour tous et toutes qui transcende les cultures et les époques.

Plus précisément, l'activité consistait à effectuer un projet recherche en équipes de deux

étudiants sur l'apport des femmes ou des membres de minorités ethniques en mathématiques. Des sujets précis, selon le cours dans lequel l'activité était menée, étaient fournis aux étudiants. Un exposé oral et un texte écrit devaient être présentés à l'ensemble du groupe. De plus, les équipes devaient construire un test (sous forme de jeu-questionnaire) portant sur les aspects biographiques et mathématiques de leur présentation. Ce test était effectué à la fin du cours par les autres étudiants du groupe et avait pour but l'écoute active et l'implication des étudiants au cours. L'activité a été expérimentée dans le cadre de trois cours différents; un cours d'introduction aux mathématiques, un cours d'algèbre moderne et un séminaire à la maîtrise portant sur les femmes et les minorités ethniques en mathématiques.

C'est à travers les productions de ses étudiants que l'auteur tente de montrer l'efficacité de l'activité proposée. Pour chacun des cours, de nombreux et longs extraits de travaux écrits des étudiants sont présentés et commentés. Cette analyse qualitative se fait sans véritable cadre méthodologique précis d'observations. À plusieurs reprises, l'enthousiasme des participants est souligné. Certains commentaires laissent entendre que les activités ont contribué à forger l'identité de quelques étudiants du cours, d'autres que leurs perceptions de ce que sont les mathématiques et du travail du mathématicien ont évolué et se sont enrichies. Or, l'étude ne mentionne pas le nombre de participants et la chercheuse n'utilise aucune forme d'analyse réflexive afin de confirmer ou d'infirmer les observations.

Enfin, l'auteur termine en mentionnant que les activités portant sur les accomplissements des femmes et des membres de minorités ethniques en mathématiques fournissent un environnement mathématique particulièrement riche afin d'observer les croyances et perceptions des étudiants sur ce que sont les mathématiques et sur les gens qui en font. Cependant, elle rappelle la difficulté de trouver des ressources intéressantes, car les femmes et les membres de minorités ethniques en mathématiques ont généralement vécu lors des 200 dernières années.

Demattè (2007)

Dans cet article, l'auteur examine les perceptions des élèves de niveau secondaire (15-16 ans) quant aux développements des mathématiques dans l'histoire. Il tente d'observer les apprentissages et les réactions des élèves suite à plusieurs activités en classe où l'histoire des mathématiques prend une place importante. Aussi, Demattè cherche à montrer que l'utilisation de l'histoire est l'occasion de développer les compétences des élèves dans plusieurs champs disciplinaires à la fois. Les activités d'apprentissages proposées aux 60 élèves participantes revêtaient un aspect interdisciplinaire et les réflexions qui en émergeaient devaient toucher à des thèmes comme la linguistique, l'histoire au sens large, l'économie ou encore la sociologie. Par exemple, les élèves étaient amenées à discuter de l'évolution du langage algébrique passant des mots, aux abréviations et aux symboles ou du contexte sociohistorique de la vie de certains mathématiciens. De plus, une partie de ces activités abordait plus précisément des éléments mathématiques, comme par exemple l'analyse des méthodes de soustraction présentées dans le Liber abaci de Fibonacci. Ces activités ont été construites en collaboration avec les enseignants des élèves en question.

Quelques mois après l'expérimentation de ces activités, un questionnaire a été soumis à

l'ensemble des élèves. Ce questionnaire visait à reconnaître les idées que les étudiants participantes ont développées quant à la nature des mathématiques et les difficultés rencontrées lors des activités. Le questionnaire, présenté en entier dans l'article, prenait l'aspect d'une évaluation des éléments mathématiques et historiques présentés en classe. Ainsi, plusieurs questions nécessitaient l'interprétation de sources originales ou la production et la validation de différentes conjectures.

Aucune analyse statistique des réponses n'a été faite. L'auteur se contente de commenter certains aspects des résultats qui lui apparaissent significatifs. Il souligne les difficultés des élèves à reconnaître un concept bien connu, comme celui du système de numération décimale, dans un contexte autre que le cadre mathématique habituel. Or, il suggère que l'histoire des mathématiques se doit justement de présenter les notions dans des contextes différents. Ces contextes variés amèneraient une mise en relief du raisonnement en montrant l'aspect évolutif ou culturel de la forme. Outre cette accentuation du raisonnement, l'histoire placerait les mathématiques dans un contexte interdisciplinaire. Ce parcours de différentes disciplines à travers l'histoire des mathématiques serait lié à un processus d'humanisation des mathématiques.

Smestad (2007)

En mars 2003 paraissaient les résultats d'une importante étude américaine appelée Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS). Cette étude à grande échelle, reprise tous les quatre ans, a pour but de comparer les résultats en sciences et en mathématiques des élèves américains de 4^e et de 8^e année avec ceux des élèves provenant de 60 autres pays. Elle fournit une évaluation du rendement des élèves, mais questionne aussi les pratiques des enseignants en mathématiques et en sciences de partout dans le monde. Ainsi, Smestad a ciblé une partie de l'étude qui regroupe 638 leçons filmées en classe de mathématiques de niveau secondaire. Ces leçons proviennent de sept différents pays participants : l'Australie, la République Tchèque, la région administrative de Hong Kong, le Japon, la Hollande, la Suisse et les États-Unis. L'ensemble de ces leçons a été transcrit et codé par un laboratoire de recherche américain. Cet énorme travail de retranscription a été rendu disponible à l'ensemble de la communauté de recherche en Éducation aux États-Unis.

Dans cet article, Smestad s'est intéressé à la présence d'éléments relatifs à l'histoire des mathématiques dans ces leçons. Il a relevé l'item « historical background » de la liste de codes utilisée pour l'analyse des leçons par le laboratoire. Ce code signalait la présence d'un lien effectué par l'enseignant ou l'élève entre la notion mathématique abordée dans la leçon et son contexte historique. Le chercheur a analysé les vidéos et les retranscriptions des leçons pour lesquelles ce code apparaissait afin de connaître plus précisément la teneur des propos des enseignants et des élèves sur l'histoire des mathématiques. D'une part, l'auteur cherche à connaître de quelles façons l'histoire est introduite dans le cours de mathématiques et, d'autre part, à identifier le rôle que celle-ci joue dans la leçon.

Sur les 628 leçons analysées, seulement 21 (environ 3 %) faisaient référence au contexte historique du sujet abordé. Ce si petit nombre d'occurrences ne permettait évidemment pas que conclure quoi que ce soit sur de possibles variabilités entre les pays participants. Plusieurs

thèmes ont été abordés dans ces leçons. Neuf d'entre elles portaient sur le théorème de Pythagore, trois sur Thalès, deux sur l'Égypte ancienne et les sujets suivants ont été traités à l'intérieur d'une seule leçon : Euler, Goldbach, Platon, Euclide, Descartes, Venn, Henry Perigal, Léonardo Fibonacci, James Garfield, les tours de Hanoï, les rectangles d'or, la technique de multiplication égyptienne, la technique de multiplication canadienne et les approximations de π . Concernant le théorème de Pythagore, une leçon se démarquait des autres, car les aspects historiques occupaient plus des deux tiers de la durée de la leçon. Une autre leçon abordant les travaux du mathématicien Euler se démarquait par sa richesse et la présence importante de réflexions autour de l'historicité des notions abordées. Cependant, sauf ces exceptions, la présence de l'histoire des mathématiques ne prend la forme que d'anecdotes et se contente de souligner des noms de mathématiciens et de décrire de brefs éléments biographiques.

En ce qui concerne le rôle joué par l'histoire, l'auteur souligne que les anecdotes présentées aident parfois à comprendre les notions lorsqu'il existe un certain ancrage des éléments mathématiques aux éléments historiques des notions. Autrement dit, les faits historiques rapportés dans les leçons visent souvent à présenter les notions sous différents aspects pour en faciliter la compréhension. Il en va de même pour les méthodes de calculs anciennes qui sont étayées afin de faire réfléchir l'élève sur ses propres outils de calcul. Enfin, Smestad observe que l'histoire est plus fréquemment utilisée afin de changer l'attitude des élèves face aux mathématiques. Les enseignants soulignent le rôle que les mathématiques peuvent jouer dans l'évolution de société (deux leçons), que les difficultés sont inhérentes à toute forme de développement des sciences (une leçon) ou que les concepts mathématiques ont une historicité et prennent des formes différentes selon les cultures et les époques (trois leçons).

En conclusion, Smestad note un manque d'ancrage important des éléments historiques présents dans les leçons à l'intérieur des notions mathématiques abordées. Il ne semble pas y avoir assez souvent de lien entre les aspects historiques du cours (plutôt anecdotiques ou biographiques) et les concepts mathématiques étudiés. En plus d'apparaître rarement, l'histoire se révèle, dans la grande majorité des cas, isolée du reste de la leçon.

Kjeldsen & Blomhøj (2009)

À l'Université de Roskilde au Danemark, les étudiants de mathématiques et de physique doivent suivre une formation initiale de deux ans proposée comme tronc commun en sciences naturelles. Lors de chacun des quatre semestres d'étude, les étudiants complètent la moitié de leurs crédits universitaires à partir de deux cours de sciences ou de mathématiques au choix. L'autre moitié du temps d'étude est consacrée à l'élaboration de projets orientés vers la résolution de problèmes en équipe de quatre à sept personnes. Pour leurs projets, les thèmes choisis doivent toucher l'application et le fonctionnement des sciences à l'intérieur des sociétés (premier semestre), le lien entre théories, modèles et expérimentations en sciences (second semestre) et les aspects « méta » autour des sciences et des mathématiques (troisième semestre). Il n'y a pas de thème imposé pour le dernier semestre. Un groupe de professeurs, appelés superviseurs, encadrent les étudiants dans leurs projets, guident les équipes en difficultés et les inspirent pour le choix de leurs problématiques.

Dans leur étude, Kjeldsen & Blomhøj se sont particulièrement intéressés aux travaux des étudiants lors du troisième semestre d'étude. On peut lire ceci dans les consignes :

« Réflexions sur la nature de la science et sur la création et la diffusion des connaissances dans le champ des sciences naturelles. L'objectif du projet lors de ce troisième semestre est que les étudiants, à travers leurs travaux, se représentent la science comme un phénomène culturel et social. »

Les chercheurs ont tenté de dégager, à l'intérieur des projets construits par les étudiants, des évidences empiriques du potentiel d'une telle approche pour l'intégration de l'histoire perçue comme objectif en soi. Sans construire de devis expérimental devant répondre à des questions de recherche préétablies, ni proposer de démarche d'enseignement, ils se sont lancés dans l'analyse qualitative approfondie de trois projets d'étudiants. Mentionnons que les deux auteurs étaient professeurs invités à l'Université de Roskilde au moment de l'étude et s'occupaient de la supervision de plusieurs groupes.

Les trois projets ont été choisis pour leur qualité et pour le fait qu'ils étaient représentatifs de l'esprit du programme d'étude de l'Université. À travers les productions des étudiants, qui devaient rendre compte de leurs réflexions à l'oral et à l'écrit, Kjeldsen & Blomhøj ont évalué l'atteinte des objectifs liés à l'intégration de l'histoire comme un objectif en soi. Cette évaluation qualitative s'est faite au regard de trois critères spécifiques empruntés aux prescriptions du programme d'enseignement des mathématiques du ministère danois de l'éducation (Danish KOM-report). Ces critères étaient : les réflexions autour de l'aspect interdisciplinaire des mathématiques appliquées, les réflexions autour de l'historicité des mathématiques et les réflexions autour de la nature particulière des mathématiques.

Pour chacun des trois projets, les chercheurs ont été en mesure d'obtenir des traces de réflexions significatives et profondes autour de chacun des critères d'évaluation. Les auteurs présentent de nombreux extraits des travaux des étudiants pour appuyer leurs dires. Des exemples de productions des étudiants sont présentés pour illustrer l'atteinte de chacun des critères d'évaluation. Pour les trois projets, ils ont observé un certain encrage entre les réflexions mathématiques et métamathématiques. Ils s'assureraient, ainsi, que les aspects « méta » des travaux ne s'éloignaient pas trop des sujets mathématiques choisis.

Jankvist (2010)

Dans cette étude, Jankvist questionne les capacités des étudiants de la fin du secondaire à s'engager dans des réflexions métamathématiques. Ces réflexions sont celles touchant la nature des mathématiques comme celles reliées à leur historicité. Elles incluent les réflexions de nature épistémologique, philosophique, historique et sociologique autour des mathématiques. Jankvist explore les conditions à travers lesquelles ces réflexions métamathématiques peuvent émerger.

Un module d'enseignement a été créé en collaboration avec un enseignant de la fin du secondaire en mathématiques. Cet enseignant a accepté d'introduire ce module d'enseignement dans sa classe de 23 étudiants (17-18 ans) en mathématiques avancées. Le sujet portait sur les codes correcteurs linéaires en particulier les codes binaires de Hamming

issus de la théorie de l'information de Shannon. Cette partie de l'histoire moderne des mathématiques s'avère riche d'intrigues et soulève un questionnement quant aux mécanismes de créations des objets mathématiques, aux motivations intrinsèques et extrinsèques qui animent les mathématiciens et aux processus d'accréditation des découvertes scientifiques.

Pour l'introduction du module d'enseignement, un cahier de l'élève a été créé pour accompagner les étudiants dans l'exploration de cette partie de l'histoire moderne des mathématiques et des concepts mathématiques qui y sont associés. Dans ce cahier figurent plusieurs questions mathématiques, exercices et tâches relatifs aux mathématiques abordées lors du module (certaines de ces tâches proposent l'interprétation de documents de source originale). De plus, les étudiants devaient y faire une série de productions écrites pourtant sur les aspects « méta » des discussions en classe, c'est-à-dire sur le développement et l'évolution des codes correcteurs ainsi que de la théorie de l'information, sur l'apport de ce développement dans la société, sur les motivations qui animent les mathématiciens, et sur le crédit des découvertes accordé à certains d'entre eux. Les productions écrites se faisaient en équipes de trois à cinq personnes.

Avant l'expérimentation en classe, les étudiants participants ont été soumis à un questionnaire d'une vingtaine de questions. Des questions concernaient le développement et l'histoire des mathématiques autour des codes correcteurs et de la théorie de l'information (où, quand, comment et pourquoi les découvertes ont eu lieu), d'autres avaient un aspect sociologique (ex. pourquoi est-ce important d'apprendre les mathématiques?) et d'autres un aspect philosophique (ex. les mathématiques sont-elles construites ou découvertes?). Suite à ces questions visant à sonder les croyances et les perceptions des étudiants envers les mathématiques, une deuxième série de questions portaient sur ce qu'ils aiment plus ou moins dans l'activité mathématique, s'ils apprécient l'histoire des mathématiques et ce qu'il trouve de bon dans l'activité mathématique. Cette partie devait mettre en relief les différentes attitudes des participants face aux mathématiques.

L'analyse des réponses à ce questionnaire a permis à l'auteur de sélectionner 12 étudiants dont les profils représentaient le mieux possible les membres du groupe en général. Des entrevues ont suivi avec ces 12 personnes afin d'approfondir les thèmes abordés dans le questionnaire. Une seconde sélection a permis de déterminer cinq étudiants qui ont formé le groupe échantillon suivi et filmé lors de l'implémentation du module d'enseignement. Cinq autres groupes ont été formés par l'enseignant-collaborateur.

Les données de l'étude étaient constituées des productions de l'ensemble des étudiants confinées dans leurs cahiers, des vidéos du groupe échantillon durant l'élaboration des productions écrites et les vidéos de l'enseignante en classe lors de l'expérimentation du module d'enseignement. Aussi, le groupe a été soumis à un second questionnaire portant aussi sur les mathématiques des codes de correction linéaire, mais surtout sur les aspects « méta » des mathématiques abordés lors du module, ce qui le différenciait du premier questionnaire. De la même façon, des étudiants représentatifs ont été choisis afin d'étayer leurs réflexions lors d'entrevues individuelles. Les retranscriptions des entrevues pré et post expérimentations sont venues compléter les données de l'étude.

Le chercheur fonde ses analyses sur une triangulation des données : on entend par

triangulation des données la mise à jour d'une compréhension d'un phénomène à travers l'observation et l'interprétation de données issues de sources diversifiées (observations directes, enregistrements audio ou vidéo, productions des participants, etc.) qui concernent les réflexions des participants sur les aspects « méta » des mathématiques abordées lors du module. Les données les plus importantes pour une tentative de réponse aux questions de recherche sont les productions écrites du groupe échantillon, les vidéos du groupe échantillon en action et les réponses aux questionnaires et entretiens autour des aspects « méta » des éléments du cours.

L'attention était portée sur les changements dans le discours des participants au cours de l'expérimentation. En se basant sur la théorie de la commognition de Sfard (2008), l'auteur associe ces changements, à la réflexion et à l'apprentissage. Le mot commognition serait la contraction des mots communication et cognition, qui pour Sfard sont des processus les manifestations interpersonnelles et intrapersonnelles d'un même phénomène. C'est à travers le prisme de cette théorie que Jankvist a analysé les données de l'étude.

En premier lieu, le chercheur présente des extraits des productions écrites issues du cahier de traces des étudiants. Ces extraits sont commentés et l'auteur dégage certaines tendances et certains aspects récurrents apparaissant dans les productions des participants. Ensuite, l'article présente des extraits de la discussion du groupe échantillon (transcription de la vidéo). La dynamique du groupe et les opinions de chacun sont décrites à partir d'extraits de conversations choisies. Les réflexions sur les aspects « méta » et sur les aspects mathématiques des notions abordées sont soulignées. Chacun des membres du groupe échantillon semble entretenir une vision particulière parfois en confrontation avec celles des autres. C'est dans l'analyse de ces conflits discursifs sur les aspects « méta » que Jankvist élabore les réponses à ses questions de recherches concernant l'émergence de réflexions métamathématiques à partir d'un contexte issu de l'histoire moderne des mathématiques utilisé en classe.

7. Répertoire de cadres méthodologiques et discussion

Somme toute, il semble que la grande majorité de ces travaux reposent sur un cadre méthodologique bancal. Les outils de collecte de données sont généralement pauvres et les informations recueillies permettent rarement de tirer des conclusions solides. D'ailleurs, ces dernières sont souvent dégagées à partir de considérations s'éloignant du cadre méthodologique élaboré au départ. Celui-ci s'avère la plupart du temps trop lacunaire et inefficace dans la rencontre des objectifs de recherches des différentes études.

Dans chacun des articles, la description du milieu de l'étude n'est pas toujours détaillée. Aussi, de nombreuses informations manquent concernant les participants de l'étude et les conditions de recrutement de ces derniers. Quant aux outils de collectes de données, ceux-ci sont habituellement décrits brièvement. Nous remarquons (voir Tableau 1) que la plupart des travaux rassemblés ici ne font appel qu'à un seul outil de collecte de données. Seule l'étude de Jankvist multiplie les sources d'informations, constituant autant de points de vue permettant un travail de triangulation des observations par le chercheur. Celui-ci s'assure alors que la

description de l'évolution du sens attribué par les participants aux objets mathématiques est plausible, car corroborée par diverses perspectives.

Or, l'utilisation d'un unique outil de collecte de données limite considérablement la portée des expérimentations proposées dans les autres travaux. Particulièrement pour les études de type qualitatives comme celles discutées dans ce texte, la multiplication des sources d'observations nous apparaît nécessaire à assurer une certaine validité interne des résultats. En quelque sorte, il semble que la plupart de ces études (Damattè & Furingetthi 1999, Isaacs, Ram, & Richards 2000, Damattè 2007, Smestad 2007) aient été menées dans une perspective quantitative dont les outils associés apparaissent inadéquats aux objectifs de recherche poursuivis. En effet, les recherches en question revêtent toutes un aspect exploratoire, mais privilégient le questionnaire comme outil de collecte de données, et dans la plupart des cas employé seul. Ceci rend particulièrement difficiles une exploration inductive efficace du terrain de recherche et une évaluation lucide des retombées de l'introduction de l'histoire dans la classe de mathématiques.

Tableau 1
Répertoire des différents cadres méthodologiques.

Étude	Milieu scolaire étudié	Outils de collectes de données utilisés	Type de recherche (Qualitative / Quantitative)	Cadre d'analyse des données	Formation du chercheur
Damattè & Furingetthi (1999)	Milieu du secondaire	Questionnaire	Qualitative	—	Mathématiques
Isaacs, Ram, & Richards (2000)	Formation des enseignants au préscolaire et primaire	Journal de bord de l'élève et questionnaire	Qualitative	—	Mathématiques
Greenwald (2005)	Formation universitaire en mathématiques	Productions écrites des participants	Qualitative	—	Mathématiques
Damattè (2007)	Milieu du secondaire	Questionnaire	Qualitative	—	Mathématiques
Smestad (2007)	Milieu du secondaire	Sélection de vidéos de leçons filmées	Qualitative	—	Histoire des mathématiques
Kjeldsen & Blomhøj (2009)	Formation universitaire en mathématiques	Productions écrites des participants	Qualitative	—	Mathématiques
Jankvist (2010)	Fin du secondaire (CÉGEP)	Questionnaire, productions écrites des participants, entrevues, vidéos	Qualitative	Modèle de la <i>commognition</i> de Sfard	Didactique des mathématiques

D'autre part, nous remarquons l'absence de cadre d'analyse des données. Les liens entre les conclusions des chercheurs et les résultats de la collecte des données sont ténus dans l'ensemble des études, à l'exception de celle de Jankvist. En effet, ce dernier décrit clairement la manière à travers laquelle du sens a été attribué aux données. Il se place dans un cadre particulier d'analyse, celui de la commognition de Sfard, afin de donner du sens aux résultats et établir des conclusions en cohérence avec le cadre méthodologique employé. Dans le cas des autres études, les auteurs ne mentionnent pas explicitement leur manière de lire et de discuter les données recueillies. Ainsi, de nombreuses questions restent en suspens lors de la lecture : De quelles manières les données ont-elles été répertoriées ou classées? Comment la comparaison des réponses ou productions des participants a-t-elle été systématisée? Quelles sont les limites du cadre méthodologique employé?

8. Conclusion

Enfin, comme l'annonçait Évelyne Barbin il y a une dizaine d'années, les difficultés d'ordre méthodologique risquent de planer encore longtemps au-dessus de la tête des chercheurs s'intéressant à l'introduction de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques. Jankvist, quant à lui, dira que ce sera le cas d'autant plus si l'histoire est perçue comme un objectif en soi, cherchant à faire émerger des réflexions métamathématiques chez les apprenants. Cependant, ces difficultés et lacunes doivent être répertoriées et discutées. Il nous faut asseoir les travaux dans ce secteur sur des bases solides. L'étude de Jankvist se veut un effort remarquable pour la fondation d'une telle entreprise.

D'abord, un nombre très restreint de recherches tente d'évaluer l'efficacité de l'introduction de l'histoire perçue comme un objectif en soi. De plus, nous avons souligné des faiblesses du point de vue méthodologique dans la plupart d'entre elles. Nous avons remarqué l'utilisation d'un seul outil de collecte de données qui se veut dans la majorité des cas insuffisant et très limité, l'absence de triangulations des observations, l'absence d'une certaine systématisation de compilation et de comparaison des données et l'absence de cadre d'analyse préétabli et cohérent pour la lecture et l'interprétation des résultats de recherche. S'ajoute à ces éléments une certaine incohérence entre les choix d'ordre méthodologique et la perspective exploratoire des travaux en question. En effet, une exploration inductive efficace du terrain de recherche implique des outils méthodologiques nombreux et variés relatifs à la recherche de nature qualitative/interprétative.

Dans ce sens, nous pensons nécessaire de resituer le champ d'intérêt de l'introduction de l'histoire dans l'apprentissage des mathématiques au sein de la didactique des mathématiques et plus globalement au sein des sciences de l'Éducation. La recherche devrait pouvoir bénéficier de l'apport de cadres méthodologiques reconnus en sciences de l'Éducation. Elle devrait alors s'inspirer de cadres de travail exploratoire solides empruntés à la sociologie, l'anthropologie ou l'ethnographie, ce qui nous amènerait à la construction d'une méthodologie efficiente. Cette construction nous apparaît comme le passage obligé vers les réponses à l'ultime question de Siu : « Existe-t-il de véritables évidences empiriques montrant un meilleur apprentissage chez les étudiants lorsque l'histoire des mathématiques est introduite dans la classe? ».

Remerciements :

Je souhaite sincèrement remercier M. Louis Charbonneau, directeur du département de mathématiques de l'Université du Québec à Montréal, pour son soutien et son encadrement. Son expertise et son ouverture d'esprit m'auront permis de mener à terme l'écriture de ce texte avec rigueur et enthousiasme.

Bibliographie

- BACHELARD, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique* (Vrin.). Paris.
- BAKKER, A. (2004). *Design research in statistics education—on symbolizing and computer tools* Ph.D. Thesis, Freudenthal Institute, Utrecht University.
- BARBIN, E. (2000). Integrating history: research perspectives. In J. Fauvel & J. van Maanen, *History in mathematics education-The ICMI study* (pp. 63-90). Dordrecht: Kluwer Academic.
- BARBIN, E., STEHLÍKOVÁ, N., & TZANAKIS, C. (2007). European Summer Universities on the History and Epistemology in Mathematics Education. In F. Furinghetti, S. Kaijser, & C. Tzanakis, *Proceedings HPM2004 & ESU4 (Revised Edition)* (pp. 29-31). Uppsala: Uppsala Universitet.
- BARBIN, E., STEHLÍKOVÁ, N., & TZANAKIS, C. (2008). *History and Epistemology in Mathematics Education: Proceedings of the 5th European Summer University (ESU5)*. Plzen: Vydavatelský servis.
- BARWELL, M. (1913). The advisability of including some instruction in the school course on the history of mathematics. *The mathematical gazette*, 7, 72-79.
- BURN, B. (1998). The history of mathematics - blind alley or treasure chest? *Tangente*, 2, 10-14.
- CANTORAL, R., FASANELLI, F., GARCADIIEGO, A., STEIN, B., & TZANAKIS, C. (2008). *Proceedings of HPM2008, The satellite meeting of ICME 11*. Mexico City: HPM. CD-ROM.
- CHARBONNEAU, L. (2002). L'histoire des mathématiques peut-elle changer l'attitude des élèves face aux mathématiques? In *Comhishma-HPM* (pp. 99-120). Marrakech: École Normale Supérieure.
- CHARBONNEAU, L. (2006). Histoire des mathématiques et les nouveaux programmes au Québec: un défi de taille. In *L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés: Actes du colloque EMF*. Sherbrooke: Faculté d'éducation, Université de Sherbrooke.
- DEMATTÈ, A. (2007). A Questionnaire for Discussing the 'Strong' Role of the History of Mathematics in the Classroom. In F. Furinghetti, S. Kaijser, & C. Tzanakis, *Proceedings HPM2004 & ESU4 (revised edition)* (pp. 218-228). Uppsala: Uppsala Universitet.
- DEMATTÈ, A., & FURINGHETTI, F. (1999). An exploratory study on students' beliefs about mathematics as a socio-cultural process. In G. Philippou, *Eighth European Workshop: Research on Mathematical Beliefs – MAVI-8 Proceedings* (pp. 38-47). Nicosia: University of Cyprus.

- FAUVEL, J., & VAN MAANEN, J. (2000). *History in mathematics education-The ICMI study*. (J. Fauvel & J. van Maanen) (Kluwer Aca.). Dordrecht.
- FREUDENTHAL, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Springer.
- FRIED, M. N. (2001). Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? *Science & Education*, 10, 391-408.
- FRIED, M. N. (2007). Didactics and History of Mathematics: Knowledge and Self-Knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2), 203-223.
- FRIED, M. N. (2008). History of Mathematics in Mathematics Education : a Saussurean Perspective. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 5(2), 185-198.
- FURINGHETTI, F. (2004). History and mathematics education a look around the world with particular reference to Italy. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 3(1-2), 125-146.
- FURINGHETTI, F., KAIJSER, S., & Tzanakis, C. (2008). *Proceedings HPM2004 & ESU4 (revised edition)*. Reading. Uppsala: Uppsala Universitet.
- GREENWALD, S. (2005). Incorporating the mathematical achievements of women and minority mathematicians into classrooms. In A. Shell-Gellasch & D. Jardine, *From calculus to computers—Using the last 200 years of mathematics history in the classroom*, MAA Notes (No. 68) (pp. pp. 183-200). Washington: The Mathematical Association of America.
- GULIKERS, I., & BLOM, K. (2001). ‘A historical angle’, A survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 223-258.
- HORNG, W., & LIN, F. (2000). *Proceedings of the HPM 2000 Conference: History in Mathematics Education: Challenges for a New Millennium*. Taipei, Taiwan: Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- ISAACS, I., RAM, V. M., & RICHARDS, A. (2000). A Historical Approach to Developing the Cultural Significance of Mathematics Among First Year Preservice Primary School Teachers. In V. Katz, *Using History to Teach Mathematics – An International Perspective*, No. 51 in MAA Notes (pp. 123-128). Washington, DC: The Mathematical Association of America.
- JANKVIST, U. T. (2007). Empirical research in the field of using history in mathematics education: Review of empirical studies in HPM2004 & ESU4. *Nomad*, 12(3), 82-105.
- JANKVIST, U. T. (2009a). *Using History as a 'Goal' in Mathematics Education* Ph.D. Thesis, University of Southern Denmark.
- JANKVIST, U. T. (2009b). On empirical research in the field of using history in mathematics education. *ReLIME*, 12(1), 67-101.
- JANKVIST, U. T. (2009c). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 235-261.

- JANKVIST, U. T. (2010). An empirical study of using history as a 'goal'. *Educational Studies in Mathematics*, 74(1), 53-74.
- KJELDSEN, T. H., & BLOMHØJ, M. (2009). Integrating history and philosophy in mathematics education at university level through problem-oriented project work. *ZDM Mathematics Education*, 41(1-2), 87-103.
- KLEIN, F. (1908). *Elementar mathematik vom höheren Standpunkte aus*. Stuttgart: Leipzig.
- LEGOFF, J. (1994). Le troisième degré en second cycle : le fil d'Euler. *Repères IREM*, 17, 85-120.
- LEDERMAN, N. (2003). Is history of science stuck in the past? *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 3(4), 521-523.
- LINDSTRØM, T. (1995). *Kalkulus*. Oslo: Universitetsforlaget.
- Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport (MELS). (2003). Programme de formation de l'école québécoise: Enseignement secondaire. Québec: Les publications du Québec.
- NOONEY, K. (2002). Article Review ... A Critical Question : Why Can 't Mathematics Education and History of Mathematics Coexist ? *Mathematics Educator*, 12(1), 29-32.
- POINCARÉ, H. (1889). La Logique et L'Intuition dans la Science Mathématique et dans L'Enseignement. *L'Enseignement Mathématique*, 1, 157-162.
- PÓLYA, G. (1962). *Mathematical discovery (combined edition)* (Wiley.). New York.
- ROGERS, L. (1993). The assessment of mathematics: society, institutions, teachers and students. In *Didactics of Mathematics* (pp. 603-613). Erasmus ICP-92-G-2011/11.
- SCHUBRING, G. (1978). *Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik*. Stuttgart: Klett-Cotta.
- SCHUBRING, G. (2007). Ontogeny and phylogeny—categories for cognitive development. In F. Furinghetti, S. Kaijser, & Tzanakis, *Proceedings HPM2004 & ESU4 (revised edition)* (pp. 329-339). Uppsala: Uppsala Universitet.
- SFARD, A. (2008). *Thinking as communicating*. New York: Cambridge University Press.
- SIU, M. (2000). The ABCD of using history of mathematics in the (undergraduate) classroom. In V. Katz, *Using history to teach mathematics—an international perspective, MAA notes (Vol. 51, pp. 3–9)*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.
- SIU, M. (2007). “No, I don't use history of mathematics in my class. Why?”. In F. Furinghetti, S. Kaijser, & C. Tzanakis, *Proceedings HPM2004 & ESU4 (revised edition)* (pp. 368-382). Uppsala: Uppsala Universitet.
- SIU, M., & TZANAKIS, C. (2004). History of Mathematics in Classroom Teaching - Appetizer? Main Course? Or Dessert? *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 3(1), 5-10.

SMESTAD, B. (2007). History of mathematics in the TIMSS 1999 video study. In F. Furinghetti, S. Kaijser, & C. Tzanakis, *Proceedings HPM2004 & ESU4 (revised edition)* (pp. 278-283). Uppsala: Uppsala Universitet.

TANG, K. (2007). History of mathematics for the young educated minds: A Hong Kong reflection. In F. Furinghetti, S. Kaijser, & C. Tzanakis, *Proceedings HPM2004 & ESU4 (revised edition)* (pp. 630-638). Uppsala: Uppsala Universitet.

TOEPLITZ, O. (1927). Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, XXXVI, 88-100.

TOEPLITZ, O. (1963). *The calculus: A genetic approach*. Chicago: University of Chicago.

TZANAKIS, C. (2000). Presenting the relation between mathematics and physics on the basis of their history: A genetic approach. In V. Katz, *Using history to teach mathematics—an international perspective, MAA notes (Vol. 51, pp. 111–120)*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

TZANAKIS, C., & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel & J. van Maanen, *History in mathematics education-The ICMI Study* (pp. 201-241). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

VAN GULIK-GULIKERS, I. (2005). Meetkunde opnieuw uitgevonden—Een studie naar de waarde en de toepassing van de geschiedenis van de meetkunde in het wiskundeonderwijs Ph.D. thesis.