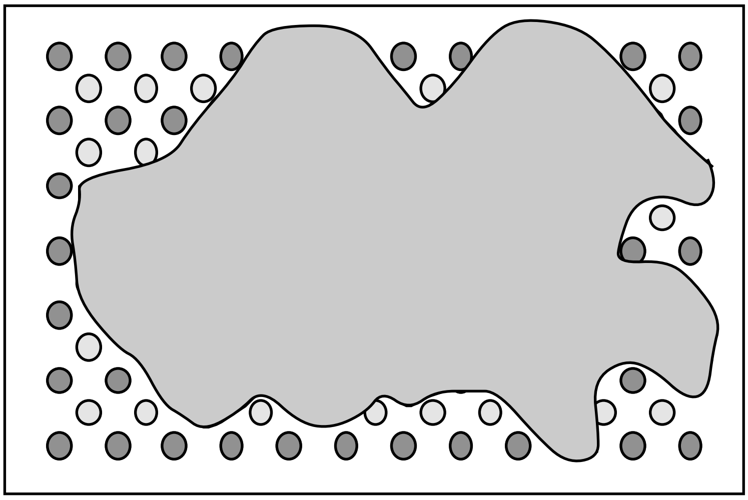
POINT DE DÉPART

LA TACHE

Toto a renversé la marmite de confiture sur la belle nappe à pois de la cuisine.

Combien y a-t-il de pois entièrement recouverts par la confiture ?

Indiquez comment vous avez trouvé votre solution.



Quelques premières réflexions sur ce point de départ figurent en pages suivantes.

Extrait de la Finale du 3ème Rallye Mathématique Transalpin (RMT)
http://www.math-armt.org/

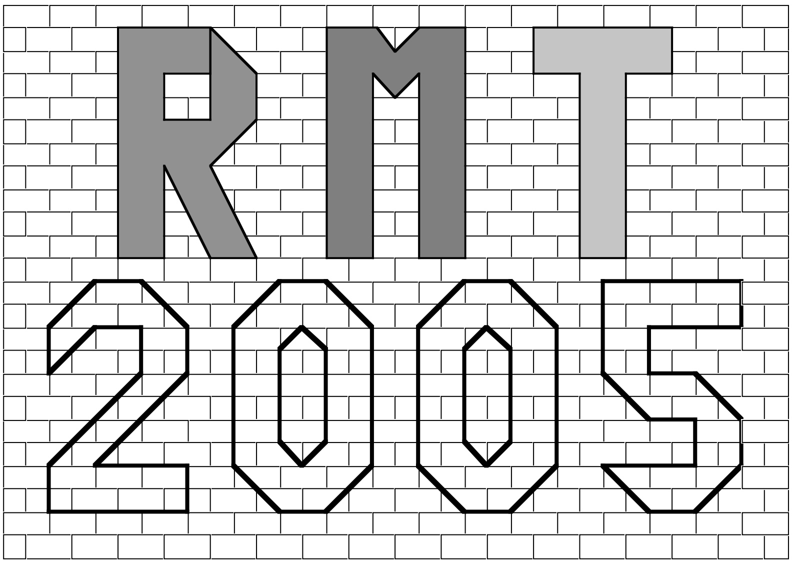
POINT DE DÉPART

RMT 2005

En 2005, les élèves d'une école qui participaient à la finale du Rallye Mathématique Transalpin ont peint sur le mur de leur école l'intérieur des lettres R, M et T. Il restait à peindre l'intérieur des quatre chiffres de 2005.

Sophie a peint le « 2 » et le premier « 0 ». Marc a peint l'autre « 0 » et le « 5 ».

Qui, de Sophie ou de Marc, a utilisé le plus de peinture ?



Quelques premières réflexions sur ce point de départ figurent en pages suivantes.

Extrait de la brochure « *Ateliers de résolution de problèmes avec matériel* »
du Rallye Mathématique Transalpin (RMT)
http://www.math-armt.org/

La Tache et RMT 2005 : premières réflexions

LA TACHE

Quels savoirs mathématiques les élèves devront-ils mettre en œuvre pour résoudre ce problème ?

Dès que l'élève a perçu les régularités des pois gris et blancs, il a le choix principalement entre deux méthodes qui mobilisent des savoirs bien différents.

Méthode 1 : le comptage un par un des pois (souvent aidé par le dessin de tous les pois) est la procédure qui apparaît le plus souvent chez les jeunes élèves, de 8 à 10 ans. Elle paraît élémentaire parce qu'elle ne fait appel qu'à un dénombrement dans le cadre arithmétique, mais les obstacles sont tels que la méthode aboutit rarement à un résultat exact. En effet, les savoirs en jeu dans cette procédure sont d'ordre géométrique : il s'agit d'être capable d'aligner les pois. Or, cet alignement n'est pas évident : il faut percevoir deux réseaux de droites perpendiculaires (ou deux quadrillages), puis les dessiner pour déterminer l'emplacement des points, aux intersections (ou aux centres des carrés). Les jeunes élèves ne disposent pas des outils nécessaires et dessinent des lignes déformées de pois qui ne conservent pas leur nombre.

Méthode 2 : une autre procédure consiste à calculer le nombre total de pois, plutôt que de les compter un à un, puis de soustraire de ce total les pois visibles. Ce calcul fait intervenir plusieurs opérations, dont la multiplication correspondant à la structure de pois disposés en lignes et colonnes régulières. Il faut distinguer clairement les deux réseaux de pois gris (7×12) et blancs (6×11), effectuer les deux multiplications, additionner les deux produits obtenus et soustraire les 48 pois visibles. Il s'agit d'une combinaison de plusieurs opérations à gérer rigoureusement pour aboutir à 102 ($84 + 66 - 48$).

Une erreur des plus fréquentes est la confusion des deux réseaux qui amène à la multiplication $13 \times 23 = 299$, puis à la réponse 251 ($299 - 48$). Une autre erreur est l'oubli des pois blancs cachés qui amène à la réponse $36 = (7 \times 12) - 48$.

La résolution de ce problème conduit donc à la mise en œuvre d'opérations arithmétiques et de leurs combinaisons ou à la construction de réseaux quadrillés. On peut encore ajouter que si cette construction de réseaux n'est pas effective pour repérer les pois, elle est nécessaire mentalement comme modèle des multiplications.

Commentaires sur la pratique du point de départ « La Tache »

Ce problème a été proposé il y a quinze ans, lors du 3ème Rallye Mathématique (encore « romand » à cette époque avant de devenir transalpin) à environ 80 classes de degrés 3 à 6 (CE2, CM1 et CM2) dans les conditions de passation habituelles : le maître est absent et la tâche de résolution est entièrement dévolue à la classe qui doit s'organiser, par groupes, pour résoudre sept problèmes donnés, en 50 minutes, et rédiger pour chacun d'eux une copie avec toutes les explications sur la procédure utilisée. Il s'est révélé assez difficile pour les élèves les plus jeunes, avec une réussite pour plus de la moitié des classes des degrés 4 et 5 (CM1-CM2).

Comme point de départ dans une pratique de classe, « La Tache » doit pouvoir conduire à une mise en commun riche par la multiplicité des procédures de résolution mises en œuvre par les élèves, individuellement ou en binômes. On y voit des potentialités d'exploitation au profit de la multiplication, de la combinaison des opérations et de leurs écritures, ainsi que dans le cadre géométrique pour le dessin des alignements d'objets.

RMT 2005

Quels savoirs mathématiques les élèves devront-ils mettre en œuvre pour résoudre ce problème ?

« RMT 2005 » se situe dans la comparaison des aires, avec une intention évidente de faire apparaître la mesure, à un niveau scolaire où ces notions sont en phase d'approche, sans encore aucun formalisme ni règle institutionnalisés. Les élèves doivent se rendre compte que la quantité de peinture dépend de la grandeur des surfaces à recouvrir et qu'il faut trouver un moyen de les comparer : par recouvrement et découpages, par pavage avec une ou plusieurs formes et, en cas d'adoption d'un pavé unité, par comptage.

Pour prendre en compte l'aire, certains élèves devront rejeter l'idée de mesurer les pourtours des chiffres à peindre (conflit aire / périmètre) ou de se contenter de compter les parties de briques (conflit nombre / aires des parties).

Parmi les unités les plus naturelles pour ce contexte, il y a la « brique » (rectangle) et la « demi-brique » (carré), mais, dans un cas comme dans l'autre, il faudra tenir compte des triangles (demi-carré) et des trapèzes (3/4 de brique ou 1 carré et demi) qu'il faudra convertir en briques ou en carrés.

Une fois l'unité choisie, et les règles d'échanges bien assimilées, il faut encore organiser le comptage de manière rigoureuse car les différentes formes qui apparaissent sont nombreuses et disposées différemment dans le « 2 » et le « 5 » qui restent à peindre.

Au passage, on peut remarquer qu'il n'est pas utile de calculer l'aire des « 0 », en faisant appel à un principe d'équivalence, encore intuitif.

Il ne reste plus alors qu'à conclure : expliquer que c'est Marc qui utilisera le plus de peinture, en disant par exemple que le « 2 » correspond à 17 briques rectangulaires alors que le « 5 » correspond à 18 de ces briques.

Indications didactiques

Le problème « RMT 2005 » a été conçu spécifiquement pour une exploitation en classe, après la passation de l'épreuve, dans la mise en place du concept de mesure d'aire et pour faire prendre conscience aux élèves de la nécessité d'une unité commune.

La réponse « *C'est Marc qui utilisera le plus de peinture* » n'a donc d'intérêt que si elle entre en conflit avec l'autre réponse attendue : « *C'est Sophie qui utilisera le plus de peinture car il y a 27 pièces dans le « 2 » et seulement 24 dans le « 5 »* ». On peut ainsi exclure les variantes d'exploitation du problème « sans intervention de l'enseignant » ou « avec une trace écrite seulement » et ne conserver que celles qui organisent une mise en commun des solutions trouvées par les élèves ou groupes d'élèves. Les expérimentations de ce problème ont montré en effet que les deux réponses « Marc » (sur la base d'assemblages des différentes parties de brique) et « Sophie » (par un simple comptage de parties) apparaissent presque toujours au sein d'une même classe, aux degrés 3 ou 4 (CE2-CM1) et même encore au degré 5 (CM2). Les tentatives de mesurage des périmètres des deux chiffres 2 et 5, bien que longues et peu précises, sont aussi fréquentes à ces niveaux, par un usage non raisonné de l'instrument qui « fonctionne » si bien pour les longueurs : la règle graduée.

POUR ALLER PLUS LOIN AVEC CES PROBLÈMES

Le lecteur pourra faire part de ses expériences à la rédaction de Grand N (revue.grandn@ujf-grenoble.fr) ou aux animateurs du RMT. Il peut se rendre sur le site www.maths-armt.org où il trouvera des commentaires plus détaillés sur ces deux problèmes et où il pourra communiquer ses impressions ou résultats sur sa pratique en classe de ces « Points de départ ».