LE RÔLE D'UN PROCESSUS DE VISUALISATION GÉOMÉTRIQUE COMPLÉMENTAIRE DU REGISTRE NUMÉRIQUE

Raquel BARRERA
Doctorante en Didactique des Mathématiques
Université Paris Diderot- Paris 7

Résumé. Cet article porte sur l'analyse et la mise en place d'une situation originale d'enseignement en quatrième dont l'objectif est de visualiser la multiplication de fractions par certaines représentations géométriques. Les analyses se focalisent sur les changements de registre avec un point de vue cognitif. Nous précisons le rôle de l'enseignant comme un guide nécessaire dans le processus de résolution.

Mots clés. Multiplication, nombres rationnels, fractions, visualisation, registres de représentations sémiotiques, changement de cadres, dévolution.

I. Introduction

La multiplication est souvent perçue comme une notion mathématique complexe, ce qui en fait « un objet de savoir à connaître » (Conne, Lemoyne, 1999, p. 145). Cette complexité apparaît dès l'introduction de la multiplication à l'école élémentaire que ce soit d'un point de vue mathématique, en termes de signification, ou d'un point de vue cognitif en termes de processus de construction du concept. Une rupture entre la multiplication des entiers naturels et la multiplication de fractions motive le fait de centrer cette étude dans ce domaine.

Notre point de départ est une hypothèse sur l'importance de concevoir des situations d'apprentissage où il existe un processus de visualisation complémentaire du registre numérique. Dans notre cas en particulier, ce processus de visualisation à l'intérieur d'une situation d'enseignement, permet de mettre en évidence des significations du concept de multiplication de fractions, significations qui peuvent être plus difficiles à acquérir en restant dans un registre numérique.

Quant à la méthodologie de cette recherche, elle consiste à la mise en place d'une situation d'enseignement conçue pour des élèves de quatrième, pour une séance d'une durée de cinquante-cinq minutes. Cette situation, qui implique des transformations sémiotiques dans le processus de résolution, nous amène à une analyse qui prendra en compte la complexité de l'activité cognitive des élèves. Plus précisément, la mise en place de notre situation implique deux types de transformation sémiotique : transformation d'une représentation sémiotique dans un même registre et transformation par conversion ou changement de système sémiotique. Notre analyse sera donc menée à partir de la théorie cognitive de Raymond Duval sur le changement de registres de représentation (Duval, 1993) et des outils disponibles dans la théorie des jeux de cadres (Douady, 1986).

En premier lieu, nous allons décrire la situation conçue et certains outils théoriques considérés pour les analyses *a priori* et *a posteriori.* Ensuite, nous présenterons l'analyse *a priori* de la situation dont nous prévoyons le travail mathématique, numérique et géométrique de l'élève. La description du processus de dévolution (Brousseau, 1998) pendant le déroulement de la séance constitue un élément fondamental en considérant la complexité du processus de changement de registre sémiotique de représentation (Duval, 2006).
Finalement, les performances des élèves et la présentation dans l'analyse *a posteriori* des travaux qu'ils ont produits pendant la séance vont nous permettre d'analyser le processus en termes de contraintes, d'interprétations et d'évolutions des connaissances tout au long du déroulement de la situation. Nous conclurons en considérant les performances des élèves et le rôle de l'enseignant comme guide et facilitateur du processus de résolution de la situation posée. Situation assez complexe et d'un niveau plus proche d'un travail d'analyse de la classe de première que des travaux de conversion récurrents en quatrième (cf. Annexe).

$$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^4+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^n\simeq\frac{1}{3}$$

COMMENT PEUT-ON VISUALISER QUE CETTE ASSERTION EST CORRECTE ?

Situation proposée aux élèves d'une classe de quatrième.

L'énoncé comporte deux éléments : une expression arithmétique-algébrique et une question. Cette expression consiste en l'« addition de puissances successives d'un quart » et la question posée demande une « vérification visuelle » de l'expression mathématique qui correspond à une série géométrique.

Explicitons deux variables didactiques importantes : la puissance n-ième et la valeur limite. Dans l'expression donnée il existe une puissance n-ième visant à montrer que si l'on ajoute encore des puissances d'un quart à la somme, la valeur sera arbitrairement proche d'un tiers. Pour vérifier les données dans l'expression arithmétique, il est prévu que les élèves calculent les premières valeurs des sommes partielles de la série et s'assurent de façon inductive que la somme s'approche d'un tiers. L'équivalent géométrique de cette assertion permet la visualisation à n puissances d'un quart (cf. Image 1). Le fait d'avoir donné le résultat limite de la somme (1/3) a le but de renforcer l'idée d'une preuve de vérité à chercher : nous ne nous intéressons pas à la recherche d'une valeur numérique, mais à une visualisation qui validera l'assertion donnée.

Cette situation met en jeu la compréhension du concept de multiplication de fractions à partir d'un changement de cadres, du numérique au géométrique. Ce changement de cadres (Douady, 1986) lié à la demande de visualisation, nous conduit à analyser l'activité mathématique de l'élève. Nous prenons en compte le déroulement de cette activité à partir des objets, notions et contenus que l'élève manipule ou qu'il utilise pendant le processus de résolution de la situation.

Nous verrons que les contenus en jeu, la multiplication de fractions et la représentation géométrique d'un produit de fractions, correspondent à des outils explicites pour la résolution du problème posé. Ces outils sont définis d'après Douady « comme les notions qu'un élève met en œuvre, en pouvant les formuler et dont il peut justifier son emploi » (Douady, 1986, p.10). Ainsi, une image mentale (Douady, 1986, p. 11) du produit des fractions permettra l'accès à la représentation géométrique. Nous allons considérer cette dernière comme une formulation différente d'un même résultat mathématique. Les élèves pourraient donc valider leur réponse à la question « Comment peut-on visualiser que cette assertion est correcte ? » en formulant des justifications que nous accepterons ou non en tant que preuve (au sens d'une explication d'un résultat d'après Balachef, 1982). La réponse va donc correspondre à la représentation géométrique d'une des significations du produit de fractions. Cette représentation sera possible en considérant que le traitement usuel des représentations fractionnaires à l'école, collège et lycée correspond effectivement à une configuration géométrique, qui est présente d'une façon unidimensionnelle (droite graduée) et/ou d'une façon bidimensionnelle (carrés, rectangles, triangles, cercle). Voir annexe.

D'un point de vue cognitif, les traitements visuels de composition et décomposition à faire sur les figures produites permettront de les unifier et de les accepter finalement comme une preuve de l'expression arithmétique-algébrique donnée : « Les traitements possibles au sein d'un registre de représentation dans le cadre géométrique, ne correspondent pas à des traitements algorithmisables » (Duval, 2006, p. 84). Dans notre cas, le traitement correspond à une séquence de figures superposées dont le résultat attendu pourrait correspondre à l'exemple ci-dessous :

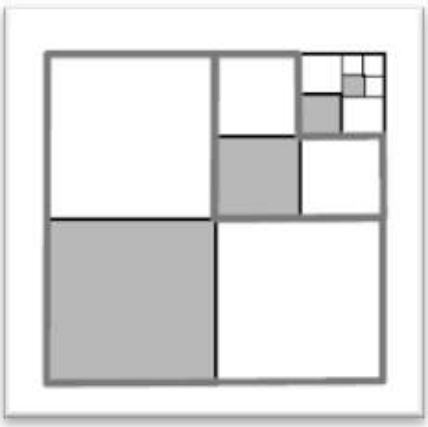


Image 1 - Exemple de réponse attendue après un processus de conversion et puis de traitement dans un registre de représentation géométrique.

Une *manipulation* géométrique de la multiplication de fractions, impossible en restant dans le cadre numérique, peut permettre aux élèves de « s'approprier » une des significations de la multiplication de fractions où les fractions sont des opérateurs. Ainsi, l'émergence des représentations géométriques, comme un mode de production non discursive, met en évidence une compréhension de la multiplication de fractions.
Finalement, l'analyse cognitive du processus nous permettra de déterminer comment s'est produite la coordination des registres de représentation sémiotiques et pourquoi cette coordination permet l'accès à la signification des contenus mathématiques.

II. Analyse *a priori* de la situation

II.1. Déroulement de la séance : dévolution et phase de recherche

La complexité de cette situation nous amène à rechercher ou à prévoir quels seront les pas à suivre par l'enseignant au moment de son déroulement. Dans ce cas, la chercheuse, en étant elle même responsable du processus de dévolution, a un double rôle. Sa connaissance de la situation lui permet non seulement d'anticiper les questions à poser aux élèves de sorte qu'ils puissent avancer dans la recherche, mais d'éviter au maximum toute sorte de déviation en dehors des réponses attendues. En d'autres termes, elle a les outils nécessaires pour orienter le travail des élèves de la manière la plus implicite possible.

Il s'agit ensuite pour nous de communiquer ces connaissances didactiques sur la situation, afin qu'elle soit transférable aux enseignants. Nous allons donc déterminer comment faire la dévolution de cette situation, pour qu'elle provoque les résultats attendus.

Tout d'abord, la séance est prévue dans un contexte de travail en groupes. Ainsi, l'échange d'idées entre pairs est possible et enrichit le processus de résolution de la situation : les élèves peuvent partager leurs connaissances. La classe sera organisée en fonction d'une *simulation d'une société de chercheurs en activité* (Douady, 1986, p. 12). Les groupes de travail seront fermés, c'est-à-dire qu'il n'y aura pas d'interaction entre eux jusqu'à la phase de bilan.

Une fois donnée la consigne, une situation de blocage est susceptible de se produire. Dans ce cas, l'enseignant pourrait suggérer des procédures initiales dans le cadre numérique (processus de traitement d'après Duval) lesquelles permettront une autre représentation de la situation initiale et pourront donc faciliter le changement de registre de représentation (cf. Traitement numérique, section II.3.1). Ensuite, préciser la signification du mot « visualisation » ainsi qu'insister sur la question « qu'est-ce qu'on voit en mathématiques ? » peuvent faire avancer le déroulement de la séance. Des réponses associées au cadre géométrique telles que la mention du terme « figures » permettront de lier les cadres géométrique et numérique. Une fois que les élèves ont compris la consigne, et plus particulièrement la signification du mot « visualisation », ils devraient s'apercevoir des limites du registre numérique en se plaçant dans un cadre géométrique.

Il convient également de réfléchir au rôle de l'enseignant comme guide de la situation, ce qui implique une prise de connaissance du travail de chaque groupe. La mise en question des procédures des élèves et le fait de souligner les mots et les moments clés pour faire évoluer la recherche d'une réponse géométrique, font partie de sa responsabilité au cours de la séance (cf. Section III.3). Ainsi, le milieu de validation des réponses obtenues sera orienté par l'enseignant puis constaté dans chaque groupe d'élèves, notamment grâce aux interactions entre pairs. Les élèves seront amenés par l'enseignant à vérifier la pertinence de leurs réponses d'une façon visuelle en faisant par exemple le lien entre la succession des quarts de la représentation graphique et les termes de la série donnée (cf. Image 2 et section III.5).

Nous prévoyons enfin une phase de mise en commun pour que les élèves partagent leurs découvertes avec toute la classe et expriment dans quelle mesure elles peuvent être considérées comme des réponses valides.

II.2. Les rapports au cognitif

Nous considérons que la compréhension d'un objet mathématique présuppose des passages entre différentes représentations (articulation de deux registres, Duval, 2006). D'après Duval, « il est essentiel, dans l'activité mathématique, soit de pouvoir mobiliser plusieurs registres de représentation sémiotiques […], soit de pouvoir choisir un registre plutôt que l'autre » et, indépendamment de toute commodité de traitement, « ce recours à plusieurs registres semble même une condition nécessaire pour que les objets mathématiques ne soient pas confondus avec leur représentations et qu'ils puissent aussi être reconnus dans chacune de leurs représentations » (Duval, 1993, p.40).

Notre contenu en jeu est la multiplication de fractions et notre objectif d'apprentissage la mise en œuvre d'une de ses significations. De ce fait, un lien entre les représentations géométriques de la multiplication de fractions et la signification de cette opération mathématique, est suggéré par l'enseignant au moment de demander aux élèves de trouver et d'expliquer une correspondance entre les différentes unités de chaque représentation. Ceci, dans la perspective de leur transférer la responsabilité d'identifier et d'établir une telle corrélation.

Quant à la correspondance entre la représentation de départ (une assertion arithmétique-algébrique) et la représentation visuelle lui « correspondant dans son contenu », elle n'est pas directe, comme le souligne Duval : « Le saut représentationnel qu'est la conversion devient un problème cognitif crucial […]. Il peut être si important que l'on recourt parfois *à une troisième représentation*, qui servira transitoirement de représentation intermédiaire, *pour expliciter comment se fait la mise en correspondance* entre le contenu de la représentation de départ et celui de la représentation d'arrivée » (Duval, 2006, p. 82).

Le processus que nous venons de décrire correspond à ce que nous décrivons dans la suite. Dans notre cas, la construction d'une seule composition figurale comme celle que nous avons présentée dans l'image 3, n'est pas évidente.
Nous proposons donc les pas suivants pour mieux comprendre ce que le changement de registre, suivi d'un traitement dans un registre multifonctionnel, implique :

1. Prendre le premier terme de la série et le représenter géométriquement : choisir une figure de départ, la partager en quatre et choisir un quart. Nous colorions le quart

choisi (la figure de départ peut être un carré, un rectangle ou un disque d'aire fixée à 1, ou bien une longueur défini comme unité conformément à ce que l'on trouve dans les manuels (cf. annexe).

2. Prendre le deuxième terme de la série. Interpréter sa signification comme « un quart d'un autre ». Puis revenir sur la figure de départ : nous choisissons un autre quart différent de celui déjà colorée et nous le partageons en quarts (nécessité de retrouver le même type d'objet qu'en 1 pour itérer le processus ce qui exclut, entres autres, les cercles). Puis nous colorions un quart d'entre ces nouveaux quarts, lequel correspond à « un quart fois un quart » (cf. Image 11). Ce point devient essentiel pour l'itération du processus).
3. Ensuite nous répétons la même opération avec les autres quarts de la figure.

Une fois ce processus fait, nous avons réussi à représenter les termes de la série. Ensuite, il faut se demander si cela correspond ou non à un tiers de l'unité. Le regard devrait donc se poser sur la figure mais en suivant les bords « remarqués » où il est possible de percevoir que c'est toujours « une parmi trois parts identiques » (celle du milieu), qui a été colorée (cf. image 2).

En bref, le point de départ de cette représentation est l'interprétation de la multiplication de fractions, donnée sous la forme de puissances. Ensuite, déterminer les représentations correspondant à chaque terme de la série, pour finalement aboutir à un « assemblage » sur une même unité : une représentation géométrique en séquence de figures superposées (cf. image 2).

$$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^4+...+\left(\frac{1}{4}\right)^n \simeq \frac{1}{3}$$

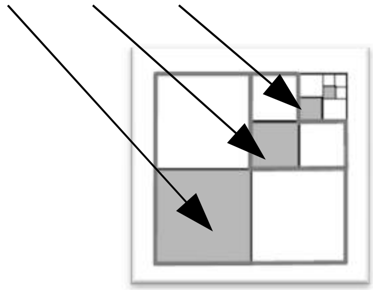


Image 2 - Une interprétation géométrique de l'expression arithmétique-algébrique donnée.

II.3. Analyse des procédures de résolution

II.3.1 Les traitements dans le cadre numérique

La représentation de départ permet un traitement immédiat et explicite en restant dans le même système sémiotique (symbolique fractionnaire), c'est-à-dire le calcul vers une autre représentation du même objet (cf. Image 2).

Le traitement numérique qui a été prévu en cas de blocage pour faire avancer la recherche (cf. Section II.1), est aussi attendu pour un besoin de vérification de l'assertion donnée, soit parce que la demande de visualiser (changement de cadre) n'a pas été comprise, soit par automatisme. Le calcul instrumenté pour vérifier l'assertion donnée est aussi possible car il fait parti des objectifs du programme : « d'entretenir et d'enrichir la pratique du calcul mental, du calcul à la main et l'utilisation raisonnée des calculatrices » (Programmes du collège, classe de quatrième, p. 28).

D'après les programmes de collège de la classe de quatrième (2007), les élèves ont la pratique de l'utilisation de la multiplication de nombres positifs en écriture décimale ou fractionnaire. Nous envisageons donc deux possibilités de traitement dans le registre numérique. La première possibilité d'une réponse écrite, tout en restant dans le domaine des fractions, est d'assigner une valeur à la puissance *n*, puis d'interpréter les puissances d'un quart comme une multiplication réitérée de fractions d'un quart :

$$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^4 \simeq \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)\simeq\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}\simeq\frac{1}{3}$$

$$\frac{85}{256}\simeq\frac{1}{3}$$

L'équivalence $\frac{85}{256}\simeq\frac{1}{3}$ peut être faite à partir de la conversion de la fraction $\frac{85}{256}$ en un nombre décimal, puis à l'interprétation du quotient comme une approximation d'un tiers.
La deuxième possibilité de traitement consiste à passer directement de l'expression fractionnaire en une expression en écriture décimale. Cette procédure inclut également le fait d'arrêter la suite de puissances d'un quart (sous forme décimale) par l'assignation d'une valeur à la puissance *n*.

$$0{,}25+(0{,}25)^2+(0{,}25)^3+(0{,}25)^4\simeq\frac{1}{3}$$

$$0{,}25+(0{,}0625)+(0{,}015625)+(0{,}00390625)\simeq\frac{1}{3}$$

$$0{,}33203125\simeq\frac{1}{3}$$

Le calcul des puissances de l'expression décimale d'un quart et la somme de tous les éléments de la suite, pourraient être instrumentés à l'aide de la calculatrice (souvent disponible au collège). La fin du calcul implique la correspondance entre l'écriture fractionnaire et décimale d'un tiers. L'obtention de la valeur 0,33203125, dont la troncature au millièmes est 0,332 montre que la somme des quatre premières puissances de 1/4 coïncide avec 1/3 avec une précision 10^{-3} (la troisième décimale est différente). Cette approximation permet de montrer que la somme partielle des termes est proche d'un tiers.

II.3.2. Les réponses attendues dans le cadre géométrique

La première réponse possible (cf. Image 3, réponse « *a* »), a été prise de « *The role of visual representations in the learning of mathematics* » (Arcavi, 2003). Dans cet article, Abraham Arcavi fait mention au livre « *Proof without words* » où nous trouvons la figure conçue par Richard Mabry (1999) pour donner un exemple sur l'importance des preuves visuelles en mathématique.

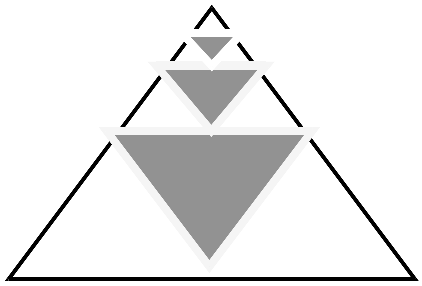


Image 3 - Réponse possible « *a* »

La figure construite en considérant des contenus et des procédures exprimés par Mabry (2009) constitue donc une preuve, au sens de Balachef. On trouve également des réponses possibles du même type (cf. Image 4, réponses b, c et d), dans l'article « *Mathematics as the art of seeing the invisible…* » (Soto-Andrade 2008).

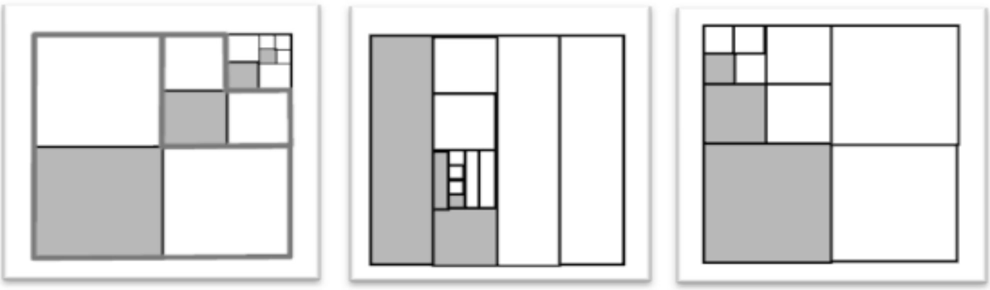


Image 4 - Réponses possibles « *b*, *c*, *d* »

En termes de registre, ces représentations ne sont pas une figure mais une séquence de figures superposées (Duval, 2009). Autrement dit, elle superpose les étapes successives du traitement figural d'une figure de départ. Ce traitement se trouve formulable en une série de consignes : « partager la figure — un carré, par exemple, qui peut être donné ou obtenu pour ce cas — en quatre carrés de même aire puis réitérez… ». En revanche, la visualisation ne sera possible que si, implicitement, les élèves distinguent le fait que le partage successif en quatre correspond à « un tiers à peu près » de l'unité de départ. L'évidence d'une telle distinction comme celle décrite ci-dessus est produite si les élèves relient la superposition des différents états dans le registre multidimensionnel avec les termes de la série. Ceci implique que, à la fin, les élèves vont « décrire » les partages figuraux de la représentation géométrique en recourant à l'écriture fractionnaire de la suite donnée.

Nous voudrions également remarquer le fait que les réponses attendues ne sont pas seulement situées dans un registre bidimensionnel. Une autre réponse possible dans le cadre géométrique correspond à une représentation dans un registre unidimensionnel (aussi travaillé au collège), ce qui, d'après Robert Adjiage, « permet […] l'expression de nombres rationnels la plus adaptée au développement de l'ensemble de compétences nécessaires à leur maîtrise » (Adjiage, 2000, p. 42).

La représentation correspondant à ce système unidimensionnel est une droite graduée comme la suivante (cf. Image 5), où la signification de la multiplication de fractions est indépendante du concept de produit en tant qu'aire. Par contre, l'idée prédominante correspond aussi à l'interprétation des facteurs comme « des opérateurs », qui vont réduire l'unité à la quatrième partie, et puis cette quatrième partie à la quatrième partie. Le résultat de chaque multiplication sera considéré comme « une partie d'une autre ».

Cette représentation correspond aussi au deuxième sens défini par Régine Douady (1986), où le premier $\frac{1}{4}$ dans la multiplication $(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4})$ prend la valeur de la fonction x → $\frac{1}{4}$ de x, pour x = $\frac{1}{4}$.

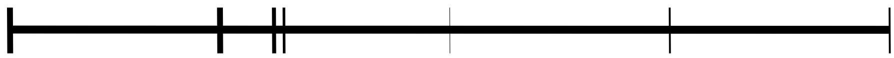


Image 5 - Réponse possible « e »

Finalement, les objets produits (des représentations géométriques) tels que des superpositions figurales (d'abord mentales puis matérielles) intègreront un processus de visualisation, qui fera de ces objets une preuve. De ce fait, il sera possible d'établir une équivalence du point de vue de la signification des représentations du même objet mathématique, dans différents registres de représentation. L'intuition, l'expérience et le raisonnement déductif s'exerceront à partir des essais de représentation de l'assertion arithmétique donnée.

III. Analyse *a posteriori* de la situation

Dans cette partie, nous allons décrire le déroulement de la séance et analyser les productions des élèves en pointant leurs performances et les interactions entre les élèves et la chercheuse. Il y a aussi certaines interactions avec l'enseignante du cours qui a aussi été présente pendant la séance. L'expérimentation a été menée avec 18 élèves d'une classe de quatrième sur les trois de l'établissement, le lundi 14 juin 2009. Cette séance était prévue pour une durée de 55 minutes.

III.1. La mise en place de la consigne

La chercheuse a écrit le problème au tableau et elle a donné aux élèves la possibilité de poser des questions pour clarifier certains points. Comme il n'y a pas eu de question, elle leur a demandé ce qu'était pour eux la visualisation, puisqu'il fallait éclaircir l'énoncé. Les réponses ont toutes tourné autour de : « voir ou regarder quelque chose à travers des figures ». La chercheuse souligne le mot « figures ».

Ensuite s'est aussi posée la question de la signification de la puissance « *n* ». La réponse « vers une puissance plus grande » émerge des élèves. La chercheuse fait remarquer que, « plus la puissance d'un quart est grande, plus la valeur de la somme est proche d'un tiers ». Les élèves n'ont donc pas la responsabilité d'interpréter l'équivalence donnée dans l'expression arithmétique-algébrique. Ils vont valider le résultat, mais nous ne leur demandons pas de fournir une valeur de vérité à l'assertion.

III.2. Temps de recherche et des interactions entre enseignant et élèves

Les deux enseignantes (enseignante du cours et chercheuse) passent entre les groupes, où la plupart des élèves ont déjà pris leur calculatrice pour vérifier que l'assertion donnée est vraie en ajoutant plus de puissances comme ils veulent. D'autres élèves effectuent aussi le calcul à la main. Le moment de réflexion autour des valeurs qui situent « *n* » beaucoup plus loin de 4, est assez riche dans certains groupes. La possibilité de ne pas avoir précisé ce fait avant, semble une variable à considérer pour une mise en place ultérieure de cette situation. Était-il nécessaire de préciser la signification de la puissance *n* par la chercheuse ? Auraient-ils également trouvé cette interprétation ? Nous voyons que les élèves ont confirmé que plus la puissance d'un quart est grande (jusqu'aux limites que la calculatrice a permis) plus le résultat est proche d'un tiers.

Par ailleurs, un des groupes discute sur la signification de la puissance « *n* » en disant que c'est la valeur de « *n* » qu'ils doivent trouver (ce qui est sans doute une influence de l'enseignement de l'algèbre). À ce moment, l'enseignante du cours intervient dans le groupe et elle reprend l'explication de la puissance « *n* » déjà donnée au tableau. Après cette intervention, les élèves continuent leur travail, mais encore centrés dans le cadre numérique. Malgré l'accent mis par la chercheuse sur le mot « figure », aucune figure n'est visible et les productions sont plutôt du type suivant :

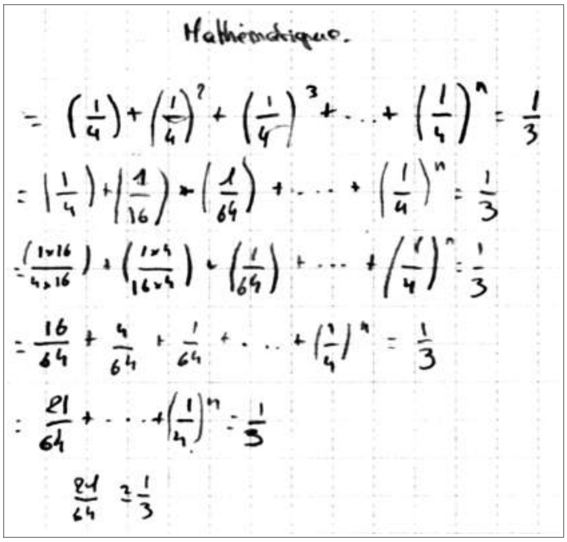


Image 6 - Début du travail des élèves. Le calcul. Groupe 2.

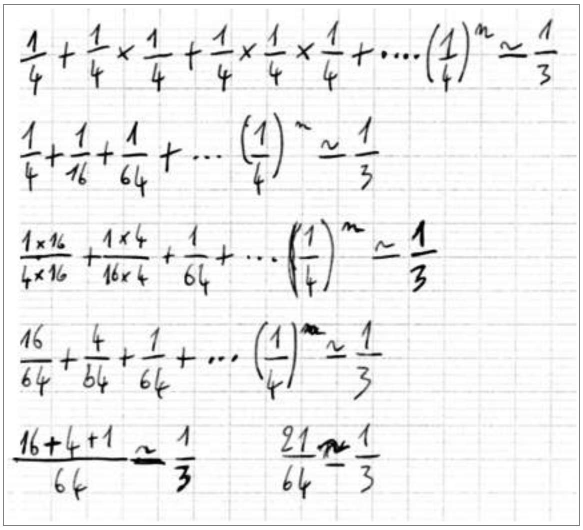


Image 7- Interprétation de l'algorithme et résolution. Groupe 2.

III.3. Une première conversion

Les élèves restent spontanément dans le registre initial (numérique-algébrique). Il faut donc une intervention forte de la chercheuse pour les orienter vers une première conversion.

La chercheuse pose ainsi à tous les groupes de travail — un par un — les questions suivantes : « Est-ce que vous comprenez la question ? Est-ce que cela peut se visualiser ? Comment peut-on le visualiser ? Qu'est ce que l'on « voit » en mathématique ? ». Les réponses ont souvent commencé avec les mots : nombres, signes, équations, sommes… puis au moins un élève dans chaque groupe dit : « des figures, comme en géométrie ! ». C'était la réponse attendue par la chercheuse et elle intervient en disant : « Des figures ? Et alors, est- ce que l'on peut s'en servir pour visualiser cette assertion ? ».

La même situation dans les quatre groupes fait émerger les premières réponses dans un cadre géométrique. À ce moment, un élève demande s'il est possible d'utiliser le « camembert » comme dessin. Après une réponse affirmative, la chercheuse demande à la classe : « Est-ce qu'il y a d'autres figures que l'on pourrait utiliser ? Si vous avez une autre idée, vous êtes libre de faire ce que vous pensez ».
Au début, les représentations géométriques dans les différents groupes correspondent à des représentations *de quarts* comme les suivantes :

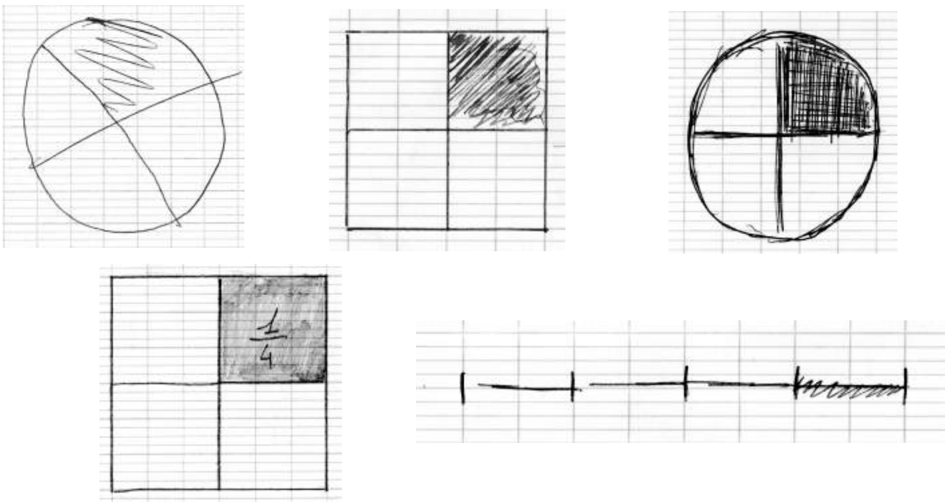


Image 8 - Ensemble des représentations géométriques de quarts données par les différents groupes.

Quelle figure sera la plus pertinente pour que les élèves puissent continuer les partages figuraux et représenter les autres composantes de la série ? La préférence des élèves pour une représentation ou une autre pourrait déterminer la signification prédominante de cette multiplication pour eux : fraction d'une grandeur correspondant à une aire ou bien à une longueur.

III.4. Un registre transitoire vers une conversion congruente

Ensuite, le groupe 3 fait certains essais, en remarquant de lui-même qu'il n'aboutit pas à la réponse attendue. Nous observons que cette représentation correspond bien à l'interprétation du produit comme « une partie d'une autre ». Par contre, la conversion des termes de la série représentée dans ce registre transitoire est erronée puisqu'elle n'a pas été congruente par rapport aux fractions. Nous voyons un cas similaire dans l'image 10.

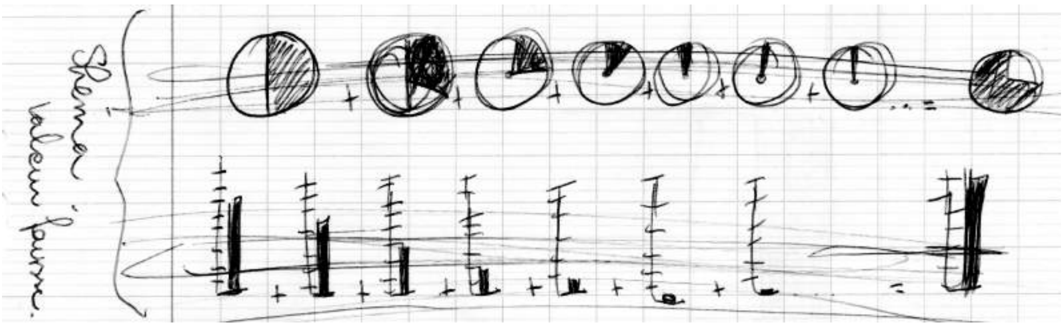


Image 9 - Début des représentations géométrique. Groupe 3

L'observation de la classe par la chercheuse montre que la tâche est encore très compliquée : cette complexité est liée à la compréhension de la puissance « *n* » ainsi qu'à la nécessité d'un traitement numérique accompagné d'une interprétation appropriée du produit comme « une partie d'une autre ». C'est cette signification du produit de fractions qui va orienter la production de la représentation finale.

Compte tenu des difficultés au sein de chaque groupe, le changement d'une variable didactique devient nécessaire : la suite s'arrêtera à la puissance 3. Il est demandé encore une fois aux élèves quel est l'objectif de la séance et quelle est la signification de la puissance « *n* ». Les réponses données permettent de remarquer que ce dernier point est déjà clair. Immédiatement après, une autre question est posée aux élèves : « Peut-on exprimer d'une autre façon numérique l'assertion donnée ? »(cf. Section II.3).

La réponse est donnée à voix haute par deux élèves : « Oui, le quart, plus un quart fois un quart, plus un quart fois un quart fois un quart… ». La chercheuse écrit donc au tableau la réponse d'un des élèves mais seulement jusqu'à la puissance 3, en donnant la **nouvelle consigne** de visualiser l'assertion arithmétique jusqu'à la puissance 3, car les élèves avaient déjà compris ce qui se passait si l'on ajoutait plus de puissances : l'erreur commise est plus petite et on est alors plus proche de 1/3. L'expression de départ, arithmétique-algébrique, correspond maintenant à une expression seulement arithmétique. La chercheuse pose donc la question suivante :

« Est-ce que vous savez ce que veut dire cette expression : « $(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4})$ »? ».

Il s'agit de déterminer *le sens* que les élèves attribuent à la multiplication de fractions.

Ce sont deux élèves — l'un du groupe 2, l'autre du groupe 4 — qui donnent la réponse verbale à la question ci-dessus : « un quart d'un quart ». La classe ne fait pas de remarques, et la chercheuse invite les élèves à continuer leur travail avec pour seul commentaire de « vérifier la réponse ».

Plus tard, dans la classe, le groupe 3 arrive aux représentations ci-dessous, qui ne sont pas correctes car ne représentent pas les composants de la suite, sauf la première :

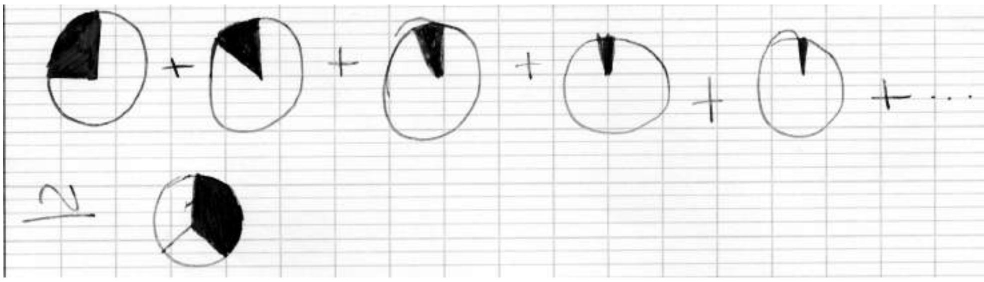


Image 10 - Une des réponses après le changement de l'expression arithmétique-algébrique cité plus haut. Groupe 3.

À ce moment, les réponses dans le cadre géométrique se multiplient dans les différents groupes et nous commençons à constater un changement de registre de représentations, qui fait partie d'un processus dans lequel les élèves construisent « pas à pas » la signification de l'expression arithmétique de départ. Une représentation purement géométrique qui montre la somme de puissances d'un quart et le tiers « à peu près » d'une façon unifiée, n'est donc pas encore apparu. Les élèves ajoutent encore des signes (+, ≈) entre les figures, de la même façon que s'ils travaillaient avec des nombres, ce qui est tout à fait correct si on considère les grandeurs (des aires dans le cas ci-dessus). À partir de là, nous voyons qu'ils ont déjà choisi une sorte de registre transitoire congruent avec le registre de l'expression de départ (numérique). Nous commençons à observer les premiers traitements figuraux qui s'approchent des résultats attendus.

III.5. Le quadrillage, une variable didactique importante

Les représentations faites sur une feuille quadrillée permettent de réaliser que le quadrillage est une importante variable didactique qui, n'a pas été prise en compte *a priori*.
La première figure qui s'approche des réponses attendues dans le cadre géométrique correspond à un rectangle (cf. Image 11). Subtilement, une élève commence le tracé d'une figure en indiquant un quart du rectangle et en restant là quelques minutes. La chercheuse a ensuite regardé son travail et par une intervention forte, a demandé directement à l'élève : « Qu'est ce que l'on visualise dans ta figure ? ». La réponse donnée est correcte : « un quart de la figure ». L'élève observe son travail. L'élève ajoute un quart d'un quart à coté du quart déjà dessiné, en disant : « et maintenant, le quart du quart ». La chercheuse demande : « Est-ce que tu pourrais continuer ? Comment vas-tu le faire ? ». Ensuite, elle lui demande de montrer et d'exprimer à son groupe de travail ce qu'elle a fait. L'élève ajoute finalement la troisième puissance de la somme : il s'agit de la première figure rectangulaire qui exprime la somme de puissances d'un quart d'une façon purement géométrique (cf. Images 5-7).

Ce processus, où finalement nous avons cette superposition de figures, implique la conversion de « + » en « réunion », ce qui nécessite également des aménagements particuliers, tels que : les quarts ne doivent pas se superposer les uns aux autres et la position du deuxième quart devrait avoir lieu à côté du premier. Si les quarts se superposent, les composants de la série sont difficiles à différencier, et la visualisation du tiers de l'unité n'est pas possible. (cf. section II.2).

Image 11 - Première figure qui s'approche des réponses attendues. Groupe 3.

Est-ce que l'élève avait compté les carrés composant le rectangle ? Nous observons que les partitions correspond bien aux quarts successifs de l'unité.

Dans les autres groupes, les représentations géométriques qui commencent à s'unifier dans une seule unité se présentent aussi. Le processus suivi par un des élèves du groupe 2 (cf. Image 12) est d'un intérêt particulier car il est plus proche de la représentation unidimensionnelle. La multiplication de fractions correspond plutôt à une fraction d'une longueur. On voit aussi un traitement pas à pas plus visible que dans l'exemple précédent. Le comptage du quadrillage est présent à nouveau. Ici, on voit bien la conversion du + numérique en union ensembliste :

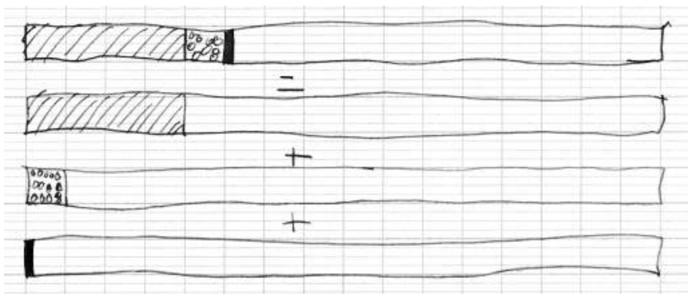


Image 12 - Interprétation pas à pas de l'expression arithmétique de départ pour arriver à une représentation « dans une unité » de l'assertion donnée. Groupe 2.

Jusqu'alors, les groupes de travail sont « fermés », c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'échange d'information entre eux. Une fois que la chercheuse a pris en compte le temps dédié à la recherche et les résultats obtenus, elle prend la décision d'initier une phase de bilan.

III.6. Bilan et institutionnalisation

C'est la dernière partie de la séance et le bilan commence par une mise en commun des réponses de certains élèves. La chercheuse remarque que le rectangle est bien présent dans les groupes mais que les élèves essayent encore « d'explorer avec d'autres figures connues ».

Un groupe fait alors un essai avec une représentation carrée de l'expression arithmétique donnée. Plus tard, l'idée est étendue à plusieurs groupes mais sans arriver à une idée *d'ordre des partages figuraux* comme celle déjà montrée dans toutes les réponses possibles dans notre analyse *a priori*. Cet *ordre* est important pour visualiser plus facilement la tendance de la suite vers un tiers et aussi pour itérer le processus.

Nous sommes maintenant confrontés à un traitement dans un registre multifonctionnel.

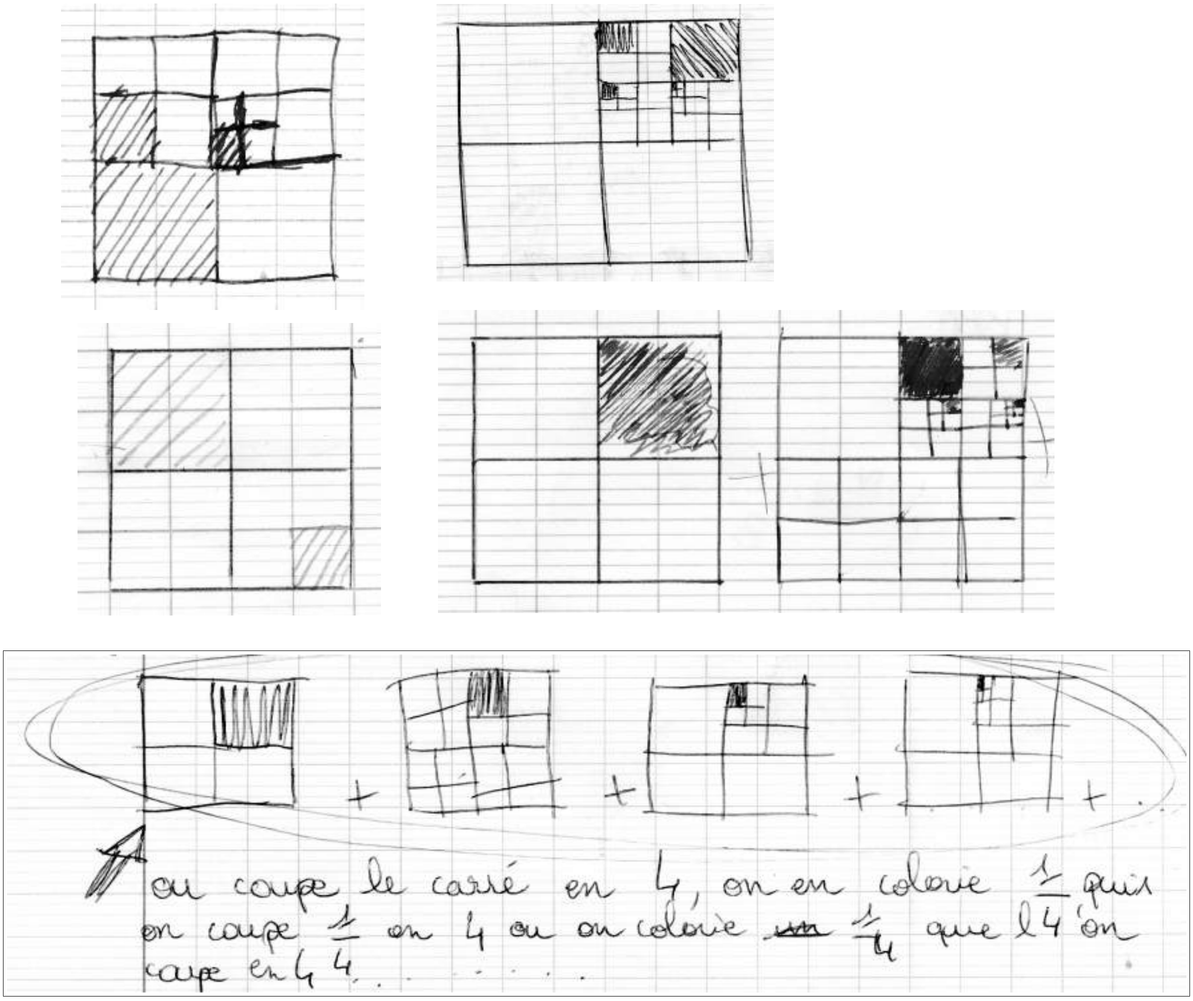


Image 13 - Ensemble de réponses proches de celles possibles présentées dans l'analyse a priori. *

En effet, le facteur « ordre » n'a pas émergé tout seul. Le rôle médiateur de la chercheuse est sollicité à nouveau. Elle s'adresse à la classe, pose certaines questions et fait quelques commentaires : « Est-ce que l'on peut constater l'assertion d'une façon visuelle à partir des figures que vous avez ? Avez-vous montré les différents « termes » de l'expression donnée ? Est-ce qu'à partir de cela on peut aussi visualiser la réponse ? ». Certains élèves regardent leurs représentations et ne donnent pas de réponses alors que d'autres simulent des découpages et des superpositions surtout avec les figures correspondant à un rectangle.

À la fin de la séance, les élèves sont encore engagés dans l'activité. La chercheuse, à travers une nouvelle intervention forte, leur suggère donc la prise en compte du facteur « d'ordre » des représentations des différents termes de l'addition déjà visualisés dans les carrés : « On pourrait les mettre en ordre. Comme vous voulez, par exemple, du plus grand au plus petit. Alors, voulez-vous essayer ? Est-ce que vous pouvez constater que la réponse est 1/3 à peu près ? Pourquoi ? ». Il s'agit d'inciter le « bon » traitement « non algorithmisable » dans un registre multifonctionnel comme celui-ci, le registre géométrique.

* « on coupe le carré en 4, on en colorie ¼ puis on coupe ¼ en 4 ou on colorie ¼ que l'on coupe en 4 ».

Afin d'illustrer ce qui précède, nous présentons les figures ci-dessous :

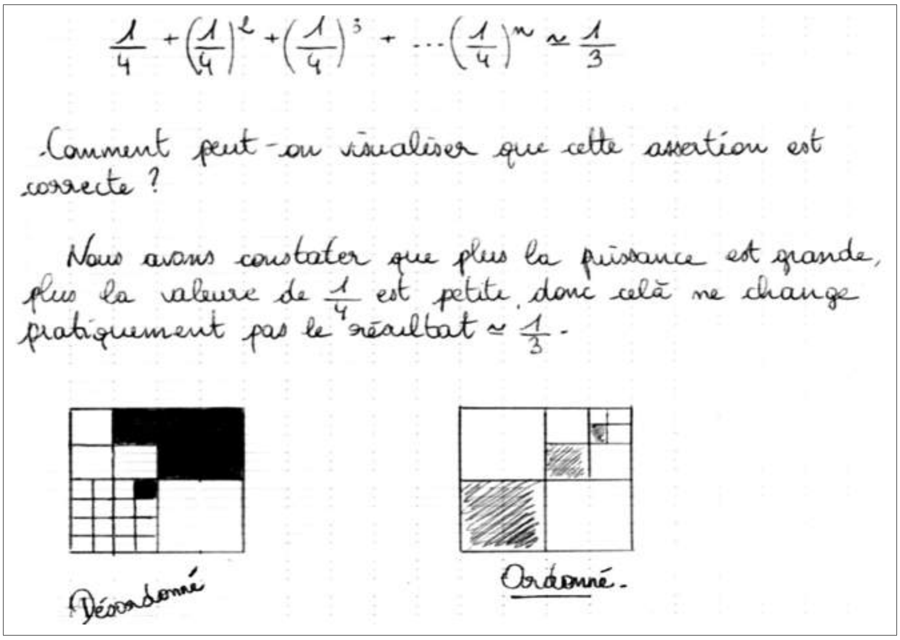


Image 14 - Dernière réponse du groupe 3

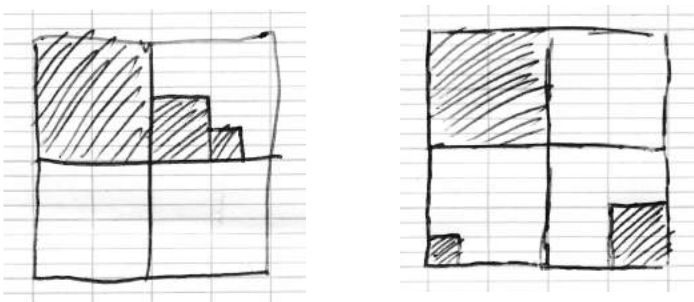
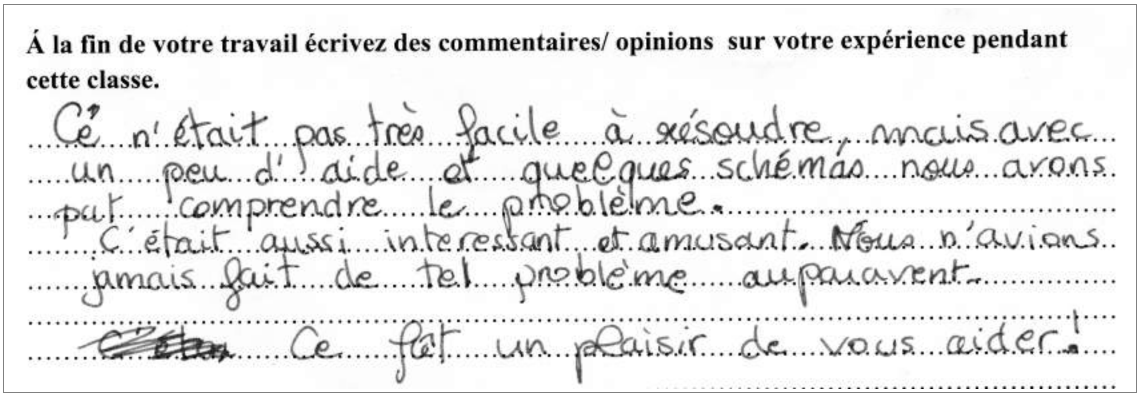


Image 15 - Essais d'ordre. Groupe 4.

Finalement, un élève a dit que, pour lui, il est possible de visualiser l'assertion donnée ; il est alors invité au tableau. La chercheuse reproduit au tableau une des représentations donnée par un groupe (cf. Image 14. Figure « ordonnée »). Ensuite, l'élève explique à toute la classe « ce qu'il voit » en utilisant la figure reproduite au tableau : « un des trois carrés de la même grandeur est colorié et c'est le cas dans chaque carré qu'on sélectionne pour continuer le coloriage, jusqu'à ce que l'on s'arrête ». Il exprime aussi la signification des carrés coloriés dans la figure en termes de « une partie du quart plus grand » (il montre ce qu'il dit sur la figure avec ses mains). La chercheuse demande aux autres élèves s'ils visualisent également ce que leur camarade vient de montrer et s'ils peuvent compléter la réponse. Pour certains cela est aussi évident, mais pour d'autres il faut faire un effort pour arriver à voir le tiers à peu près. Ces derniers font une nouvelle conversion : établir une concordance entre le registre géométrique d'arrivée et les composants de la suite numérique de départ (cf. Section II.2).

Les élèves ont mis en évidence la signification de la multiplication de fractions comme « une partie d'une autre » à travers un changement de registre de représentation suivi d'un traitement dans le registre d'arrivée. Les partages figuraux, permettent donc de prouver (expliquer) l'expression numérique de départ car il y a une concordance entre les éléments composant chacune des représentations dans les deux registres en jeu.

La séance s'arrête à ce moment à cause de l'heure, et les élèves donnent leurs travaux à la chercheuse. Du fait que la séance dépasse l'horaire, les commentaires demandés aux élèves sont réduits et ceux-ci n'arrivent pas à donner l'information souhaitée au sujet de la signification de l'activité, du degré de difficulté et des connaissances mises en œuvre. Cependant, certains d'entre eux décrivent l'expérience du groupe : les difficultés rencontrées dans l'activité et la motivation pour s'y investir.


Á la fin de votre travail écrivez des commentaires/ opinions sur votre expérience pendant cette classe.

Ce n'était pas très facile à résoudre, mais avec un peu d'aide et quelques schémas nous avons put comprendre le problème. C'était aussi interessant et amusant. Nous n'avions jamais fait de tel problème auparavant.

Ce fût un plaisir de vous aider!

Image 16 - Commentaire groupe 3.

IV. Conclusions et perspectives

Nous avons conçu une problématique de recherche consistant à la mise en place d'une situation originale d'enseignement en quatrième dont l'objectif est de visualiser la multiplication de fractions à travers certaines représentations géométriques. Ces représentations sont le produit de la mise en évidence d'une des significations de la multiplication de fractions par les élèves d'une classe de quatrième. De ce fait, nous nous sommes concentrés dans l'analyse des processus didactiques et cognitifs pour mieux comprendre les procédures des élèves et leurs possibilités de réussite.

Nous précisons que l'hypothèse de départ — les représentations géométriques favorisent la mise en évidence des significations de contenus mathématiques — nous a conduit à mettre au point une situation didactique en fonction d'un contenu spécifique et complexe dans l'enseignement des mathématiques : la multiplication de fractions.

Au cours de la séance, nous nous sommes aperçus que les contenus préalablement définis comme des outils pour la résolution du problème — la multiplication de fractions et la représentation géométrique d'un produit de fractions — ont été pertinents puisque, à travers leur mise en place, le problème a pu être résolu. Autrement dit, la possibilité d'aborder la problématique d'une façon pertinente lors du changement de cadre a été le résultat de l'application des contenus mathématiques disponibles chez les élèves comme des outils adéquats. En effet, l'image, d'abord mentale puis concrète — avec une figure à la main pour représenter la multiplication de fractions — a permis de valider le raisonnement perceptif et intuitif des élèves envers la notion de « une partie d'une autre ».

En outre et au regard de notre cadre théorique, nous avons pu constater à partir des performances des élèves, que la figure est bien un support de raisonnement qui nous renvoie à l'activité cognitive de « la reconnaissance des objets représentés à travers des représentations variées » (Duval, 2006). L'émergence d'un mode de production externe — celui des représentations géométriques de la multiplication de fractions — nous a permis de prendre en compte que les élèves se rapprochaient de la signification de la multiplication de fractions attendue, quand ils sont arrivés à la visualisation. Un aspect très important à prendre en compte est que les élèves ont mis en évidence une correspondance entre le registre fractionnaire et la représentation géométrique dès lors qu'ils ont été capables de décrire les partages figuraux d'une représentation géométrique en recourant à l'écriture fractionnaire.

Quant au déroulement de l'activité, un croisement entre les analyses *a priori* et *a posteriori* nous a permis de constater quatre points communs qui nous semblent intéressants à préciser :

Premièrement, les procédures de résolution ont bien été proches de ce que l'on attendait en termes de représentations géométriques. Les réponses dans un registre bidimensionnel — spécifiquement le rectangle, le carré et le cercle — ont émergé le plus fréquemment, alors que, au niveau unidimensionnel, les représentations ont été moins fréquentes. Quant au cadre numérique, les réponses instrumentées — à l'aide de la calculatrice — ont été très nombreuses et sont apparues avant toute représentation visuelle. Les calculs à la main sur les fractions ont été, la plupart du temps, corrects.

Deuxièmement, assurer une dévolution de la situation qui permette la mise en oeuvre des connaissances est un rôle fondamental de l'enseignant. Les rétroactions produites enrichissent *le milieu* et, par conséquent, font évoluer la situation jusqu'à l'obtention des réponses visées. Les attentes de la chercheuse, implicites, ont été transmises aux élèves en guidant de la situation. L'attention donnée aux réponses et procédures de chaque groupe d'élèves lui ont permis de souligner les mots et les moments clés de façon à ce que la séance puisse aboutir aux réponses attendues.

Troisièmement, si les connaissances préalables sont comprises par les élèves, les transformations des représentations sémiotiques et les jeux de cadres sont facilités. Dans notre cas, nous n'avons pas pu vérifier ce fait chez tous les élèves. Les rapports aux processus cognitifs impliqués dans la situation proposée ont été bien différenciés et nous avons aussi mis en évidence leur complexité.

Quatrièmement, les représentations géométriques nous semblent favoriser la mise en évidence de la signification d'objets mathématiques, à partir de la reconnaissance d'un même objet dans une autre représentation sémiotique. Cela nous est apparu d'après ce que les élèves ont fait lorsqu'il s'agissait d'accorder les composants de la série géométrique donnée avec la représentation figurale correspondante.

Quant à la situation proposée, elle est située dans la dynamique d'un enseignement qui considère les éléments des jeux de cadres, lesquels se développent par l'intervention de l'enseignant et de certains élèves à l'intérieur des groupes de travail. Le travail collaboratif —

rétroactions entre pairs et interactions fréquentes avec la chercheuse — a été le centre de l'expérience de la classe, où elle a donné des éléments-clés pour orienter le déroulement de la séance jusqu'au but attendu. D'ailleurs, une organisation de la classe comprenant une phase de bilan à la fin de la séance a été un aspect essentiel. En pratique, c'est à ce moment que certains élèves ont pu s'exprimer sur la signification de la multiplication qui leur avait permis d'aboutir à certaines des représentations géométriques attendues. À travers l'explication donnée au tableau par un élève d'une des significations de la multiplication, une liaison entre les partages figuraux et les composants adéquats de la série géométrique a abouti à la vérification, sur la figure, de la valeur approchée de la série. Toutefois, un facteur important, mais non prévu par la chercheuse, a été la durée de la séance, qui a dépassé l'heure de cours prévue. Raison pour laquelle l'institutionnalisation des contenus réinvestis a été absente. La classe a donc dû s'arrêter au moment du bilan.

Finalement, nous devons tenir compte des différents aspects que notre recherche ne nous a pas (ou peu) permis de constater ou mettre en évidence, du fait que le temps manquait, ainsi que de ce qui nous est apparu au cours de l'expérience et que nous n'avions pas nécessairement envisagé au préalable. Notamment, la compréhension d'une signification du produit fractionnaire comme l'outil qui permettrait d'aboutir à la représentation géométrique souhaitée n'a pas pu être constaté chez tous les élèves. Ceci nous conduit donc à introduire un futur travail de recherche où l'on souhaite approfondir les relations existantes entre différents cadres mathématiques et à différents niveaux de scolarité en France. Plus spécifiquement, nous voudrions observer les interactions entre cadre numérique et cadre géométrique existantes ou possibles, liées à la multiplication et pour différents ensembles de nombres.

Bibliographie

ARCAVI, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 52(3) 215–241.

BALACHEF, N. (1982). Preuve et démonstration en mathématiques au collège, *Recherche en Didactique des Mathématique*, La pensée sauvage, Grenoble, Vol.3/3, 261-304.

BESSOT, A. (2003). Une introduction à la Théorie des Situations Didactiques, *Les cahiers du laboratoire de Leibniz* N° 91, Grenoble.

BROUSSEAU, G. (1998) *Théorie des Situations Didactiques*, La pensée sauvage éditions, Grenoble.

CONNE, F. LEMOYNE, G. (1999). *Le cognitif en didactique des mathématiques*, Les Presses de l'Université de Montréal.

DOUADY, R. (1986). Nombres décimaux, IREM Université Paris 7.DOUADY, R. 1986, Jeu de cadres et dialectique outil objet, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, La pensée sauvage, Vol 7/2, p. 5-31.

DUVAL R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la Pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Vol. 5, p. 37-65.

DUVAL, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, La pensée sauvage, Vol 16/3, p. 349-382.

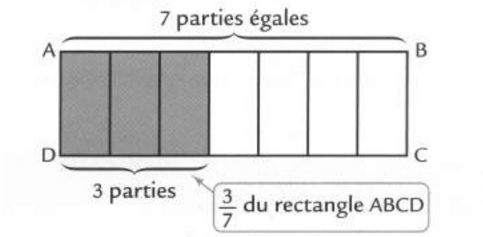
DUVAL, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics* 61(1/2) 103–131.

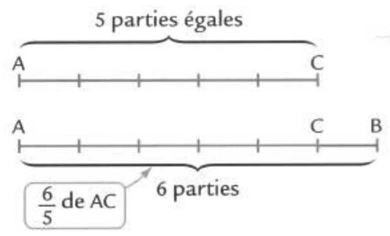
DUVAL, R. (2006). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques, *Actes du XXXIIe Colloque COPIRELEM*, p. 67-89.

SOTO-ANDRADE, J. (2008). Mathematics as the art of seeing the invisible…, Proc. *11th International Congress in Mathematical Education*. Disponible en http://tsg.icme11.org/tsg/show/21 ((téléchargé le 11/04/2011).

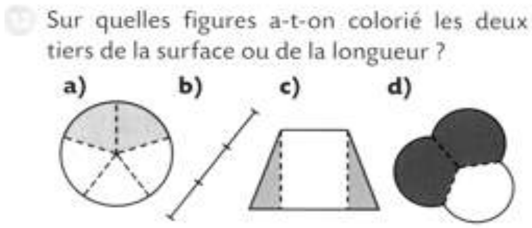
Annexe

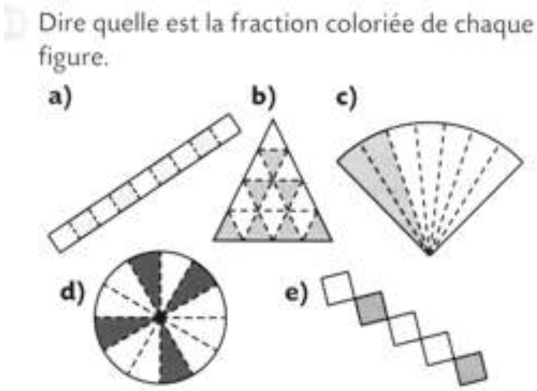
1. Représentations géométriques d'une fraction, classe de 6e. Manuel Triangle, 2009, page 70



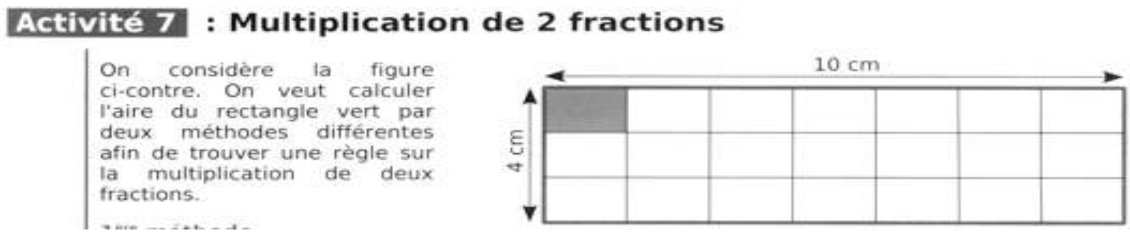


Représentations géométriques d'une fraction, même manuel (classe de 6e, Triangle, 2009) page 73



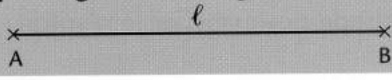


2. Fractions et multiplication de fractions. Classe de 5e. Manuel Sésamath, 2006, page 23.



3. Représentation géométrique d'une fraction d'une longueur, classe de 4^e. Manuel Triangle, 2007 ….

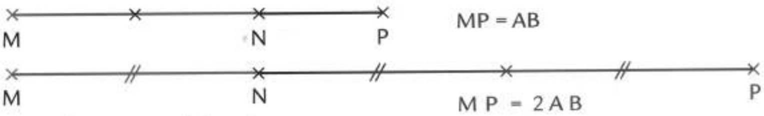
Soit [AB] un segment de longueur ℓ. Tracer un segment [MN] de longueur : $\frac{2}{3} \times \ell$



Léo et léa ont répondu à cette question en utilisant deux méthodes différentes :

Léa :

Léo :



(1) Expliquer chaque méthode.

(2) Tracer un segment [AB] de longueur ℓ = 4 cm. Utiliser la méthode de Léa puis celle de Léo pour tracer un segment [MN] de longueur $\frac{3}{8} \times \ell$

b) On sait que $\frac{1}{16}$ = 0,062 5. Calculer mentalement $\frac{10}{16}$.

… et représentation géométrique d'une suite de quarts, classe de Première S. Manuel Déclic, 2006.

Ch8

TRAVAUX DIRIGÉS

1. SUITES ET GÉOMÉTRIE

A : « Voir » la limite

ABCD est un carré de côté 1.

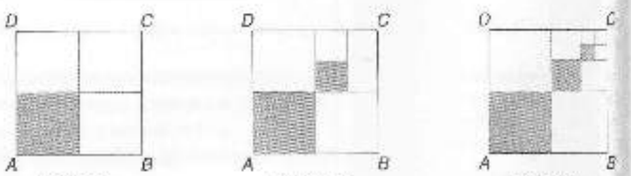


Figure F_1 Figure F_2 Figure F_3

a) Expliquer les constructions des figures F_1, F_2 et F_3.
On imagine que ce processus se poursuit à « l'infini ». On appelle S_n l'aire de la surface colorée de la figure F_n

b) En étudiant la figure, quelle conjecture peut-on émettre quant à $\lim_{n \to +\infty} S_n$?

c) Montrer que $S_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n$. En déduire S_n en fonction de n et $\lim_{n \to +\infty} S_n$.