LE CALCUL HUMAIN DES MULTIPLICATIONS ET DES DIVISIONS DE NOMBRES NATURELS

Guy BROUSSEAU

Professeur honoraire,
LACES / DAESL, Université Victor Segalen, Bordeaux 2

L'enseignement du calcul des opérations a suivi l'évolution de l'humanité et de ses besoins. Depuis le début du XIX$^{\text{ème}}$ siècle il a pris une importance considérable dans l'enseignement élémentaire notamment.

Aujourd'hui, l'enseignement des opérations est en crise. Il semble que les professeurs aient de plus en plus de difficultés à obtenir des résultats satisfaisants et qu'à son tour l'administration se soit rendue à l'évidence et ait cédé, consentant à abaisser ses exigences en supprimant ou en retardant des apprentissages considérés comme fondamentaux. La noosphère s'émeut, exige le maintien de ses illusions préférées et, refusant d'étudier le problème avec des moyens appropriés, se déchire en secouant ses jouets préférés : les professeurs, le niveau, les institutions de formation, les mathématiques, les nouveaux élèves, de mystérieux paramètres…

Cet article n'a pas la prétention d'étudier en détail ces problèmes. Je me bornerai à évoquer dans un premier paragraphe quelques considérations qui me semblent dire pourquoi on ne peut plus enseigner le calcul élémentaire traditionnel et pourquoi on aurait tort de vouloir le conserver. J'y dirai aussi pourquoi je crois qu'on ne doit pas abandonner l'enseignement du calcul élémentaire traditionnel « à la plume ».

S'il existe une solution à ce dilemme, c'est, je crois, dans la modification de la chose enseignée qu'il faut la chercher et corrélativement dans les méthodes didactiques qui peuvent leur être associées. Suivant les pays, les époques, les besoins et les ressources des sociétés humaines, il a existé de nombreuses manières d'effectuer les calculs nécessaires aux transactions humaines. Certaines faisaient appel à des aides matérielles (abaques, bouliers, machines diverses), d'autres non. On pourrait croire qu'aujourd'hui, l'enseignement du calcul aurait bénéficié de cette expérience millénaire pour proposer aux élèves les moyens les plus adaptés, les plus sûrs et les plus performants d'effectuer ces calculs. Cet article montre qu'il n'en est rien. Je puiserai mes arguments et mes solutions dans des travaux personnels théoriques et expérimentaux que j'ai publiés il y a plus de trente ans.

Grand N n° 85, 2010, pp. 13 à 41

Mon argumentation s'adresse d'abord aux enseignants et au public, c'est pourquoi j'ai tenu à détailler autant que nécessaire l'objet principal de ma proposition : comment effectuer et disposer les calculs des multiplications et surtout des divisions ? Et comment les enseigner ? J'ai voulu exposer ces techniques sans exposer les modalités de leur enseignement, et bien qu'elles permettent des améliorations très sensibles de ce côté-là aussi. Il restera à expliquer, dans mes conclusions, pourquoi ce genre de travaux est resté sans effets pendant si longtemps et sous quelles conditions il pourrait en être autrement dans l'avenir.

LES MULTIPLICATIONS

Une multiplication «classique »

Le procédé « habituel »

La multiplication de 625 par 25 s'effectue au Chili en utilisant la disposition suivante :

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & {\scriptstyle 1\,2} & & & & \\
 & & & & 6 & 2 & 4 & \times & 2 & 5 \\
\cline{5-7}
 & & 3 & & {}^{1}1 & 2 & 0 & & & \\
+ & 1 & 2 & & 4 & 8 & & & & \\
\cline{2-7}
 & 1 & 5 & & 6 & 0 & 0 & & &
\end{array}
$$

Le projet de calcul se place au dessus du trait est écrit « en ligne ». En France, il serait écrit en deux lignes, ce qui ne change pas grand-chose.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & & {\scriptstyle 1\,2} & \\
 & & & 6 & 2 & 4 \\
 & & \times & & 2 & 5 \\
\cline{3-6}
 & & 3 & {}^{1}1 & 2 & 0 \\
+ & 1 & 2 & 4 & 8 & \\
\cline{2-6}
 & 1 & 5 & 6 & 0 & 0
\end{array}
$$

L'usage veut que l'élève choisisse d'abord un nombre *multiplicande* (le premier : 624) et un nombre *multiplicateur* (25). Il aurait pu faire l'inverse. L'opération prendrait plus de place mais le calcul des produits partiels serait plus facile et plus sûr pour les débutants.

Puis il choisit un premier chiffre multiplicateur, il prend le chiffre des unités 5 (il aurait pu prendre le 2 d'abord ; c'est un exercice intéressant à proposer à des élèves déjà aguerris pour rafraîchir leurs connaissances et les faire réfléchir sur leurs automatismes).

Puis il calcule « en ligne » le premier *produit partiel*, 624 × 5, et pour mémoriser les *retenues,* il les écrit au-dessus du chiffre multiplicande :

> 5 fois 4 vingt, j'écris zéro et je retiens deux, écrit au-dessus du 2 ;
>
> 5 fois 2 dix, et deux de retenue font douze, j'écris deux et je retiens un, écrit au-dessus du 2 ;
>
> 5 fois 6 trente, et un de retenue font trente et un.

Il calcule ensuite toujours en ligne et de la même manière le deuxième produit partiel, mais il n'écrit pas le résultat de l'opération 624 × 20, c'est-à-dire 12 480 ce qui lui aurait permis de conserver l’alignement pour l’addition et de ne pas perdre de vue l’ordre de grandeur de son résultat, mais qui l’aurait obligé à effectuer les produits partiels de façon différente (écrire d’abord un ou plusieurs zéros) suivant l’ordre du multiplicateur. Tous les produits partiels se calculent de la même manière, mais l’élève doit décaler d’un rang vers la gauche à chaque multiplicateur et il peut oublier la signification de ce qu’il calcule.

Par chance, dans cet exemple, il n’y a pas de retenues dans le deuxième produit partiel. Où se placeraient les retenues des produits partiels dans le calcul de 624 × 85 ? Ainsi ?

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & & {\scriptstyle 1\,3} & \\
 & & & & {\scriptstyle 1\,2} & \\
 & & & 6 & 2 & 4 \\
 & & \times & & 8 & 5 \\
\hline
 & {\scriptstyle 1} & {}^{1}3 & 1 & 2 & 0 \\
+ & 4 & 9 & 9 & 2 & \\
\hline
 & 5 & 3 & 0 & 4 & 0
\end{array}
$$

En France, les élèves ne doivent pas les écrire, imaginez ce que deviendrait l’écriture des retenues lorsque le multiplicateur comprend quatre chiffres ! Mais ceci complique et allonge d’autant l’apprentissage des produits en ligne qui doivent s’effectuer sans l’appui de l’écriture des retenues.

Les propriétés ergonomiques de cette méthode

La description de la tâche par un ordinogramme qui prend en compte tous les cas fait ressortir facilement quelques *caractères*.

Le caractère essentiel est la *fiabilité* du résultat. Le rôle d’un calcul, c’est d’assurer son résultat et de permettre son contrôle. Le but de l’apprentissage est de permettre à l’exécutant d’avoir une confiance suffisante dans son travail. La vitesse d’exécution n’est qu’un facteur subalterne. La fiabilité dépend de divers facteurs, certains sont propres à l’exécutant (*apprentissage, habileté, fatigue, etc*.), d’autres tiennent au procédé lui-même : *complexité de l’algorithme, nombre de valeurs à maintenir en mémoire à court terme simultanément, importance et disponibilité des répertoires exigés, possibilités de contrôle*. D’autres enfin encore à plusieurs à la fois : la *difficulté* d’un travail tient à l’adaptation de la tâche aux possibilités de l’exécutant.

Les études de ces caractères peuvent être menées de façon empirique, de façon théorique. Ou conjointement, l’étude d’ergonomie éclairant les difficultés à chercher (ce que nous avons fait dans les années 60). Nous allons suivre l’analyse théorique.

La complexité formelle

La tâche qui se reproduit en boucle est le calcul d’un produit de deux nombres d’un chiffre : il y a autant de boucles que le produit des nombres de chiffres des deux termes du produit. L’opération ci-dessus comprend 6 boucles, l’opération 3 546 × 8 345 en comprendrait 16. On comprend que la complexité croisse comme le nombre de boucles.

Chaque boucle présente des difficultés différentes, suivant sa place dans le calcul, suivant la présence d’une retenue ou non, suivant les chiffres à multiplier et suivant la complexité de l’algorithme dans lequel elle est plongée.

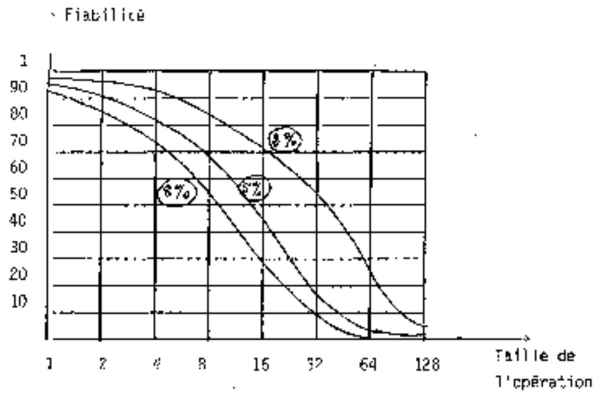
Au cours d'une boucle, l'élève peut être conduit à conserver et à effacer en mémoire jusqu'à cinq renseignements provisoires avant de poser son chiffre : deux pour repérer la position des chiffres qu'il va multiplier afin de rechercher le couple suivant, deux pour les chiffres qu'il multiplie, un pour la retenue en cours, et après le calcul du produit, un pour le chiffre à écrire, un pour la retenue à reporter.

Considérons 5 468 × 797 : il faut mémoriser au moins deux et peut-être quatre informations pour repérer la position des deux chiffres (par exemple, les centaines du multiplicande par les dizaines du multiplicateur) qu'on va multiplier, de façon à pouvoir trouver le couple suivant, puis deux pour les chiffres qui se multiplient (4 et 9), un pour la retenue du produit élémentaire précédent (5 de 6 × 9) que l'on doit ajouter au produit, puis après le calcul du produit, une mémoire pour la retenue à reporter (4 venant de $4 \times 9 \rightarrow 36, + 5 \rightarrow 41$).

On peut donc compter cinq *places de mémoire provisoire* si on considère les retenues comme se remplaçant dans une même mémoire, ou sept *objets de mémoire* par boucle (en ajoutant le résultat du produit et l'autre retenue) si on pense que les élèves mémorisent toute la chaîne des opérations d'un même produit partiel pour la répéter rapidement pour la contrôler. Nous leur avons vu faire cela presque tout le temps. Il est facile de prévoir et d'établir expérimentalement différents résultats.

Résultats expérimentaux

a) **L'effet de la taille des opérations** (nombre de boucles), suivant la fiabilité sur les boucles. La probabilité de réussite s'écroule rapidement avec la taille de l'opération (voir figure ci-dessous).



Ces courbes montrent qu'un progrès minime dans la fiabilité des produits élémentaires, par exemple passer de 5% de résultats erronés à 2%, fait passer l'élève du statut de très mauvais calculateur (30% des opérations de taille 16 justes), à celui d'acceptable avec 75% de réussite. **C'est donc le calcul des boucles qu'il faut chercher à améliorer en priorité.** Ne pouvant changer la méthode de calcul, les professeurs repèrent deux ou trois produits sur lesquels l'élève se trompe régulièrement et tentent de faire corriger ce défaut par des apprentissages frénétiques. Le choix d'un dispositif approprié contraignant peut se révéler plus efficace. Pour cela nous avons étudié expérimentalement l'influence de chaque élément du calcul sur les erreurs.

b) **L'ordre de difficulté des produits élémentaires (tables)**

Prenons quelques exemples.

i) La difficulté croît suivant :

- La valeur du produit : les résultats à la question « 2 × 6 » sont meilleurs que ceux de « 8 × 6 », « a × b < c × b » a tendance à entraîner « difficulté (a × b) < difficulté (c × b) ».

- Mais cette tendance est dominée par les propriétés arithmétiques : les pairs, et les multiples de 5, sont plus basiques et donc mieux connus.

- La présence et la position des 0 : la fréquence des succès pour les produits « n × 0 » est largement supérieure à celle des succès pour les produits « 0 × n ».

Nous avons observé (Michelot, 1966) que les élèves avaient tendance à conclure que « 3 fois 0 » est zéro, mais que « 0 × 3 » est trois. Les causes sont d'abord conceptuelles : « 3 fois x » c'est « $x + x + x$ », si $x = 0$, la somme est zéro. Mais « 0 fois » n'évoque aucune addition, et le 3 énoncé reste, d'où « 0 × 3 = 3 ». De plus, cette erreur n'est jamais relevée lorsque le zéro figure dans le multiplicateur puisqu'il est traité implicitement par le décalage. La déclaration « 0 × 3 » n'est jamais contredite par l'usage.

- Les confusions possibles : 7 × 8 et 6 × 9 sont l'occasion de plus d'erreurs chez les débutants.

ii) Les difficultés décroissent lorsque le produit présente des possibilités d'étayage (rattachement à un autre produit), etc.

c) La présence d'une retenue dans une boucle

C'est la principale cause des erreurs, comme le montre le tableau ci-dessous

$m + \sigma/\sqrt{N}$ (N)	Sans retenue	Avec retenue
Produits seuls Taille 1 x 1	3,73 ± 0,56 (98)	
Taille 2 x 1	1,20 + 0,55 (17)	7,46 - 1,78 (19)
Taille 3 x 1	2,40 + 1,32 (13)	11,47 - 1,47 (17

établi sur 141 enfants de 9 à 11 ans

Ce tableau indique les résultats d'une épreuve proposée à 142 élèves de 9 à 11 ans qui calculaient avec la méthode « traditionnelle ». Il s'agissait de trouver des arguments pour justifier un changement de méthode. Il montre la moyenne (et l'écart type) des pourcentages d'erreurs observées sur une opération élémentaire suivant qu'elle se trouve dans des opérations de tailles diverses et suivant qu'il y a ou non une retenue à faire. Par exemple, 47 × 8 est une opération de type 2×1 et elle présente deux produits élémentaires, 8 × 7 et 8 × 4, tous les deux avec retenue (à reporter pour 8 × 7, à reporter et additionner pour 8 × 4). Il y a donc quatre cas de retenues : sans retenue (**32** × **2**), avec retenue seule (comme 4 × 3 dans 2**4** × **3**), avec addition de la retenue seule (comme 2 × 3 dans **24** × **3**), avec à la fois addition de la retenue antérieure et report de la suivante (comme dans le 7 × 6 de 2**7**4 × **6**).

Mais l'analyse de détail est plus compliquée car il faut tenir compte du fait que les produits élémentaires de nombres tels que 7 × 8 ou 6 × 9 sont moins bien connus que d'autres comme 2 × 3 et qu'ils ne peuvent pas figurer dans les catégories sans retenue. J'ai tenté d'annuler cet effet par des moyens compliqués.

La seule preuve irréfutable a été apportée plus tard, lorsque nous avons pu comparer les résultats aux mêmes opérations avec l'une et l'autre méthode, d'une part avec les mêmes élèves avant et après un apprentissage, d'autre part avec des élèves différents mais appariés d'après leurs résultats aux produits 1×1.

Dans des opérations de taille 2×1 (comme 47 × 8). Il y avait 17 produits sans retenue et 19 avec retenue. Il y avait 7,45% d'erreurs sur les produits élémentaires avec retenue. Et seulement 1,20 erreurs sur 100 sur les opérations élémentaires sans retenue.

Les courbes précédentes montrent les progrès que l'on peut attendre du changement de méthodes.

Note : le rapport initial comprenait des schémas où ces mémoires étaient représentées comme dans les ordinogrammes utilisés à l'époque pour décrire les programmes informatiques.

d) L'effet de la longueur des séquences enchaînées

Si le multiplicande comprend beaucoup de chiffres, l'élève doit effectuer d'un coup une longue série d'opérations pour ne pas perdre les retenues de chaque boucle pour la suivante. S'il est interrompu, il doit recommencer : le contrôle de ce qu'il a fait est d'autant plus difficile et la probabilité d'être interrompu croît très vite aussi avec le temps d'exécution.

673 × 5 est bien mieux réussi seul qu'inséré dans 4 673 × 5 ;

678 678 × 7 est moins bien réussi que 678 × 77, de même pour 923 923 × 3 et 923 × 33.

e) L'articulation des boucles contribue à la complexité

L'exemple le plus évident est celui où les boucles sont vides, lorsque plusieurs zéros se succèdent dans le multiplicande mais surtout dans le multiplicateur.

Les résultats les plus surprenants

- Le paramètre du résultat le plus sûr est *le chiffre des unités*.

- Le moins sûr, lorsqu'il y a des erreurs, c'est le nombre de chiffres du résultat, et le premier chiffre significatif, c'est-à-dire les informations les plus importantes, celle de l'ordre de grandeur du résultat.

- Le calcul ne se prête pas à un calcul d'approximation : il faut tout calculer d'abord et tronquer ensuite.

Il est facile d'incriminer la méthode de calcul si on la compare à d'autres.

Nous n'avons pas évoqué l'analyse du temps d'exécution ni la fatigue de l'exécutant liée de façon plus serrée à la longueur des séquences enchaînées par exemple. Ces variables influent moins dans les conditions scolaires, dans la mesure où les enseignants les surveillent.

L'influence du nombre et de la disposition des informations à traiter

Le repérage de la boucle suivante après l'exécution d'une boucle par exemple peut être rendu difficile par la présence des marques de retenues, la position de la marque de retenue peut compliquer sa recherche etc.

La relation entre l'exécution de l'algorithme avec le sens de l'opération

Cette relation (et, par exemple, la signification d'un produit partiel) s'est révélée mal comprise et difficile à expliquer pour les professeurs.

L'organisation de l'apprentissage

Il est clair qu'il faut que les élèves soient capables d'exécuter parfaitement (ou presque) les multiplications en ligne (avec un seul chiffre au multiplicateur) pour effectuer les produits avec deux chiffres au multiplicateur, et qu'il faut alors parfaitement savoir reporter les retenues sans les écrire.

Il faut donc programmer l'étude de calcul des produits par un seul chiffre au multiplicateur sans retenue (712 × 4), limitation qui ne peut être évidemment que très provisoire compte tenu du faible nombre de possibilités.

Et celui-ci suit l'étude des produits simples, ceux qui figurent dans la table.

Le principe est donc celui de l'étude d'un programme qui restera presque intangible, suivi de son utilisation comme sous-programme dans un programme plus complexe. L'étude de la multiplication précède mais s'imbrique dans celle de la division au nom de ce même principe. Le souci de « mécaniser » l'exécution du calcul conduit à enlever tout rôle fonctionnel au sens qui n'a plus qu'un rôle secondaire, illustratif et explicatif après coup.

Pour apprendre à faire les divisions à la plume sans trop d'erreurs et avec une vitesse convenable, il faut avoir appris avant et assez tôt, à exécuter parfaitement les soustractions et les multiplications… Finalement, à une époque où presque tout le monde calculait visiblement pour une multitude d'activités banales, où lire, écrire et compter était vécu par les enfants comme une étape incontournable pour acquérir le statut d'adulte, il fallait consacrer un temps considérable : les mathématiques occupaient une heure de chacun des cinq jours de chacune des 30 semaines d'une année scolaire pendant les cinq années de la scolarité obligatoire (avant 1940). Réparties en trois heures d'arithmétique, une heure de système métrique, et une heure de géométrie par semaine. Ainsi, au cours d'une scolarité primaire, 450 heures (3 × 30 × 5) étaient utilisées pour enseigner, illustrer, exercer et appliquer le calcul des opérations (sans compter les opérations à la maison). Les seuls enfants qui n'apprenaient pas à calculer étaient ceux qui notoirement ne pouvaient pas le faire. Les professeurs déclaraient n'avoir aucune difficulté à enseigner le calcul.

Les conditions d'une telle performance sont-elles encore réunies ? Sont-elles encore possibles ? Cette performance serait, est-elle souhaitable ?

Les solutions alternatives

L'étude d'une alternative éclairera cette étude. Les procédés développés dans l'histoire et dans le monde pour calculer le produit de deux naturels sont nombreux et variés : par exemple, le procédé par doublement du multiplicande et division du multiplicateur avec addition des restes (procédé dit parfois « à la russe ») remonte à la plus haute antiquité. Chaque méthode est caractérisée par un répertoire de résultats élémentaires à mettre en œuvre sans calcul : les tables pour la méthode des produits partiels (dite parfois de Fibonacci), ou les doubles, les moitiés pour la méthode « à la russe », et par un algorithme.

A priori, le temps d'enseignement et les difficultés de l'apprentissage dépendent principalement de ces deux paramètres. Nous allons montrer comment l'utilisation de la méthode du tableau des puissances dite « *per gelosia* » (par Fibonacci), ou « à l'arabe », ou « à la grecque » permet de résoudre de nombreux problèmes posés ci-dessus.

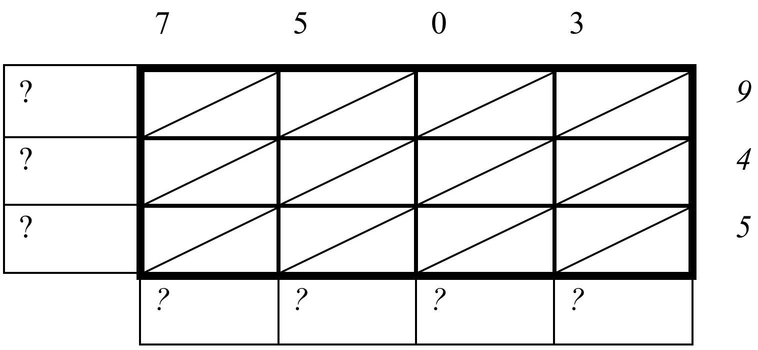
La multiplication en tableau[1]

Le procédé

C'est le procédé utilisé par les mathématiciens pour effectuer les produits de polynômes.

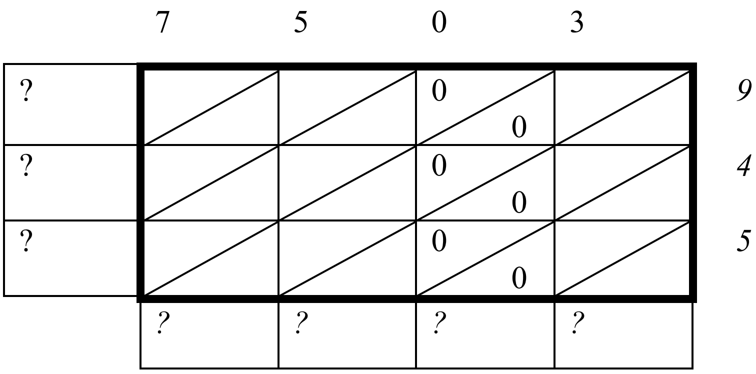
Il commence par le tracé d'un tableau qui comporte autant de colonnes que le multiplicande comprend de chiffres, et d'autant de lignes que le multiplicateur en comprend. Les chiffres du multiplicande sont écrits au dessus du tableau (un par colonne) et ceux du multiplicande à droite (un par ligne). Chaque cellule du tableau est partagée en deux par sa première diagonale.

Par exemple, pour la multiplication de 7 503 par 945 le tableau a l'aspect suivant.



Phase 1

Les points d'interrogation représentent les chiffres du produit cherché. On voit tout de suite qu'il y en aura 8. Un élève avisé pourra dire que le premier chiffre sera 6 ou 7 et le produit est de l'ordre de 7 millions. Avantage important sur la méthode *per gelosia*. Ensuite, un élève débutant peut commencer par calculer les produits qu'il connaît bien, par exemple par la colonne de 0.



Phase 2

[1] Cette multiplication est dite « *per gelosia* » (par jalousie) par Leonardo Fibonacci qui l'enseigna à l'Europe au XIIème-XIIIème siècle. Mais il l'avait empruntée aux Arabes. Pour cette raison, elle est dite par d'autres « multiplication arabe ». Mais les Arabes l'avaient peut-être empruntée aux Hindous, et en tout cas elle était déjà utilisée par certains anciens mathématiciens grecs. Elle est donc reconnue aussi comme « multiplication à la grecque »… Mais était-elle étrangère aux Chinois qui la réalisaient en croisant des baguettes ? … Elle se distingue ici d'autres méthodes, comme la multiplication « à la russe » qui remonte à l'Égypte ancienne et qui ne demande de savoir multiplier et diviser que par 2.

Il a repéré 3 × 4 qu'il connaît bien aussi : il écrit le 1 au-dessus de la diagonale et le 2 à droite en dessous. Il fait de même avec le 5 × 4 et le 5 × 5, et le 3 × 5 qu'il connaît aussi.

	7	5	0	3	
?			0 / 0		*9*
?		2 / 0	0 / 0	1 / 2	*4*
?		2 / 5	0 / 0	1 / 5	*5*
	?	*?*	*?*	*?*	

Phase 3

Il a tout son temps pour vérifier et éventuellement étayer ou même compter les produits qu'il ne connaît pas encore parfaitement : comme 4 × 7 = 28 ou 5 × 7 = 35. Il peut même se servir de certains calculs déjà faits pour en vérifier d'autres :

> Il hésite sur 7 × 9 = 62, mais il vérifie : puisque 5 + 4 = 9 alors 5 × 7 + 4 × 7 = 9 × 7 et donc 5 × 9 = 35 + 28 = 63 en attendant de savoir 9 × 7 = (10 × 7) – 7.

Il ne s'agira pas d'encourager les élèves à traînasser sur les résultats intermédiaires mais seulement de leur permettre un apprentissage par l'usage, moins dépendant de façon critique de la connaissance préalable par cœur.

	7	5	0	3	
?	6 / 3	4 / 5	0 / 0	2 / 7	*9*
?	2 / 8	2 / 0	0 / 0	1 / 2	*4*
?	3 / 5	2 / 5	0 / 0	1 / 5	*5*
	?	*?*	*?*	*?*	

Phase 4

Il reste alors à additionner les nombres d'un même ordre, d'une même puissance de 10, qui se trouvent en diagonale :

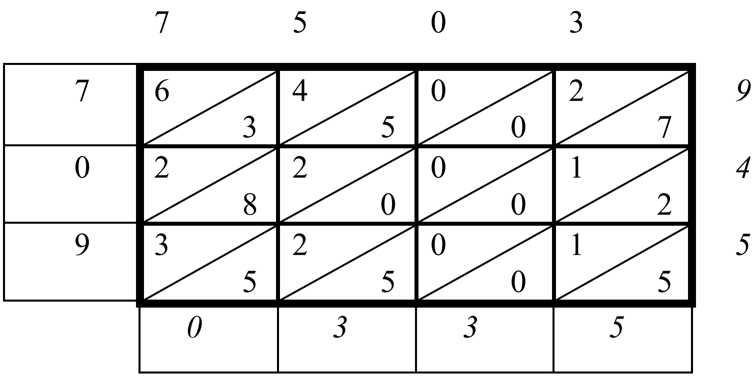
- Les unités avec les unités : 5.

- Les dizaines avec les dizaines : 0 + 1 + 2 = 3.

- Les centaines : 5 + 0 + 0 + 1 + 7 = 13.

Cette fois il y a des retenues, mais ce sont celles d'une addition, une par colonne.

Et le résultat se lit sur les marges de haut en bas et de gauche à droite : 7 090 335.



Phase 5

Réponse approchée

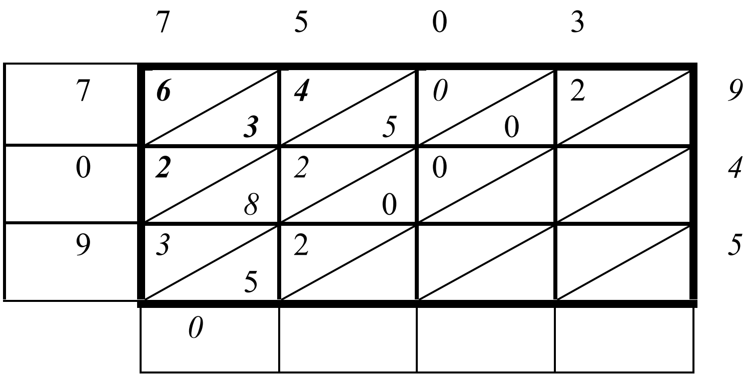
Dans certains cas, l'ordre de grandeur du résultat avec un petit nombre de chiffres significatifs suffit. Dans ces conditions, l'opération peut être limitée à une partie seulement du tableau, à un triangle borné par une diagonale des coefficients du même ordre.

Par exemple, si deux chiffres significatifs sont suffisants, l'élève pourrait penser n'avoir à opérer que sur les chiffres occupant les deux diagonales contenant les puissances de 10 les plus élevées (la $6^{\text{ème}}$ et la $7^{\text{ème}}$ diagonale, en italique gras ci-dessous). Il trouverait alors 69, suivi de cinq zéros : 6 millions 900 mille.

Mais il lui faut évaluer aussi la retenue de la $5^{\text{ème}}$ diagonale : cette retenue est 1, puisque 3 + 8 + 2 + 5 + 0 = 18. Le résultat approché (par défaut à 10^5 près) est donc 70.

Mais le résultat de la $6^{\text{ème}}$ diagonale reste douteux, parce que le résultat de la $5^{\text{ème}}$ diagonale est 18. Si la retenue de la $4^{\text{ème}}$ diagonale était 2, cela affecterait la retenue de la $5^{\text{ème}}$ et donc le résultat de la $6^{\text{ème}}$. L'élève doit lever cette hypothèse et soit évaluer, soit calculer la $4^{\text{ème}}$ diagonale : 5 + 2 + 0 + … + 2 = 9. La réponse approchée est 70 suivi de cinq zéros. L'élève n'a considéré que les chiffres notés et utilisé que ceux en italique.

L'écart au résultat exact est inférieur à 10 000. En fait, il est seulement de 335.

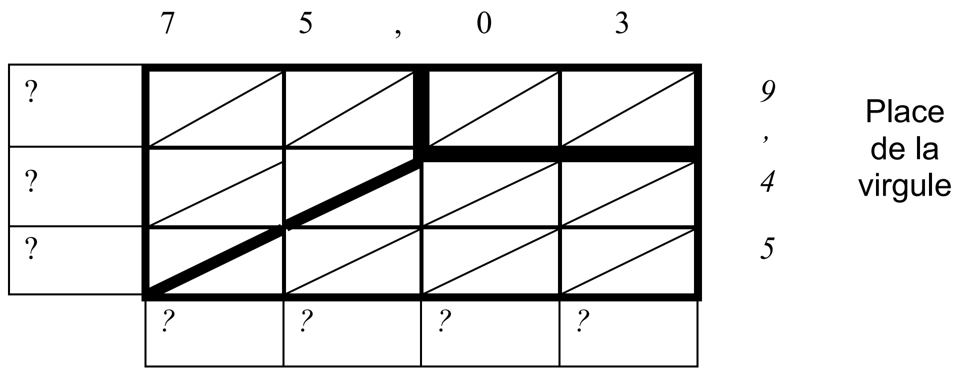


Réponse approchée

Produits de décimaux

La position de la virgule se déduit mécaniquement de la position des virgules des nombres multipliés.

Par exemple : 75,03 × 9,45 = ###,####.



La découverte ou l'explication de cette technique peuvent suivre différentes voies. Mais elles illustrent ou utilisent le fait que : $10^{a} \times 10^{b} = 10^{a+b}$.

L'analyse ergonomique et la comparaison

La place des chiffres du résultat est prévue dès la pose de l'opération, ce qui diminue de beaucoup les erreurs d'ordre de grandeur. Celles-ci ne se produisent qu'au début lors de la recopie des chiffres du produit. Tous les résultats des calculs élémentaires sont écrits, ce qui facilite le contrôle et la correction.

Il y a bien toujours 12 boucles, mais elles sont beaucoup plus simples. Elles peuvent être calculées indépendamment les uns des autres, dans un ordre quelconque.

Il n'y a plus de retenue en cours de calcul d'un produit élémentaire. Toutes les retenues sont reportées dans l'addition qui s'en trouve un peu compliquée par rapport à l'autre méthode : il y a plus de chiffres et les colonnes sont en biais.

Il était facile de calculer et de prévoir les avantages obtenus sur la partie produits avec le modèle évoqué ci-dessus. L'augmentation de difficultés dans l'exécution de l'addition n'avait pas été étudiée de façon théorique. Nos résultats empiriques montraient que l'augmentation des difficultés de l'addition était très faible, et en tout cas très largement compensée par la diminution des erreurs sur les produits partiels.

Le procédé a été enseigné à titre expérimental dans quelques classes de Cours élémentaire et de Cours moyen : quelques leçons réparties sur une semaine, suivies d'usage contrôlé dans les calculs ordinaires de la classe (sans autres exercices spécifiques). Il a été facile de vérifier expérimentalement que l'amélioration de la fiabilité des calculs suivait les prévisions : elle était meilleure que ce qu'apportait la suppression des retenues.

Les améliorations du pourcentage de réussite dépendaient évidemment des performances anciennes des élèves : ceux qui profitaient le mieux des avantages de la « nouvelle méthode » étaient les élèves qui présentaient à l'avance des performances faibles ou moyennes. Ceux qui calculaient déjà très bien avant trouvaient tout de même que cette méthode était plus agréable.

Nous avions craint que le fait de devoir dessiner le tableau n'allonge beaucoup le temps d'exécution des calculs. Il n'en a rien été. Il n'y avait pas d'écart significatif entre le temps de calcul par les mêmes élèves, avant avec la méthode classique et après, avec la méthode en tableau.

Par la suite, le procédé a été enseigné à tous les élèves de l'école pour l'observation Jules Michelet, pendant plus de 20 ans pour étudier les conditions d'insertion de la méthode dans le cursus et les difficultés du développement qui ne peut pas être concomitant.

Les avantages de la méthode se sont régulièrement confirmés : meilleurs résultats des élèves obtenus à moindre temps et efforts des enseignants. L'apprentissage étalé sur la même durée déterminée par les horaires officiels laissait plus de temps pour des activités mathématiques plus riches que des répétitions d'exercices. La pratique du calcul en ligne n'était enseignée qu'un peu plus tard au moment de la mise en place de la division dont nous parlerons plus loin.

Le calcul en tableau que montre la figure ci-dessous devient le calcul en ligne 5 269 × 4 = 21 076, qui s'intègre plus facilement dans la disposition de la division.

	5	2	6	9	×
	2 / 0	0 / 8	2 / 4	3 / 6	4
2	1	0	7	6	

À ce moment, il faut faire l'apprentissage qu'on a évité au début de l'étude de la multiplication. Mais avec des élèves maintenant plus expérimentés, qui savent mieux leurs tables et qui sont donc plus confiants, l'apprentissage se passe bien.

Les enseignants n'ont pas eu de grandes difficultés avec l'environnement, parents ou professeurs du collège. Beaucoup de ces derniers utilisaient même la présence de leurs élèves dans leur classe pour revisiter le sens des opérations. Mais il est apparu qu'il suffisait d'un tout petit nombre de professeurs hostiles, souvent pour de simples raisons de commodité ou par idéologie, pour créer des pressions désagréables sur les élèves.

Pour leur éviter ces difficultés :

- après avoir enseigné d'abord la méthode en tableau qui se prête mieux à l'apprentissage au cours élémentaire (7 à 9 ans),
- après avoir pratiqué le calcul des produits en ligne en ligne pour la division,
- après avoir introduit ensuite les premiers produits de décimaux au CM1 (9 à 10 ans) avec la méthode du tableau, plus facile à comprendre (par exemple, pour expliquer 0,3 × 0, 8),

les enseignants ont fait pratiquer la méthode classique, « pour préparer le collège ».

Finalement, spontanément les élèves disposaient de façon classique les opérations de petite taille, mais dès que la difficulté devenait plus grande, ils reprenaient la méthode en tableau, conscients d'avoir ainsi une pratique plus adaptée et plus raffinée du calcul.

L'invention et l'apprentissage de la méthode par « le sens »

La multiplication de deux entiers peut être définie de plusieurs façons mathématiquement équivalentes, mais principalement :

- Comme une addition répétée du multiplicande, le nombre de fois étant déterminé par le multiplicateur : des deux nombres, l'un compte des objets matériels, l'autre compte des objets d'une autre « nature » et joue plutôt le rôle de fonction ou de rapport.

- Comme le nombre de cases d'objets rangés en un nombre de lignes et de colonnes déterminé par le multiplicande et le multiplicateur : les deux nombres comptent des ensembles de même nombre d'objets.

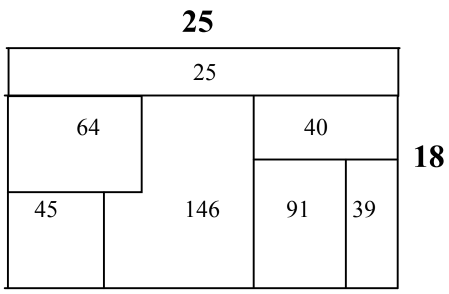
La première opération est dissymétrique, mais elle correspond à une énumération effective. A priori, 3×4 et 4×3 décrivent des énumérations différentes et si la preuve que $3 \times 4 = 4 \times 3$ est assez immédiate, ce n'est pas le cas pour des nombres quelconques. La seconde est symétrique, 3×4 et 4×3 sont les nombres d'une même collection d'objets. Le sens de ces opérations matérielles peut varier suivant les situations, suivant la possibilité d'effectuer facilement les énumérations, etc. Après l'essai de diverses méthodes, éprouvées parfois pendant plusieurs années, celle qui est apparue la mieux adaptée suivait le schéma suivant.

Définition

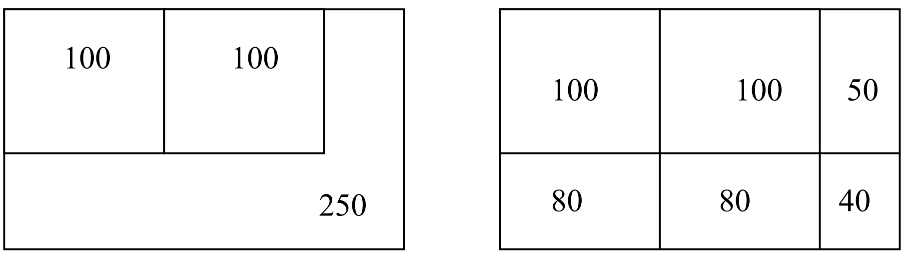
L'écriture de type $a \times b$ est introduite très tôt, pour décrire la quantité obtenue en mettant a lignes de b colonnes d'objets. Elle peut servir à écrire des nombres dont on connaît l'écriture et le nom canonique, mais aussi des nombres dont on ne connaît pas encore le nom. Par exemple, *quinze* × *vingt*. Nous avions déjà utilisé l'addition pour écrire des nombres plus grands que ceux dont on connaît le nom au cours préparatoire. Par exemple, 5 + 5 + 4 + 3 permet d'écrire, dès le mois de novembre, des nombres qui s'appelleront bientôt 17.

Dénombrement des carreaux d'un rectangle au cours élémentaire

- **Première étape** : les élèves ont un papier quadrillé de 25 carreaux sur 18. Pour compter ces carreaux en équipe, ils délimitent des régions disjointes qu'ils comptent l'une après l'autre avant d'additionner le résultat.



- **Deuxième étape** : ils partagent un nouveau rectangle plus grand en carrés de 10 sur 10, comptent les centaines ainsi obtenues, puis les morceaux qui restent.



- **Troisième étape** : le rectangle dont disposent les enfants n’est plus quadrillé, les élèves doivent dessiner le résultat du découpage et calculer les sommes. Voici, par exemple, la représentation d’un rectangle de 35 colonnes sur 23 lignes.

10	10	10	5	
100	100	100	50	10
100	100	100	50	10
30	30	30	15	3

Un rectangle quadrillé, caché dans le bureau, permet toutefois des vérifications et des corrections.

- **Quatrième étape** : les centaines sont regroupées et les représentations ne conservent plus les proportions. Le rectangle ci-dessus devient :

30	5	
600	100	20
90	15	3

- **Cinquième étape** : jusqu’ici, la somme se fait à côté du tableau. Mais bientôt, elle pourra se faire directement sur le dessin du découpage, après la reconnaissance de la position des mêmes coefficients des puissances de 10 sur les diagonales. La disposition est alors celle qui a été présentée plus haut.

Cette méthode permet de conserver le sens de l’opération assez longtemps au cours de l’apprentissage initial. Certes, l’usage ordinaire tend à faire oublier la signification du tableau, mais la méthode rend disponible le recours à son « sens » chaque fois que cette référence est nécessaire. Par exemple, lorsqu’il s’agit de raisonner sur un produit de fonctions ou de polynômes. En particulier, elle permet d’illustrer les produits de mesures et de comprendre le rôle du choix d’une certaine correspondance entre les unités de longueur (ou des composantes) et les unités d’aire (ou de la grandeur produit).

Rapports

Le multiplicateur peut être considéré comme un rapport entre le multiplicande et le produit. De nombreuses situations se formulent ainsi, et la notion de rapport est appelée à un avenir scolaire important.

Fonctions

Bien sûr, d’autres exercices permettent d’explorer d’autres façons de concevoir le produit de deux nombres et de les traduire d’une représentation à une autre, comme addition répétée avec le dédoublement « nombre de fois × mesure ».

De la représentation concrète, les élèves passent au cours moyen à des représentations comme fonction (linéaire), sous des formes diverses. Par exemple :

$$35 \xrightarrow{\times 23}$$

Les représentations et les symboles ne sont pas essentiels pour les élèves, il n'est pas raisonnable de les multiplier. Par contre, ils sont précieux pour le professeur qui doit garder à l'esprit que la même opération recouvre des actions et des états, c'est-à-dire un sens différent.

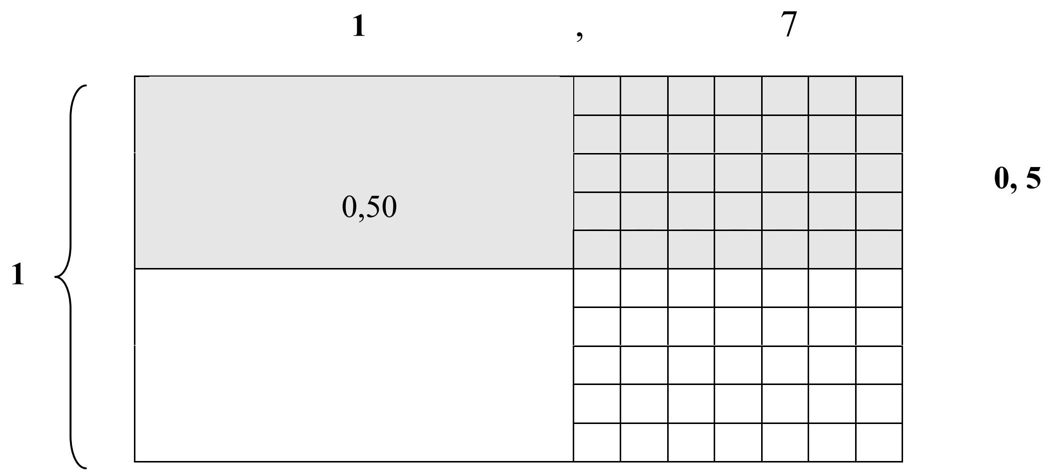
Compositions de fonctions

Parmi les façons de concevoir directement quelque chose qui se traduit par le calcul « 5 × 7 × 4 », certaines suivent l'ordre des calculs, ce sont les plus faciles, d'autres non, et le sens de ces compositions ou transformations de fonctions est plus délicat.

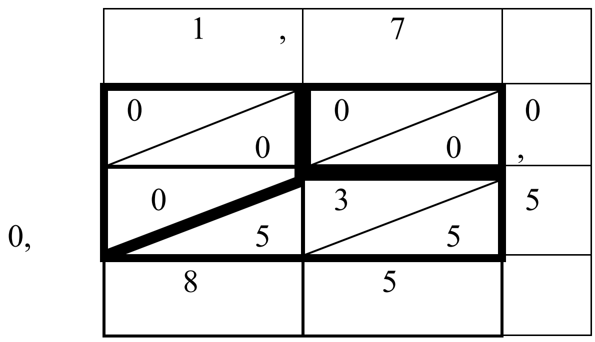
Par exemple : Paul a livré chaque jour, pendant six semaines, 3 litres de lait à Mme Michu. La dame lui demande de doubler la commande pour les six prochaines semaines…

Le produit de deux décimaux

Le produit de deux décimaux prolonge naturellement celui de deux naturels. En revenant au sens initial. Dans le produit de deux naturels, si on considère le tableau comme un rectangle et les côtés comme des longueurs : les cases sont des cases unités, elles sont carrées et ont un côté de longueur 1. Si on partage chaque côté en dix on obtient toujours 100 cases sur lesquelles les mêmes méthodes peuvent s'appliquer. Ainsi, 1,7 × 0,5 se représente concrètement par la partie grisée.



Et le calcul prend la forme :



LES DIVISIONS

Les méthodes, les dispositions, et les sens des divisions euclidiennes sont encore plus variés que celles des multiplications.

Une division « classique » [2]

Un procédé répandu

La disposition ci-dessous, utilisée au Chili, est assez similaire à celle en usage dans d'autres pays, en particulier en France et je crois en Italie, depuis son introduction en Europe par Fibonacci.

Il s'agit de diviser 836 par 2. Les élèves écrivent :

8'	3'	6'	:	2 =	418
- 8					
0	3				
	- 2				
	1	6			
	- 1	6			
		0			

Le projet est écrit en tête, et le quotient en ligne. La division est exacte et par conséquent aussi l'égalité 836 : 2 = 418 (s'il y avait un reste, le signe égal ne se justifierait pas). Mais ce qu'ils disent et font est beaucoup plus complexe car ils appliquent à un cas simple une méthode adaptée à tous les cas.

Les étapes du calcul sont :

- la structuration de l'opération : la pose de l'apostrophe de gauche ;
- l'algorithme : une répétition de boucles formées chacune d'une estimation d'un chiffre du quotient suivie d'une multiplication et de la soustraction du produit obtenu du reste des opérations précédentes – qui peut révéler que la tentative est avortée.

Ici, le résultat des produits est écrit, puis soustrait du reste. Mais on a longtemps exigé des élèves que la soustraction soit imbriquée avec la multiplication réduite : l'élève n'écrit plus ni le résultat des multiplications ni les soustractions. Dans une opération plus complexe, les élèves pourraient être conduits à faire des tentatives infructueuses pour déterminer un chiffre du quotient.

Disposition

Par exemple, pour diviser 14 456 665 par 481, l'élève pose

14 456 665	481	en laissant suffisamment d'espace pour les décalages.

[2] Toutes les méthodes en usage en Europe occidentale sont issues, avec quelques variantes mineures d'un pays et d'une époque à l'autre, de celle proposée par Fibonacci (Léonard de Pise) au XIIème siècle.

Estimation du premier chiffre du quotient

Ensuite, il cherchera à prendre, dans le dividende, le plus petit nombre de chiffres qui constituent un nombre plus grand que le diviseur, ici quatre (1 445). Il se demandera combien de fois il peut enlever le diviseur (481) de ce nombre et effectuera une approximation par troncature : « Dans 14 combien de fois 4 ? 3 fois ». Mais il aura un doute, parce que 481 est près de 500. « Dans 14, combien de fois 5 ? 2 fois seulement. » Certains élèves écriront au quotient 3, mais d'autres écriront 2 légitimement.

Calcul du premier produit à soustraire

L'élève effectue alors en ligne la multiplication :

3 × 481 = 1443 pour les uns qui écrivent leur résultat sous 1 445,

2 × 481 = 962 pour les autres qui font de même.

Ces derniers effectuent la soustraction (1445 – 962 = 483) et constatent tristement qu'ils auraient pu enlever 481 une fois de plus ! Ils doivent rayer leur quotient, et deux termes de leur soustraction, pour reprendre au début et rejoindre leurs camarades.

Le calcul se présente alors ainsi sous la **forme développée** :

14 456 665	481
–14 43	3
00 02	

Et ainsi sous la **forme réduite traditionnelle** :

14 456 665	481
00 02	3

Habituellement, l'élève doit ne descendre qu'un chiffre de plus et recommencer le processus, mais parfois le chiffre quotient est 0. Alors, il faut « descendre » deux chiffres. C'est le cas ici. Lorsqu'après plusieurs tentatives infructueuses, les colonnes s'allongent, les alignements se perdent. Or ici, il faut réitérer cette opération et écrire plusieurs zéros successivement :

14 456 665	481
–14 43	3 0 0
00 026 66	

14 456 665	481
00 026 66	3 0 0

L'élève cherche alors : « En 2 666, combien de fois 481 ? En 266 combien de fois 48, en 26 combien de fois 4 ? » 6 fois, essaiera-t-il.

« En 266 combien de fois 50 ? » diront d'autres qui essaieront alors 5 fois…

14 456 665	481
–14 43	3 0 0 5
00 02	
00 026 66	
– 24 05	
02 61	

14 456 665	481
00 026 66	3 0 0 5
02 61	

Et pour trouver le dernier chiffre, ils devront à nouveau effectuer 481 × 5.

Finalement l'opération se présentera ainsi :

14 456 665	481
–14 43	3 0 0 5 5
00 02	
00 026 66	
– 24 05	
026 15	
– 24 05	
02 10	

14 456 665	481
00 026 66	3 0 0 5 5
02 615	
0 210	

Les propriétés ergonomiques de cette méthode

L'étude ergonomique empirique de cette forme de division montre d'abord l'exacerbation des facteurs déjà relevés pour la multiplication. La division conjugue les difficultés de la multiplication en ligne et des reports internes de retenues, avec celles de la soustraction et de ses retenues. La connaissance des produits y est utilisée sous des contraintes beaucoup plus sévères qui exigent un entraînement beaucoup plus intense. Nous ne reprendrons pas cette étude ici. En effet, l'ordinogramme de la division démontre une complexité structurelle propre qui a des conséquences spécifiques.

Le *principal nouveau facteur de complexité didactique* et de difficultés provient des tentatives pour déterminer un chiffre du quotient. L'élève doit écrire ses calculs avant de savoir s'ils conviennent ou non. Or, ces « tentatives » ne sont pas des « erreurs », elles sont des étapes normales, inévitables dans une approximation progressive d'un résultat. On ne sait que le quotient est exact que par la vérification du fait que le produit du chiffre tenté au quotient, par le diviseur, est inférieur au reste, mais ne lui est pas inférieur d'une quantité égale ou supérieure au diviseur. Les tentatives sont des essais légitimes. À la plume, la tentative malheureuse doit être biffée, ce qui gâche irrémédiablement l'ordonnance du calcul, elle décale les chiffres et elle est interprétée finalement comme une maladresse et même comme une faute. Pour éviter ce résultat, l'élève doit prévoir le bon chiffre par un calcul mental encore plus complexe. Ainsi, une simple disposition de chiffres a des conséquences didactiques et psychologiques assez dommageables, et le nombre des opérations à faire devient aléatoire et assez élevé.

Le deuxième facteur d'erreurs est la perte de l'alignement des colonnes dès que l'opération s'allonge.

Le caractère le plus incertain du quotient est de ce fait le nombre de chiffres. Les élèves qui pensent à – et qui savent – contrôler l'ordre de grandeur du résultat peuvent corriger leurs erreurs. Les autres ont souvent de mauvais résultats.

L'élève doit souvent effectuer plusieurs fois et inutilement les mêmes calculs lorsque plusieurs chiffres du quotient sont identiques.

La complexité et la difficulté de l'algorithme font que les élèves doivent apprendre « formellement » et parfaitement l'exécution des sous-programmes avant d'effectuer les opérations complètes. L'exécution du calcul est durcie par le fait qu'il n'est pas facile d'ajuster ou de corriger un sous-programme. De ce fait, l'apprentissage doit être plus exigeant : il est très important de réussir complètement chaque étape avant de passer à la suivante. En s'accumulant, les imprécisions ou les incertitudes, produisent des taux d'échecs irrémédiables.

L'organisation de l'apprentissage

L'étude de la division ne peut commencer qu'après celle de la multiplication en ligne. Ainsi, l'ordre d'apprentissage est celui de l'inclusion des sous-programmes :

- La division d'un nombre de deux chiffres par un nombre d'un chiffre, sans reste puis avec reste : étude des tables, disposition, vocabulaire (dividende, diviseur, quotient, reste) ;

- La division et la numération décimale : division par 10, 100 1000, d'un naturel, d'un décimal ;

- La division où le diviseur n'a qu'un chiffre : initiation à une succession de divisions partielles simples ;

- Le diviseur comprend plusieurs chiffres, mais le quotient n'en a qu'un : initiation à la recherche d'un chiffre du quotient par troncature et approximation.

- Diviseur et quotient ont plusieurs chiffres, initiation à la recherche des termes de la première division partielle, réitérations du cas précédent.

Quelques propriétés de la division peuvent être étudiées et justifiées par référence à la multiplication et par l'induction à partir d'un calcul. Le reste est une question d'entraînement et d'usage.

Les « sens » des divisions

La recherche du quotient s'inscrit dans divers types de problèmes qui donnent à « la division » des sens et un vocabulaire différents (Brousseau, 1988). Il en est recensé 22, mais les plus importants sont :

- Pour *partager* : ce terme recouvre des pratiques très diverses : partages égalisés (on fait un nombre déterminé de parts qu'on égalise ensuite), attributions répétées de parts arbitraires mais égales jusqu'à épuisement (on cherche la valeur d'une part), distributions régulières (on cherche le nombre de parts), répartitions égales de quantités variables, etc. Nous tenons ces différentes pratiques pour des modalités évidemment équivalentes ;
- Pour *trouver le terme inconnu d'un produit* ;
- Pour *trouver l'image de 1 dans une application linéaire* (le prix de l'unité par exemple), ou le coefficient linéaire ;
- Pour *trouver l'antécédent d'une valeur dans une application linéaire* ;
- Pour *trouver le reste d'une division ou d'une soustraction répétée* (« La course à vingt », Brousseau, 1998) ;
- Pour *trouver un « rapport », un taux*, etc. ;
- Pour *représenter ou approcher une fraction par un décimal.*

Les sens et les pratiques sont différents aussi suivant d'autres caractères :

- La structure mathématique dans laquelle sont pris les nombres (division euclidienne dans les naturels, division dans les rationnels, division dans les réels, etc.) contribue à donner des sens et des résultats différents ;

- La taille des nombres : la division de 0,3 par 0,8 n'est pas comprise comme celle de 3 par 8 ni comme celle de 30 par 8.

D'une façon générale, tous ces sens sont différents et c'est l'opération et le vocabulaire qui les unifient.

Cela crée d'importantes difficultés didactiques, les enseignants étant portés à confondre ce qui leur est familier avec ce qui devrait être évident pour les élèves. Ils s'attendent à ce que les élèves comprennent, apprennent et réutilisent « la division » qu'on leur enseigne dans des rôles et avec des sens qui sont en fait très différents.

La division ergonomique

La méthode que nous venons de décrire est utilisée en France sans modifications sensibles depuis le moyen âge et au moins depuis le 16$^{\text{ème}}$ siècle. Nous avons cherché une méthode mieux adaptée aux possibilités humaines, comme nous l'avons fait pour la multiplication, sans nous référer à aucune méthode existante. Nous avons constaté, après coup, que les méthodes utilisées dans de nombreux pays, comme les pays anglo-saxons ou la Finlande, sont très proches de cette méthode ergonomique. Il aurait suffi de comparer nos traditions avec celles de nos voisins car les avantages sont évidents.

Il ne s'agit pas seulement de diminuer les difficultés d'exécution et la fiabilité du calcul, mais aussi de soulager l'apprentissage en diminuant les répertoires, et en assouplissant les conditions d'acquisition.

Le procédé de calcul

Il diffère très peu, dans son principe, de la méthode de Fibonacci, mais il ménage des contrôles et des possibilités importantes pour l'apprentissage.

Reprenons la même opération : 14 456 665 divisé par 481.

L'espace de travail de l'élève est partagé en trois zones :

- À gauche, la zone des essais de multiplications avec en tête le *diviseur* (zone blanche) ;

- À droite, un tableau ouvert comprenant un nombre de colonnes égal au nombre de chiffres du dividende. Cette zone est elle-même séparée en deux par un trait horizontal :

    - La zone du quotient ou de l'addition des quotients partiels qui se trouve au-dessus du trait (zone gris foncé) ;

    - La zone des soustractions et du calcul des restes, au-dessous de ce trait avec en tête le *dividende* qui fixe le nombre de colonnes (zone gris clair). Dans le cas de calcul dans les décimaux, il faut ménager une place à droite de la zone des soustractions.

Dans notre exemple, nous avons donc la disposition ci-dessous :

	Zone du quotient							
Zone du diviseur (481)								
Zone de calcul des produits	1	4	4	5	6	6	6	5
	Zone des soustractions							

Première phase de l'exécution ordinaire

Comme dans la méthode précédente, recherche du nombre de chiffres minimum dans le dividende pour pouvoir soustraire au moins une fois le diviseur 481. Il faut prendre les quatre premiers chiffres, on obtient 1 445.

Deuxième phase : estimation du premier chiffre du quotient

« En 14, combien de fois 4 : il y va trois fois » ou « En 14, combien de fois 5 : peut-être 2 seulement, essayons 3. »

Troisième phase : multiplication d'essai

Les multiplications d'essais se font dans la partie blanche : 481 × 3 = 1 443.

L'élève qui pense que l'on ne peut soustraire le diviseur que deux fois trouve : 481 × 2 = 962.

Alors, soit il peut estimer que le reste sera trop grand, et il écrit, au-dessous de sa multiplication par deux, la multiplication par 3, soit il se lance inconsidérément dans la soustraction, nous verrons plus loin que rien n'est perdu sinon un peu de temps, contrairement à la méthode précédente.

Quatrième phase : soustraction du plus grand produit

				3				
481 × 3 = 1 443 (inutile de répéter 481)	**1** -1	**4** 4	**4** 4	**5** 3	**6**	**6**	**6**	**5**
	0	0	0	2				

Le reste partiel est 2.

Cinquième phase

Le quotient 3 convient, l'élève peut l'écrire définitivement dans la partie du quotient (gris foncé) **dans la colonne des unités de sa soustraction**.

L'élève peut déjà donner :

- le nombre de chiffres du résultat : c'est le nombre des colonnes qui ne sont pas à gauche du premier chiffre obtenu, 3.
- Et, par conséquent, une estimation du quotient : entre trente mille et 39 999.

Sixième phase : écriture du reste utile

				3				
481 × 3 = 1 443	**1** -1	**4** 4	**4** 4	**5** 3	**6**	**6**	**6**	**5**
	0	0	0	2	6	6	6	

L’élève « descend » un nombre de chiffres suffisant pour former un nombre plus grand que le diviseur. Ce reste est ici 2 666.

Septième phase : réitération de la phase 2

Estimation du quotient partiel : « Dans 2 666, combien de fois 481 ? » ou « Dans 26, combien de fois 4 ? » Essayons 6 fois.

Huitième phase

Multiplication d’essai à gauche : 481 × 6 = 2 886, ça ne va pas (un élève entraîné doublera de tête le résultat obtenu la première fois : 1 443 × 2).

Deuxième multiplication d’essai : 481 × 5 = 2 405, l’élève est sûr de pouvoir effectuer la soustraction.

Neuvième phase

Nouvelle soustraction dans le tableau : 2 666 – 2 405 = 261.

				3				
481 × 3 = 1 443 × 5 = 2 405	**1** -1	**4** 4	**4** 4	**5** 3	**6**	**6**	**6**	**5**
	0	0	0	2 -2	6 4	6 0	6 5	
					2	6	1	

Dixième phase

Écriture du quotient partiel 5 dans la colonne des unités de la soustraction partielle, et occupation des colonnes vides où le quotient partiel est 0.

				3			**5**	
481 × 3 = 1 443 × 5 = 2 405	**1** -1	**4** 4	**4** 4	**5** 3	**6**	**6**	**6**	**5**
	0	0	0	2 -2	6 4	6 0	6 5	
					2	6	1	

Onzième phase : réitération des phases 2 à 6 ou 7 à 9

				3	**0**	**0**	**5**	
481 × 3 = 1 443 × 5 = 2 405	**1** -1	**4** 4	**4** 4	**5** 3	**6**	**6**	**6**	**5**
	0	0	0	2 -2	6 4	6 0	6 5	
					2	6	1	5

Manifestement, la multiplication d'essai précédente (× 5) convient : son résultat peut être utilisé.

				3	**0**	**0**	**5**	**5**
481 × 3 = 1 443 × 5 = 2 405	**1** -1	**4** 4	**4** 4	**5** 3	**6**	**6**	**6**	**5**
	0	0	0	2 -2	6 4	6 0	6 5	
					2 -2	6 4	1 0	5 5
					0	2	1	0

Les sécurités pour l'exécution maladroite

Revenons à notre débutant qui pose la soustraction d'un nombre « trop petit ». Et qui écrit dans la zone des quotients le quotient partiel « 2 », dans la colonne où il a placé les unités de sa soustraction.

Le nombre de chiffres du quotient est fixé et connu : 5 chiffres.

				2				
481 481 × 2 = 962	1 -	4 9	4 6	5 2	6	6	6	5
		4	8	3				

En appliquant la méthode, l'élève voit alors qu'il peut retrancher 481 de 483 : il le fait,

483 – 481 = 002. Et comme il a enlevé 481 une fois, il doit monter son « 1 » dans la colonne des unités de sa soustraction, c'est-à-dire la 4ème, où il a déjà placé un « 2 ». Il place son « 1 » au-dessus et voit qu'il aurait pu soustraire 3 × 481, d'un coup.

Ensuite il continue comme précédemment.

				1 **2**				
481 481 × 2 = 962	1 -	4 9	4 6	5 2	6	6	6	5
	-	4 4	8 8	3 1				
		0	0	2				

À chaque ligne, il peut abaisser tous les chiffres qui restent (ou ne le faire que lorsque c'est indispensable).

				1 2				
481 481 × 2 = 962	1 -	4 9	4 6	5 2	6 0	6 0	6 0	5 0
	 -	4 4	8 8	3 1	6 0	6 0	6 0	5 0
		0	0	2	6	6	6	5

Pour pouvoir soustraire 481, il doit alors prendre les chiffres jusqu'à la 7ème colonne : 2 666.

Dans la partie gauche, il cherche le nombre maximum en faisant plusieurs calculs, plus économiques qu'un découpage en quotients partiels trop petits. Il essaie 4 fois, 5 fois et 6 fois.

				1 2				
481 481 × 2 = 962 481 × 4 = 1 924 × 5 = 2 405 × 6 = 2 886	1 -	4 9	4 6	5 2	6	6	6	5
	 -	4 4	8 8	3 1				
		0	0	2	6	6	6	5

Il voit que 2 405 convient, il effectue la soustraction et il monte le quotient partiel « 5 » dans la colonne des unités de sa nouvelle soustraction (la 7ème). Les colonnes laissées vides devront recevoir des zéros.

Et pour terminer son opération, il peut réutiliser immédiatement son résultat.

481 481 × 2 = 962 481 × 4 = 1 924 × 5 = 2 405 × 6 = 2 886				**1 2**			**5**	
	1 -	4 9	4 6	5 2	6	6	6	5
	 -	4 4	8 8	3 1				
		0	0 -	2 2	6 4	6 0	6 5	5
				0 -	2 2	6 4	1 0	5 5
						2	1	0

Finalement, il effectue la somme des quotients partiels qu'il a eu la maladresse de ne pas trouver du premier coup.

481
481 × 2 =   962
481 × 4 = 1 924
× 5 = 2 405
× 6 = 2 886

			3	**0**	**0**	**5**	**5**
			1 **2**			**5**	**5**
1 -	4 9	4 6	5 2	6	6	6	5
-	4 4	8 8	3 1				
	0	0 -	2 2	6 4	6 0	6 5	5
			0 -	2 2	6 4	1 0	5 5
					2	1	0

La division dans les décimaux

Nous avons étudié, dans « Rationnels et décimaux » (Brousseau, 1986), comment faire comprendre et « inventer » aux élèves les calculs des fractions et des décimaux. La disposition auxquelles ils parvenaient, en mettant en ordre leurs calculs auxiliaires progressifs, était celle que nous avons indiquée ci-dessus. Pour chercher le nombre de dixièmes puis de centièmes contenus dans le reste, les élèves écrivent le nombre de dixièmes du reste en lui concaténant un zéro, et continuent l'opération comme pour les entiers. Ils écrivent les parties décimales du quotient, à gauche du quotient lui-même, après une virgule.

Comparaison avec la disposition utilisée en Finlande

468 : 18

			2	6
1	9	4	6	8
	-	3	6	
		1	0	8
	-	1	0	8
				0

À part le dividende qui se trouve collé au diviseur, les dispositions sont identiques.

L'apprentissage par optimisation

Comme pour la multiplication, cette méthode de division peut traduire directement les tout premiers pas des élèves, qui cherchent par exemple combien on peut distribuer de paquets de 18 gâteaux avec 6 742 gâteaux sortis chauds du four. Les soustractions fastidieuses de 18 gâteaux sont bien vite remplacées par des soustractions de 36, puis de 180 et même de 1 800 gâteaux. La méthode finale n'est que la traduction de ces raisonnements.

Évidemment, il faut que le professeur marque bien les progrès et rejette les tâtonnements initiaux (« ne calculez plus comme des bébés ! ») pour exiger la méthode optimale. Mais pour la compréhension, ou quand on est un peu fatigué dans une opération longue, ou pour des vérifications quand il y a une erreur, il est bien commode de pouvoir, posément, vérifier ce qu'on a fait en explicitant les calculs intermédiaires.

La forme d'apprentissage que permet cette méthode suppose que le professeur exerce une pression constante sur les élèves pour qu'ils améliorent « leur style » mais elle laisse place à l'essentiel, même avec les élèves lents ou faibles. Tous font ce qui est nécessaire à tous, chacun avec ses talents (comme en sport collectif scolaire).

Cette méthode peut être enseignée aux élèves qui ont appris la méthode standard, comme un moyen de contrôle en cas d'opération compliquée, comme moyen de comprendre ce qu'ils font dans la méthode standard, ou comme moyen de se rattraper d'un échec avec cette méthode.

L'analyse ergonomique et la comparaison

Il est clair que la disposition demande un peu de temps, mais même si le tracé des colonnes n'est pas élégant, cela a beaucoup moins d'importance que les erreurs que l'on évite ainsi. Globalement, le temps des recomptages et des vérifications dans la méthode classique est tel que nous n'avons pas observé d'allongement significatif du temps de calcul.

Certes, les résultats des produits sont écrits deux fois ce qui peut paraître ralentir le travail et parfois être une source d'erreurs de recopie.

Mais les avantages sont très importants et très clairs : toutes les tentatives sont acceptées et ne perturbent pas le travail, très vite les élèves utilisent les calculs d'essai pour éviter d'avoir à effectuer une addition des quotients partiels. Tous les calculs sont écrits. On retrouve la même facilité de contrôle et de correction qu'avec la multiplication.

La méthode permet de conserver le sens des opérations successives effectuées. Il est même possible d'établir un lien de cette opération avec le calcul de la multiplication en tableau.

Nous avons montré que cette disposition permettait aux élèves l'extension de la méthode au calcul dans les rationnels, même dans des situations qui conféraient à ces opérations un sens très différent du sens initial : encadrement d'un décimal (Brousseau, 1987) ou recherche du reste (« La course à vingt », Brousseau, 1998).

Mais les propriétés que nous avons trouvées les plus intéressantes sont les propriétés relatives à l'apprentissage. La souplesse de la méthode permet aux élèves lents de poursuivre et de parachever leur apprentissage (par exemple des tables) dans les exercices et problèmes, sans être immédiatement disqualifiés par leurs difficultés.

Conclusions

Nous nous sommes fondés sur les observations suivantes :

- L'enseignement des opérations numériques élémentaires et des occasions de s'y exercer, absorbait, vers les années 30, une très grande partie du temps de la scolarité primaire (près de 400 heures sur 5 ans) ;
- Ce fait s'explique par la complexité des algorithmes et leurs imperfections, par le niveau de rapidité et de fiabilité qui était requis et par les conceptions didactiques classiques de l'époque qui dans ces conditions conduisaient les enseignants à choisir des méthodes d'apprentissage extrêmement coûteuses ;
- Malgré cet effort considérable, les méthodes de calcul enseignées aux élèves en France n'étaient apprises que par une partie de la population, bien qu'à cette époque, ces calculs étaient très couramment employés dans toutes sortes d'activités sociales visibles par les élèves.

Les expériences auxquelles nous nous sommes livrés ont montré :

1. Qu'il est possible d'améliorer les résultats de cet enseignement du calcul en enseignant les méthodes « ergonomiques de multiplication et de division » aux élèves qui pratiquent déjà les méthodes classiques (en CM2). On observe en deux ou trois mois une nette augmentation du pourcentage de réussite globale, surtout sur les opérations longues, sans que diminue sensiblement la vitesse d'exécution. L'amélioration est plus importante pour les élèves « faibles » et « moyens ».
2. Qu'il est possible d'enseigner ces modes de calcul des multiplications et des divisions, directement à des élèves de l'école primaire, sans enseigner d'abord la méthode classique. Au contraire, il leur est facile de passer de ce mode de calcul à l'ancien sur les opérations courtes.
3. Qu'il est possible d'enseigner le calcul par des méthodes de découverte et d'optimisation moins contraignantes et plus intéressantes pour les élèves et plus rapides. Certes, il faut que les calculs des sommes et des différences soient bien assurés, mais les niveaux prérequis de connaissance des tables et de l'exécution des algorithmes sont moindres, l'apprentissage peut se poursuivre rapidement par adaptation signifiante plus attrayante que le « drill ».
4. Les résultats des élèves, contrôlés régulièrement, n'ont pas été moindres qu'avec les anciennes méthodes et beaucoup de temps était gagné, au moins une centaine d'heures. Ce temps épargné a permis d'entreprendre l'étude de notions mathématiques plus savantes et une initiation à l'activité mathématique très intéressante pour les élèves.
5. La conduite pédagogique des situations didactiques nécessaire est plus délicate et plus fatigante pour les professeurs, mais elle leur a paru aussi plus attrayante, pour eux et pour les élèves.
6. Pourtant, il y a des risques liés aux pratiques des enseignants très lourdement chargées de behaviorisme, et à l'insuffisance de leur culture didactique écrasée par des considérations pédagogiques générales et drastiques, par des injonctions psychologiques infondées et par une idéologie scolaire individualiste très néfaste à la transmission et à l'évolution normale d'une culture.

- Le risque de voir les apprentissages durer autant de temps qu'avec les méthodes classiques n'est pas négligeable. En particulier, si les professeurs veulent à la fois faire parcourir les étapes intermédiaires de la découverte mais en les enseignant chacune comme les étapes de l'apprentissage classique c'est-à-dire comme un savoir définitif nécessaire pour la suite (par des méthodes de répétition par exemple).
- Le risque de voir les élèves s'enliser dans la reproduction sans fin des lourdes premières méthodes de découverte et de ne pas atteindre la vitesse espérée si le professeur ne peut pas exercer une pression suffisante pour provoquer les adaptations et obtenir l'émulation nécessaire.

Même très justifiée, la modification d'une méthode classique, surtout si elle est très ancienne, est un projet presque impossible à réaliser. L'exemple de la régularisation du calcul oral en France le prouve. Pendant presque deux cents ans, il a été souhaité sans succès de remplacer « soixante-dix, quatre-vingt et quatre-vingt-dix » par des dénominations plus régulières et moins ridicules comme « septante, huitante (ou octante) et neufante (ou nonante) ». Cette réforme a été longtemps recommandée dans les commentaires officiels, elle n'a jamais été appliquée dans la plupart des régions. Elle ferait pourtant gagner deux mois aux élèves du cours préparatoire et éviterait que ne commence la dérive de quelques-uns d'entre eux. Elle ne demande pas de moyens nouveaux, aucun matériel, aucun recyclage des professeurs, elle a été théoriquement et expérimentalement justifiée de façon irréfutable. Et surtout, elle a été réussie par plusieurs pays ou régions francophones. Alors pourquoi ? Pourquoi des propositions réalisables, fondées sur des résultats scientifiques établis et surtout prenant en compte tout le fonctionnement microdidactique du système trouvent-elles des opposants farouches, lesquels n'hésitent pas à adhérer à de grands projets idéologiques flous et incertains, qui ne sont basés, par des inférences douteuses, que sur des opinions ou sur l'importation en didactique de connaissances partielles ? Pourquoi croire que les professeurs pourront restaurer des méthodes de calcul maladroites, d'exécution inutilement compliquée, dont l'apprentissage est pénible pour une grande partie de la population, dont l'exercice rapide est aujourd'hui totalement inutile, et que les élèves ne voient presque jamais personne utiliser. Pourquoi professer la bêtise dès qu'il s'agit d'enseignement élémentaire ?

Il me semble que c'est parce que nos connaissances de la façon dont les sociétés transmettent leurs cultures, malgré, et à cause, de plusieurs millions d'années de pratique, reste mystérieuse et comme tabou. La seule rationalisation naïve ne suffit pas. Les études d'ethnomathématique et de macro didactique débutent. Les bases scientifiques de la didactique sont encore trop peu connues. L'application directe et naïve de ses résultats est probablement prématurée. Mais il est urgent que la didactique se développe d'abord comme science, par l'étude scientifique de ses fondements, par la confrontation et par des vérifications plus rigoureuses de ses résultats, qu'elle ne soit pas immédiatement condamnée à prouver sa valeur de vérité dans de soi-disant « applications » qui sont en fait des défis pour l'instant hors de sa compétence, que les institutions intermédiaires indispensables à son exercice soient mieux assurées, plus actives et sachent mieux contrôler leur impatience.

Alors, l'avenir dira si l'amélioration progressive de l'enseignement, fondée sur des recherches scientifiques et sur des preuves expérimentales et respectueuses des lois (des équilibres) du système scolaire, peut remplacer utilement les réformes brutales, idéologiques et aveugles que nous connaissons aujourd'hui.

Bibliographie

BROUSSEAU G. (1986) *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse de doctorat d'état et annexes. Bordeaux 2. Disponible ne ligne : http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00471995/fr/

BROUSSEAU N. & G. (1987) *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. IREM de Bordeaux.

BROUSSEAU G. (1988) Représentations et didactique du sens de la division. In VERGNAUD G., BROUSSEAU G., HULIN M. (eds.) *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques* (pp. 47 – 64). Actes du Colloque de Sèvres. Éditions La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU G. (1998) *La théorie des situations didactiques*. Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble.

GOBAIN P. (1711) *L'arithmétique aisée*. Éditeur M. Chappuis.

MICHELOT A. (1966) *La notion de zéro chez l'enfant*. Vrin.

Textbooks « Tuhattaituri » (Helsinki, Otava), de 2003 à 2005, avec l'aimable aide de George Malaty, Université de Joensuu Suomi.

Voir également http://pagesperso-orange.fr/daest/Pages perso/Brousseau.htm