« IL NE FAUT PAS DÉSARTICULER UN NOMBRE »
MISE EN ŒUVRE DU DISPOSITIF CESAME EN PRIMAIRE

Maryse MAUREL & Catherine SACKUR
Chercheures, GECO-CESAME

Jean-Philippe DROUHARD
Enseignant-chercheur, IUFM de Nice, GECO-CESAME

Odile PERRIOLLAT & Florence CIARAVOLA
Professeures des Écoles, École des Magnolias, Nice

Cet article relate et analyse des séances que nous avons menées à l'école primaire en CM1 et CM2. Les séances décrites ne sont pas des séances didactiques à proprement parler ; ce sont des séances de recherche dans lesquelles nous souhaitons répondre à un certain nombre de questions posées par les recherches du groupe CESAME. Avant d'exposer ces questions, nous allons donner un très bref aperçu des travaux de ce groupe.

L'équipe CESAME, acronyme de « Construction Expérientielle du Savoir et rôle d'Autrui dans les Mathématiques Enseignées », reprend une problématique proche de celle du débat scientifique de Legrand (Legrand, 1993) et souhaite donner aux élèves la responsabilité de la décision du vrai et du faux en mathématiques, en les affranchissant de toute soumission à l'autorité du maître.

À cet effet, nous avons conçu un dispositif expérimental, utilisé au lycée (Sackur & Maurel, 2000) et en première année d'université où il a été aussi utilisé comme dispositif d'enseignement (Maurel, 2001 ; Maurel & *al*, 2003). Les bases théoriques du dispositif se trouvent dans les recherches CESAME exposées dans l'article de Sackur & *al*. (2005). Pour résumer, on peut dire que pour faire des mathématiques, les élèves doivent avoir des connaissances telles que définitions et théorèmes que nous appelons les connaissances d'ordre I ; ils doivent connaître des règles de logique et les règles qui régissent les écritures symboliques telle que l'écriture décimale et des règles sur le rôle de la démonstration, l'utilisation des théorèmes et des définitions (connaissances d'ordre II). Dans notre modèle, les connaissances d'ordre II ne peuvent pas se transmettre qu'avec des mots, les élèves doivent en faire l'expérience.

Nos travaux utilisent aussi sur la notion de connaissance locale (Léonard et Sackur, 1991). Une connaissance locale est une connaissance mathématique juste du point de vue mathématique, dans un certain domaine dont les élèves ignorent les limites. Ils peuvent alors utiliser cette connaissance en dehors de ses limites de validité ce qui produit des erreurs. Un exemple simple est le suivant : « quand on multiplie, ça augmente », valable pour les nombres plus grands que 1. Si on multiplie par 0,5, le résultat obtenu est plus petit que le nombre de départ. La notion de connaissance locale est intéressante à plusieurs points de vue :

- elle montre la prégnance des connaissances anciennes et la difficulté qu'ont les élèves à acquérir des connaissances nouvelles ;
- elle montre que les élèves construisent des procédures de traitement qui ne sont pas nécessairement en relation avec ce qui leur a été enseigné sur une notion nouvelle. Ainsi, nous verrons plus loin, qu'une règle, que nous appelons règle 1, utilisée par les élèves pour comparer des nombres décimaux est basée sur l'ordre des entiers et ne découle pas du tout de l'introduction des décimaux par les fractions décimales.

Nous utilisons ce terme de connaissance et non le terme de « conception » pour montrer que ces connaissances sont de nature mathématique, qu'il est possible de les rattacher à des connaissances mathématiques correctes et de déterminer, pour chacune d'elles, un domaine de validité. Pour nous les procédures sont incluses dans les connaissances.

Un dispositif qui permet aux élèves d'utiliser et de mettre à jour leurs connaissances locales renseigne les enseignants bien au-delà des erreurs qu'ils observent et dont l'origine peut rester obscure. Nous en avons fait l'expérience à tous les niveaux d'enseignement et ce travail nous en fournit des exemples supplémentaires.

Pour ces raisons, nous n'utilisons pas le dispositif CESAME pour introduire une notion nouvelle mais pour faire travailler les élèves sur des notions qu'ils ont apprises auparavant.

Cette nouvelle recherche avait pour but de répondre à des questions sur l'utilisation du dispositif en cycle 3 du primaire.

Les élèves sont-ils en mesure d'identifier des procédures différentes dans la résolution d'exercices, au-delà de la différence des résultats ? Quels sont les arguments mathématiques qu'ils apportent pour décider du vrai et du faux, sans recourir aux arguments d'autorité : « c'est la règle, c'est comme ça qu'on a appris » ? Sont-ils en mesure de piloter le travail avec leurs connaissances mathématiques à eux ?

Les enseignantes ont-elles la possibilité de s'approprier un dispositif qui laisse aux élèves la liberté de choix sur les questions qu'ils traitent et la liberté des arguments, sans faire référence aux méthodes habituellement utilisées pour introduire ou traiter une question ? S'agissant de connaissances anciennes, les élèves n'utilisent pas nécessairement les exemples qui ont servi à l'introduction de la notion. Il est essentiel que les enseignantes puissent laisser les élèves libres sans leur imposer d'une quelconque façon un point de vue étranger à leur raisonnement.

Quels sont les effets à court, moyen et long terme du dispositif dans la classe : sur les apprentissages et sur la qualité des débats entre les élèves dans les séquences qui n'utilisent pas le dispositif, ainsi que sur le rôle dévolu à l'enseignante en tant que garante de la validité mathématique des résultats obtenus ?

Le dispositif permet-il d'identifier des connaissances locales inconnues des enseignantes et à l'origine d'erreurs chez les élèves?

Le dispositif CESAME

Nous exposons dans ce paragraphe le déroulement du dispositif tel qu'il a été conçu dans le cadre de nos recherches et nous indiquerons au fur et à mesure, les difficultés que nous avons rencontrées pour sa mise en œuvre au cours moyen. Le but du dispositif est double :

- il vise, d'une part, à corriger des connaissances locales. C'est pourquoi nous travaillons sur des connaissances anciennes ;
- il vise, d'autre part, à faire rencontrer aux élèves la réalité mathématique par confrontation avec autrui (Sackur & *al*., 2005). Cette réalité résiste au même titre que résiste la réalité physique. On ne peut pas modifier un énoncé mathématique et son contenu n'est jamais le résultat d'un consensus ou d'un vote. C'est cette réalité qui permet de décider du vrai et du faux et non l'autorité du maître.

Notre dispositif expérimental s'inspire du débat scientifique de Legrand avec des finalités différentes : nous souhaiterions que chaque élève, et pas seulement le groupe comme chez Legrand, ait une activité mathématique proche de l'activité d'un mathématicien. Nous essayons de travailler, non pas pour un groupe d'élèves mais pour chaque élève individuellement car nous pensons que nous avons à apprendre de la façon dont chacun pense et construit ses connaissances. C'est cela qui nous permet de travailler sur les connaissances locales, de les identifier et de pouvoir agir pour les modifier. C'est le parcours personnel de chaque élève qui nous intéresse, ce que nous appelons sa singularité. Une autre différence avec le débat scientifique de Legrand est que nous travaillons sur des notions anciennes et non dans la construction de nouvelles connaissances.

Le débat scientifique de Legrand donne aux élèves la responsabilité des mathématiques construites dans la classe. Cela se fait sous le contrôle du professeur, bien sûr, car on ne valide jamais un résultat faux, mais tout au long du débat, ce sont les élèves qui ont en charge la détermination du vrai et du faux. Ainsi nous rejoignons Legrand sur la conviction que les mathématiques sont un lieu où chacun peut exercer sa liberté, sans soumission à une autorité extérieure.

Le dispositif expérimental est constitué de quatre étapes.

Un dispositif en quatre étapes

Un travail individuel

Il s'agit d'un *travail personnel* assez court de 10 minutes. Cette phase de *travail individuel* permet l'activation des connaissances locales (Léonard & Sackur, 1991) et la production de résultats différents. L'un de nos principes est que les élèves ne répondent pas au hasard. Sachant qu'ils auront à défendre leur travail dans le petit groupe puis à produire un résultat commun face au grand groupe, ils ont une responsabilité personnelle. C'est ici que se mettent en place les « opinions », qui ne sont encore que des « intimes convictions ». Ce temps de travail personnel est essentiel à nos yeux. Pendant ce temps, le professeur observe, veille à ce que chacun travaille pour soi et ne répond à aucune question.

Un travail en groupes

Il s'agit ici d'aménager un *travail en groupes de 3 ou 4 élèves* ayant donné des réponses différentes, lorsque cela est possible. Les membres du groupe doivent se mettre d'accord pour donner une seule réponse que chacun pourra défendre devant la classe complète (le grand groupe). Nous leur demandons d'arriver à une certitude solide et personnelle, qui soit la même pour les quatre élèves et qui ne soit pas seulement un accord public formel. L'obligation d'une justification mathématique de leur réponse s'impose d'elle-même, en général, à cette étape. Le petit groupe prépare un compte-rendu collectif des étapes de son travail. Ce travail permet :

- de déterminer le résultat exact ;
- de mettre en échec les connaissances locales qui donnent des résultats faux ;
- de faire l'expérience de la contradiction (par l'obligation à se mettre d'accord avec un autrui extérieur) et de la résistance de la réalité mathématique ;
- de construire une nouvelle connaissance (ou de réactiver la connaissance exacte) ;
- de s'approprier par l'expérience certaines connaissances d'ordre II.

C'est à cette étape que les opinions personnelles laissent la place à un savoir partagé de nature mathématique. Le professeur ne s'interdit pas d'intervenir auprès des élèves pour demander des explicitations et les aider à faire le point sur leur travail, mais il ne donne pas les réponses mathématiques qui restent à la charge des élèves. Il veille à ce que personne n'use d'un argument d'autorité pour imposer sa solution.

Une phase de synthèse

Dans la *phase de synthèse en classe entière*, le porte-parole de chaque groupe, choisi par le professeur, raconte ce qui s'est passé dans son groupe, l'état des choses au début du travail, les étapes de l'évolution des connaissances, la conclusion sur laquelle il y a eu accord et les raisons de cet accord ; les autres complètent éventuellement. La séance de synthèse en grand groupe est l'occasion pour les élèves de faire un premier retour réflexif sur leur travail. Le compte-rendu de chaque petit groupe est préparé à la fin de la phase de travail en petits groupes afin que chacun de ses membres soit en mesure de l'exposer. Cette phase permet une confrontation entre les groupes et élargit la palette des problèmes rencontrés et de leurs solutions. Elle est l'occasion de l'explicitation de certaines connaissances et de certains raisonnements, justes ou faux. Enfin, elle permet au professeur de faire vivre, pour ceux qui ne les ont pas vécues dans leur petit groupe, les expériences des petits groupes qui méritent d'être partagées dans le grand groupe. Le professeur commente à partir de ce qu'il a observé et relevé dans les comptes-rendus et il fait les démonstrations nécessaires si elles sont absentes. Il n'y a pas nécessairement de moment de vérification, sauf si les élèves le demandent et le prennent en charge. Le dispositif fonctionne de façon que les élèves acquièrent la conviction que leurs réponses sont exactes. Bien sûr, le professeur veille à la justesse mathématique des résultats et des méthodes mais pas sous la forme d'une procédure de vérification.

Une phase d'institutionnalisation

La phase d'institutionnalisation porte sur les différentes propriétés des connaissances mathématiques : le maître énonce la connaissance mathématique visée, les règles du jeu du travail mathématique mises en œuvre par les élèves et le fait que faire des mathématiques c'est établir des énoncés nécessaires en respectant certains principes. Il précise que cela fait partie du savoir commun de la classe qui pourra être réutilisé dans le futur.

Particularités de ce travail

Par rapport à nos travaux antérieurs, ce travail présente deux particularités.

La première concerne le cycle d'enseignement. Nous avions envie, depuis longtemps, de tester le dispositif CESAME à l'école primaire. Ce cycle est pour nous un territoire inconnu, tant en ce qui concerne les sujets mathématiques et les connaissances mises en œuvre que les élèves et leur capacité à jouer le jeu d'un tel dispositif. En faisant ces expériences, nous nous sommes donc aventurées hors de notre domaine habituel, celui pour lequel le dispositif CESAME a été conçu, les années de lycée et les premières années d'université. Rappelons que nous travaillons sur des connaissances anciennes. À l'époque où nous avons eu la possibilité d'expérimenter dans leurs classes, les professeures nous ont proposé des séances de révision sur la soustraction et la multiplication en CM1 et sur l'ordre des décimaux en CM2.

La deuxième différence porte sur notre présence dans les classes. Jusque-là, nous expérimentions dans nos propres classes avec éventuellement l'aide d'autres membres de l'équipe comme observateurs. Nous n'avions ainsi pas besoin de former des maîtres à la théorie et à la pratique du dispositif CESAME. Pour le travail en primaire, nous avons dû déléguer la mise en œuvre du dispositif à des enseignantes. Nous avons eu deux réunions de travail avec elles avant la première expérimentation dans la classe et des discussions de débriefing après chaque séance. Toutes les séances de travail se sont tenues avec les deux enseignantes.

Avec ce travail, nous avons centré notre attention sur les effets pour les élèves et leur apprentissage. Nous n'avons pas fait d'étude spécifique de l'effet sur les enseignantes même si les discussions après les séances nous ont apporté quelques informations.

La soustraction (classe d'Odile)

En CM1, nous avons travaillé deux fois avec les élèves, le 16 octobre et le 22 novembre 2007, d'abord sur la technique opératoire de la soustraction puis sur celle de la multiplication. Il s'agit, dans chaque cas, de la première séance de révision sur la technique opératoire. Ces deux opérations sont au programme de CE2. Nous ne savions pas de façon précise ce que les élèves avaient déjà appris à ce moment-là. Nous ne donnons ici que les résultats concernant la soustraction.

Le dispositif s'appuie sur les connaissances locales des élèves. Connaître des erreurs ne signifie pas connaître les connaissances locales qui conduisent à ces erreurs. Pour passer des unes aux autres un travail d'analyse est nécessaire, car il faut identifier les limites de la connaissance locale et déterminer de façon précise quelle est la connaissance mathématique qui lui a permis d'émerger. Ce travail n'a pas été fait sur les notions du primaire. Nous l'avons commencé, avec nos co-chercheurs et avons fait l'hypothèse d'une connaissance locale que nous présentons ci-dessous. Nous avons observé qu'elle était effectivement présente chez un certain nombre d'élèves.

La principale difficulté de la soustraction est la retenue. Ainsi qu'on peut le voir, dans le travail demandé par l'enseignante à ses élèves, les soustractions sont posées en colonne. Dans la soustraction 939 – 721, tous les chiffres d'en haut sont plus grands que les chiffres correspondants d'en bas. Il n'y a pas de problème : colonne par colonne, les soustractions sont toujours possibles. Par contre, dans 917 – 738, il y a nécessité de faire des retenues. Nous ne savons pas comment procèdent les élèves qui se trompent, ni même ceux qui ne se trompent pas. Une connaissance locale pourrait être : on fait la soustraction dans le sens où c'est possible, en retranchant le plus petit au plus grand, quelle que soit sa place dans la soustraction posée, en haut ou en bas.

Pour 917 – 738, en appliquant la connaissance locale, on obtient : 8 moins 7, ça fait 1 ; 3 moins 1, ça fait 2 ; 9 moins 7, ça fait 2, et le résultat est 221. Un autre exemple intéressant est le suivant : 800 – 425, où la connaissance locale fait écrire 425 comme résultat. La fiche de travail présente des soustractions avec et sans retenues. Elle est conçue pour favoriser l'utilisation des connaissances locales et la dispersion des résultats dans la phase de travail personnel.

Voici les soustractions proposées aux élèves :

Résous ces opérations :

(1)
$$\begin{array}{r} 939 \\ -\ 721 \\ \hline \end{array}$$
……………………

(2)
$$\begin{array}{r} 917 \\ -\ 738 \\ \hline \end{array}$$
……………………

(3)
$$\begin{array}{r} 35478 \\ -\ 12325 \\ \hline \end{array}$$
……………………

(4)
$$\begin{array}{r} 800 \\ -\ 425 \\ \hline \end{array}$$
……………………

(5)
$$\begin{array}{r} 500 \\ -\ \ \ 32 \\ \hline \end{array}$$
……………………

Justifie tes réponses en expliquant comment tu as procédé.

Déroulement de la séance

Odile fait rappeler aux élèves qui nous sommes, pourquoi nous venons leur rendre visite, puis elle rappelle les consignes et lance le travail individuel.

Travail individuel

Nous observons les résultats des élèves de façon à constituer des groupes dans lesquels apparaissent des résultats différents pour qu'il y ait discussion. Les soustractions 1 et 3 sont réussies par tous les élèves (au nombre de 25) sauf deux pour la première soustraction. Pour chacune des soustractions 2, 4 et 5, la réussite est de l'ordre de 50%. Le tableau ci-dessous donne les résultats précis ; la ligne « retenue » concerne des oublis de retenue pour lesquels nous n'avons pas identifié de connaissance locale. Pour le faire, il faudrait pouvoir mener des entretiens ou disposer de plus de données. La ligne « autre » correspond, le plus souvent, à une erreur de soustraction élémentaire telle que 4 – 3 égale 2.

Soustraction	939–721	917–738	35478–12325	800–425	500–32
Bonne Réponse	23	9	25	10	13
Connaissance locale	0	4	0	4	4
Autre erreur de retenue	0	6	0	10	7
Autre réponse	2	5	0	1	1

Sur les trois soustractions qui ont donné lieu à des erreurs, la connaissance locale représente 15% des réponses, l'oubli de retenue 30% et il y a 47% de réponses exactes. Très souvent les élèves n'inscrivent sur leur feuille qu'une partie des retenues ce qui conduit à des oublis de retenue dans une ou deux colonnes. On remarque que bien que cela leur ait été demandé, qu'aucun élève n'a expliqué sa méthode pour faire les soustractions. On peut comprendre que c'est difficile pour des élèves de 10 ans qui n'ont pas l'habitude de le faire.

Travail en petits groupes

Pour l'essentiel, pendant ce temps de travail en petits groupes, les élèves ont comparé leurs résultats et ceux qui étaient certains de ne pas s'être trompés ont expliqué aux autres comment faire. Il n'y pas eu discussion sur les erreurs mais simplement correction. Nous avions déjà remarqué, même avec des étudiants, que les élèves doivent faire un apprentissage du dispositif, qu'ils doivent apprendre à discuter sur les erreurs et à conserver entre eux l'histoire du débat. Nous nous posions la question de savoir s'il était possible pour des plus jeunes de le faire et c'est une des raisons qui nous a poussées à tester le dispositif en primaire. C'est à travers cette discussion qu'ils peuvent passer de leur opinion personnelle propre à une connaissance partagée par le petit groupe puis par la classe. La consigne de garder trace des erreurs n'avait pas été donnée de façon suffisamment explicite par l'enseignante. C'est une autre des difficultés que nous avons rencontrées dans la transmission du dispositif aux enseignantes.

Synthèse en grand groupe

La discussion sur les erreurs s'est faite dans la synthèse en grand groupe. Ce moment du travail a beaucoup plu aux élèves d'après les retours que nous avons eus.

Il n'y a pas eu de discussion sur la première soustraction. Remarquons que le dispositif impose que l'on suive le cheminement des élèves et qu'on travaille à partir de ce qu'ils ont fait. Il n'est pas nécessaire de faire un débat coûte que coûte.

Pour la deuxième, une première discussion porte sur la retenue.

Adrien passe au tableau pour 917 – 738. Il dit :

> « *Dix-sept moins huit, neuf (il écrit une retenue de 1 à côté du 3). À onze, on enlève quatre, sept ; et neuf moins sept, un* ».

D'après lui, il faut faire une retenue parce que « *7 moins 8, on ne peut pas* ». Nous faisons préciser ce « on ne peut pas ».

Marie répond :

> « *7 est plus petit que 8, on ne peut pas soustraire, on ne peut pas enlever plus que ce qu'on a, alors on met une retenue. Ça veut dire emprunter une dizaine ou une centaine.*
>
> *7 – 8, je peux pas ; voir qui peut me prêter une dizaine ou une centaine, alors 17 – 8. Après 1 – 4, je peux pas, j'emprunte une centaine et je la rends. Je l'emprunte au 3 la dizaine* ».

Une discussion s'engage, car on ne sait pas à qui on emprunte et à qui il faut rendre.

D'après Quentin, cette dizaine vient de nulle part, on ajoute au nombre 917 une dizaine sous la forme de 10 unités. Ensuite, il faut la « rendre » au 3, de façon à conserver l'écart sinon on effectuerait 927 – 738 au lieu de 917 – 738. Quentin fait intervenir l'écart qui doit être conservé si on veut que le résultat soit juste.

> « *La dizaine vient de nulle part, c'est pour pas changer le nombre, c'est comme 927 – 738. Après, on la rend au 3 sinon 917, ça va plus être ce nombre et on aurait plus la même différence. Si tu veux que ton résultat soit juste, il faut qu'il y ait toujours le même écart entre 917 et 738.* »

On voit ici que les élèves utilisent leurs connaissances propres (l'écart) pour raisonner et convaincre.

Une deuxième discussion commence à la suite de l'échange suivant :

> Sébastien : *La dizaine, on la prend de nulle part.*
>
> Jonathan : *Je sais pas pourquoi on la rend, on l'a même pas empruntée.*
>
> Bastien : *Pourquoi on la rendrait puisqu'elle appartient à personne.*
>
> Frédéric : *C'est la méthode.*

Cette dernière réponse est une réponse en conformité, elle ne met pas en jeu de connaissances mathématiques. Or tout montre ici que plusieurs élèves ont peut-être à peu près acquis la technique opératoire mais ne savent pas du tout pourquoi on procède de la sorte. Nous ne pouvons donc nous satisfaire de cet argument d'autorité.

Catherine va au tableau et propose la connaissance locale comme une "autre méthode" que certains ont utilisée pour faire leurs soustractions. Il y a alors un certain flottement. La discussion ne peut véritablement s'engager car il est 11h30 et c'est l'heure de partir déjeuner. Catherine a été obligée de proposer cette connaissance locale car elle n'est pas apparue dans la discussion comme cela aurait dû être le cas si le dispositif avait bien fonctionné. Il peut y avoir plusieurs explications à cela : la consigne de garder trace des erreurs n'a pas été assez explicite ; les élèves ne l'ont peut-être pas identifiée lors du travail en petit groupe, ce qui n'est pas très étonnant, c'est un travail difficile ; comme nous l'avons dit, à ce moment du travail, ils se sont surtout attachés à corriger les soustractions fausses.

Certains élèves discutent avec Maryse puis avec Odile dans l'escalier en sortant de la classe.

> Bastien et Jonathan : *Je suis d'accord avec ce qu'a fait la dame au tableau puisqu'on peut le faire avec la multiplication et l'addition.*
>
> Odile : *Qu'est-ce qu'on peut faire ?*

Eux : *On peut changer la place des nombres, sans changer le résultat.*

Odile : *Est-ce que ce qu'on peut changer dans l'addition et la multiplication, c'est ce qu'a changé la professeure ?*

Bastien : *Ah non ! On ne peut pas désarticuler un nombre !*

La suite de la discussion en grand groupe et l'institutionnalisation

La discussion ne reprend que le lendemain, avec Odile. Catherine et Maryse ne sont pas présentes. Dans un premier temps, suite à l'intervention de Quentin (voir plus haut) il y a discussion sur la conservation de l'écart. Odile rappelle à ce moment une connaissance mise à jour dans le travail sur les problèmes :

> « *On peut prendre plusieurs chemins pour trouver le résultat, mais le résultat sera toujours le même puisque l'énoncé ne change pas et qu'on ne peut pas le transformer. Ici, c'est pareil, il ne faut pas changer l'énoncé donc il ne faut pas changer l'écart* ».

Pour nous, cette connaissance est une connaissance d'ordre II.

Puis Bastien raconte l'échange qu'il a eu dans l'escalier avec Odile sur la non « désarticulation » d'un nombre. Utiliser la connaissance locale revient à échanger le 7 et le 8 des unités et le 1 et le 3 des dizaines.

Odile pose

$$\begin{array}{r} 9\ 1\ 7 \\ -\ 7\ 3\ 8 \\ \hline 2\ 2\ 1 \end{array}$$

qui devient avec les explications de Bastien

$$\begin{array}{r} 9\ 3\ 8 \\ -\ 7\ 1\ 7 \\ \hline \end{array}$$

Les soustractions sont désarticulées !

On a donc changé les nombres, on a changé l'énoncé et ce n'est pas possible de faire ça. Un nombre ne se « désarticule pas », sinon on le change. Ce n'est pas à proprement parler le nombre qui a été désarticulé, mais la soustraction dans son ensemble. Nous avons conservé ici l'expression de Bastien qui nous a paru très imagée.

L'institutionnalisation se poursuit avec le rappel de la connaissance :

> « *On ne peut pas enlever si on n'a pas assez, donc il faut toujours que le nombre du haut soit le plus grand* ».

Quelques soustractions de contrôle sont effectuées et la classe travaille ensuite sur les différentes techniques possibles pour faire la preuve que la soustraction est juste. On n'est plus maintenant dans le dispositif CESAME mais dans un travail de classe habituel.

En résumé, les connaissances institutionnalisées, par l'enseignante, sont les suivantes :

- Dans une soustraction, l'écart entre les nombres doit être conservé.
- On ne peut pas enlever plus que ce qu'on a, il faut faire des retenues.
- On ne peut pas changer l'énoncé, donc on ne peut pas changer les nombres.

Les décimaux (classe de Florence)

Le travail s'est fait dans une classe de CM2. L'ordre des décimaux est une connaissance du CM1.

Sur les décimaux nous avons identifié, lors d'un travail précédent (Léonard & Sackur, 1981), deux connaissances locales, la règle 1 et la règle 2. La règle 1 découle directement de la comparaison des entiers : deux décimaux de même partie entière sont rangés dans le même ordre que leurs parties décimales considérées globalement comme des entiers. Ainsi, 12,89 est plus petit que 12,143 parce que 89 est plus petit que 143. Elle donne des résultats exacts si les nombres ont des parties décimales de même longueur. La règle 2 donne un résultat inverse : toujours pour des décimaux de même partie entière, un nombre est d'autant plus petit que sa partie décimale est longue.

Il s'agit pour nous, dans ce travail en CM2, de vérifier l'existence de ces connaissances locales, éventuellement d'en découvrir d'autres, mais c'est peu probable car nous connaissons bien la question qui a été souvent reprise par des enseignants. C'est surtout l'occasion d'expérimenter le dispositif et de voir quelles connaissances mathématiques les élèves utilisent pour travailler. Nous avons affaire à une autre institutrice, Florence, qui travaille beaucoup avec Odile et qui a suivi ses propres élèves de CM1 en CM2. Elle pratique le même genre de pédagogie active, qui laisse une très grande place à l'expression des élèves.

La fiche de travail a été préparée par Florence seule. Comme chez Odile, il s'agit de la première séance de révision sur cette notion.

Range les nombres décimaux suivants par ordre croissant

2,17 - 2,348 - 3,1 - 2,5 - 2,096 - 10,2 - 1,97

....

11,68 - 11,898 - 11,8 - 11,75 - 17,15

....

15,5 - 15,078 - 15,349 - 15,41 - 15,36 - 15,708

....

5,125 - 4,996 - 5,02 - 5,027 - 5,2 - 5,004

....

1,414 - 1,4 - 1,05 - 1,054 - 1,504 - 1,44

....

Justifie tes réponses en expliquant comment tu as procédé pour ranger les nombres décimaux.

Si on applique la règle 1 à la deuxième ligne, par exemple, on obtient :

11,8 < 11, 68 < 11,75 < 11, 898 < 17, 15

Et si on applique la règle 2 : $11,898 < 11,68 < 11,75 < 11,8 < 17,15$.

Il y aura donc de quoi alimenter les discussions dans les petits groupes.

Déroulement de la séance

Travail individuel

Nous avons relevé les erreurs correspondant aux connaissances locales identifiées pour la comparaison des décimaux. Aucun élève n'a fait d'erreur sur les parties entières. Les erreurs proviennent presque toutes de l'application de la règle 1, très peu de celle de la règle 2. Ce qui frappe, dans le travail des élèves, c'est leur grande cohérence : ceux qui utilisent une règle, bonne réponse ou connaissance locale, le font dans les cinq séries de nombres à classer. Il n'y a que 9 élèves sur 25 qui donnent des réponses variables et, dans certaines de ces réponses, il y a l'oubli d'un nombre ou une série inachevée. 11 élèves donnent la bonne réponse partout, 6 utilisent la règle 1 et 1 utilise la règle 2.

En ce qui concerne les explications sur la façon de procéder, 18 élèves écrivent qu'ils comparent d'abord les parties entières puis les parties décimales. Parmi ces 18, 6 écrivent qu'ils comparent les dixièmes, puis les centièmes, puis les millièmes, ce qui n'est pas forcément ce qu'ils font, mais ils l'écrivent ; 3 écrivent qu'ils ajoutent des zéros (pour avoir des parties décimales de même longueur). Ces deux façons de faire donnent la bonne réponse. Les autres ne disent pas comment ils comparent les parties décimales. Celui qui a utilisé la règle 2 sur les cinq séries, l'explique :

> « *D'abord, j'ai pris la plus petite unité parce que c'est par ordre croissant (du plus petit au plus grand). Puis j'ai regardé les chiffres après la virgule et j'ai pris le plus grand qui en fait est le plus petit* ».

Il y a donc près de la moitié des élèves, 10 sur 25, qui sont capables d'expliciter une façon de procéder. Ce point est important car il conditionne une partie du travail fait dans les petits groupes. Comme toujours, nous avons constitué les groupes pendant le temps de travail individuel en observant ce qu'écrivaient les élèves de façon à créer les conditions du débat. Ce travail, un peu acrobatique, a fourni ici des groupes qui permettaient la confrontation de procédures différentes.

Travail en petits groupes

Le travail en petits groupes a duré environ 25 minutes. Nous avons eu du mal à négocier ce temps de travail. Dans deux groupes, les groupes 2 et 6, un élève corrigeait le travail de ses camarades, sans les laisser s'exprimer et sans donner d'explication. Il (c'était un garçon) était certain de ses résultats et ne voyait pas l'utilité de faire autre chose qu'une correction de ce qui était faux chez les autres.

En travaillant de façon très proche avec d'autres groupes, nous avons réussi à les conduire vers une attitude dans laquelle la confrontation a réellement eu lieu. Ce fut le cas pour un groupe avec Maryse, le groupe 4, qui a bien identifié les procédures personnelles. Un groupe avec Catherine, le groupe 7 a avancé sur ce chemin. Le groupe 3 a plutôt bien travaillé tout seul. Les groupes 1 et 5 ont réussi à exprimer leur manière de faire juste sans lancer de discussion sur les procédures de chacun.

Revenons sur le travail du groupe 4 : si on regarde les fiches, deux élèves de ce groupe figurent parmi ceux qui ont le mieux exposé leur procédure par écrit.

Maryse rapporte la discussion à laquelle elle a assisté (c'est elle qui parle) :

« *Ils comparent leurs résultats, ils sont très différents.*

Benjamin : *Plus il y en a (des chiffres) après la virgule, plus c'est petit* (règle 2).

Caroline : *Moins il y en a (des chiffres) après la virgule, plus c'est petit* (règle 1).

Baptiste : *Ni l'un, ni l'autre, il faut mettre les dixièmes, les centièmes, les millièmes, exemple pour c), 15,5 = 15,50 donc 15,41 < 15,50.*

Paul : *J'ai fait comme ça aussi.* »

Alors tous ensemble, ils reprennent les exercices et les refont, en vérifiant qu'ils sont d'accord ; je demande de rappeler la règle qu'ils utilisent pour vérifier qu'ils utilisent bien tous la même. C'est Paul qui la dit.

« Paul : *Je regarde d'abord avant la virgule, puis après la virgule.*

Benjamin : *Je prends un exemple* (il écrit au verso de la feuille),

18,300 et 18,34

18, 300 et 18, 340

mais j'aurais pu faire 18, 30 et 18,34

Baptiste : *Moi, j'aurais écrit :*

18,3 et 18, 34

18,30 et 18,34. »

Ils sont bien d'accord et reprennent ensemble tous les exercices. Baptiste et Paul avaient déjà les bons résultats. Caroline et Benjamin refont les leurs. Ils disent ce qu'ils font et Paul et Baptiste veillent pour que Caroline et Benjamin s'attendent mutuellement quand l'un distance l'autre.

Mise en commun en grand groupe

C'était la première fois que nous mettions en œuvre le dispositif CESAME dans cette classe. Nous y avons rencontré des difficultés d'origines diverses que nous analysons ici.

Il y a eu, tout d'abord, des difficultés liées aux relations entre élèves qui n'ont rien à voir avec le dispositif ni avec les mathématiques mais qui ont fait que certains n'ont pu se mobiliser pour travailler selon un dispositif qu'ils ne connaissaient pas. Cette situation, qui est toujours susceptible de se produire, nous échappe complètement, d'autant que notre présence a beaucoup perturbé certains.

Ce dont nous sommes responsables, c'est de l'appropriation du dispositif par l'enseignante. Visiblement, ici, nous n'avions pas clairement expliqué à Florence comment doit se passer la mise en commun en classe entière. De ce fait, elle a commencé à demander des explications et à fournir des contre-exemples aux élèves avant que l'ensemble des résultats sur une série ait été posé au tableau. Elle est entrée dans un fonctionnement qui lui est familier au lieu de respecter le protocole CESAME que nous, les chercheuses, n'avions pas posé de façon assez claire. Ceci nous donne une occasion supplémentaire de constater que le dispositif a des spécificités précises qui permettent d'obtenir les résultats souhaités et qu'il ne consiste pas en un dialogue argumenté avec les élèves ou des élèves entre eux. Une très grande rigueur est nécessaire pour son application. On retrouve ici une des difficultés que nous avions anticipées pour ce travail avec des enseignantes non spécialistes du dispositif.

Le groupe 4 est venu exposer son travail au tableau et a su dire quelles avaient été les erreurs observées. Par contre, ils n'ont pas énoncé, face au grand groupe, la conclusion à laquelle ils étaient arrivés dans le travail en petit groupe ; ainsi l'enseignante ne disposait de rien pour procéder à l'institutionnalisation et la séance s'est terminée sans qu'on arrive à une quelconque conclusion sur une connaissance juste. Il faut remarquer, une fois de plus, que nous n'avons pas eu suffisamment de temps pour mener à bien les quatre temps du dispositif. La plage entre la fin de la récréation et la sortie, qui dure à peu près une heure et quart, pourrait être suffisante si les élèves étaient bien entraînés. Remarquons que les étudiants du DEUG MASS travaillaient systématiquement avec le dispositif en séance de travaux dirigés de deux heures. C'est sans doute ce vers quoi nous devrons tendre si nous reprenons cette expérience en primaire, même si les deux heures sont coupées par la récréation.

Institutionnalisation

Florence a pu reprendre la mise en commun en classe entière quelques jours après cette séance, prenant prétexte de l'absence d'un élève le jour de la séance pour demander aux autres de lui raconter ce qui s'était passé.

Les trois temps du dispositif ont été bien rappelés ; deux élèves qui utilisaient la règle 1 ont pris la parole pour dire comment ils faisaient “avant”, c'est-à-dire avant qu'il y ait confrontation dans les petits groupes ; un élève explique l'ajout des zéros et un autre expose la méthode par comparaison des dixièmes, centièmes, millièmes. À ce sujet, Florence reprend une remarque passée un peu inaperçue lors de la séance :

> « Aurélie : *On regarde le chiffre des dixièmes et celui qui a le plus petit est le plus petit.*
>
> Alix : *Et ceux-là, 11,8 et 11, 898 ils ont tous les deux 8 comme chiffre des dixièmes.*
>
> Alexis : *11,898 c'est presque 11,9 tandis que 11,8, c'est seulement 8 dixièmes.* »

Lors de la séance suivante, Alix dit que même si on rallonge 2,19699999999 il ne sera jamais plus grand que 2,5. On observe ici de bonnes connaissances mathématiques sur les décimaux. Nous obtenons la réponse à une des questions que nous nous posions avec cette expérimentation en primaire : quelle est la nature des arguments que sont susceptibles d'utiliser les élèves de cours moyen pour résoudre un problème ? Ils peuvent être, comme le montre cet exemple, de nature mathématique et très différents de ce qui a servi à l'introduction de la notion. On voit bien sur tous ces exemples, comment les élèves parviennent à se construire des connaissances mathématiques personnelles, parfois inexactes, ou locales comme nous préférons les nommer. Le dispositif cherche à permettre à chaque élève d'utiliser ces connaissances qui lui sont propres, de les confronter à la réalité mathématique lors des échanges avec les autres élèves et éventuellement les modifier.

Quelques éléments de comparaison entre le dispositif CESAME et le travail ordinaire de la classe

Florence et Odile sont deux enseignantes très à l'écoute de leurs élèves. Cela ne tient pas seulement à une disposition de leur personnalité, il s'agit de choix réfléchis. Tout leur enseignement est construit de façon que les élèves s'approprient un certain nombre de règles de fonctionnement de la classe et prennent des responsabilités dans leur mise en œuvre. Ainsi, des séquences comme « ça va, ça va pas » qui ont lieu tous les soirs chez Odile permettent aux élèves un travail de retour sur ce qui s'est passé dans la journée et une mise en commun qui les oblige à une réflexion au-delà de l'anecdotique. Le respect de l'autre, qui est constamment mis en avant, les habitue à s'écouter et à laisser circuler la parole tout en maintenant leur attention en éveil. De leur côté, les enseignantes sont aussi très attentives à ce que chaque enfant trouve sa place dans le groupe et soit valorisé dans ses efforts. Sur le plan purement pratique, les tâches matérielles sont réparties entre les élèves, chacun ayant un rôle précis et les responsabilités qui vont avec. Par contre, le travail en petits groupes n'est pas très fréquent. Les enseignantes lui préfèrent le travail par groupe de deux car la communication entre les élèves est plus facile lorsqu'ils sont assis côte à côte que lorsqu'ils se font face, ce qui est obligatoire quand ils sont plus de deux. D'autre part, se mettre par quatre nécessite de tourner les tables, ce qui prend beaucoup de temps car elles sont lourdes. Dernière spécificité des petits groupes CESAME, ils sont construits pour permettre la confrontation ; les élèves sont susceptibles de changer de place : ceci a créé des problèmes dans la classe de Florence car certains élèves en ont profité pour fouiller dans les affaires personnelles de leurs camarades qui ont alors eu l'esprit distrait de leur travail.

Que va apporter de nouveau le dispositif CESAME à une telle classe ?

Pour les élèves, la nouveauté majeure consiste à s'occuper des réponses fausses au lieu de se contenter de rechercher et d'expliquer la bonne réponse. Il faut identifier les réponses fausses, comprendre leur origine et en garder mémoire pour les exposer à la classe entière ainsi que les raisons pour lesquelles on les rejette.

Pour l'enseignante, la nouveauté se situe aussi dans la gestion des réponses fausses, mais évidemment pas de la même façon que pour les élèves. Odile et Florence ont l'habitude de faire débattre les élèves pour réussir à identifier la réponse exacte à un exercice. Ce qu'elles ont observé, c'est que, au moins en mathématiques, elles dirigent la discussion vers cette réponse, sans toujours laisser le temps aux élèves de comprendre et de discuter des autres réponses.

Lors de la discussion en classe entière, dans le dispositif CESAME, le rôle de l'enseignante est de choisir, parmi tout ce qui est dit par les élèves, ce qu'elle garde et ce qu'elle laisse de côté pour que la solution émerge : elle coupe des branches ou choisit des briques selon la nature de métaphore que l'on préfère. Le travail en petits groupes du dispositif CESAME oblige les élèves à puiser dans les connaissances qu'ils possèdent pour résoudre le problème auquel ils font face : comment chacun a-t-il procédé ? Qu'est-ce qui est juste et qu'est-ce qui est faux dans ce que nous avons fait les uns et les autres ? Ils ont à mettre en commun leurs connaissances qui, avec des différences de degré, sont les mêmes puisqu'ils ont suivi le même cursus, pour résoudre les contradictions qu'ils ont amenées dans le petit groupe. C'est à partir d'un socle commun, dont ils sont sûrs, qu'ils vont pouvoir comprendre les erreurs et se mettre d'accord sur la bonne réponse. Ceci, ils l'apportent ensuite dans la mise en commun en classe entière. Ce qu'ils apportent comme connaissances pour se convaincre, chacun individuellement et tous ensemble, n'est pas forcément ce que l'enseignante aurait apporté. L'enseignante doit respecter le choix des briques et des branches pour amener le débat vers une solution ; c'est un travail difficile car il ne faut pas faire cheminer les élèves par un autre chemin que celui qu'ils ont choisi. Il faut voir, dans ce qu'ils proposent si c'est un chemin susceptible d'aboutir, mais il ne faut pas les obliger à le laisser et à en choisir un autre que l'enseignante juge plus adapté, sinon on risque de tirer à côté du but. C'est dans ce travail qu'Odile et Florence ont identifié une différence entre leur pratique habituelle et ce qu'impose le dispositif CESAME.

Citons Odile :

> « *Quant à ma « méthode » d'enseignement, je réalise que depuis quelque temps, j'usais de « l'argument d'autorité » à savoir : « c'est comme ça, on vous l'a déjà expliqué l'an dernier, en zappant de plus en plus les étapes de décomposition et de distributivité dans la technique opératoire de la multiplication, croyant gagner du temps, pensant que ça les « embrouillait » plus qu'autre chose, n'ayant pas fait le lien entre les différentes erreurs rencontrées jeudi, et surtout en ne laissant pas vraiment la possibilité aux élèves d'expliquer leurs erreurs, de leur laisser s'en rendre compte et trouver les solutions eux-mêmes. Je croyais le faire, eh bien non.* »

Ainsi, Odile a été surprise par certaines erreurs faites par ses élèves, qu'elle n'avait jamais identifiées auparavant. En cherchant à conduire ses élèves vers la bonne réponse, elle se privait de certaines informations qu'ils pouvaient lui donner. Le dispositif CESAME, en obligeant les élèves à travailler sur les différentes solutions qu'ils apportent donne ces informations et met, d'autre part, en évidence les différences mathématiques entre les réponses justes et les réponses fausses. Les élèves ayant une raison mathématique de choisir la réponse juste sont dans une meilleure situation pour la comprendre et la mémoriser.

De plus, Odile nous dit qu'elle sait mieux maintenant interroger les élèves sur ce qu'ils ont ou n'ont pas compris. Il s'est trouvé qu'en parallèle du travail avec le dispositif CESAME dans sa classe, Odile a lu des articles sur l'entretien d'explicitation (Vermersch, 1994). Cette réflexion personnelle, en liaison avec le travail que nous avons fait ensemble, l'a conduite à modifier la façon dont elle interroge les élèves : elle remplace les questions en « pourquoi » par une interrogation qui amène les enfants à travailler sur leurs erreurs ; avec des relances telles que « qu'est-ce que tu fais quand tu fais ça ? » elle constate qu'on peut amener les élèves à dire ce qu'ils savent faire, ce qu'ils ont compris et qu'ainsi ils réfléchissent suffisamment à leurs erreurs pour trouver leur solution.

Si on s'intéresse maintenant aux acquis des élèves après les séances CESAME, on constate qu'ils sont plus solides qu'avec le travail habituel de ces enseignantes. Odile en a été enthousiasmée :

> « *Je leur propose d'effectuer sur l'ardoise 900 – 32. Deux résultats sont faux. Sans désigner les enfants je dis : « Nous n'avons pas tous les mêmes résultats, tout le monde pense à tout ce qu'on vient de dire et vérifie. » Tous les résultats sont corrigés sur l'ardoise. (...) Par rapport aux autres années : après la séance de « recherche redécouverte » (ce qui correspond à la séance que nous avons faite), j'avais au minimum 8 enfants à revoir en groupes de besoin. Aujourd'hui, j'en ai donc 2 et encore je ne suis pas sûre qu'ils en aient vraiment besoin ; quand je reprends leurs recherches de mardi ce n'était pas aussi mauvais que ça. Résultat à confirmer lundi, après avoir fait brièvement rappeler à l'oral la technique opératoire, notamment pour les 2 élèves en « échec », avant de faire un groupe de besoin pour eux.* »

Nous pouvons étudier un effet plus global du dispositif sur les élèves. D'après les observations de Florence, les enfants sont davantage enclins à confronter leurs réponses. Elle l'a constaté avec trois procédures qu'ils ont utilisées pour résoudre un problème de proportionnalité. Pour elle, auparavant, les élèves savaient dire : « *je trouve pareil mais je n'ai pas fait pareil* » avec une idée vague que si la méthode n'était pas celle proposée par le maître, cela ne devait pas être tout à fait juste. Elle nous dit que les élèves savent qu'on peut faire juste par différents chemins mais « *qu'il y a une différence entre le fait de le dire et le fait de leur faire vivre* ». Elle pointe ainsi ce que nous appelons une connaissance expérientielle. Dans la théorie CESAME, les connaissances d'ordre II sont des connaissances qu'on ne peut enseigner par un discours mais dont il faut que les élèves fassent l'expérience, ce qui est exactement le cas ici.

Dans les deux classes, les élèves ont réinvesti les connaissances discutées et acquises pendant le travail avec le dispositif CESAME, dans un travail ultérieur. En CM1, la connaissance locale est réapparue lors de la soustraction avec les nombres décimaux si on soustrait un nombre à virgule d'un entier : 120 – 8,14 donne 112,14. En écrivant 120 comme 120,00 les élèves de CM1 ont retrouvé l'argument « il ne faut pas désarticuler un nombre » pour corriger leur erreur. En CM2, toujours pour les opérations sur les décimaux, les résultats acquis lors de la comparaison ont été rappelés et il n'y a eu que très peu d'erreurs. Ces séances CESAME servent donc de référence pour la suite des apprentissages. Les connaissances institutionnalisées à cette occasion sont des points d'ancrage pour des apprentissages futurs.

Dernière remarque sur des effets des expériences CESAME dans les classes ; les élèves font en sorte que tout le monde écoute les explications, surtout au CM1. Ils ont, plus qu'auparavant, le sentiment que leur parole est prise en compte et ils jouent tous le jeu de l'écoute : « ils en usent et abusent ». Il s'agit pourtant d'une classe où l'écoute de la parole des élèves est particulièrement libre et où le respect mutuel est très important. Il se peut que le dispositif CESAME ait transféré aux activités de mathématiques des modes de fonctionnement qui y étaient moins habituels et que les enseignantes aient été plus attentives à ces phénomènes.

Pour conclure, cette expérimentation nous a montré que les élèves de classe primaire peuvent utiliser des mathématiques pour trancher entre le vrai et le faux et qu'ils possèdent certaines connaissances d'ordre II. Parmi celles-ci, nous pouvons citer les règles de l'écriture décimale, le fait qu'un problème a la même solution quelle que soit la méthode pour y parvenir ou le fait que la technique opératoire ne doit pas changer l'énoncé : « *on ne peut pas désarticuler un nombre* ».

Bibliographie

LEGRAND M. (1993) Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères IREM*, n°10, 123-158.

LEONARD F. & SACKUR-GRISVARD C. (1981) Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs. *Bulletin de l'APMEP,* n° 327, 47-60.

LEONARD F. & SACKUR C. (1991) Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche. *RDM,* Vol. 10 (2/3), 205-240.

MAUREL M. (2001) Derrière la droite, l'hyperplan. *Repères IREM,* n°42, 83-114.

MAUREL M. & *al*. (2003) Un pari didactique et épistémologique : un enseignement de mathématiques en DEUG MASS à l'Université de Nice 2000/2003. *Cahier de la Commission Inter-Irem Université*. IREM de Lyon.

SACKUR C., ASSUDE T., MAUREL M., DROUHARD J-P. & PAQUELIER Y. (2005) L'expérience de la nécessité épistémique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 25/1, 57-90.

SACKUR C. & MAUREL M. (2000) Les inéquations en classe de seconde. Une tentative pour enseigner la nécessité des énoncés mathématiques. *Petit x*, n° 53, 5-26.

VERMERSCH P. (1994) *L'entretien d'explicitation*. ESF.