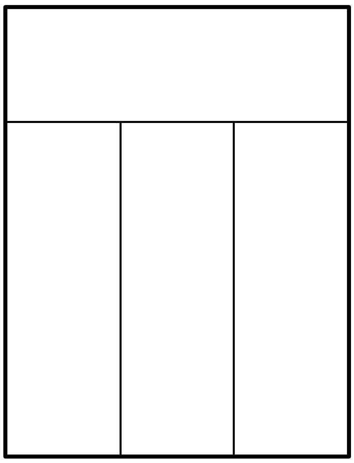
POINT DE DÉPART

LA BOÎTE

La boîte représentée sur la figure a quatre compartiments de mêmes dimensions.

Si le périmètre de la figure est 112 cm, quelle est son aire, en cm^2 ?

Expliquez comment vous l'avez trouvée.



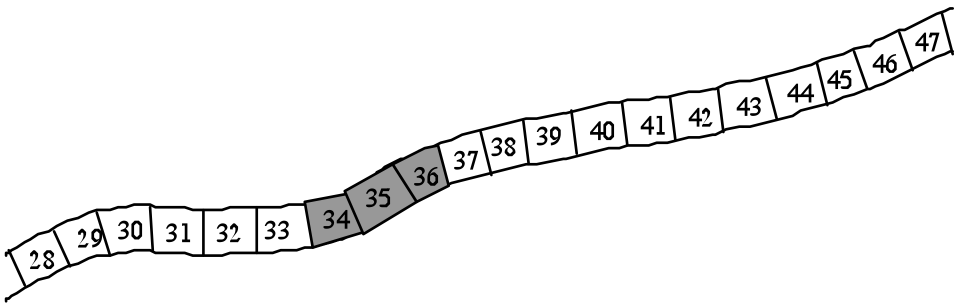
Quelques premières réflexions sur ce point de départ figurent en pages suivantes.

Extrait de la Finale du 11ème Rallye Mathématique Transalpin (RMT)
http://www.math-armt.org/

POINT DE DÉPART

LE RUBAN DE NOÉ

Noé a un ruban avec les nombres naturels de 1 à 100. Il colorie la partie du ruban avec les trois nombres consécutifs 34, 35 et 36.



Il additionne ces trois nombres et trouve la somme de 105, qui est justement son âge !

Pourrait-il aussi obtenir 105 en additionnant d'autres nombres consécutifs du ruban ?

Écrivez toutes vos solutions et les calculs que vous avez faits.

Quelques premières réflexions sur ce point de départ figurent en pages suivantes.

Extrait de la Finale du 11ème Rallye Mathématique Transalpin (RMT)

http://www.math-armt.org/

La Boîte et le Ruban de Noé : premières réflexions

LA BOÎTE

Quels savoirs mathématiques les élèves devront-ils mettre en œuvre pour résoudre ce problème ?

En arithmétique, il faudra partir du nombre 112, le seul donné et se rendre compte qu'il faudra être capable de le diviser par 2 (demi-périmètre) puis de décomposer 56 en somme de deux termes. Mais l'élève ne sait pas encore comment se fera cette décomposition ni qu'il s'agira, du point de vue de l'adulte, d'un partage proportionnel ! Il est également possible de raisonner sans passer par le demi-périmètre.

En géométrie, il faudra faire appel aux connaissances sur le rectangle : la boîte et ses quatre compartiments « de mêmes dimensions », c'est-à-dire du pavage d'un grand rectangle par quatre rectangles égaux, plus petits, dont l'un a subi une rotation d'un quart de tour par rapport aux trois autres.

Dans le domaine des mesures, entre arithmétique et géométrie, l'élève devra faire appel à quelques connaissances sur le périmètre et sur l'aire du rectangle. Concernant la « mesure des longueurs », il devra trouver, en analysant la figure, un rapport 3 entre largeur et longueur des petits rectangles. Concernant la « mesure des aires », le rapport 4 paraît plus évident.

Pris isolément, chacun des savoirs précédents (longueur, périmètre, aire, rapport) est en cours d'apprentissage vers l'âge de 11 ans. On pourrait dire que l'élève n'a plus qu'à les mobiliser pour résoudre le problème. Mais peut-il le faire seul, ou en groupe ?

Dans les conditions de passation des épreuves du Rallye Mathématique Transalpin, le maître est absent et la tâche de résolution est entièrement dévolue à la classe qui doit s'organiser, par groupes, pour résoudre sept problèmes donnés, en 50 minutes, et rédiger pour chacun d'eux une copie avec toutes les explications sur la procédure utilisée.

Le problème de *La Boîte* a été proposé à 108 classes bien « aguerries » pour ce type d'épreuve puisqu'il s'agissait des finalistes de chaque section.

Vers 11 ans, en fin d'école primaire (CM2), l'échec est presque total dans les conditions du rallye : seulement 15% des classes arrivent à la solution, 15% parviennent à ébaucher quelques calculs d'aire ne respectant que la condition des 112 cm de périmètre, et 70% sont incapables d'entrer dans le problème.

Vers 12 ans, la réussite augmente et 30% des classes trouvent la solution, et à 13 ans, on arrive à une réussite de 75%.

Ces résultats ont été confirmés par ceux obtenus à d'autres variantes du problème, à l'échelle beaucoup plus large d'une épreuve proposée à plus d'un millier de classes. Ils nous interpellent et attirent notre attention sur les raisonnements et sur les mécanismes nécessaires à la résolution de ce problème, ainsi qu'à la nature des obstacles rencontrés.

Dans la pratique d'un « Point de départ » pour la classe, les conditions changent. Le maître est là, il peut organiser des mises en commun, des validations intermédiaires. Il peut même arriver qu'il prenne largement à sa charge la résolution du problème tout en pensant qu'il ne fait qu'aider « un peu » ses élèves !

Il suffit, par exemple, de quelques suggestions pour que ceux-ci comprennent que les longueur et largeur du grand rectangle, en cm, pourraient être respectivement 50 et 6, ou 49 et 7, ou 40 et 16, 36 et 20, ...

De même, on peut faire dire aux élèves que si la largeur d'un petit rectangle est 1 cm, sa longueur sera 3 cm et faire alors calculer les dimensions du grand rectangle : 3 cm et 4 cm, donc un périmètre de 14 cm.

Dans ces deux exemples, on a ouvert une piste de recherche et les enfants peuvent arriver à la solution de manière quasi mécanique.

Mais entre la dévolution totale à l'élève et la maïeutique subtile de « l'enseignant sage femme », il y a vraisemblablement des modalités intéressantes pour exploiter cette situation.

LE RUBAN DE NOÉ

Quels savoirs mathématiques les élèves devront-ils mettre en œuvre pour résoudre ce problème ?

En première analyse, les connaissances arithmétiques nécessaires sont élémentaires : connaître les nombres naturels de 1 à 100 et leur représentation sur un « ruban des nombres », savoir additionner les trois nombres « consécutifs » (ou « qui se suivent sur le ruban ») : 34, 35 et 36 et vérifier que leur somme est bien 105.

C'est au moment de chercher les autres suites de nombres consécutifs dont la somme est aussi 105 que d'autres savoirs apparaissent.

Il faut déjà se convaincre qu'il n'y a pas d'autres suites de trois nombres consécutifs dont la somme est 105. Pour cela, il faut faire appel aux propriétés de l'addition et de l'égalité (par exemple, si l'on prenait 35, 36 et 37, on est certain de ne pas obtenir 105 et on peut même savoir, sans effectuer l'addition, que la somme sera 108, car chacun des nouveaux nombres vaut 1 de plus que les nombres d'origine).

Si l'on pense à une suite de deux nombres, la « division par 2 » ou « la moitié » pointent le nez. Si l'on pense à une suite de quatre, cinq, ... nombres consécutifs, ce sont les « divisions par 4, par 5, ... » qui apparaissent, et aussi la « division euclidienne » car il y a des restes.

Si l'on veut être certain qu'il y a sept suites de nombres consécutifs dont la somme est 105, (de 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 10 ou 14 termes) et si l'on veut dépasser le stade des essais, il faut non seulement les découvrir mais montrer qu'il n'y en a pas d'autres, ce qui fait appel à d'autres savoirs encore.

Dans les conditions de passation des épreuves du Rallye Mathématique Transalpin, le maître est absent et la tâche de résolution est entièrement dévolue à la classe qui doit s'organiser, par groupes, pour résoudre sept problèmes donnés, en 50 minutes, et rédiger pour chacun d'eux une copie avec toutes les explications sur la procédure utilisée.

Le problème *Le Ruban de Noé* a été proposé à 72 classes de 11 et 12 ans (CM2 et 6$^{\text{ème}}$) aussi bien entraînées pour ce type d'épreuve puisqu'il s'agissait des finalistes de chaque section.

Près de 40% des réponses donnent les six solutions (autres que celle de la donnée), 25% en donnent de quatre à cinq, 25% de une à trois. Mais on ne peut pas savoir précisément comment les élèves ont procédé.

Les taux de réussite étaient du même ordre de grandeur pour le problème *Le Ruban de Marie,* proposé à des classes de 9 et 10 ans, variante du *Ruban de Noé* où le nombre somme était 45 au lieu de 105.

Dans la pratique d'un « Point de départ » pour la classe, on peut aller beaucoup plus loin, au-delà de la découverte des sept solutions car on a le temps d'organiser des échanges, de vérifier si l'on est certain de ne pas en avoir oubliées. On peut aussi modifier le nombre somme, et, pour ceux qui aiment, conduire tout un travail sur les critères permettant de reconnaître les nombres qui sont la somme de nombres consécutifs. Pour le dessert, on peut aller jusqu'à chercher quels sont les nombres qui ne peuvent pas être décomposés en sommes de nombres consécutifs ! Un vrai centre d'intérêt dans les champs conceptuels de l'addition et de la multiplication sur les nombres naturels.

POUR ALLER PLUS LOIN AVEC CES PROBLÈMES

Le lecteur pourra faire part de ses expériences à la rédaction de Grand N (revue.grandn@ujf-grenoble.fr) ou aux animateurs du RMT. Il peut se rendre sur le site www.maths-armt.org où il trouvera des commentaires plus détaillés sur ces deux problèmes (notamment, une analyse de la tâche décrivant les différentes procédures mobilisables) et où il pourra communiquer ses impressions ou résultats sur sa pratique en classe de ces « Points de départ ».