Du numérique au littéral (2008) Projet du document d'accompagnement des programmes du collège, Mathématiques, février 2008. eduscol.education.fr/ D0015/

DUVAL R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine*. Berne : Peter Lang.

DUVAL R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 5, 37-65.

MAFFEI L., MARIOTTI M.A. (2010). Tree representation in the Aplusix CAS: a tool of semiotic mediation for the meaning of algebraic expressions. In M.F. Pinto, & T.F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th PME Conference,* (pp. 249-256). Belo Horizonte, Brazil.

NICAUD J.-F., BOUHINEAU D., & CHAACHOUA H. (2004) Mixing Microworld and CAS Features in Building Computer Systems that Help Students Learn Algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 9 (2), 169-211.

SFARD A. (1991) On the dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics* 22(1), 1-36.

TRGALOVA J., CHAACHOUA H. (2009) Relationship between design and usage of educational software: the case of Aplusix. In V. Durrand- Guerrier et al. (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1429-1438), Jan. 28th – Feb. 1st 2009, Lyon, France.

Annexe. Scénario d'usage

Phase	Acteur	Description de la tâche	Situation	Outils et supports	Durée
1	L'enseignant et la classe	En vidéoprojection. L'enseignant ouvre un nouveau fichier Aplusix, entre l'expression *x+ y*, choisit le mode *Représentation mixte*. Il annonce qu'il va demander au logiciel de convertir la représentation symbolique en arbre. Il clique sur le « + », la représentation arbre de l'expression s'affiche. Il questionne la classe : comment l'arbre est-il créé ? où est l'opérateur ? où met-on les arguments ? Il fait une synthèse et lit l'expression « somme de x et de y ».	Collective pour observer et commenter la création de l'arbre	Logiciel Aplusix, matériel de vidéoprojection	5 min
2	L'enseignant et la classe	En vidéoprojection. L'enseignant ouvre un nouveau fichier Aplusix, entre l'expression *x+ y+2z*, choisit le mode *Représentation mixte*. Il demande aux élèves d'anticiper la structure de l'arbre. Les élèves dessinent leurs propositions au tableau. Pour valider, l'enseignant utilise Aplusix (chaque étape est commentée : quel opérateur en premier ? pourquoi ? quels arguments ?...). Une synthèse est faite collectivement et l'expression est lue comme « somme de x, de y et du produit de 2 par z ».	Collective pour observer, conjecturer et commenter la création de l'arbre	Logiciel Aplusix, matériel de vidéoprojection	15 min
3	L'enseignant et la classe	Même activité et déroulement avec l'expression *(x-3)(x+y)*.	Collective	Logiciel Aplusix, matériel de vidéoprojection	15 min
4	L'enseignant et la classe	Même activité et déroulement avec l'expression $\frac{2x-1}{x^2+1}$	Collective	Logiciel Aplusix, matériel de vidéoprojection	15 min
5	L'enseignant	Institutionnalisation : structure de l'arbre représentant une expression algébrique, vocabulaire	Collective		5 min

ACTIVITÉ ... Deux problèmes autour de Thalès

Denise GRENIER
Institut Fourier, Université de Grenoble 1

Introduction

L'enseignement en classe de troisième accorde depuis longtemps un temps important au théorème de Thalès. Les problèmes proposés par les manuels scolaires ainsi que les pratiques de classe consistent en général à faire des calculs de rapports permettant de faire travailler le théorème dit « direct » ou sa « réciproque ». Ces problèmes sont essentiellement de deux types :
- calculer des rapports sur des mesures données pour vérifier si deux droites sont parallèles,
- calculer des longueurs sur des droites coupées par des parallèles.

Le programme officiel suggère, lui, de « créer des situations d'approche ou d'étude du théorème et de sa réciproque », à l'aide d'un logiciel de construction géométrique.

Il n'est pas prévu de faire expérimenter l'intérêt de ce théorème en emmenant par exemple les élèves dans la cour pour calculer la hauteur de grands objets (bâtiments, arbres, etc.) afin de mesurer directement des ombres. Alors, comment montrer aux élèves la force de ce théorème, sans le recours aux logiciels et sans trop d'organisation et de matériel ?

Voici deux problèmes qui ne sont pas nouveaux, mais que nous décrivons ici dans cet objectif précis.

Problème 1. Le périmètre du triangle tronqué

Ce problème a été étudié par N. Balacheff dans sa thèse[1] (1988). Je l'étudie régulièrement aussi bien avec des étudiants de licence de mathématiques ou de master, qu'en formation continue d'enseignants. Pour ces étudiants et enseignants, le travail est double : étudier les différentes façons de le résoudre, puis identifier les connaissances en jeu et l'intérêt pour les élèves.

La consigne originale (Balacheff, op. cit.) est la suivante.

> « Rédiger pour des camarades absents un message indiquant ce qu'il faut faire pour connaître le périmètre d'un triangle, n'importe lequel, dont il manque un morceau. Vos camarades qui recevront ce message disposeront d'une seule feuille de papier, sur laquelle sera dessiné un triangle dont il manque un morceau[2] et du même matériel que vous. »

Les élèves disposent de tous les outils de construction et calcul usuels (rapporteur, règles, équerre, compas, stylos, calculatrice). Un exemple de triangle est reproduit ci-dessous. Après la présentation de la situation par l'enseignant, les élèves sont répartis en groupes « autonomes ».

1 Balacheff N. (1988) *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves de collège*, thèse d'état, Université Jospeh Fourier, Grenoble.

2 Ce « morceau » contient un sommet du triangle et un seul

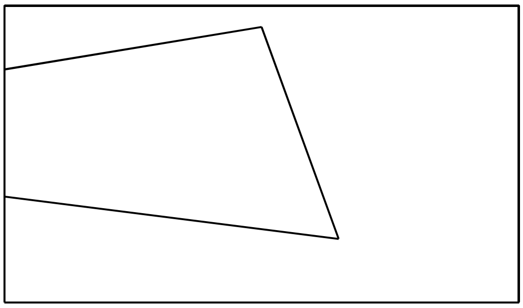

Figure 1

Ce problème ne présente un intérêt en classe de troisième que si l'on ne peut pas reproduire le triangle en entier, par exemple en prolongeant les côtés tronqués sur une feuille supplémentaire. La procédure reviendrait alors à mesurer les trois côtés (à la règle) puis à faire la somme.

Pour éviter que les élèves tentent de reconstruire le triangle directement « en entier », je propose la consigne sous la forme suivante :

> « Imaginez que vous êtes dans une salle fermée, sur le sol de laquelle est tracé un triangle tronqué d'une pointe (il manque donc un sommet et un seul). On ne peut pas sortir de la salle et on ne peut pas dessiner sur les murs. Décrire une procédure qui permet à des camarades de calculer le périmètre du triangle tronqué qu'ils ont, quel que soit sa taille. »

Éléments d'analyse de la situation

La *troncature du triangle* est bien sûr fondamentale. En effet, si le triangle est entièrement tracé sur la feuille, la tâche serait alors une activité de mesure directe. D'autre part, il s'agit d'une *situation de formulation* : il faut donc non seulement trouver « comment faire », mais décrire la procédure. Enfin, décrire un calcul contextualisé sur un exemple ne suffit pas à résoudre le problème : la procédure doit être applicable *quel que soit le triangle tronqué* dessiné sur la feuille. Cette dernière contrainte invalide les isométries (symétries, translations) pour le cas général, même si celles-ci peuvent marcher dans certains cas particuliers (par exemple lorsque la taille du triangle permet de le reconstruire entièrement dans la feuille donnée).

La solution du problème ne peut donc pas s'appuyer sur la reconstruction isométrique du triangle, ce qui amène la nouvelle question :

> ***Peut-on déterminer le périmètre d'un triangle sans connaître les mesures de ses trois côtés ? Et — si oui, avec quelles données et comment ?***

Une similitude permet de résoudre le problème. La stratégie associée est la suivante. Nommons A et B les sommets qui sont sur la feuille. Construire un triangle AB'C' semblable au triangle tronqué, B' étant choisi sur [AB] tel que la parallèle passant par B' à l'un des côtés tronqués coupe l'autre côté à l'intérieur de la feuille, en C'. Ceci est toujours possible. Puis, AB'C' étant entièrement tracé dans la feuille, on peut calculer directement son périmètre P' en mesurant ses trois côtés. Il suffit maintenant de déterminer le (bon) rapport de similitude entre les deux triangles, soit k=AB/AB'. Le périmètre P du triangle tronqué est P=k.P'

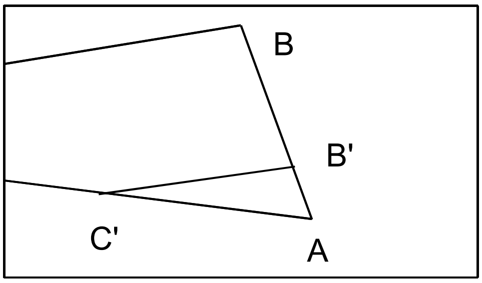

Figure 2

Productions et difficultés usuelles pour les élèves

Les premières procédures qui émergent chez les élèves (et aussi chez les étudiants) relèvent toutes des isométries. Elles consistent à tenter de retrouver le triangle entier, soit par une translation adaptée dans la feuille, soit par des symétries axiales ou centrales qui aboutissent au dessin d'un triangle « replié » sur lui-même – éventuellement plusieurs fois , comme par exemple ci-dessous. Ces procédures de construction sont valables pour certains types de figures, elles sont donc des solutions pour certains cas particuliers.

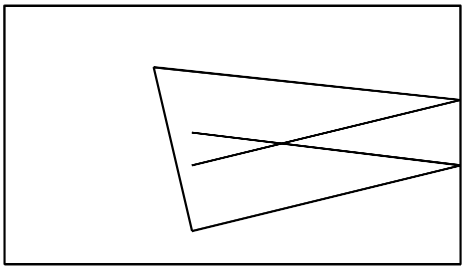

Figure 3

Une des difficultés rencontrées régulièrement chez les élèves est d'admettre qu'on va pouvoir déterminer le périmètre du triangle original en ne connaissant qu'une seule des longueurs de ses trois côtés.
Ce problème montre donc bien le sens fondamental du théorème de Thalès, comme moyen de calculer des longueurs qu'on ne peut mesurer directement.

D'autres types de « troncature »

Les triangles tronqués ci-dessous sont déterminés de manière unique (même celui de la figure 4 où pourtant il n'y a pourtant aucun sommet). Peut-on calculer leur périmètre sous les mêmes conditions ? Il est facile de se convaincre que celui de la figure 4 se résout par la même procédure que le précédent. Et pour celui de la figure 5 ? Nous laissons la question au lecteur ...

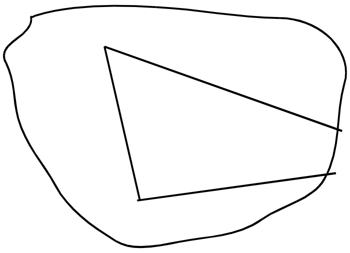

Figure 4

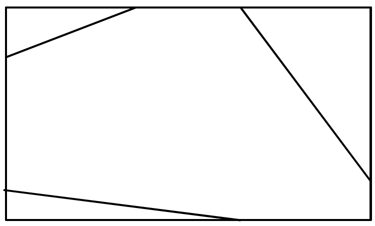

Figure 5

Enfin, les complétions du triangle de la figure 6, tronqué de deux sommets ne sont pas uniques, le problème n'a donc évidemment pas de solution.

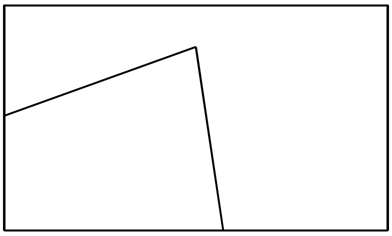

Figure 6

Problème 2. Constructions de longueurs à la règle et au compas

Rappels

En géométrie, un ***point*** est dit *constructible à la règle et au compas* s'il est déterminé par l'intersection de deux droites sécantes, ou d'une droite et d'un arc de cercle, ou de deux cercles (les points de tangence ne sont pas admis). On peut construire des figures à partir d'objets géométriques donnés ou eux-mêmes construits (points, droites, cercles, segments). Une ***longueur*** est *constructible à la règle et au compas* si ses extrémités sont des points constructibles.

Énoncé du problème

> **Étant données trois longueurs 1, a et b quelconques, construire (à la règle et au compas) les longueurs a.b, a/b, b/a (a≠0, b≠0).**

Ce problème est plus général mais aussi différent des exercices usuels dans l'enseignement, tels les deux suivants :

> « Sur la figure ci-dessous, les points A, B, C sont alignés, ainsi que les points A, D et E. On donne : AB = 3; BC = 2; AD = 5 et DE = 3. Les droites (BD) et (CE) sont elles parallèles ? » (suivi du dessin d'un triangle intersecté par une droite).

Ou encore :

> « ABC est un triangle, on sait que C' est un point de la droite (AB), B' un point de la droite (AC) et que $\frac{AC'}{AB}=\frac{AB'}{AC}$. Les droites (BC) et (B'C') sont-elles parallèles ? »

La question posée ici en diffère sous des aspects importants :

– il s'agit de construire le produit et le rapport de deux longueurs inconnues a et b, étant donnée une longueur unité 1, avec une règle non graduée – on ne mesure pas – et un compas qui permet de reporter des longueurs et de construire des droites parallèles ; or, bien que ces longueurs soient inconnues, la construction est accessible ;

– le produit a.b doit être construit comme longueur et non comme aire ; cette approche est assez rare ;

– le théorème de Thalès est un outil performant aussi bien pour le produit a.b que le rapport a/b, quel que soit l'ordre sur les longueurs 1, a et b.

Voici deux exemples de construction qui aboutissent l'une au rapport b/a, l'autre au produit a.b, lorsque a<b. Il est facile de trouver les autres choix à faire pour les tracés de parallèles, selon les valeurs respectives de 1, a et b.

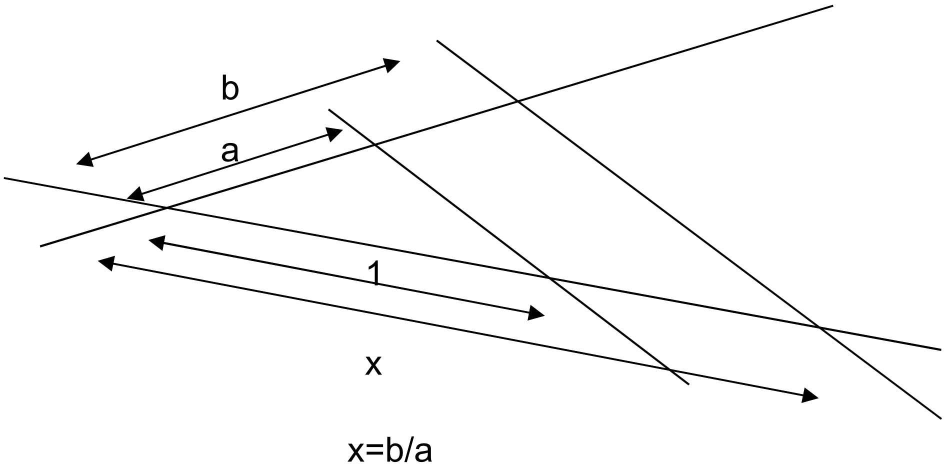

Figure 6

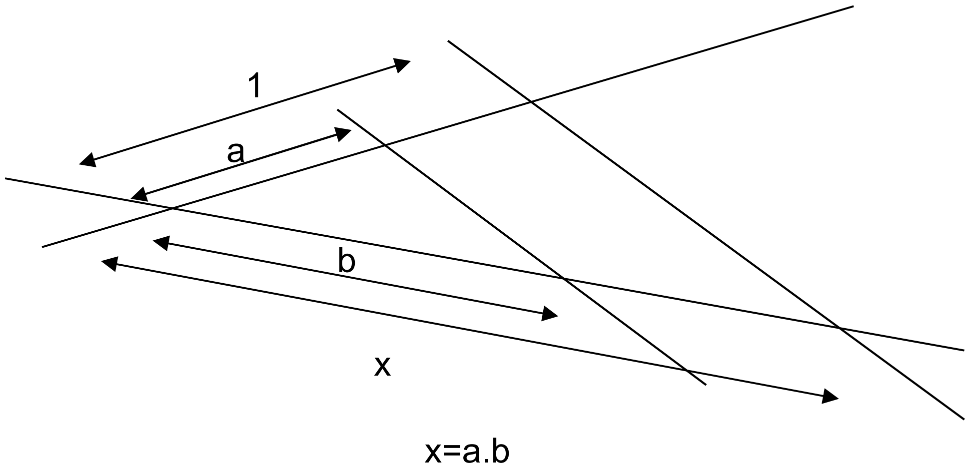

Figure 7

Note finale. On peut prolonger ce problème en demandant d'étudier toutes le positions relatives des longueurs a, b et 1 sur les deux droites, et tous les ordres possibles entre les trois longueurs (1<a<b, a<1<b, etc..).