

# LES FORMULES DE VOLUME ET LE PRINCIPE DE CAVALIERI

Denis TANGUAY  
Université du Québec à Montréal (UQAM)

**Résumé.** Nous reprenons ici les grandes lignes d'une séquence d'enseignement proposée par Claude Janvier, à travers laquelle sont établies et justifiées les différentes formules de volume vues au secondaire. Nous proposons des arguments plus détaillés pour certains des nœuds cruciaux de l'enchaînement des raisonnements, notamment celui du passage de la formule de volume des prismes à celle des pyramides. Le Principe de Cavalieri y intervient de façon centrale, et permet entre autres de montrer que les pyramides à base triangulaire de même base et de même hauteur ont même volume. Une justification des formules de l'aire et du volume de la sphère, s'appuyant elle aussi sur le Principe de Cavalieri, est ajoutée à ce que propose Janvier. À travers tout cela, nous faisons valoir que le Principe de Cavalieri peut donner l'occasion de réinvestir, en géométrie de l'espace, les résultats, connaissances, raisonnements et modes de travail mis en œuvre en géométrie plane.

**Mots clés.** Géométrie de l'espace, formules de volume, volume de la pyramide, volume de la sphère, aire de la sphère, Principe de Cavalieri, géométrie naturelle, géométrie axiomatique naturelle.

## 1. Introduction

Le congrès de la *Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques* (CIEAEM 61), qui s'est tenu à l'Université de Montréal en juillet 2009, était dédié à la mémoire du regretté didacticien Claude Janvier. Outre son travail sur l'enseignement et l'apprentissage des fonctions, C. Janvier s'est intéressé à la géométrie de l'espace et a proposé, dans son livre « Le Volume, mais où sont les formules ? » (1994), une séquence d'enseignement sur les formules de volume. Celle-ci repose fortement sur le *Principe de Cavalieri*, dont je reprends ici l'énoncé :

*si les figures planes, déterminées par les intersections de deux solides avec tout plan parallèle à un plan fixe donné, ont la même aire, alors les deux solides ont le même volume.*

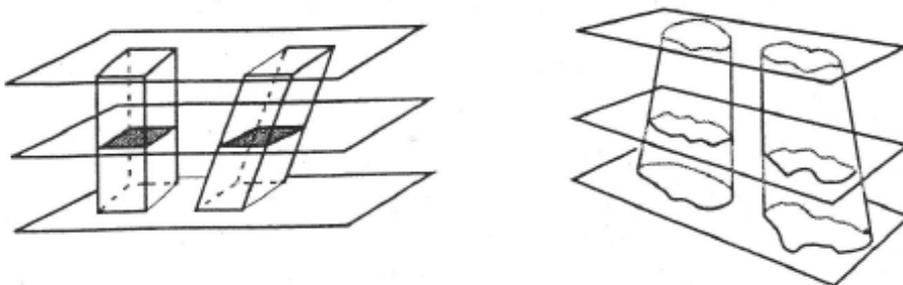


Figure 1, extraite de Janvier (1994), p. 29

La géométrie dans l'espace et les formules de volume y sont traitées conformément aux programmes ministériels québécois des années 90, qui cantonnaient alors ces sujets à la seule année de Secondaire 3 (14-15 ans). Dans le nouveau programme (MELS, 2006), la géométrie dans l'espace occupe plus de place, de la 1<sup>re</sup> à la 3<sup>e</sup> secondaire, avec même la possibilité d'y revenir en 4<sup>e</sup> et 5<sup>e</sup> secondaires dans le cadre d'activités de type « projet » ou « situations-problèmes ». Dans le présent article, je me propose de discuter d'ajouts possibles à la séquence d'enseignement de Janvier sur les volumes, pour mieux prendre en compte l'accroissement du temps consacré à la géométrie spatiale et y favoriser au maximum la mise en œuvre de la compétence *Déployer un raisonnement mathématique* (MELS, 2006).

## 2. Quelques considérations didactiques

Pour bâtir une séquence d'enseignement efficace sur le volume, il importe de bien repérer les difficultés qu'éprouvent les élèves avec ce concept. J'en énumère ici quelques-unes parmi celles dont Janvier discute dans son livre.

1. La confusion *aire latérale – volume*. C'est le pendant « spatial » du conflit périmètre-aire, à deux dimensions. Cette confusion fera par exemple dire à un élève que deux boîtes faites avec la même quantité de carton seront nécessairement de même volume.
2. La confusion *contenant – contenu, espace occupé – capacité*. Serait victime de cette confusion l'élève qui, pour mesurer la capacité d'une tasse, mesurait la quantité de liquide déplacé en immergeant complètement la tasse dans un récipient gradué. Une autre manifestation de cette confusion consiste à refuser d'associer un volume à une portion d'espace vide.
3. La confusion *solide (objet) – volume* (une mesure, c'est-à-dire *un nombre positif*) ;  
→ difficulté à concevoir que des solides d'apparences très différentes aient un même volume.
4. Conception « rigide » de l'unité (entre autres pour le centimètre-cube) ;  
→ difficultés associées au volume des corps ronds ou aux solides dont les dimensions ne sont pas entières : les centimètres-cubes « ne rentrent pas » diront certains élèves !
5. Conception purement *procédurale* de la formule :
  - formule perçue comme un *calcul* précédé d'un « mesurage » ;
  - ne s'appuie pas sur un raisonnement, sur une représentation spatiale de l'objet dont on mesure le volume ;
  - mémorisation des formules plus difficile, parce qu'elle n'a pas de base sur quoi s'étayer ;
  - conception à la source des deux difficultés suivantes.
6. Difficulté à reconnaître à quelle classe de solides s'applique la formule ou inversement, à associer la bonne formule à un solide donné.
7. Difficulté à repérer les éléments de la formule dans la représentation spatiale :
  - confusion *hauteur – arête, hauteur – apothème* ; souvent exacerbée par le manque de précision des enseignants qui négligent de dire de quelle hauteur ils parlent, de quelle base ils parlent, notamment quand l'aire latérale et le volume des pyramides sont traités concurremment ; est également exacerbée par le recours trop hâtif et systématique au symbolisme ;
  - difficulté à se représenter mentalement la hauteur abaissée d'un point sur un plan ;
  - difficulté à concevoir plusieurs bases pour un même solide, à repérer les hauteurs (pas les mêmes !) pour ces bases distinctes.
8. Difficulté à concevoir la bonne variation de volume par transformation du solide
  - erreur : si je double la longueur du côté d'un cube, alors son volume va doubler ;
  - gestion difficile des changements d'unités : si l'on passe des mètres-cubes aux centimètres-cubes, de combien faut-il multiplier le volume ?

### 9. Difficulté à calculer les volumes de solides complexes

- difficulté à trouver le bon découpage pour les solides décomposables ;
- difficulté à percevoir le découpage en tranches à la base du principe de Cavalieri (voir item F dans la *séquence des raisonnements et justifications*, §3), à reconnaître ses conditions d'applicabilité.

Le livre de Janvier (1994) propose une démarche qui cherche à minimiser ces difficultés.

- Voir la formule comme une systématisation du dénombrement des unités-cubes dans le solide, une manière d'organiser ce dénombrement.
- S'appuyer sur des décompositions spatiales (visualisation du découpage en tranches dans le cas des prismes droits) et des reconstructions spatiales (d'un autre solide à partir du solide initial, dans le cas des pyramides, de la sphère...) ; bref, sur des **actions**, intériorisées ou non.
- Éviter le recours trop hâtif aux automatismes de calcul et à la mesure.
- Éviter ou retarder le recours au symbolisme, insister sur la **verbalisation**.
- Recourir à des unités *non conventionnelles*. Retarder l'introduction aux unités standard (toujours dans le but de retarder les automatismes de calcul, de favoriser la décomposition mentale du solide). Favoriser des activités de comparaison entre solides, retarder le « numérisme » (recours plus ou moins systématique aux nombres).
- Idée de « construire » les formules, de les déduire les unes des autres, en allant des plus simples aux plus complexes, et en élargissant sans cesse les classes de solides auxquelles elles s'appliquent.
- Un des choix de Janvier : l'introduction au Principe de Cavalieri. Outre l'intérêt intrinsèque du principe, celui-ci permet de donner des justifications autrement inaccessibles pour les formules du volume de la pyramide, des prismes obliques, de certains solides torsadés. Nous chercherons par ailleurs à faire valoir comment le Principe de Cavalieri peut donner l'opportunité de réinvestir, en géométrie de l'espace, le travail fait en géométrie plane.

### 3. Raisonnements et justifications clés dans la séquence de Janvier

Quels sont donc ces raisonnements qui permettent de « construire » les formules de volume, de les déduire les unes des autres ? Comment le Principe de Cavalieri y intervient-il ? Sans entrer dans les détails (le lecteur pourra se référer à Janvier, 1994), je donne ici les grandes lignes de ce qui pourrait être un tel enchaînement. Certaines étapes — par exemple le passage des prismes à base rectangulaire aux parallélépipèdes — ont été ajoutées à ce que propose Janvier. J'aurai plus loin l'occasion d'en discuter.

#### La séquence des raisonnements et justifications

- A. Quand on peut décomposer un solide pour en recomposer un autre, les deux solides ont le même volume.
- A'. Additivité du volume<sup>2</sup> :
- si  $Solide = Solide_1 \cup Solide_2$ , avec  $Volume(Solide_1 \cap Solide_2) = 0$ , alors
- $Volume(Solide) = Volume(Solide_1) + Volume(Solide_2)$ .
- Le principe peut être itéré et ainsi appliqué aux réunions finies de solides.
- B. Dans un prisme droit à base rectangulaire, les cubes-unités se dénombrent par :
- le nombre de cubes par tranche*  $\times$  *le nombre de tranches*.
- C. Le nombre de centimètres-cubes de la tranche du fond est égal au nombre de centimètres-

<sup>2</sup> Pas énoncée explicitement dans Janvier (1994) mais utilisée implicitement : il s'agit en fait d'une version plus formelle de l'énoncé A.

carrés qui pavent ce fond.

C'. Le nombre de tranches d'un centimètre d'épaisseur est égal au nombre de centimètres en hauteur, soit la mesure en centimètres de cette hauteur.

D. Les items B, C et C' se combinent pour donner la formule de base pour les prismes droits à base rectangulaire :

$$\text{volume} = \text{aire de la base} \times \text{hauteur}. \quad (*)$$

E. Pour les parallélépipèdes droits (prismes droits dont la base est un parallélogramme), on obtient la même formule (\*) en soustrayant, en vertu de l'additivité, le volume de deux prismes à base rectangulaire obtenus en complétant le parallélogramme en rectangle : voir les détails à l'Annexe 1.

E'. Deux copies isométriques de prismes droits à base triangulaire peuvent être juxtaposées pour donner un prisme droit dont la base est un parallélogramme. Le volume du prisme droit à base triangulaire est donc la moitié de celui du prisme dont la base est le parallélogramme. Mais comme l'aire de la base triangulaire est aussi la moitié de celle du parallélogramme, la formule (\*) reste bien valable pour les prismes à base triangulaire.

E''. Pour les prismes droits dont la base est un polygone quelconque, il suffit de découper cette base en triangles et de considérer la décomposition du prisme initial en prismes dont les bases sont ces triangles. On retrouve bien la formule (\*) après avoir mis la hauteur en évidence dans la somme obtenue en vertu de l'additivité du volume, comme à l'Annexe 1.

F. *Principe de Cavalieri* : soit  $S_1$  et  $S_2$  deux solides de l'espace, et soit  $\Pi$  un plan qui intercepte les deux solides le long de deux surfaces non vides et de même aire. Si tous les plans parallèles à  $\Pi$  interceptent les deux solides en deux « tranches » (ou surfaces) de même aire, alors les deux solides sont de même volume.

G. Les prismes qui ont même base et même hauteur sont de même volume par le Principe de Cavalieri. Il en est de même des pyramides de même base et même hauteur.

H. Tout prisme droit à base triangulaire se découpe en trois pyramides à base triangulaire, et deux de ces pyramides ont même base et même hauteur que celle du prisme. En considérant une autre paire « base-hauteur », on montre que la troisième de ces pyramides a elle aussi même volume que les deux autres. La formule du volume de la pyramide à base triangulaire est donc :

$$\text{volume} = (1/3) \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}. \quad (**)$$

H'. Pour les pyramides dont la base est un polygone quelconque, il suffit de découper cette base en triangles et de considérer la décomposition de la pyramide initiale en pyramides dont les bases sont ces triangles. Comme pour E'', la formule (\*\*) s'étend donc bien à toutes pyramides dont la base est un polygone.

I. Le cylindre (respectivement le cône) est la limite d'une suite de prismes (respectivement de pyramides) qui ont pour bases des polygones réguliers dont le nombre de côtés tendrait vers l'infini. Par passage à la limite, les formules pour les volumes sont alors analogues à celles des prismes (respectivement des pyramides), soit la formule (\*) (respectivement (\*\*)).

J. La sphère<sup>3</sup> est la limite d'une suite de polyèdres dont le nombre de faces tendrait vers l'infini et l'aire de ces faces vers 0. Ces polyèdres se découpent en pyramides jointes en leur sommet au centre du polyèdre. La hauteur de ces pyramides tend vers le rayon de la sphère, et la somme des aires des bases de ces pyramides tend vers l'aire de la sphère. D'où les formules :

$$\text{volume de la sphère} = (1/3) \times \text{aire de la sphère} \times \text{rayon} = (4\pi r^3)/3.$$

3 Il est plus standard, mathématiquement, d'utiliser le mot « boule » pour désigner l'objet plein et de réserver le mot « sphère » à la surface à la frontière de la boule. J'ai choisi de considérer ici la sphère et les polyèdres qui l'approximent comme des solides et non comme les surfaces à la frontière de ces solides parce que cela permet d'alléger considérablement la rédaction.

On le voit, Janvier cherche à justifier chacune des formules usuelles de volume. Certaines « justifications » relèvent cependant en partie d'un recours à l'intuition. C'est le cas des passages à la limite, donnant accès aux formules du volume du cylindre, du cône et de la sphère, et qui sont traités de manière informelle. L'application du Principe de Cavalieri, qui permet d'établir les formules de volume des pyramides, relève elle aussi en partie chez Janvier d'un recours à l'intuition ; j'en discuterai dans les sections subséquentes. Une seule formule ne reçoit aucune justification : la formule  $4\pi r^2$  pour l'aire de la sphère de rayon  $r$ , aussi donnée sous la forme « quatre fois l'aire d'un grand cercle de la sphère » (Janvier, 1994, p. 43). J'en propose plus loin une justification, faisant intervenir le Principe de Cavalieri.

#### 4. Pourquoi peut-on appliquer Cavalieri ici ?

Compte tenu de la plus grande place occupée maintenant par la géométrie de l'espace dans les récents curriculums, un enseignant pourrait être soucieux de clarifier davantage certains des enchaînements argumentatifs, parmi ceux qui paraissent un peu succincts chez Janvier. Examinons-en un de plus près : le passage crucial du volume du prisme au volume de la pyramide.

Considérons pour cela le prisme droit  $ABCDEF$ , de base  $\triangle BCE$ . Il est constitué des trois pyramides à base triangulaire (ou « tétraèdres »)  $ABCE$ ,  $ADEF$  et le tétraèdre  $ACDE$ , coincé entre les deux. Mais comment justifier que les trois ont même volume ? On peut arguer, par exemple, que  $ABCE$  et  $ACDE$  ont des bases isométriques, respectivement les triangles  $\triangle ABC$  et  $\triangle ADC$ , et la même hauteur, portée par la perpendiculaire abaissée du point  $E$  sur le plan  $ABCD$ . Or, on cherche justement à établir la formule

$$\left(\frac{1}{3}\right) \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

pour le volume de la pyramide ; on ne peut donc pas présumer qu'elle est valide et conclure que  $ABCE$  et  $ACDE$  ont même volume !

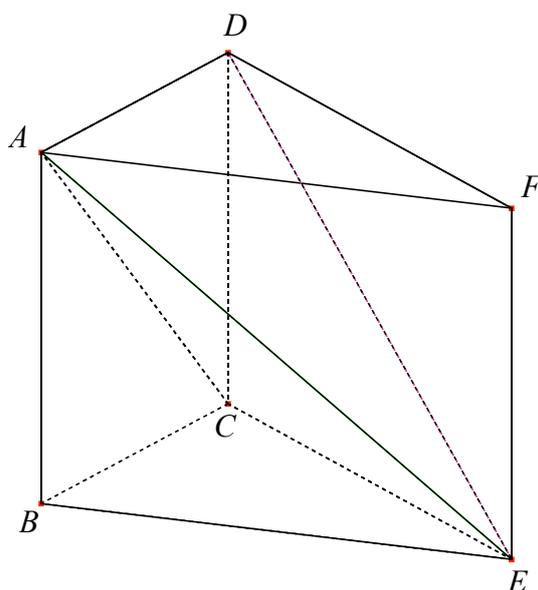


Figure 2 : un prisme à base triangulaire

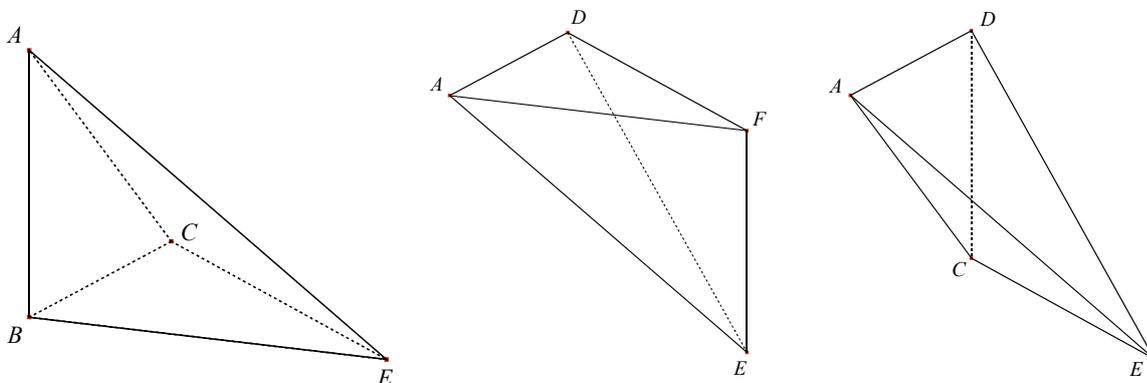


Figure 3 : découpage du prisme en trois tétraèdres

Janvier (1994) justifie que les trois pyramides à base triangulaire sont de même volume en « montrant » que « toutes les pyramides ayant des bases congrues et la même hauteur ont le même volume » (p. 37). Il invoque pour cela le Principe de Cavalieri, à l'aide d'un montage par lequel les quatre coins d'un rectangle sont reliés par des élastiques à une même tige, dont l'extrémité est déplacée à hauteur fixe et simule ainsi les sommets d'une famille de pyramides de même base.

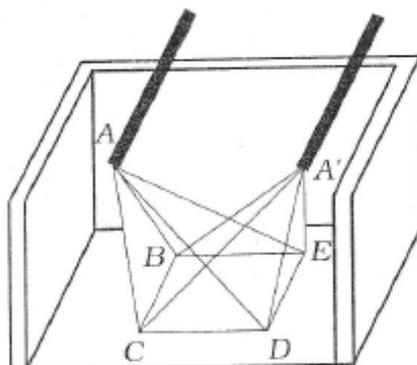


Figure 4 : extraite de Janvier, 1994 (Figure 4.3, p. 37)

*Pour que deux pyramides aient même volume, il faut que chaque plan parallèle à la base coupe en des « sections » congrues. L'enseignant peut simuler une coupe dans la pyramide « en élastiques » à l'aide d'un rectangle en papier construction attaché aux élastiques. Il n'est pas question de démontrer la congruence. L'enseignant peut prendre une coupe ou deux [...] (op. cit., p. 38).*

Il y a ici selon moi plusieurs aspects à discuter. Tout mathématicien est réticent à écrire ou affirmer quelque chose comme « Il n'est pas question de démontrer... ». C'était sans doute le cas de Janvier, qui a vraisemblablement évalué que la complexité des arguments plus formels et le temps requis pour les mener à bien auraient peser trop lourd dans l'ensemble de la séquence<sup>4</sup>. Dans un contexte où une séquence complète sur les volumes s'étendrait sur deux ou trois ans plutôt qu'en une seule année, est-il envisageable d'y réintroduire une plus grande part de démonstration ?

Je ne parle pas ici de démontrer le Principe de Cavalieri. Cavalieri lui-même n'a jamais donné de démonstration à son Principe. De fait, une démonstration moindrement formelle du Principe requiert les outils du calcul différentiel et intégral, et était hors de portée des contemporains de Cavalieri, dont les travaux préfigurent cependant ceux de Newton et Leibniz, un demi-siècle plus tard. Il est clair qu'il en sera de même au secondaire : si l'enseignant doit introduire le Principe de Cavalieri en classe, il lui donnera le statut de *postulat*, de vérité mathématique admise sans démonstration.

Mais qu'en est-il des critères d'applicabilité du Principe ? Ne devrait-on pas, chaque fois que c'est possible, *démontrer que les conditions sont bien remplies* ? Le fait que les « tranches » obtenues par section des pyramides de même base et même hauteur sont isométriques est admis dans Janvier sur une base empirico-perceptive. Et si un argument plus formel, mettant en œuvre les compétences développées par les élèves en géométrie plane, était accessible ?

<sup>4</sup> Janvier donne d'ailleurs les pistes d'une possible démonstration en invoquant le théorème de Thalès (p. 38).

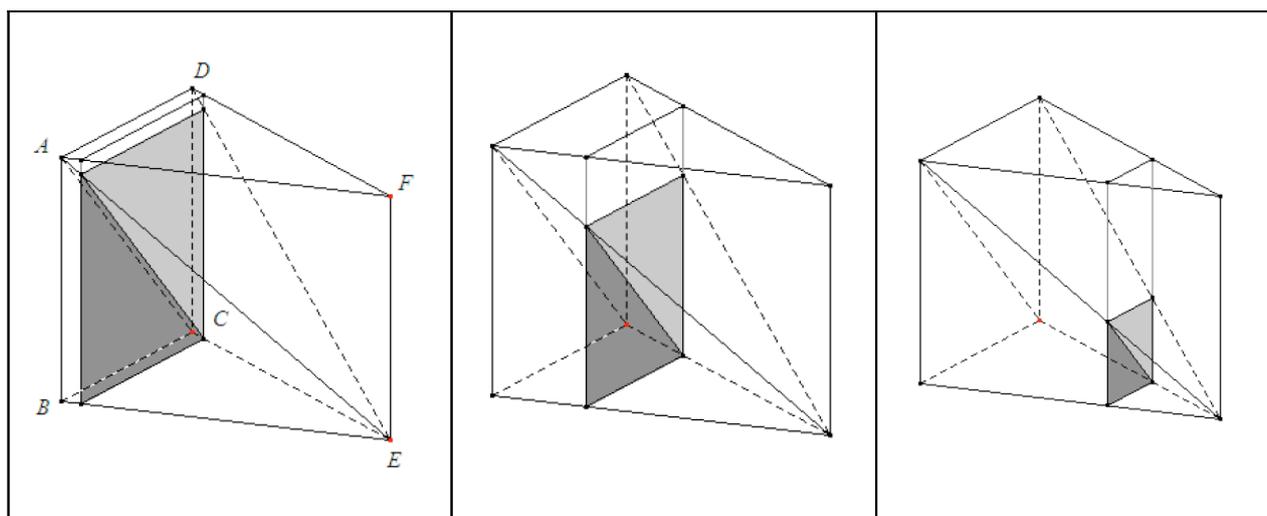


Figure 5 : les deux tétraèdres  $ABCE$  et  $ACDE$ , coupés par des plans tous parallèles à  $ABDC$

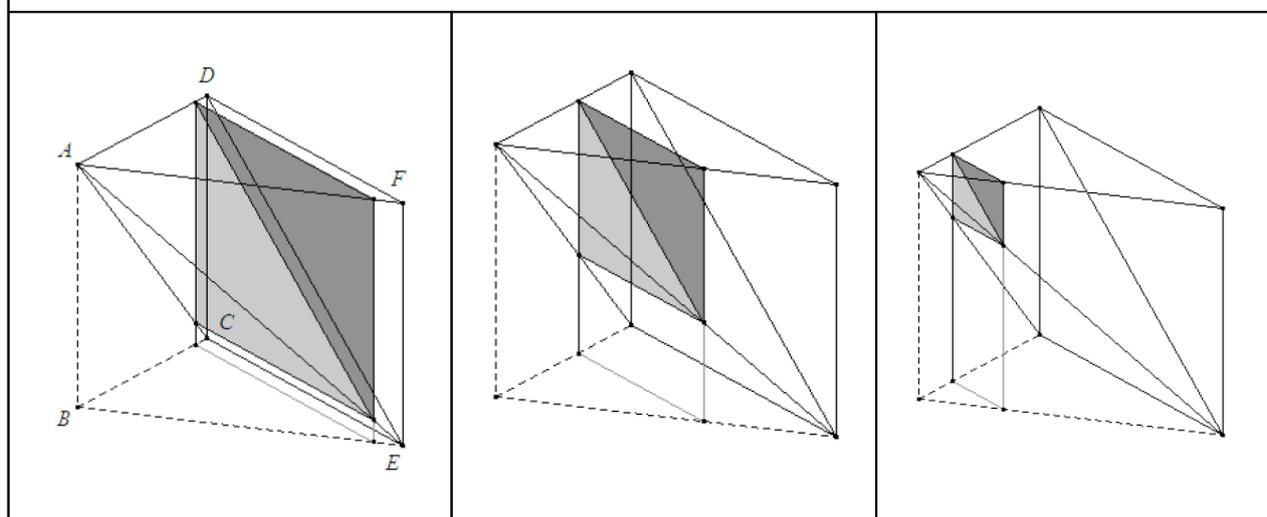


Figure 6 : les deux tétraèdres  $ADEF$  et  $ACDE$ , coupés par des plans tous parallèles à  $CDFE$

L'intersection de chaque plan avec le prisme  $ABCDEF$  est un rectangle. Si l'on considère ensuite l'intersection de ce rectangle avec les deux tétraèdres ( $ABCE$  et  $ACDE$  dans le 1<sup>er</sup> cas,  $ADEF$  et  $ACDE$  dans le 2<sup>e</sup> cas), on constate qu'il s'agit d'un « sous-rectangle », avec une des deux moitiés délimitée par la diagonale du rectangle dans l'un des tétraèdres et l'autre moitié dans l'autre (les triangles en différents tons de gris). L'intersection de chaque plan avec les deux tétraèdres est donc constituée de deux triangles isométriques et par Cavalieri, les deux tétraèdres sont de même volume. Mais peut-on justifier rigoureusement ces affirmations, autrement que par un simple constat visuel, ou que par un « montage Cabri », comme celui à partir duquel les images ci-dessus ont été créées ? Une animation Cabri est en effet relativement facile à réaliser et sera très parlante pour les élèves, mais elle relève elle aussi beaucoup plus du « constat » (fût-il technologique !) que de la preuve mathématique...

## 5. Géométrie de l'espace et géométrie plane : une ou deux géométries ?

Il y a ici selon moi un danger qui guette : en géométrie plane, à partir de la 2<sup>e</sup> secondaire et de plus en plus systématiquement ensuite, on cherche à éviter le recours au perceptif, à l'empirisme, au constat visuel et à la mesure dans des figures, on cherche autant que possible à démontrer (déductivement) les affirmations, en s'appuyant sur un corpus d'axiomes ou de résultats

précédemment démontrés et qu'on enrichit au fil des ans. Houdement et Kuzniak (2006) décrivent cela comme le passage du paradigme de la *géométrie naturelle* à celui de la *géométrie axiomatique naturelle* (grosso modo, la géométrie d'Euclide). On peut comprendre qu'en géométrie de l'espace, un développement axiomatique « à la Euclide » est plus difficile et que le recours au raisonnement déductif y sera vraisemblablement moins systématique. Mais il faut tout de même s'assurer que la cassure entre les deux géométries, plane et spatiale, ne soit pas trop grande. Si le travail en géométrie de l'espace ne fait intervenir que des validations empirico-perceptives, si le statut théorique des énoncés n'est jamais ni discuté, ni même problématisé, l'élève comprendra difficilement quel sont les « termes du contrat » en géométrie : sur quoi s'est-on basé pour affirmer ce résultat ? Que doit-on faire pour le valider ? Quand ai-je le droit de me fier à la figure ? Sur combien de « cas » me suffit-il de vérifier ? Qu'ai-je le droit d'affirmer et quand ? Pourquoi ai-je le droit de faire cela en géométrie de l'espace mais pas en géométrie plane ?

Pour bien comprendre ce que l'enseignant attend de lui, il est essentiel que l'élève discerne une cohérence minimale dans les attentes relatives à la géométrie, et puisse transposer à la géométrie de l'espace les raisonnements, connaissances et modes de travail mis en œuvre en géométrie plane (Grenier et Tanguay, 2008, p. 45). Il n'est pas souhaitable à mon avis que les géométries plane et spatiale apparaissent à l'élève comme deux mondes distincts, où le travail demandé n'est pas de même type. Il n'est pas normal que les résultats, concepts et méthodes étudiés et développés en géométrie plane ne soient jamais réinvestis en géométrie de l'espace.

Pour l'égalité des volumes des pyramides de même base et même hauteur, je propose ici un enchaînement d'arguments qui *démontre* que le Principe de Cavalieri s'applique bel et bien. En outre, il fait appel à des résultats de la géométrie plane : critère Côté-Côté-Côté (CCC) pour l'isométrie des triangles, isométrie des côtés opposés dans le parallélogramme. En les faisant intervenir en géométrie de l'espace, l'élève apprend donc à *coordonner son travail géométrique* dans le passage de deux à trois dimensions.

## 6. Le Principe de Cavalieri s'applique aux pyramides

Dans l'enchaînement déductif qui va suivre, nous allons nous appuyer sur quatre propositions fondamentales de la géométrie de l'espace.

**Proposition 1.** Par trois points non alignés passe un unique plan de l'espace.

**Proposition 2.** L'intersection de deux plans non parallèles est une droite.

**Proposition 3.** Soient  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  deux plans distincts et parallèles dans l'espace. Si  $\Pi$  est un plan sécant pour  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$ , alors les intersections  $\Pi \cap \Pi_1$  et  $\Pi \cap \Pi_2$  sont deux droites parallèles.

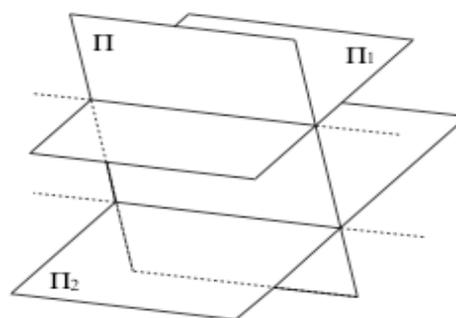


Figure 7 : deux plans parallèles et un plan sécant

**Proposition 4.** Transitivité du parallélisme dans l'espace : deux droites de l'espace parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.

À l'Annexe 2, je propose les premiers pas dans ce qui serait un développement « à la Euclide » menant à ces propositions. Les Propositions 1 et 2 y sont en fait des axiomes (respectivement axiomes  $A_2$  et  $A_5$ ), conformément aux démarches standard. Les Propositions 3 et 4 correspondent respectivement aux Théorèmes 7 et 8 de l'annexe. Je laisse à chaque enseignant le soin de déterminer ce qu'il garderait pour sa classe d'un tel développement : cela peut bien évidemment dépendre du niveau, de la force de la classe, de la motivation des élèves, du temps consacré à cette portion de la matière, etc. À la limite, les Propositions 3 et 4 peuvent être elles aussi admises comme axiomes (la preuve de la transitivité du parallélisme est particulièrement délicate). Venons-en maintenant à l'enchaînement déductif annoncé.

**Théorème des pyramides à base triangulaire.** Le principe de Cavalieri s'applique aux pyramides à base triangulaires (tétraèdres) qui ont même base et même hauteur, et permet de conclure à l'égalité de leur volume.

*Démonstration.* Considérons le segment  $[AB]$  dans le plan  $\Pi_1$ , que nous appelons aussi le *plan de base*, et deux points  $S'$  et  $S''$  dans le plan  $\Pi_3$ , le *plan des sommets*, parallèle à  $\Pi_1$  (voir figure 8). Considérons le plan  $\Pi_2$ , le *plan de coupe*, entre  $\Pi_1$  et  $\Pi_3$  et parallèle à chacun. Les points  $A$ ,  $B$  et  $S'$  étant dans deux plans parallèles (distincts), ils ne peuvent être alignés. Par la Proposition 1, ces points déterminent donc un plan. Ce plan intersecte  $\Pi_1$  le long de la droite  $(AB)$  et  $\Pi_2$  le long de  $(A'B')$  (Proposition 2). La Proposition 3 permet alors de déduire que  $(AB)$  et  $(A'B')$  sont parallèles. Considérons maintenant le plan déterminé par  $A$ ,  $B$  et  $S''$ , qui intersecte  $\Pi_2$  le long de  $(A''B'')$ . Le même argument permet de conclure que  $(AB)$  et  $(A''B'')$  sont parallèles. Ayant  $(AB)$  comme parallèle commune,  $(A'B')$  et  $(A''B'')$  sont donc parallèles (Proposition 4). On fait le même raisonnement en considérant maintenant les plans  $S'S''A$  et  $S'S''B$ , comme plans sécants de  $\Pi_2$  et  $\Pi_3$ , le plan  $S'S''A$  coupant  $\Pi_2$  le long de  $(A'A'')$  et le plan  $S'S''B$  le long de  $(B'B'')$ . On conclut que  $(A'A'')$  et  $(B'B'')$  ont  $(S'S'')$  comme parallèle commune, et sont donc parallèles. Mais alors,  $A'A''B''B'$  est un parallélogramme, ce qui permet de déduire que  $[A'B'] \cong [A''B'']$ , comme côtés opposés.

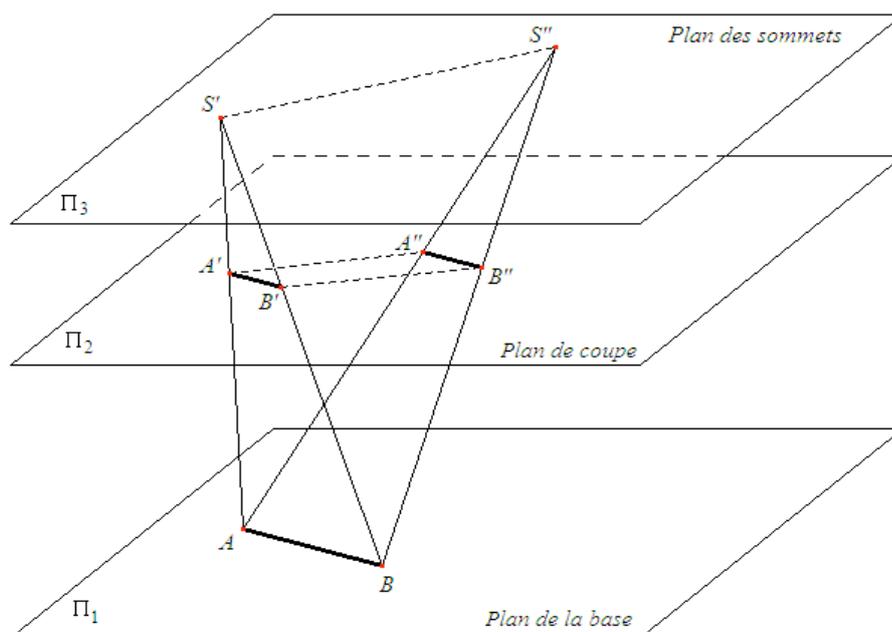


Figure 8 : Cavalieri s'applique aux pyramides de même base et même hauteur

Supposons maintenant qu'on ait dans le plan de base non pas un segment  $[AB]$  mais un triangle  $\Delta ABC$ . Considérons les deux pyramides de même base  $\Delta ABC$  et de sommets respectifs  $S'$  et  $S''$ . Le plan de coupe  $\Pi_2$  intersectera la pyramide de sommet  $S'$  le long d'un triangle que nous notons  $\Delta A'B'C'$ , et la pyramide de sommet  $S''$  le long d'un triangle que nous notons  $\Delta A''B''C''$ . Le raisonnement que nous venons de faire s'applique à chaque côté et permet de déduire les isométries :

$$[A'B'] \cong [A''B''], [A'C'] \cong [A''C''], [B'C'] \cong [B''C''].$$

Le critère CCC permet alors de conclure que  $\Delta A'B'C' \cong \Delta A''B''C''$ . C'est bien le résultat escompté, puisqu'il montre que les sections par les plans parallèles à la base dans des pyramides de même base et de même hauteur sont bien des triangles isométriques. Le Principe de Cavalieri s'applique et de telles pyramides sont bien de même volume : CQFD.

On peut maintenant utiliser ce théorème pour établir de façon plus rigoureuse l'égalité des volumes entre les trois tétraèdres  $ABCE$ ,  $ACDE$  et  $ADEF$ , obtenues par décomposition du prisme  $ABCDEF$ , et ainsi justifier la formule du volume des pyramides. Le théorème des pyramides à base triangulaire se généralise ensuite aux pyramides à base polygonale quelconque par simple découpage de la base en triangles. Montrer que Cavalieri s'applique aux *prismes* à base triangulaire de même base et même hauteur est plus aisé que pour les pyramides : en effet, les faces latérales des prismes sont des parallélogrammes, dont les sections parallèles à la base sont toutes de même longueur que cette base (voir figure 9). Comme pour les pyramides, pour passer des prismes à base triangulaire aux prismes à base polygonale quelconque, il suffit de découper ces derniers en prismes à base triangulaire et de conclure par additivité.

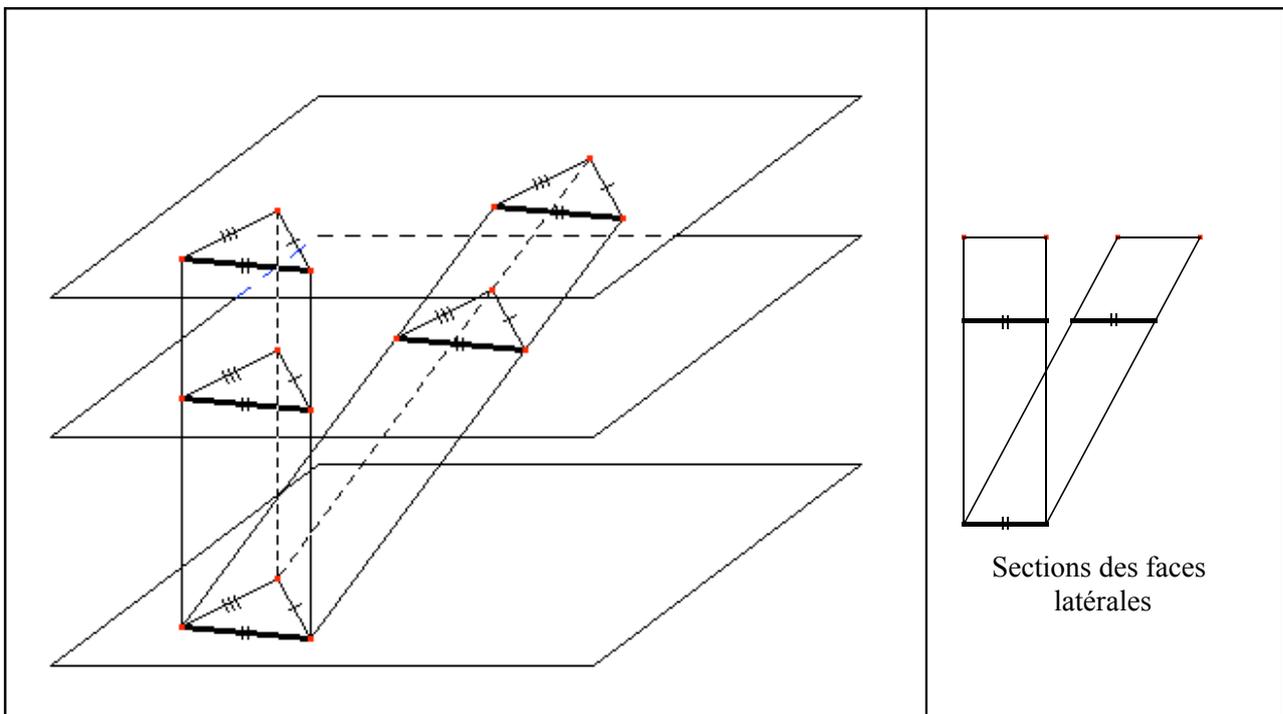


Figure 9 : Cavalieri s'applique aux prismes de même base et même hauteur

## 7. Le volume de la sphère avec Cavalieri

Je propose maintenant une justification que le volume de la sphère de rayon  $r$  est  $\frac{4}{3}\pi r^3$ . Elle fait intervenir le Principe de Cavalieri, et permet de surcroît cette coordination du travail géométrique entre géométries plane et spatiale, dont j'ai parlé plus haut.

On se propose de comparer les deux solides suivants : d'une part, la demi-sphère de rayon  $r$  (on note  $O$  le centre et  $N$  le Pôle Nord de la sphère correspondante) et d'autre part, un « cylindre évidé ». Il s'agit d'un cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $r$ , duquel on enlève l'intérieur d'un cône de rayon  $r$  et de hauteur  $r$ . Soit  $S$  et  $T$  les centres des disques, respectivement inférieur et supérieur du cylindre. Le cône enlevé du cylindre est le cône renversé, placé de sorte que sa base coïncide avec le cercle de centre  $T$  (le « couvercle supérieur » du cylindre) et que son sommet soit en  $S$ : voir la Figure 10. Soit  $U$  un point quelconque sur le bord de la base du cône. Le cône dont on enlève l'intérieur peut donc être vu comme le solide engendré par révolution de  $\Delta STU$  autour de l'axe  $ST$ .

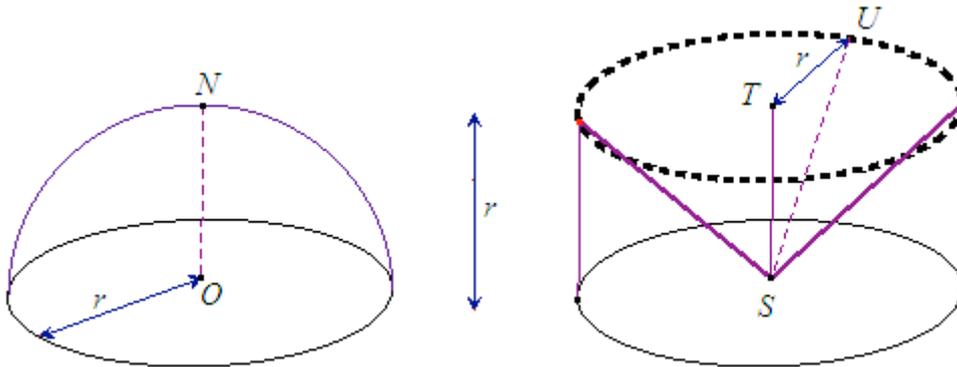


Figure 10 : on compare une demi-sphère avec un cylindre évidé

On veut montrer, à l'aide de Cavalieri, que la demi-sphère et le cylindre-dont-on-a-retranché-le-cône<sup>5</sup> ont le même volume. Montrons pour cela que les tranches obtenues en coupant les deux solides par des plans horizontaux ont même aire. Le plan qui donne lieu à la tranche non vide la plus « basse », à hauteur zéro, intercepte la demi-sphère le long d'un disque de rayon  $r$ , dont le bord est l'équateur de la sphère. Ce plan intercepte le cylindre-dont-on-a-retranché-le-cône le long de la base inférieure du cylindre<sup>6</sup>. Dans les deux cas, l'intersection est d'aire  $\pi r^2$ . La tranche non vide la plus « haute », à hauteur  $r$ , est tangente à la demi-sphère au point  $N$  et intercepte le cylindre-dont-on-a-retranché-le-cône le long du cercle de centre  $T$ . Dans les deux cas, l'aire de l'intersection est nulle.

Considérons maintenant une tranche à hauteur  $h$ ,  $h$  quelconque mais fixé, avec  $0 < h < r$ . L'intersection du plan à hauteur  $h$  avec la demi-sphère est le disque de rayon  $[QP]$ ,  $Q$  étant le centre du disque d'intersection et  $P$  étant un quelconque point sur son bord. L'aire de ce disque est  $\pi(QP)^2$ . Le triangle  $\Delta OQP$  étant rectangle en  $Q$ , on peut écrire, par Pythagore :

$$(QP)^2 = (OP)^2 - (OQ)^2 = r^2 - h^2,$$

si bien que l'aire de la tranche de demi-sphère à hauteur  $h$  est de  $\pi(r^2 - h^2)$ .

<sup>5</sup> Aucun lien de parenté avec Celui-dont-on-ne-doit-pas-prononcer-le-nom.

<sup>6</sup> Le point  $S$ , sommet du cône, fait encore partie du cylindre évidé puisque c'est l'intérieur du cône qu'on enlève.

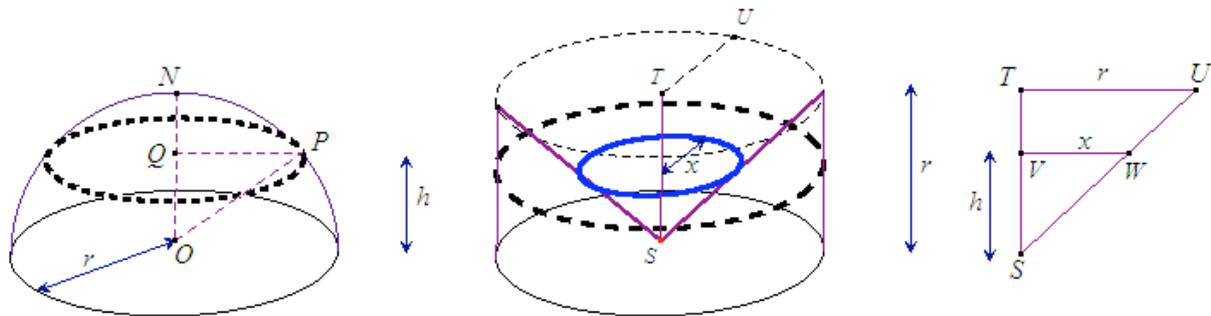


Figure 11 : la demi-sphère et le cylindre évidé, coupés à hauteur  $h$

L'intersection du plan à hauteur  $h$  avec le cylindre-dont-on-a-retranché-le-cône est un anneau, dont le centre est noté  $V$ . Le cercle au bord extérieur de l'anneau est de rayon  $r$ . Il est relativement aisé d'établir que le rayon du cercle intérieur est  $h$ . En effet, soit  $W$  le point d'intersection de  $[SU]$  avec l'anneau, point sur le cercle intérieur de l'anneau (voir Figure 11), de sorte que  $VW$  est la mesure cherchée. Les triangles rectangles  $\Delta VSW$  et  $\Delta TSU$  sont semblables, et les relations de proportionnalité donnent alors  $VW = h$ . Finalement, l'aire de l'anneau à hauteur  $h$  est égale à l'aire du disque extérieur moins l'aire du disque intérieur, à savoir  $\pi r^2 - \pi h^2$ . On en conclut que les intersections du plan à hauteur  $h$  avec les deux solides sont bien de même aire. Le Principe de Cavalieri s'applique, et permet de conclure que la demi-sphère et le cylindre-dont-on-a-retranché-le-cône ont le même volume, à savoir

$$\pi r^2 \times r - \frac{1}{3} \pi r^2 \times r = \frac{2}{3} \pi r^3 .$$

Le volume de la sphère entière est bien sûr du double, soit  $\frac{4}{3} \pi r^3$  .

## 8. Une formule qui lie volume et aire de la sphère

On se propose maintenant d'établir que le volume de la sphère de rayon  $r$  et d'aire  $\mathcal{A}$  est donné par la formule  $\frac{1}{3} \mathcal{A} \times r$ . En comparant ensuite les deux formules de volume obtenues, on en déduit la formule de l'aire de la sphère de rayon  $r$ , à savoir  $\mathcal{A} = 4\pi r^2$ .

Pour établir que le volume est  $\frac{1}{3} \mathcal{A} \times r$ , je reprends et détaille l'argument décrit dans Janvier (1994), aux pages 42 et 43. Il s'agit de considérer la sphère comme la limite d'une suite de polyèdres dont le nombre de faces tend vers l'infini et dont l'aire de chaque face tend vers zéro. Le premier polyèdre de la suite pourrait par exemple être semblable à un « ballon de football ». Techniquement, il s'agit d'un *icosaèdre tronqué*, constitué de 12 faces pentagonales et de 20 faces hexagonales. Le volume d'un icosaèdre tronqué inscrit dans une sphère constitue une bonne approximation du volume de cette sphère.



Figure 12, extraite de Janvier, 1994, p. 42 : un icosaèdre tronqué

Imaginons que chaque face de l'icosaèdre tronqué est la base d'une pyramide dont le sommet est au centre de la sphère<sup>7</sup>. L'icosaèdre tronqué se découpera alors en douze pyramides à base pentagonale  $P_1, P_2, \dots, P_{11}, P_{12}$ , et vingt pyramides à base hexagonale  $H_1, H_2, \dots, H_{20}$ , toutes ces pyramides ayant leur apex au centre de la sphère. Notons  $h_p$  la hauteur des pyramides à base pentagonale et  $h_H$  la hauteur des pyramides à base hexagonale. Attention ! Les hauteurs  $h_p$  et  $h_H$  sont très voisines mais pas tout à fait égales ! Ces deux hauteurs peuvent par ailleurs être approximées par  $r$ , le rayon de la sphère, et l'on va de fait remplacer  $h_p$  et  $h_H$  par  $r$  dans le calcul approché qui s'en vient. Le volume du polyèdre étant égal à la somme des volumes de ces pyramides à bases polygonales, on peut approximer le volume de la sphère par le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
 \text{Vol(sphère)} &\approx \text{Somme des volumes des 32 pyramides} \\
 &= \text{Vol}(P_1) + \text{Vol}(P_2) + \dots + \text{Vol}(P_{12}) \\
 &\quad + \text{Vol}(H_1) + \text{Vol}(H_2) + \dots + \text{Vol}(H_{20}) \\
 &= (12 \times \frac{1}{3} \times A_p \times h_p) + (20 \times \frac{1}{3} \times A_H \times h_H) && \text{(formule (**)) §2)} \\
 &\approx (\frac{1}{3} \times r \times 12 A_p) + (\frac{1}{3} \times r \times 20 A_H) \\
 &= \frac{1}{3} \times r \times (12 A_p + 20 A_H) \\
 &= \frac{1}{3} \times r \times \mathcal{A}
 \end{aligned}$$

où  $A_p$  désigne l'aire de la base pour chacune des pyramides  $P_1, \dots, P_{12}$  et où  $A_H$  désigne l'aire de la base pour chacune des pyramides  $H_1, \dots, H_{20}$ . La dernière approximation a consisté à considérer la somme des aires des faces de l'icosaèdre tronqué (la somme des aires des bases des 32 pyramides) comme une valeur approchée de  $\mathcal{A}$ , l'aire de la sphère.

Le lecteur aura sans doute déjà compris que l'étape suivante consiste à « passer à la limite ». On considère pour cela une suite infinie de polyèdres tous inscrits dans la sphère, dont le nombre de faces augmenterait indéfiniment et dont les faces seraient de plus en plus petites<sup>8</sup>. Le premier polyèdre de la suite est l'icosaèdre tronqué. On peut engendrer les polyèdres subséquents dans la suite en ajoutant un réseau de points uniformément répartis sur la sphère, en sus des sommets de l'icosaèdre tronqué. En joignant ces points judicieusement, on forme un treillis de triangles, comme

<sup>7</sup> Pour la classe, Janvier (1994) suggère de construire effectivement le squelette d'un icosaèdre tronqué avec du matériel comme Poly-kit ou Polydron (polygones de plastique articulés, version 'frame'), de préparer des pyramides de carton du bon format, certaines à base pentagonale et d'autres à base hexagonale, et de montrer aux élèves comment elles s'insèrent dans le polyèdre, avec leur sommet en son centre.

<sup>8</sup> Attention ! Il ne faut pas faire l'erreur de penser qu'en faisant tendre le nombre de faces vers l'infini, la différence entre le volume de la sphère et le volume des polyèdres de la suite tendra nécessairement vers zéro. On peut par exemple fixer une des faces de l'icosaèdre tronqué et fractionner par triangulations successives ses autres faces : le nombre de faces tendra bien vers l'infini mais le volume obtenu à la limite ne sera pas celui de la sphère ! Pour s'assurer que le volume limite est bien celui de la sphère, il faut AUSSI faire tendre l'aire de chaque face vers zéro.

dans la Figure 13. On découpe le polyèdre en pyramides qui ont toutes un sommet commun au centre de la sphère et dont les bases sont les triangles du treillis. Plus les points sont nombreux et proches sur la sphère, plus les triangles sont nombreux et petits, plus la hauteur de chaque pyramide est proche du rayon de la sphère, et meilleures seront :

- l'approximation du volume de la sphère par la somme des volumes des pyramides ;
- l'approximation de l'aire de la sphère par la somme des aires des bases des pyramides.



Figure 13 : la biosphère, sur l'ancien site d'Expo 67 à Montréal

Faisant tendre le nombre de faces vers l'infini et l'aire de chaque face vers zéro, on obtient à la limite que le volume  $\mathcal{V}$  de la sphère de rayon  $r$  et son aire  $\mathcal{A}$  sont liés par la relation

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{A} \times r.$$

## 9. Deux écueils à éviter

### 9.1. Les solides de Platon

Le lecteur aura probablement fait l'analogie entre la démarche d'approximation du volume de la sphère par une suite de polyèdres inscrits, avec la démarche standard d'approximation de l'aire du disque par la suite  $\{p_n\}_{n \geq 3}$  des polygones réguliers à  $n$  côtés inscrits dans le cercle au bord du disque. Mais attention, cette analogie cache un écueil : il n'existe pas une telle chose qu'une suite infinie de polyèdres réguliers, qui serait l'analogie à trois dimensions de la suite infinie des polygones réguliers. On peut en effet démontrer qu'il n'existe que cinq polyèdres réguliers, qu'on appelle les *cinq solides de Platon*, et qui sont les seuls polyèdres convexes dont toutes les faces sont un même polygone régulier et dont tous les sommets sont de même degré<sup>9</sup> : voir par exemple Grenier et Tanguay (2008), Tanguay et Grenier (2010) ou Hartshorne (2000, ch. 8). Cela signifie entre autres que les polyèdres obtenus par triangulation de la sphère ne seront pas des polyèdres réguliers. Mais cela ne change rien à la conduite générale de l'argument.

<sup>9</sup> Rappelons que le *degré d'un sommet* est le nombre de faces (ou d'arêtes) adjacentes en ce sommet.

## 9.2. Le Theorema egregium

L'enseignant peut faire remarquer aux élèves que la formule de l'aire de la sphère de rayon  $r$ ,  $\mathcal{A} = 4\pi r^2$ , dit en fait que pour couvrir complètement et parfaitement une sphère de rayon  $r$ , on a besoin d'exactly quatre grands disques, d'aire  $\pi r^2$ , comme celui dont le bord est l'équateur de la sphère. Dans de nombreux manuels, c'est d'ailleurs la seule justification qu'on donne pour la formule de l'aire de la sphère : on propose aux élèves de recouvrir un ballon dont on a mesuré le rayon avec 4 disques de même rayon, en papier ou en tissu.

L'enseignant doit à mon avis rester conscient qu'une telle activité ne peut constituer qu'une vérification très grossière de la formule. Plus encore que l'indétermination due aux erreurs de mesures impliquées, il y a ici le fait mathématique — bien connu des cartographes — qu'une portion de sphère **ne peut être couverte exactement par un morceau de plan**. C'est en effet une conséquence du *Theorema egregium* (« Théorème remarquable ») démontré par C. F. Gauss au XIX<sup>e</sup> siècle, qu'on ne peut appliquer isométriquement (en préservant les distances) sur une sphère une portion de plan d'aire non nulle, **aussi petite soit-elle** : on doit forcément déformer cette portion de plan en l'étirant ou en la contractant. Pour énoncer plus précisément ce *Theorema egregium* de Gauss, il faudrait définir la *courbure de Gauss* d'une surface, ce que je renonce à faire ici. Le lecteur curieux trouvera cependant l'énoncé et la preuve de ce théorème dans Do Carmo (1976, § 4.3), ou dans la plupart des manuels de référence des premiers cours de géométrie différentielle à l'université. Il pourra plus simplement se donner une idée du sujet en consultant Wikipédia à la rubrique *Theorema egregium*.

## 10. Conclusion

Travailler comme nous l'avons fait avec le Principe de Cavalieri, soit pour établir les formules du volume et de l'aire de la sphère, soit pour montrer plus formellement que les pyramides à base triangulaire de même base et même hauteur ont même volume, permet de jeter un pont entre la géométrie plane et la géométrie de l'espace, de réinvestir certains résultats de la géométrie plane en géométrie de l'espace, d'inciter l'élève à être aussi exigeant et rigoureux en géométrie de l'espace qu'en géométrie plane quand c'est possible. Mais plus important encore peut-être, cela lui permet d'explorer plus à fond les objets, notions et relations de la géométrie spatiale : *plans*, *droites*, *parallélisme*, *perpendicularité*, *intersections*, etc.

Il faut en effet se méfier de l'illusion par laquelle la transposition du plan à l'espace de ces notions est facile et immédiate. Ce qui touche au parallélisme, par exemple, est beaucoup plus complexe dans l'espace que dans le plan, puisque le parallélisme entre deux droites requiert l'existence d'un plan incluant ces deux droites (cf. Annexe 2). La transitivité du parallélisme, qui est évidente dans le plan, ne va plus du tout de soi dans l'espace et cette complexité accrue appelle un travail et des efforts redoublés. Comme D. Furtuna (2008) le montre bien dans son mémoire de maîtrise, l'étude de ces notions, de même que celles de perpendicularité, distance, angle, etc., doit être *articulée entre* géométrie plane et géométrie spatiale, avec des analyses et validations selon les mêmes modes, où ne sont négligés ni le raisonnement déductif, ni les édifications théoriques « à la Euclide » en géométrie de l'espace. Faute de soigner cette articulation, les heures supplémentaires consacrées par les nouveaux programmes à la géométrie spatiale tiendront en classe de la *visite touristique*, et nos élèves sortiront mal outillés pour affronter les difficultés que pose « le 3D » dans les cours d'algèbre linéaire, de calculs différentiel et intégral, d'infographie, aussi bien dans les programmes de lycée qu'en génie, en mathématiques ou en informatique à l'université.

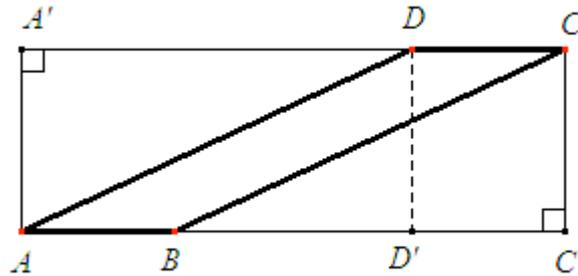
## Bibliographie

- DO CARMO, M. P. (1976) *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- FURTUNA, D. (2008) *Modélisation dans l'espace : obstacles du passage du bidimensionnel au tridimensionnel*. Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal.
- GRENIER, D. et TANGUAY, D. (2008) L'angle dièdre, notion incontournable dans les constructions pratique et théorique des polyèdres réguliers. *Petit x*, n°78, pp. 26-52.
- HARTSHORNE, R. (2000) *Geometry: Euclid and beyond*. Springer, New-York.
- JANVIER, C. (1994) *Le volume, mais où sont les formules ?* Éditions Modulo, Ville Mont-Royal, Québec.
- MELS. (2006) *Programme de formation de l'école québécoise, secondaire, 2<sup>e</sup> cycle. Domaine de la mathématique, de la science et de la technologie*. Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, Québec.
- TANGUAY, D. et GRENIER, D. (2010) Experimentation and proof in a solid geometry teaching situation. *For the Learning of Mathematics*, 30 (3), pp. 36-42.

## Annexe 1

## De la formule du prisme à base rectangulaire à celle du parallélépipède

Il s'agit, comme pour les formules de l'aire, de passer du parallélogramme au rectangle par « décomposition-recomposition ». Mais attention ! L'argument donné dans la plupart des manuels, consistant à découper un triangle rectangle à une extrémité du parallélogramme pour le recoller à l'autre extrémité, *n'est pas général* et ne s'applique pas à des parallélogrammes plus « allongés » comme le parallélogramme  $ABCD$  ci-dessous<sup>10</sup>.



On se place au stade où l'on a établi la formule (\*),  $\text{volume} = \text{aire de la base} \leftrightarrow \text{hauteur}$ , pour les prismes droits à base rectangulaire. Supposons qu'on veuille maintenant calculer le volume du parallélépipède, prisme droit dont la base est le parallélogramme  $ABCD$  (imaginez que ce parallélépipède sort à angle droit de la feuille). Par additivité (items A et A', §3), son volume sera celui du prisme droit (de même hauteur) de base  $AA'CC'$ , moins le volume des deux prismes droits dont les bases sont les triangles  $\triangle AA'D$  et  $\triangle BCC'$ . Mais ces deux prismes à base triangulaire peuvent être juxtaposés pour donner un solide dont le volume est, toujours en vertu de l'additivité, celui du prisme de base  $AA'DD'$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \text{volume (parallélépipède)} &= \text{vol. (prisme de base } AA'CC') - \text{vol. (prisme de base } AA'DD') \\ &= \text{aire } (AA'CC') \times \text{hauteur} - \text{aire } (AA'DD') \times \text{hauteur, par (*)} \\ &= [ \text{aire } (AA'CC') - \text{aire } (AA'DD') ] \times \text{hauteur,} \\ &= \text{aire } (ABCD) \times \text{hauteur,} \end{aligned}$$

c'est-à-dire la formule (\*), dont la validité vient de passer des prismes droits à base rectangulaire aux parallélépipèdes droits.

10 ... à moins peut-être de changer de base et de hauteur. Mais on veut établir une formule qui soit valable **quelle que soit la paire base-hauteur** considérée dans le parallélogramme !

## Annexe 2

### Premiers pas « euclidiens » en géométrie de l'espace

- Axiome A<sub>1</sub>.** Par deux points passe une et une seule droite. Toute droite contient au moins deux points.
- Axiome A<sub>2</sub>.** Par trois points non alignés passe un et un seul plan. Chaque plan contient au moins trois points non alignés.
- Axiome A<sub>3</sub>.** Il existe au moins quatre points non coplanaires.
- Axiome A<sub>4</sub>.** Si deux points sont contenus dans un plan, alors la droite passant par ces deux points (en vertu de A<sub>1</sub>) est contenue dans ce plan.
- Axiome A<sub>5</sub>.** Si l'intersection de deux plans (distincts) est non vide, alors cette intersection est une droite.

**Définitions (parallélisme).** Deux droites (distinctes) seront dites *parallèles* s'il existe un plan les contenant et si leur intersection est vide. Une droite sera dite parallèle à elle-même. Une droite et un plan seront dits *parallèles* si leur intersection est vide. Deux plans (distincts) seront dits *parallèles* si leur intersection est vide. Un plan sera dit parallèle à lui-même. Deux droites non contenues dans un même plan et d'intersection vide seront dites *gauches*<sup>11</sup>. Deux droites seront dites *sécantes* si elles sont distinctes et d'intersection non vide. Deux plans seront dits *sécants* s'ils sont distincts et d'intersection non vide.

*Remarques.* En vertu de A<sub>1</sub>, deux droites sécantes ont exactement un point en commun. Deux droites sont donc soit gauches (auquel cas elles ne sont pas coplanaires), soit parallèles (auquel cas elles sont *par définition* coplanaires), soit sécantes (auquel cas elles sont nécessairement coplanaires : voir Théorème 2). En vertu de A<sub>5</sub>, deux plans sécants ont exactement une droite en commun.

**Axiome A<sub>6</sub>.** **Axiome de la parallèle :** par un point à l'extérieur d'une droite passe une et une seule parallèle à cette droite.

*Remarque :* attention ! Il s'agit ici de la version « spatiale » de l'axiome de la parallèle, qui nous assure de l'existence non seulement de la parallèle, mais également — définition du parallélisme dans l'espace oblige —, d'un plan contenant la droite donnée et la parallèle.

**Théorème 1.** Si une droite intersecte un plan qui ne la contient pas, alors cette intersection est un point.

*Preuve.* En effet, si l'intersection contient deux points ou plus, alors le plan doit contenir la droite en vertu de A<sub>4</sub>.

**Théorème 2.** Une droite et un point à l'extérieur de la droite déterminent un unique plan. Deux droites sécantes déterminent un unique plan. Deux droites parallèles déterminent un unique plan.

*Preuve.* Soit  $d$  une droite et  $P$  un point à l'extérieur de  $d$ . Par A<sub>1</sub>,  $d$  contient au moins deux points, disons  $X$  et  $Y$ . Mais alors,  $X$ ,  $Y$  et  $P$  sont trois points non alignés et il existe par A<sub>2</sub> un plan qui les contient. Ce plan contient  $P$  mais contient également  $d$  par A<sub>4</sub>, puisqu'il contient  $X$  et  $Y$ . Tout plan qui contient  $P$  et  $d$  doit être confondu avec ce plan sans quoi on aurait deux plans dont l'intersection contient plus qu'une droite, contredisant ainsi A<sub>5</sub>.

Soient  $d_1$  et  $d_2$  deux droites sécantes et soit  $X$  leur point d'intersection. Alors  $d_1$  contient au moins un autre point distinct de  $X$  par A<sub>1</sub> et ce point est à l'extérieur de  $d_2$  sans quoi  $d_1$  et  $d_2$  seraient

---

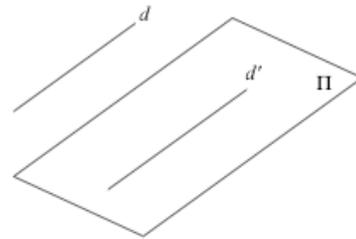
<sup>11</sup> Eh oui, des droites gauches !!!

confondues par  $A_1$ . Appelons  $Y$  ce point. De même,  $d_2$  contient au moins un autre point distinct de  $X$  et ce point est à l'extérieur de  $d_2$ . Appelons  $Z$  ce point. Alors  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont non alignés et déterminent un plan qui contient  $d_1$  et  $d_2$ , par  $A_4$ . Tout plan contenant  $d_1$  et  $d_2$  lui est confondu sans quoi on contredit  $A_5$ , comme ci-dessus.

Si  $d_1$  et  $d_2$  sont parallèles, la définition du parallélisme nous assure de l'existence d'un plan qui les contient ; ce plan est unique sans quoi on contredit  $A_5$ , comme ci-dessus.

**Théorème 3.** Si une droite  $d$  est parallèle à une droite  $d'$  (distincte de  $d$ ) contenue dans le plan  $\Pi$ , alors ou bien  $d$  est elle aussi contenue dans  $\Pi$ , ou bien  $d$  est parallèle à  $\Pi$ .

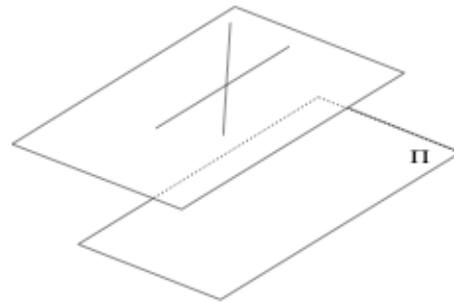
*Preuve.* Considérons le plan  $\Omega$  incluant  $d$  et  $d'$ , dont l'existence est assurée par le parallélisme entre  $d$  et  $d'$ .



Si  $\Omega$  n'est pas confondu avec  $\Pi$ , alors par  $A_5$ , son intersection avec  $\Pi$  est exactement  $d'$ . Mais alors,  $d$  et  $\Pi$  ne peuvent avoir de point en commun puisqu'un tel point serait à l'extérieur de  $d'$  ( $d$  et  $d'$  étant parallèles) et serait à la fois dans  $\Pi$  et dans  $\Omega$  (puisque  $\Omega$  contient  $d$ ), contredisant ainsi  $A_5$ .

**Théorème 4.** Si deux droites sécantes sont toutes deux parallèles à un même plan  $\Pi$ , alors le plan déterminé par ces deux droites (en vertu du Théorème 2) est parallèle à  $\Pi$ .

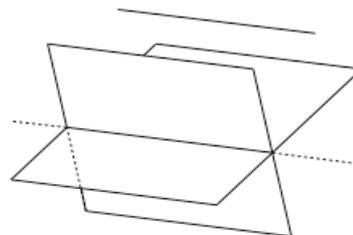
*Preuve.* Soient  $d$  et  $d'$  deux droites telles que  $d \cap d' = \{X\}$ . Soit  $\Omega$  l'unique plan qui les contient toutes deux.



Supposons que  $\Omega \cap \Pi \neq \emptyset$ . Alors leur intersection est une droite en vertu de  $A_5$ , appelons-la  $d''$ . Puisque  $\Pi$  contient  $d''$  et puisque  $d \cap \Pi = \emptyset$ , on doit avoir  $d \cap d'' = \emptyset$ . De même,  $d' \cap d'' = \emptyset$ . Mais alors,  $d$  et  $d'$  sont deux parallèles à  $d''$  passant par  $X$ , ce qui contredit  $A_6$ . Notons que les égalités  $d \cap d'' = \emptyset$  et  $d' \cap d'' = \emptyset$  sont insuffisantes pour affirmer le parallélisme de  $d''$  avec  $d$  et  $d'$  : nous devons également garantir l'existence d'un plan qui contient  $d$  et  $d''$  d'une part,  $d'$  et  $d''$  d'autre part. Mais ce plan, c'est  $\Omega$  !

**Théorème 5.** Une droite parallèle à deux plans sécants est parallèle à leur intersection.

*Preuve.* Soit  $d$  une droite parallèle à  $\Pi_1$  et à  $\Pi_2$ , et soit  $d'$  la droite à l'intersection de  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$ . Soit  $X$  un point de  $d'$  et considérons  $\Pi$ , l'unique plan contenant  $d$  et  $X$  (Théorème 2).  $\Pi$  est distinct de  $\Pi_1$  puisque  $\Pi$  contient  $d$ , parallèle à  $\Pi_1$ .



L'intersection de  $\Pi$  avec  $\Pi_1$  est non vide puisqu'elle contient  $X$  et il s'agit donc d'une droite (passant par  $X$ ) par  $A_5$ . Mais alors,  $\Pi \cap \Pi_1$  est l'unique parallèle à  $d$  passant par  $X$ , puisque

coplanaire avec  $d$  comme sous-ensemble de  $\Pi$  et d'intersection vide avec  $d$  comme sous-ensemble de  $\Pi_1$ . De la même façon,  $\Pi \cap \Pi_2$  est l'unique parallèle à  $d$  passant par  $X$ . On en conclut que  $\Pi \cap \Pi_1 = \Pi \cap \Pi_2$ , ce qui implique qu'il s'agit d'une droite sous-ensemble de  $\Pi_1 \cap \Pi_2$ . En vertu de  $A_5$ , on a donc finalement que  $\Pi \cap \Pi_1 = \Pi \cap \Pi_2 = \Pi_1 \cap \Pi_2 = d'$  comme unique parallèle à  $d$  passant par  $X$ , ce qui complète la démonstration.

**Théorème 6.** (Transitivité du parallélisme pour les plans). Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux.

*Preuve.* Soient  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  et  $\Pi_3$  trois plans distincts, avec  $\Pi_1$  parallèle à  $\Pi_2$  et  $\Pi_2$  parallèle à  $\Pi_3$ . Supposons que  $\Pi_1$  et  $\Pi_3$  soient sécants. Par  $A_5$ , leur intersection est une droite, que nous notons  $d$ . Mais alors, en vertu du Théorème 5, toute droite de  $\Pi_2$ , comme droite d'intersection vide avec  $\Pi_1$  et avec  $\Pi_3$ , est une parallèle à  $d$ . Ceci contredit l'axiome de la parallèle puisqu'on peut certainement (axiomes  $A_2$  et  $A_4$ ) trouver deux droites de  $\Pi_2$  sécantes en un point  $X$  de  $\Pi_2$ , faisant de ces droites deux parallèles à  $d$  passant par  $X$ .

**Théorème 7.** Soient  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  deux plans (distincts) parallèles. Quel que soit le plan  $\Pi$  de l'espace,  $\Pi$  et  $\Pi_1$  sont sécants si et seulement si  $\Pi$  et  $\Pi_2$  sont sécants, et les intersections  $\Pi \cap \Pi_1$  et  $\Pi \cap \Pi_2$  sont alors deux droites parallèles (voir Figure 7).

*Preuve.* L'équivalence énoncée est une conséquence directe du Théorème 6. Montrons donc que si  $\Pi \cap \Pi_1 = d_1$  et  $\Pi \cap \Pi_2 = d_2$ , avec  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  deux plans parallèles, alors  $d_1$  et  $d_2$  sont deux droites parallèles. Mais c'est direct puisque les deux droites sont coplanaires comme droites de  $\Pi$  et elles ne peuvent s'intersecter, sans quoi le point d'intersection serait commun à  $\Pi_1$  et à  $\Pi_2$ , contredisant le parallélisme de ces deux plans.

**Théorème 8.** (Transitivité du parallélisme pour les droites). Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.

*Preuve.* Soit  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois droites telles que  $a \parallel b$  (notons  $ab$  le plan qui contient  $a$  et  $b$ ) et  $a \parallel c$  (notons  $bc$  le plan qui contient  $b$  et  $c$ ). On veut montrer que  $a \parallel c$ . Attention ! Il ne s'agit pas simplement de montrer que  $a \cap c = \emptyset$ , il faut aussi trouver un plan qui inclut  $a$  et  $c$  !

Par le théorème 3 (avec  $c \equiv d$ ,  $b \equiv d'$  et  $ab \equiv \Pi$ ), ou bien  $c$  est contenue dans  $ab$ , ou bien  $c$  est parallèle à  $ab$ . Si  $c$  est contenue dans  $ab$ , alors  $ab$  contient à la fois  $a$  et  $c$  et les deux droites sont parallèles. En effet, dans le cas contraire, leur intersection est un point (voir les remarques avant l'Axiome  $A_6$ ), notons-le  $X$ . Mais alors,  $a$  et  $c$  sont deux parallèles à  $b$  passant par  $X$ , ce qui contredit  $A_6$ .

Supposons donc maintenant que  $c$  est parallèle à  $ab$ . Soit  $P$  un point de  $c$ . Comme  $P$  est en dehors de  $a$ , on peut considérer l'unique plan  $\Pi$  qui contient  $a$  et  $P$  (Théorème 2). En fait,  $\Pi$  contient alors  $c$  mais il faut le montrer !  $\Pi$  est distinct de  $ab$  puisqu'il contient un point de  $c$ .  $\Pi$  est également distinct de  $bc$  puisqu'il contient  $a$  ; or,  $bc$  ne peut contenir  $a$  sans quoi le Théorème 2 donne  $ab = bc$  et on aurait  $c \subset ab$ . Comme l'intersection de  $\Pi$  avec  $bc$  contient  $P$ , cette intersection est une droite, par  $A_5$ . Cette droite ne peut croiser  $b$ , sans quoi l'intersection de  $\Pi$  avec  $ab$  contiendrait la droite  $a$  et un point de  $b$  à l'extérieur de  $a$ , contredisant  $A_5$ . Mais alors,  $\Pi \cap bc$  est l'unique parallèle à  $b$  passant par  $P$  et par  $A_6$ , cette droite est  $c$ . Finalement,  $\Pi$  contient à la fois  $a$  et  $c$ . Comme parallèle à  $ab$ ,  $c$  ne peut croiser  $a$  et les deux droites sont bien parallèles.