# DÉMARCHE D'INVESTIGATION EN ARITHMÉTIQUE, ENTRE ESSAIS ET CONJECTURES

## Un exemple en classe de terminale scientifique

Marie-Line GARDES
LEPS-LIRDHIST, Université Lyon 1

**Résumé** Cet article rend compte d'une étude didactique de la résolution de problème ouvert en arithmétique. L'objectif principal de ce travail est de mettre en évidence les potentialités, pour l'enseignement des mathématiques, d'une résolution de problème ouvert, ainsi que la place de la dimension expérimentale dans les processus de recherche mathématique que peuvent entreprendre les élèves. Une expérimentation a eu lieu dans une classe de terminale scientifique. L'analyse des processus de recherche des élèves a notamment révélé que la dimension expérimentale (essais, erreurs...) occupe une place importante dans les étapes de recherche et de démonstration d'une conjecture.

**Mots-clés** : didactique des mathématiques, épistémologie, théorie des nombres, fractions égyptiennes, Erdös-Straus, processus de recherche, démarche d'investigation, problème ouvert, arithmétique.

## Introduction

De nombreux groupes de travail[1] s'intéressent à la pratique des mathématiques dans l'enseignement et encouragent vivement la mise en place dans les classes d'activités de recherche mathématique, notamment à caractère expérimental. Dans cet article[2], nous allons présenter une étude de résolution de problème ouvert en arithmétique en classe de terminale scientifique. Précisons que nous parlerons dans la suite de problème ouvert au sens de problème non résolu par les chercheurs en mathématiques.

Afin de mettre en évidence les potentialités, pour l'enseignement des mathématiques, d'une résolution de problème ouvert, nous avons tenté de répondre aux questions didactiques suivantes : comment les élèves confrontés à la résolution d'un problème ouvert en arithmétique utilisent-ils leurs connaissances mathématiques ? Et quelle est l'importance de la dimension expérimentale dans les processus de recherche mathématique ? Pour cela, nous avons d'abord réalisé une étude épistémologique avec une approche historique et mathématique du problème. Cette enquête a ensuite conduit à l'analyse *a priori* didactique du problème puis à une expérimentation menée en classe de terminale scientifique.

Dans une première partie, nous présentons le problème en précisant les principaux résultats mathématiques connus actuellement. Si l'énoncé est relativement simple, la résolution s'avère complexe et nous pensons qu'une analyse mathématique est nécessaire afin de s'approprier le problème. Ainsi nous invitons le lecteur à se mettre dans cette position de chercheur…pour le plaisir ou avant de la proposer en classe. Une étude mathématique détaillée est présentée en annexe. La seconde partie, consacrée à l'approche didactique, présente les différents éléments préalables à l'expérimentation en classe de terminale scientifique. Nous exposons ainsi, à partir des

1 Math.en.Jeans (http://mathenjeans.free.fr/amej/accueil.htm), Maths à modeler (http://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr), Exprime (http://eductice.inrp.fr/EducTice/projets/corise/exprime) etc…

2 Cet article est issu de notre mémoire de master 2 Histoire, Philosophie et Didactique des Sciences (HPDS), Université Claude Bernard Lyon 1, sous la direction de Véronique Battie et Laurent Habsieger.

programmes, les résultats abordables pour ce niveau, nous développons les différentes procédures de recherche possibles pour le problème et nous décrivons les conditions propices à la dévolution du problème. Dans la troisième partie, nous exposons l'analyse des recherches des élèves lors de l'expérimentation en classe de terminale scientifique. Dans un premier temps nous revenons sur les conditions dans lesquelles s'est déroulée l'expérimentation en présentant notamment la classe. Dans un second temps, nous exposons, à partir des productions finales, les résultats obtenus par les élèves, et, grâce aux transcriptions de leurs échanges, nous identifions les procédures de résolution utilisées ainsi que les connaissances mobilisées. Enfin, dans un troisième temps, nous mettons en évidence la dimension expérimentale dans les processus de recherche des élèves, à partir d'un résultat particulier.

## 1. Présentation du problème

Ernst Straus (1922-1983) et Paul Erdös (1913-1996), tous deux mathématiciens, s'intéressent, en 1948, à la décomposition d'une fraction $\frac{a}{b}$ en une somme de fractions unitaires et énoncent la conjecture (Erdös, 1950) selon laquelle :

*Pour tout entier n au moins égal à 2, on peut trouver des entiers naturels (non nécessairement distincts) tels que :*

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

Depuis 1950 et jusqu'à aujourd'hui, plusieurs mathématiciens se sont intéressés à cette conjecture. Voici les trois résultats majeurs actuellement connus :

**Résultat de Mordell**[3] (Mordell, 1969) : Cette équation a des solutions pour tous les nombres non congrus à 1, $11^2$, $13^2$, $17^2$, $19^2$, $23^2$ modulo 840. Ces solutions sont polynomiales en $n$.

**Résultat de Schinzel** (Schinzel, 2000) : Pour les nombres congrus à 1, $11^2$, $13^2$, $17^2$, $19^2$, $23^2$ modulo 840, les solutions ne sont pas polynomiales en $n$ lorsque $n$ parcourt l'une de ces progressions arithmétiques.

**Résultat de Swett** (Swett, 1999) : La conjecture a été vérifiée pour tous les nombres inférieurs à $10^{14}$.

En vertu de ces résultats, pour démontrer la conjecture d'Erdös-Straus, il suffit de prouver la conjecture pour les nombres premiers de la forme 1, $11^2$, $13^2$, $17^2$, $19^2$, $23^2$ modulo 840 et plus grands que $10^{14}$.

## 2. Connaissances en jeu et procédures envisageables

### 2.1 Résultats accessibles aux élèves

Après avoir précisé quelques éléments du programme de mathématique des classes de collège et de la classe de terminale scientifique, nous exposons les attentes en termes de résultats.

D'après B.O n°6 du 19 Avril 2007 concernant la partie «nombres et calculs», du programme de mathématiques des classes de collège, nous trouvons plusieurs notions d'arithmétique étudiées. En sixième, la notion principale est la division euclidienne et son sens, c'est-à-dire connaître le

3 Ce résultat est démontré en annexe 1.

vocabulaire (dividende, diviseur, quotient, reste) ainsi que connaître et utiliser les critères de divisibilité par 2, 3, 4, 5, 9 et 10. En classe de cinquième, le programme préconise, dans la continuité de la classe de sixième, de mettre l'accent sur les notions de multiples et diviseurs ainsi que sur la divisibilité. Enfin, en classe de troisième, de nouvelles notions d'arithmétiques apparaissent : diviseurs communs à deux entiers, algorithme d'Euclide ou algorithme des soustractions successives pour le calcul du PGCD, notion de nombres premiers et de décomposition en produit de facteurs premiers. L'arithmétique, en classe de terminale scientifique, fait partie de l'enseignement de spécialité. D'après le B.O n°4 du 30 Août 2001, les notions en jeu dans le programme de spécialité de cette classe sont les suivantes : divisibilité dans $\mathbb{Z}$, division euclidienne (algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD[4]), congruences dans $\mathbb{Z}$, entiers premiers entre eux, nombres premiers (existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers), PPCM[5], théorèmes de Bezout et de Gauss.

Au vu de ces notions et de l'approche mathématique de la situation, nous allons présenter les résultats qui peuvent être attendus des élèves ayant conduit une recherche sur la conjecture d'Erdös-Straus.

**Proposition 1** : *si l'équation admet une solution pour n alors l'équation admet une solution pour kn, pour tout k entier naturel.*

Ce résultat est accessible aux élèves et il peut être formalisé. En effet les connaissances en jeu (multiplication d'une expression par un nombre entier, égalité…) sont *a priori* acquises en classe de terminale scientifique. N'étant pas nécessairement mobilisées, il se peut que les élèves n'établissent ce résultat que pour certains multiples de *n* et ne généralisent pas l'égalité obtenue.

**Proposition 2** : *il suffit de résoudre l'équation pour n premier.*

Ce résultat est accessible aux élèves. Cependant, il nécessite d'avoir trouvé le résultat 1 et de maitriser le théorème de décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers. Il se peut donc que les élèves aient des difficultés à établir ce résultat.

Ainsi les élèves peuvent établir que la conjecture est vraie pour certains multiples de *n* et peuvent réussir à réduire le problème aux nombres premiers. D'autres classes de nombres pour lesquelles la conjecture est vraie peuvent être trouvées, par exemple pour $n \equiv 2\ [3]$. Dans le cadre d'un enseignement de spécialité mathématique, la démonstration du résultat de Mordell (voir en annexe) est abordable et peut donc faire l'objet d'un problème. Enfin, des algorithmes ont peu de chance d'émerger sous quelque forme que ce soit dans la mesure où les élèves ne disposent d'aucune formation en algorithmique et en programmation. Cependant, si l'un d'entre eux sait programmer sur sa calculatrice ou sur un ordinateur, des algorithmes pour trouver des solutions peuvent être créés (voir en annexe 1 par exemple). Nous pouvons souligner aussi que l'étude de ce troisième résultat révèle l'importance de l'ordinateur, ou, à défaut, d'une calculatrice évoluée.

## 2.2 Les différentes procédures envisageables

Dans un premier temps, nous avons déterminé les différentes procédures possibles des élèves. Dans un second temps, nous les avons classifiées en privilégiant l'analyse de la caractérisation des premières actions d'une procédure. Ainsi nous avons dégagé deux pôles : un pôle opératoire dont la première action est l'exploitation de l'outil algébrique et un pôle expérimental, dont le premier geste est d'effectuer des essais pour différentes valeurs de *n*.

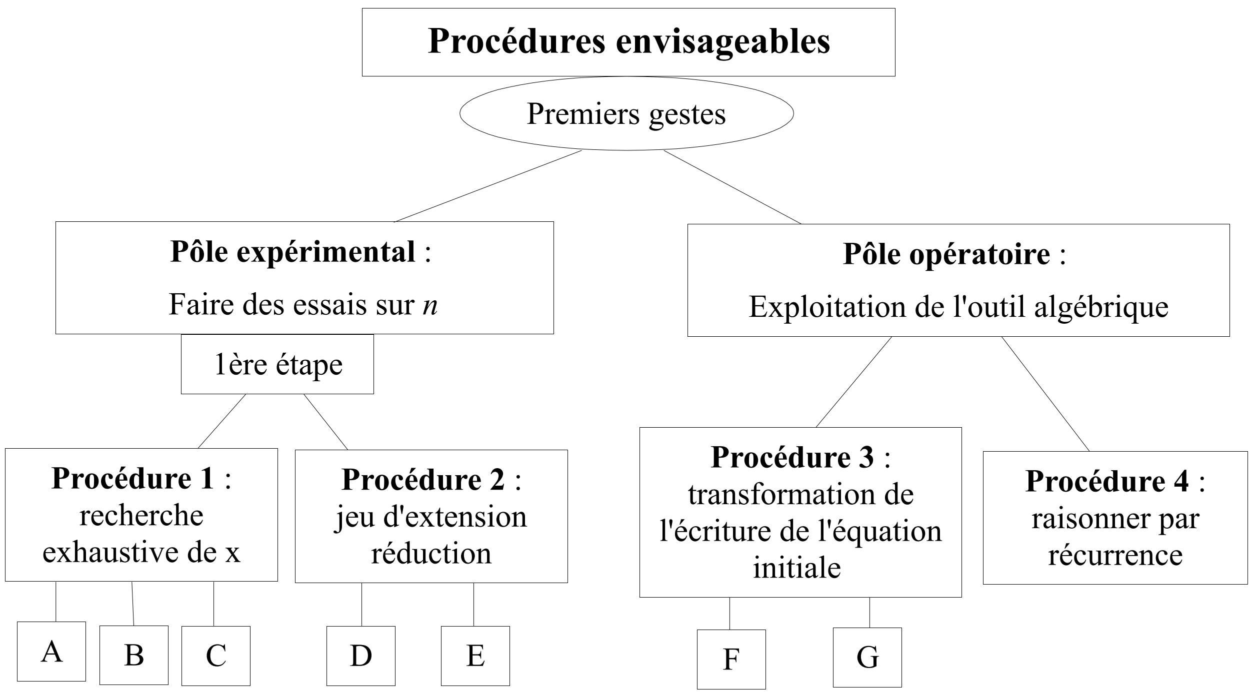
Afin de distinguer les différentes procédures au sein de ces deux pôles, nous utiliserons les notions

4 Plus Grand Diviseur Commun.

5 Plus Petit Multiple Commun.

de dimensions organisatrice et opératoire (Battie, 2007). Nous donnons ici les définitions de ces deux dimensions complémentaires l'une de l'autre : la dimension organisatrice «*s'identifie au raisonnement global qui traduit la mise en acte d'une visée*». La dimension opératoire «*correspond quant à elle à tout ce qui relève des manipulations calculatoires, opérées sur les objets en jeu, qui sont utilisées au fil de la démonstration et qui permettent la mise en œuvre des différentes étapes du raisonnement global suivi (dimension organisatrice)*». Outre les figures usuelles du raisonnement mathématique, en particulier le raisonnement par l'absurde, Battie identifie par exemple au niveau de la dimension organisatrice le raisonnement par récurrence, la disjonction de cas et la recherche exhaustive avec l'idée de ramener la résolution d'un problème à l'étude d'un nombre fini de cas, le jeu d'extension-réduction (méthode spécifique aux anneaux factoriels) et le principe local-global. Pour la dimension opératoire, Battie donne pour exemples les formes de représentation choisies pour les objets (structuration autour des nombres premiers, congruences etc.), l'utilisation de théorèmes-clefs, les manipulations de nature algébrique et l'ensemble des traitements opératoires relevant de l'articulation entre la structure d'anneau de ( $\mathbb{Z}$ ,+,×) et celle d'ensemble bien ordonné de ( $\mathbb{N}$ , ≤) relative aux deux ordres divisibilité et ordre naturel.

Concernant le pôle expérimental, deux dimensions organisatrices sont susceptibles d'être en jeu : recherche exhaustive de *x* et jeu d'extension-réduction. Différentes dimensions opératoires (A, B, C et D, E) peuvent alors être relevées pour chaque dimension organisatrice. Concernant le pôle opératoire, seule une dimension organisatrice est identifiée : le raisonnement par récurrence. L'autre procédure de ce pôle est caractérisée par une dimension opératoire principale : transformation de l'écriture de l'équation initiale. Voici un diagramme des classifications des procédures :




*2.2.1 Les procédures du pôle expérimental « faire des essais sur n »*

Les deux procédures relatives au pôle expérimental ont la première étape ci-dessous en commun mais se distinguent ensuite par leur dimension organisatrice. Celle de la première procédure est une recherche exhaustive afin de trouver la valeur de *x* et la seconde est un jeu d'extension-réduction (restriction de l'étude de l'équation initiale des nombres entiers naturels aux nombres premiers).

*Première étape*

Cette première étape prévisible relève du caractère expérimental du problème : essayer de décomposer $\frac{4}{n}$ en somme de trois fractions unitaires pour différentes valeurs de n. Voici un exemple :

n = 1 impossible car 4 < 3.

n = 2 donne $\frac{4}{2}=2=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$.

n = 3 donne $\frac{4}{3}=1+\frac{1}{3}=1+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$.

n = 4 donne $\frac{4}{4}=1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$...

n = 5 donne $\frac{4}{5}$ …

Nous avons mis ici plusieurs décompositions possibles de ces fractions. Deux raisons expliquent ce choix : la première est la découverte de la non unicité de la décomposition d'une fraction en fractions unitaires, la seconde réside dans l'influence de ces décompositions pour la formulation de conjecture.

Nous pensons que cette première étape peut être commune à plusieurs procédures. En effet, si nous trouvons les exemples suivants :

$$\frac{4}{2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \qquad \frac{4}{3}=\frac{1}{1}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} \qquad \frac{4}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6} \qquad \frac{4}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$$

alors deux conjectures sont possibles :

**Conjecture 1** : pour n = 2 ou n = 3, les fractions se décomposent en 1+ $\frac{1}{q}$. Pour n>4, la décomposition ne peut pas être 1+ $\frac{p}{q}$ car la fraction est plus petite que 1. On remarque cependant que lorsque la fraction est plus grande que $\frac{1}{2}$, on peut prendre $\frac{1}{2}$ comme première fraction égyptienne. Pour les autres, qui sont plus petites que $\frac{1}{2}$, on peut utiliser $\frac{1}{3}$ comme première fraction égyptienne…

**Conjecture 2** : pour les nombres pairs, on peut prendre $x = \frac{n}{2}$, $y = \frac{n}{2} + 1$ et $z = x\,y$.

Et si nous prenons les exemples suivants :

$$\frac{4}{2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \qquad \frac{4}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} \qquad \frac{4}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} \qquad \frac{4}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$$

Il est difficile d'obtenir la conjecture 1 ci-dessus et nous obtiendrons une conjecture 2 un peu différente :

**Conjecture 2bis** : pour les nombres pairs, on peut prendre $x = \frac{n}{2}$, $y = n$ et $z = n$.

Nous pouvons remarquer que tous ces exemples sont des exemples génériques, ils permettent en effet d'énoncer une propriété de caractère général. La conjecture 1 mènera sur la première procédure à caractère expérimental détaillée ci-dessous alors que les deux conjectures suivantes donneront lieu à la seconde procédure. Cette étape permet aussi de se rendre compte que l'équation devient plus difficile lorsque $n > 4$ c'est à dire quand $\frac{4}{n} < 1$. C'est un indice important pour le choix d'un exemple générique.

***Procédure 1** : recherche exhaustive de x*

Cette première procédure relève d'une remarque issue de la première étape. Si on remarque que les fractions $\frac{4}{n}$ pour $n < 4$ s'écrivent $1 + \frac{p}{q}$ et que les fractions $\frac{4}{n}$ avec $n > 4$ s'écrivent $\frac{1}{2} + \frac{p}{q}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{p}{q}$, etc, on peut se demander comment trouver la première fraction de cette décomposition. Pour cela il est possible, à nouveau, de faire une expérience avec des essais pour une valeur de $n$ et une valeur de $x$. Voici quelques exemples :

- $n = 7$ et $x = 2$, $\frac{4}{7}-\frac{1}{2}=\frac{1}{14}$ donc $\frac{4}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$.
- $n = 11$ et $x = 2$, $\frac{4}{11}-\frac{1}{2}=\frac{-3}{22}$ ne répond pas à la question donc essai avec $x = 3$.
  $\frac{4}{11}-\frac{1}{3}=\frac{1}{33}$ donc $\frac{4}{11}=\frac{1}{3}+\frac{1}{33}$.
- $n = 17$ et $x = 5$, $\frac{4}{17}-\frac{1}{5}=\frac{3}{85}$ donc $\frac{4}{17}=\frac{1}{5}+\frac{3}{85}$.

Une conjecture peut alors être établie : $x = E[\frac{n}{4}] + 1$, où $E[x]$ désigne la partie entière de $x$.

Pour la suite de cette procédure, plusieurs méthodes sont possibles. Elles se distinguent selon leur dimension opératoire.

**Possibilité A** : manipulation de nature algébrique

Remarquer que $\frac{1}{n}=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}$.

*Exemple* : $\frac{4}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$. et $\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$. Donc $\frac{4}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{14}$.

Remarquer que $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$.

*Exemple* : $\frac{4}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$. et $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$. Donc $\frac{4}{7}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{14}$.

**Possibilité B** : manipulation de nature algébrique

$\frac{4}{n}-\frac{1}{x}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ équivaut à $\frac{4}{n}-\frac{1}{x}=\frac{y+z}{yz}$ et résolution d'un système du second degré.

*Exemple* : $\frac{4}{17}-\frac{1}{5}=\frac{3}{85}$. On obtient donc $\frac{3}{85}=\frac{y+z}{yz}$.

Cela revient à résoudre le système : $\begin{cases} 3\mathrm{k} = y + z \\ 85\mathrm{k} = yz \end{cases}$ $avec\ k \in \mathbb{N}^*$

équivalent à $\begin{cases} y = 3\mathrm{k} - z \\ 85\mathrm{k} = (3\mathrm{k} - z)z \end{cases}$

équivalent à $\begin{cases} y = 3\mathrm{k} - z \\ z^2 - 3\mathrm{k}z + 85\mathrm{k} = 0 \end{cases}$

On cherche alors les solutions de cette équation du second degré en *z*.

$$\Delta = (-3\mathrm{k})^2 - 4 \times 1 \times 85\mathrm{k} = 9\mathrm{k}^2 - 340\,k = k(9\mathrm{k} - 340).$$

Il existe des solutions si et seulement si $\Delta \geq 0$. $\Delta = 0$ si et seulement si $k = 0$ ou $k = \frac{340}{9}$. Comme $k \in \mathbb{N}^*$, $\Delta$ est non nul. Donc il existe des solutions si et seulement si $\Delta > 0$. Comme $k \in \mathbb{N}^*$, $\Delta > 0$ si $k > \frac{340}{9}$ c'est à dire $k \geq 38$. . Puis les solutions sont $\frac{3\mathrm{k} \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ ce qui impose : $\Delta = a^2$ avec $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $3k \pm \sqrt{\Delta}$ pair. A partir de ces conditions, on peut chercher des valeurs de *k* qui conviennent.

**Possibilité C** : programmation d'un algorithme

On réitère la méthode : on cherche la plus grande fraction unitaire inférieure à $\frac{4}{n} - \frac{1}{x}$ afin de trouver *y* puis *z*. Il est alors possible de mettre en œuvre un algorithme programmant cette méthode[6]. Grâce à l'étude d'exemples génériques, cette procédure peut amener les élèves à énoncer le résultat partiel de l'algorithme de la fraction inférieure la plus proche de $\frac{4}{n}$. De plus il permet de trouver de nombreuses solutions particulières.

***Procédure 2** : jeu d'extension réduction.*

Cette seconde procédure est basée sur le résultat suivant : Si (x, y, z) est solution de $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ , alors (kx, ky, kz), $k \in \mathbb{N}^*$ est solution de $\frac{4}{kn} = \frac{1}{kx} + \frac{1}{ky} + \frac{1}{kz}$.

Ce résultat pourrait apparaître spontanément ou par observation d'exemples. En ce qui concerne les élèves de terminale scientifique, nous pensons qu'il sera établi à partir de la première étape, c'est à dire par l'observation de l'expérience. De plus, il ne pourrait apparaître que pour certaines valeurs de *k*, c'est à dire pour certains multiples de *n* et pas dans le cas général.

*Exemple* : l'observation de $\frac{4}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ et $\frac{4}{6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ peut donner lieu à cette conjecture : *si n est multiplié par 2 alors x, y et z aussi*.

Une fois ce résultat établi, deux possibilités se distinguent.

**Possibilité D** : la dimension opératoire est l'écriture des nombres grâce à la divisibilité.

*Exemple* : chercher *n* premier ou *n* impair sous la forme $2k + 1$ ou $4k - 1$ ou $4k - 3$, etc...

6 Nous présentons deux algorithmes en annexe 2.

**Possibilité E** : la dimension opératoire est l'écriture des nombres grâce aux congruences.

*Exemple* : chercher $n$ premier ou $n$ impair sous la forme d'une congruence, $n$ ° 1 mod 4 ou $n$ ° 3 mod 4.

Ces deux formes de représentation des nombres peuvent apparaître :

- soit par observation d'essais sur des $n$ différents et impairs.

*Exemple* : $\frac{4}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$ et $\frac{4}{11}=\frac{1}{3}+\frac{1}{33}$ donnent $\frac{4}{4\mathrm{k}-1}=\frac{1}{k}+\frac{1}{k(4\mathrm{k}-1)}$.

- soit par introduction de l'objet : si $n$ est impair alors $n$ ° 1 mod 4 ou $n$ ° 3 mod 4 ou si $n$ est impair alors il existe $k$ entier tel que $n = 4k - 1$ ou $n = 4k - 3$.

Cette procédure permet, à partir de l'étude d'exemples génériques, de formuler une généralisation plus aisément. Les élèves pourront trouver des résultats partiels (c'est à dire pour certaines congruences). C'est celle qui se rapproche le plus des résultats connus des chercheurs.

### *2.2.2 Les procédures du pôle opératoire « utilisation de l'outil algébrique »*

La distinction entre les deux procédures du pôle opératoire se situe au niveau des dimensions organisatrice et opératoire. Dans la première procédure, seules des dimensions opératoires ont été identifiées, à savoir différentes manipulations de nature algébrique alors que la seconde procédure est caractérisée par une dimension organisatrice particulière qui est le raisonnement par récurrence.

***Procédure 3** : transformation de l'écriture de l'équation initiale*

La première procédure que nous exposons ici est basée sur une transformation de l'équation initiale puis sur la résolution d'une équation ou d'un système d'équations.

Plusieurs transformations de l'équation initiale sont envisageables, par exemple :

- Réduction au même dénominateur : $\frac{4}{n}=\frac{xy+xz+yz}{xyz}$.
- Utilisation de la proportionnalité : $4xyz = n\,(xy + xz + yz)$.
- Isolation de $n$ : $n = \frac{4\mathrm{xyz}}{xy+xz+yz}$.

Pour traiter ces nouvelles égalités, deux possibilités sont envisageables :

**Possibilité F** : la dimension opératoire serait de faire des essais pour des valeurs de $n$.

*Exemple* : $\frac{4}{n}=\frac{xy+xz+yz}{xyz}$ est équivalent à $4k = xy + xz + yz$ et $kn = xyz$, $k \in \mathbb{N}^*$.

• $n = 5$ et $k = 1$ donne $n = xyz$. Il faut donc décomposer 5 en produit de 3 facteurs.

$5 = 1\times1\times5$ donne $x = 1, y = 1$ et $z = 5$. Impossible.

• $n = 5$ et $k = 2$ donne $n = xyz$. Il faut donc décomposer 10 en produit de 3 facteurs.

$10 = 1\times1\times10$ ou $1\times2\times5$ donne $x = 1, y = 1$ et $z = 10$ ou $x = 1, y = 2$ et $z = 5$. Impossible.

On pourrait alors remarquer que $k$ ne peut pas être un nombre premier (car sinon $x$ ou $y$ ou $z$ sera égal à 1, ce qui est impossible puisque $\frac{4}{n} < 1$). De même, pour $n = 6$, la méthode permet de trouver des conditions sur $k$ : il ne peut pas être un multiple de 3 ni un nombre premier.

**Possibilité G** : la dimension opératoire serait la manipulation de nature algébrique, c'est à dire faire des essais de résolutions de cette équation en utilisant seulement l'outil algébrique.

*Exemple* : $4xyz = n\,(xy + xz + yz)$

Regarder ce que donne cette équation avec $n$ multiple de 4 puis avec $xy + xz + yz$ multiple de 4, sous quelles conditions sur $x$, $y$ et $z$ cela est-il possible ?

Avec cette procédure, des solutions particulières peuvent être trouvées. Cependant une propriété générale semble difficile à déterminer du fait de l'absence d'exemples génériques.

***Procédure 4*** *: utilisation d'un raisonnement par récurrence*

Cette procédure consiste à essayer de résoudre cette équation par récurrence en trouvant une relation entre $\frac{4}{n}$ et $\frac{4}{n+1}$.

Des relations de récurrence existent, par exemple, entre $\frac{4}{n}$ et $\frac{4}{n+4}$, c'est à dire pour n º 3 [4], et par extension pour toutes les congruences vues dans la démonstration du premier résultat.

*Exemple* : si $n = 4k - 1$, on a $\frac{4}{4k-1} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k(4k-1)}$.

Cependant, ces relations se vérifient très simplement par des calculs algébriques (réduction au même dénominateur). La conduite d'un raisonnement par récurrence complexifie donc les calculs à mener.

Cette procédure repose sur une preuve par généralisation. Elle peut émerger spontanément ou provenir d'un travail sur des exemples (pas nécessairement génériques).

En conclusion, notre classification des procédures a été pensée en privilégiant la caractérisation des premières actions d'une procédure. Ainsi nous avons dégagé deux pôles : un pôle opératoire dont la dimension est l'exploitation de l'outil algébrique et un second pôle à caractère expérimental, à savoir, effectuer des essais pour différentes valeurs de $n$. A noter que le caractère expérimental peut intervenir dans le pôle opératoire. C'est d'ailleurs ce qui distingue les procédures nommées F et G. De même les procédures A, B et C ou E et D du pôle à caractère expérimental se différencient par un caractère opératoire. Il existe donc de nombreuses interactions entre ces deux pôles.

### 2.3 Les conditions *a priori* nécessaires pour la dévolution du problème

Dans ce paragraphe nous allons décrire certaines conditions qui permettraient la dévolution de ce problème de recherche. Pour cela, nous avons relevé trois critères que nous détaillerons : quelles sont les connaissances mathématiques nécessaires ? Quel rapport à la recherche mathématique faut-il avoir ? Faut-il introduire un outil particulier ?

Nous avons identifié et déterminé, à partir des différentes procédures ci-dessus et sans prétendre à une exhaustivité, les différentes connaissances *a priori* nécessaires à une dévolution du problème.

Tout d'abord nous relevons différentes notions mathématiques telles que les fractions, le calcul fractionnaire (addition et soustraction de fractions), les nombres entiers (exemple de propriété: si $n$ est pair alors $n/2$ est un entier), les nombres premiers, les multiples et les diviseurs (exemple de propriété : un multiple de $n$ s'écrit $kn$, avec $k$ entier)[7]. Nous pouvons remarquer que ces connaissances ne sont pas nombreuses. Puis il nous semble nécessaire de connaître quelques notions relatives à l'activité de recherche. Savoir, par exemple, la définition d'une conjecture, d'un contre-exemple. Concernant la preuve, savoir que des exemples ne permettent pas de démontrer des propositions à quantifications universelles mais qu'ils permettent de démontrer des propositions à quantifications existentielles, qu'un contre-exemple permet d'invalider une proposition universelle… Cela nécessite ainsi d'avoir certaines notions sur les raisonnements possibles, en jeu dans une preuve.

En ce qui concerne le second critère, un rapport spécifique à la recherche mathématique semble nécessaire. En effet, savoir qu'un problème de mathématiques peut se chercher sur plusieurs heures, qu'au bout de ce temps de travail, il est possible que seuls des résultats partiels peuvent être trouvés ou que d'autres resteront à l'état de conjecture, paraissent, par exemple, de bons critères pour favoriser une dévolution.

Enfin, un outil nous semble utile à introduire dans le milieu matériel même s'il n'est pas indispensable : la calculatrice. Elle apparaît comme un outil nécessaire afin notamment de faciliter les calculs et donc la dévolution du problème.

L'analyse *a priori* du problème soulève alors de nombreuses questions auxquelles l'analyse *a posteriori* de notre expérimentation en classe de terminale scientifique apporte des éléments de réponses : est-ce que les résultats identifiés comme accessibles pour les élèves sont trouvés ? Quelles procédures sont mises en place par les élèves, plutôt celles à caractère expérimental, ou plutôt celles du pôle opératoire ? Les connaissances associées aux différentes procédures sont-elles mobilisées par les élèves dans leurs recherches ? Leur emploi est-t-il problématique ? Les conditions décrites comme permettant la dévolution sont-elles en place et efficace ? Enfin, les élèves mettent-ils en œuvre une démarche expérimentale dans leur processus de recherche ?

## 3. Analyse *a posteriori* de l'expérimentation en classe de terminale scientifique

### 3.1 Les conditions de l'expérimentation en classe de terminale scientifique

L'expérimentation en classe de terminale scientifique est une situation ponctuelle composée de deux séances : une phase de 2h30 de recherche puis une séance de synthèse d'une heure.

Voici ci-après l'énoncé et les consignes proposés aux élèves.

7 Ces notions mathématiques sont celles nécessaires aux élèves pour entrer dans le problème. Au cours de la phase de recherche, d'autres connaissances mathématiques peuvent être en jeu.

**Séance du 20 mars 2009**

Un problème de fractions égyptiennes

*Énoncé* :

*Pour tout n entier naturel, peut-on trouver trois entiers naturels a, b, c tels que :*

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \quad ?$$

Consignes :

1. Réfléchir à ce problème **individuellement** pendant 10 min.
2. **Travail en groupe** pour résoudre ce problème.
3. A la fin de ce temps de recherche en groupe, il vous est demandé de rendre une **production unique** par groupe. Ce travail doit rendre compte de l'état de votre recherche. Vous préciserez ainsi les résultats démontrés, ceux restés à l'état de conjectures, les pistes qui seraient à développer…
4. Lors d'une **séance de synthèse**, ces différents résultats seront présentés à l'ensemble de la classe.

Remarque : Tous les documents sont autorisés ainsi que les calculatrices.

Nous allons reprendre les différents critères, dégagés dans l'analyse *a priori* et favorisant une dévolution du problème, tout en présentant la classe de terminale scientifique où s'est déroulée notre expérimentation.

Notre expérimentation s'est déroulée dans une classe de terminale scientifique dont les conditions sont assez proches de celles que nous avions prévues pour favoriser une dévolution de notre problème. Tout d'abord les élèves ont l'habitude d'aborder l'activité mathématique par des recherches de problème : problème ouvert ou à prise d'initiative dans chaque devoir à la maison et devoir surveillé ; nombreuses situations de recherches de problème, soit sous forme de débat scientifique, soit forme de travaux en groupe en classe. Ces derniers sont également sensibilisés au vocabulaire relatif à une recherche : conjecture, preuve, contre-exemple. Enfin, pour les élèves suivant la spécialité mathématique, il est essentiel de savoir que le premier chapitre de la partie arithmétique portait sur les « différents types de raisonnement » en arithmétique. Ainsi les connaissances mathématiques nécessaires relevées lors de l'analyse précédente semblent *a priori* présentes chez ces élèves. De même, le contrat « de recherche » établi au sein de la classe et à long terme laisse penser qu'ils ont acquis une représentation de l'activité de recherche mathématique favorisant une dévolution de ce problème. De plus les groupes dont nous analyserons la recherche disposent de calculatrice du type TI-89 qui favorise davantage la dévolution grâce au logiciel de calcul fractionnaire. En effet, cet outil va faciliter la recherche d'exemples ou la vérification de conjecture sur des exemples. L'obtention des exemples sera donc peu couteuse en termes d'actions mathématiques et les élèves pourront plus facilement exploiter cette piste de recherche.

La classe compte 36 élèves que nous avons répartis, à l'aide de l'enseignant, en groupe, en fonction du niveau des élèves et de la manière suivante : trois groupes d'élèves dont la spécialité est les mathématiques. Un groupe est muni de calculatrices programmables. Deux groupes ont été enregistré mais un seul exploité (groupe 1). Il y avait également sept groupes d'élèves dont la spécialité n'est pas les mathématiques. Un groupe est muni de calculatrices programmables. Trois groupes ont été enregistrés mais un seul enregistrement sera exploité (groupe 2).

L'analyse portera sur deux groupes (1 et 2) composés de très bons élèves. Le corpus en jeu pour chacun des groupes est le suivant : la production finale remise au bout des deux heures de recherche, les transcriptions des discussions des élèves pendant tout le travail collectif et certains brouillons d'élèves (uniquement pour le groupe 1).

### 3.2 Les résultats trouvés par les élèves

Nous présentons ici les résultats obtenus par les élèves et relevés sur leurs productions finales.

**Groupe 1 (spécialité mathématiques).**

La production finale de ce groupe présente deux résultats :

- un résultat établi pour n pair : $\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n}{2}}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}$.
- un résultat pour n multiple de 3 obtenu grâce à : $\frac{4}{n}=\frac{8}{2n}=\frac{3}{2n}+\frac{3}{2n}+\frac{1}{n}$.

ainsi que quelques informations sur les démarches entreprises lors de leur recherche collective.

**Groupe 2 .**

La production finale de ce groupe présente trois résultats :

- un résultat pour n pair : a = $\frac{n}{2}$, b = a + 1 = $\frac{n}{2}$ + 1 et c = $a\times b$ = $\frac{n}{2}\times(\frac{n}{2}+1)$.

  D'où $\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n}{2}}+\frac{1}{\frac{n}{2}+1}+\frac{1}{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1)}$.
- un résultat pour n multiple de 3 : a = $\frac{n}{3}$, b = n + 3 et c = $a\times b$ .

  D'où $\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n}{3}}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{\frac{n}{3}(n+3)}$.
- un résultat pour n multiple de 5 : a = $\frac{2n}{5}$, b = 2n et c = n. D'où $\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{2n}{5}}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{n}$.

mais peu d'éléments sur les différentes pistes étudiées au cours de leur recherche collective.

Concernant ces résultats, nous pouvons noter que les deux groupes ont établi et démontré la conjecture d'Erdös-Straus pour les nombres pairs et les multiples de 3. Nous pouvons cependant remarquer que les décompositions trouvées par les deux groupes ne sont pas les mêmes. Cela laisse supposer que leurs démarches de recherche ont été relativement différentes. Le groupe de non-spécialistes a établi et prouvé un résultat supplémentaire : l'équation admet des solutions pour les multiples de 5. Les élèves ont donc trouvé la première étape (la conjecture est vérifiée pour certaines classifications de nombres) du premier résultat démontré par Mordell. Cependant nous pensions que la généralisation (si *n* admet une solution alors *kn* admet une solution) de cette première étape pouvait être un résultat énoncé par les élèves, mais cela n'a pas été le cas. Comme nous l'avions prévu, aucun groupe n'a eu recours à la programmation dans ses recherches.

### 3.3 Les procédures utilisées par les élèves

Nous exposons, dans ce paragraphe les différentes procédures utilisées par les deux groupes, en faisant référence à celles identifiées dans l'analyse *a priori*.

**Groupe 1** (spécialité mathématiques)

Les premières actions menées par les élèves de ce groupe sont plutôt de nature opératoire. En effet, après avoir discuté des solutions à l'équation pour $n = 1$ et $n = 0$, ils ont essayé de résoudre l'équation dans le cas général, comme le montrent les procédures utilisées ci-dessous.

La première procédure rencontrée dans la recherche des élèves correspond à la première étape décrite dans notre analyse *a priori*, à savoir, faire des essais sur les premières valeurs de $n$. Les élèves de ce groupe ont ainsi repéré que l'équation n'admet pas de solution pour $n = 0$ et $n = 1$ : « *si on prend n = 1, il n'y a pas de solutions* ». L'argument donné pour justifier cette hypothèse est celui que nous avons présenté (impossible car sinon 4 < 3). Un autre aspect de cette première expérience peut être relevé dans la recherche de ce groupe : le fait que la décomposition de $\frac{4}{n}$ en fractions unitaires devienne plus difficile lorsque $n > 5$ : « *parce que là on passe en dessous de 1, et oui, là ça change tout là* ».

La seconde procédure que l'on peut repérer est celle basée sur l'utilisation de l'outil algébrique afin de transformer l'écriture de l'équation initiale (procédure G). Elle apparaît une première fois lorsque un élève, après avoir multiplié l'équation par $n$, veut « faire l'inverse » : « *attends par contre est ce que tu ne peux pas faire l'inverse là, là ? t'as 4 = n/a + n/b + n/c, est ce que tu peux dire que ça fait 1/4 sur a/n + b/n* ». Puis un autre élève évoque les équations diophantiennes *« moi j'ai pensé sinon tu sais un truc comme les équations diophantiennes et tout, les trucs en spé là vu que tu as des a, des b et des c pour euh, tu vois pour euh* ». Ces deux pistes n'étant pas suivies par l'ensemble du groupe, elles sont abandonnées rapidement. Cette procédure apparaît ensuite une troisième fois lorsque les élèves transforment l'équation initiale en cette égalité : $4abc = n(bc + ac + ab)$. Ils pensent alors au théorème de Gauss, qu'ils confondent avec le théorème de Bézout, et établissent une conjecture : soit 4 divise $n$, soit 4 divise $ab + ac + bc$. Dans ce dernier cas, ils étudient alors la parité de $a$, $b$ et $c$ afin que 4 divise $ab + bc + ac$ : « *si il y en a deux qui sont impairs ou trois, ça ne marche pas, ce n'est pas divisible par 4* ». Cependant, cette piste va être abandonnée en raison du nombre élevé de cas à étudier. Cette procédure, basée sur l'utilisation de l'outil algébrique sera beaucoup discutée au cours de leurs recherches mais elle n'aboutira jamais sur l'établissement d'un résultat.

Une troisième procédure apparaît, celle du raisonnement par récurrence, lorsqu'un élève conduit un tel raisonnement afin de démontrer que l'équation admet des solutions pour tout entier $n$. Les autres élèves ne se joignent pas à lui car ils pensent qu'il n'y a pas de solution pour $n = 5$. Le raisonnement mené par cet élève est le suivant : il suppose que l'équation a des solution pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2. L'étape de l'initialisation est faite puisqu'il a une solution pour $n = 2$. Dans l'étape de l'hérédité, il suppose que $\frac{4}{k}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ pour tout $k > 3$ et il arrive à l'égalité suivante :

$$\frac{4}{k+1}=\frac{4}{a+\frac{a}{k}}+\frac{4}{b+\frac{b}{k}}+\frac{4}{c+\frac{c}{k}}$$

. Il remarque que cette équation admet des solutions si $k$ divise $a$, $b$ et $c$, et abandonne alors cette piste de recherche. Le groupe a également fait appel à d'autres raisonnements tels que le raisonnement par l'absurde, par contraposée ou par disjonction de cas mais ces derniers n'aboutiront pas sur l'établissement d'un résultat.

Enfin, une quatrième procédure peut être repérée, à la fin de leur recherche, celle du jeu d'extension réduction (procédures D et E). Les élèves utilisent cette dimension organisatrice afin d'avancer sur la résolution du problème en réduisant à chaque conjecture l'ensemble des nombres restant à étudier : « *Bon ben maintenant il ne nous manque plus que les impairs, ce n'est pas beaucoup* » ; « *Pour montrer que c'est vrai pour tous les impairs, il faut montrer que c'est vrai pour tous les nombres premiers* ».

**Groupe 2**

Les premières actions menées par ce groupe sont de nature expérimentale : ils ont essayé de trouver des solutions pour certaines valeurs de $n$. Comme nous le verrons dans la présentation des différentes procédures exploitées, ils ont aussi, assez brièvement essayé d'utiliser l'outil algébrique.

**La première procédure** relevée dans la recherche de ce groupe est la première étape décrite dans notre analyse *a priori*, à savoir, faire des essais sur les premières valeurs de $n$. Un élève a déterminé une solution à l'équation pour $n = 7$ et un autre a repéré que l'équation n'admet pas de solution pour $n = 1$. L'argument donné pour justifier cette hypothèse est celui que nous avons présenté (impossible car sinon 4 < 3). Un autre aspect de cette première expérience peut être relevé dans la recherche de ce groupe : le fait que la décomposition de $\frac{4}{n}$ change lorsque $n > 5$ : « *Et la limite justement c'est que ça doit être, à 5* ».

**La seconde procédure** que l'on peut repérer est celle basée sur l'utilisation de l'outil algébrique afin de transformer l'écriture de l'équation initiale (procédure G). Elle apparaît une première fois lorsque un élève veut utiliser l'inverse : « *ce qu'on peut déjà faire c'est retourné comme ça on a, n/4 = a + b + c* ». Après avoir compris que cette égalité était fausse, le groupe essaie une autre piste. Ils utilisent alors leur calculatrice pour obtenir $n = \frac{4xyz}{xy+xz+yz}$. Ils pensent d'abord à chercher les valeurs interdites : « *ouais il y a des valeurs interdites à a, b, c ouais…ouais mais on ne va pas les trouver comme ça* » puis ils discutent sur le nombre de variables :

> *F : Alors maintenant il faut qu'on trouve les nombres qui vérifient l'équation, ce qui serait bien c'est si on rentrait l'écriture et qu'elle mettrait R sauf*
> *F : Là là là, on a résolu…*
> *M : R+*
> *F : ce qui est bien c'est qu'on a une équation et 4 inconnues…dont 4 variables*
> *L : Non on n'a qu'une variable*
> *F : Non on en a 4, n est variable mais a, b, c sont variables*
> *L : Non parce qu'ils sont en fonction…ouais non je ne sais pas*
> *F : Ouais pour n fixé normalement, il y a, a, b, c fixés…quoique ce n'est même pas sûr*
> *L : Pour n tu as au moins trois valeurs de a, trois valeurs de b et trois valeurs de c quand tu as une solution…Mais si*
> *F : Oui ben forcement ils sont fixés*
> *L : Ben voila*
> *F : T'es con toi, il y a trois valeurs et trois nombres…et si ça se trouve tu peux avoir deux valeurs de a différentes*
> *L : Ah ouais, je vois ce que tu veux dire, 2 valeurs pour a et*

Cette procédure ne sera plus discutée ensuite et sera laissée rapidement de côté.

**Une troisième procédure** apparaît, celle de la recherche exhaustive de $a$. Un élève explique comment il a déterminé la décomposition de $\frac{4}{7}$ : « *J'ai enlevé 1/3 et puis après j'ai regardé ce que je pouvais enlever* ». Il utilise à nouveau cette méthode afin de déterminer une décomposition de 4/5 : « *4/5, je vais enlever 1/10 pour voir si ça marche, alors il reste 7/10, si j'enlève 1/3 ça fait quoi ? ça fait 1/3, merde. Euh…ça ne marche pas donc. Si j'enlève 1/4 …* ». Cette procédure sera longuement exploitée dans leur recherche, notamment pour établir les conjectures pour $n$ pair et $n$ multiple de 3.

**Une quatrième procédure** peut être repérée, celle du jeu d'extension réduction (procédures D et E). Les élèves utilisent cette dimension organisatrice afin de réduire l'ensemble des nombres à étudier et ainsi avancer sur la résolution du problème. Cette procédure est dominante dans toute leur recherche : « *on va essayer pour ceux qui ne sont pas pairs maintenant* » ; « *Ah on a déjà trouvé la moitié des nombres comment ça marche* » et « *Après on va faire tous ceux qui sont divisibles par 5 et puis on va faire etc* ».

**Enfin, une cinquième procédure** rencontrée par les élèves, est celle du raisonnement par récurrence pour démontrer que l'équation admet des solutions pour tous les nombres premiers : « *Faudrait faire un raisonnement par récurrence pour démontrer, excuse-moi, pour démontrer pour passer d'un nombre premier à un autre, pour démontrer que c'est héréditaire quand on passe d'un nombre premier à un autre* ». Elle ne sera pas mise en application car un élève du groupe répond qu'il n'y a pas de lien entre les décompositions de tous les nombres premiers: « *Ben la preuve que ça ne marche pas forcément pour tous puisque avec 13 il y a un truc qui ne marche pas* ».

Les procédures exploitées dans la recherche des élèves ont été nombreuses. Toutes celles qui ont été présentées dans l'analyse *a priori* ont été relevées dans les travaux des élèves. Leurs premières actions ont effectivement été de deux natures : soit expérimentales, soit opératoires. Le groupe suivant la spécialité mathématique a davantage exploité les procédures du pôle opératoire alors que le groupe non-spécialiste a mené sa recherche avec des procédures à caractère expérimental. Cette étude révèle donc que le processus de recherche des deux groupes est différent, l'un plus axé sur la dimension organisatrice, l'autre davantage centré sur le caractère expérimental du problème. Le groupe suivant la spécialité mathématique a ainsi mené une recherche axée principalement sur la dimension organisatrice en essayant en particulier d'exploiter de nombreux raisonnements (par l'absurde, par disjonction de cas) et diverses connaissances (théorème de Gauss, équation diophantienne) d'arithmétique institutionnalisés dans le cours de spécialité. Une déconnexion avec le caractère expérimental en jeu dans le problème est parfois présente dans leur recherche. Le groupe ne suivant que l'enseignement obligatoire de mathématique a, au contraire, exploité rapidement cet aspect expérimental du problème, ce qui l'a conduit à suivre une dimension organisatrice particulière, le jeu d'extension réduction (restriction de l'étude de l'équation initiale des nombres entiers naturels aux nombres premiers). Nous faisons l'hypothèse que ces élèves, n'essayant pas de se situer dans une dimension organisatrice, faute de posséder des outils théoriques d'arithmétique, ont eu recourt presque automatiquement au caractère expérimental en jeu. Il semblerait alors, que pour ce problème, l'influence de la culture d'enseignement spécifique à l'arithmétique ait freiné, dans un premier temps, la production de résultats des élèves suivant la spécialité mathématique.

### 3.4 Les connaissances mobilisées

Tout d'abord, nous avons remarqué que les notions mathématiques identifiées (fractions, calcul fractionnaire, nombres entiers, nombres premiers, multiples et diviseurs), dans la partie précédente, comme nécessaires pour la résolution du problème n'ont pas posées de difficultés majeures aux élèves. De même les notions relatives à l'activité de recherche (définition d'une conjecture, d'un contre-exemple, validation ou invalidation par des exemples ou contre-exemples…) ont été utilisées sans difficulté particulière par ces élèves.

En revanche, de nombreux questionnements sur des connaissances institutionnalisées dans les classes antérieures sont apparus. Les deux groupes ont, par exemple, essayé d'effectuer à un moment donné dans leur recherche l'inverse de $\frac{4}{n}$ et de $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Si l'inverse de $\frac{4}{n}$ ne leur a pas posé de problème, il n'en est pas de même de l'inverse de la somme. Voici des extraits de leur recherche concernant ce problème.

*Ar : Erwan, est ce que ça tu peux faire l'inverse ?*
*E : Tu veux dire euh*
*Ar : 1/4 égal*
*E : à a/n +*
*Ar : b/n*
*[…]*
*E : 3 = 2 + 1 par exemple, 3 = 2 + 1 ça te fais 1/3 est égal à*
*[…]*
*E : Et euh, 1/3 = 1/2 + 1/1.Ah non c'est faux*

*L : Ce qu'on peut faire déjà c'est retourné comme ça on a, n/4 = a + b + c*
*F : Ça ne marche pas comme ça*
*L : Pourquoi ?*
*F : Parce que ça ne marche pas, ça ne marche pas comme ça un inverse*
*[…]*
*F : 1/2 + 1/3 + 1/4 est pas égal à 2 + 3 + 4*
*[…]*
*F : Ce n'est pas l'inverse de 2 + 3 +4*

Le problème de l'utilisation de l'inverse est semblable aux deux groupes. Les réactions des autres élèves seront également identiques : « *Ben tu ne peux pas, t'as le droit, tu ne peux pas faire l'inverse* » (Al, groupe 1) et « *ça ne marche pas comme ça un inverse* » (F, groupe 2). F et Al ne donnent cependant pas d'arguments pour justifier que l'inverse d'une somme ne se calcule pas de cette façon. Al dit par exemple qu'on peut multiplier ou diviser mais pas prendre l'inverse. Ainsi cela semble être une évidence pour eux mais nous ne pouvons cependant pas savoir pour quelles raisons ces élèves pensent que c'est évident. En effet, ils ne donnent aucun argument permettant de voir s'ils savent faire l'inverse d'une somme. En ce qui concerne les autres élèves des groupes, un contre-exemple sera nécessaire pour les convaincre de l'erreur commise dans l'utilisation de l'inverse d'une somme. Cependant aucun élève ne se pose la question de l'existence de l'inverse d'une somme ni de son expression. Il semblerait qu'ils pensent qu'elle n'existe pas. En effet, les deux groupes abandonnent cette piste de recherche dès que leur erreur est admise par tous.

Nous avons également relevé des questionnements sur l'inclusion de différents ensembles de nombres :

*F : Pff qu'est ce que tu veux faire avec ça, on ne sait même pas comment on peut avancer… tiens puis si on utilisait les complexes ?*
*L : utiliser quoi ?*
*F : Les complexes*
*M : T'es sûr que dans les entiers naturels il y a les complexes ?*
*F : Et pourquoi pas ?*
*L : Non parce que les complexes, c'est autour de R non ? c'est ça ? je ne sais pas quand tu fais les dessins là comme ça*
*F : Et R c'est plus grand que les entiers naturels*
*L : Ben ouais c'est pour ça, justement*

ou sur la nature des nombres :

*Ar : $n^2$ est égal à 16 donc n est égal à*
*Al : à 4*
*Ar : à –4 ou à 4*
*Al : Non à 4 parce qu'on n'a pas le droit à -4*
*E : Non à 4 puisque n est un entier naturel*
*Ar : Oui oui*

*F : Si ils sont naturels, ça veut dire qu'ils sont supérieurs à 0. Naturel c'est supérieur à 0*
*L : Ben ouais puis là il n'y a que des positifs*
*M : Ce n'est pas supérieur ou égal ?*
*F : Quoi ?*
*M : Ce n'est pas supérieur ou égal ?*
*F : Ben ça veut dire que déjà il faut…ouais mais naturel je crois c'est*
*L : Naturel c'est supérieur ou égal, si t'as*
*F : Donc déjà faut qu'ils soient différents de 0*

*L : n il appartient à N, n il appartient aux naturels, ça un naturel divisé par un naturel, ça reste un naturel*
*F : Ben non*
*L : Ben euh*
*F : 4/7*
*L : Effectivement, mais si n il appartient, il appartient*
*F : (rires) mais t'es vraiment trop con*
*L : Mais ce n'est pas ce que je voulais dire en fait, c'est pour ça*
*L : n c'est un multiple de 2, dans ce qu'on a dit*
*F : Lélien vient d'inventer un monde où il n'y a pas de fractions, ouh*

A travers ces différents extraits de recherche des deux groupes nous pouvons voir qu'ils portent une attention toute particulière à la nature des nombres en jeu. De plus ils jonglent avec les nombres et leur nature afin de démontrer de nombreux résultats[8]. Ce problème permet donc aux élèves de se questionner particulièrement sur la nature et la propriété des nombres en jeu. Nous voyons un intérêt particulier à ce genre de situation de recherche dont la visée n'est ni la découverte, ni le

8 Voir les démonstrations mentionnées dans le paragraphe suivant.

réinvestissement d'une nouvelle connaissance. Ce problème remplit ainsi les conditions des ressources mises en place par le groupe Exprime[9], à savoir « *des problèmes de recherche mettant en évidence, les ressorts fournis par la dimension expérimentale de l'activité mathématique d'une part, les connaissances mathématiques travaillées en lien avec les programmes, d'autre part* ».

### 3.5 La dimension expérimentale dans les processus de recherche

Dans ce paragraphe, nous allons mettre en évidence la dimension expérimentale dans les processus de recherche des élèves. Pour cela, nous avons choisi d'analyser la genèse et la démonstration d'une conjecture formulée par les deux groupes : *l'équation admet des solutions pour tout n pair*.

#### *3.5.1 Analyse des épisodes relatifs aux phases d'expérience et de formulation de conjecture*

Ces deux épisodes concernent la recherche et la formulation de la conjecture pour $n$ un nombre pair. Pour le groupe 1, cette phase constitue une rupture avec le reste de leurs recherches. En effet, ils ont établi cette conjecture après 1h30 de travail collectif, centré davantage sur la recherche de théorèmes ou de raisonnements d'arithmétique qui permettraient une résolution et dans cet épisode, ils procèdent à une recherche davantage basée sur le caractère expérimental « faire des essais sur $n$ ». En revanche, pour le groupe 2, cette phase est dans la continuité des recherches centrées sur l'expérimentation, elle arrive très tôt, après 30 minutes de travail collectif.

**Groupe 1**

Les élèves de ce groupe ont établi deux décompositions, pour $n = 3$ et $n = 6$ : $\frac{4}{6}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$ et $\frac{4}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ . Ils remarquent alors : « *Ben ça doit être facile, ça fait 2, 2, 3 ; 4, 4, 6* » ; « *Bah oui, c'est multiplié par 2. 4, 4, 6 c'est multiplié par 2. Si n est multiplié par 2, les solutions aussi*». Mais un élève intervient pour le démentir puisque cela ne correspond pas à leur solution pour $n$ = 12. En effet, ils ont $\frac{4}{12}=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}$ ce qui est différent de $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}$, solution obtenue avec cette proposition. Cependant, un autre élève propose de vérifier que (8, 8, 12) est aussi une solution pour $n$ = 12. Ils font ensuite des essais pour $n$ = 16 puis pour $n$ = 18 à l'aide de cette idée. Il semble que ce soit grâce à cette remarque « *si n est multiplié par 2, les solutions aussi* » que ce groupe trouve l'égalité $\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n}{2}}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}$ qui leur permettront ensuite de prouver leur conjecture pour les nombres pairs.

Nous n'avons malheureusement pas d'éléments pour savoir comment les premières décompositions, pour $n = 3$ et $n = 6$, ont été trouvées par les élèves. Cependant nous pouvons remarquer qu'elles leur ont permis de faire un lien entre elles et d'établir une première piste, à savoir : si $n$ est multiplié par 2 alors les solutions sont multipliées par 2. Les élèves effectuent donc la première étape des procédures à caractère expérimental présentée dans l'analyse *a priori*. Le fait que la décomposition trouvée initialement pour $n = 12$ ne valide pas ce résultat ne les a pas mis en difficulté outre mesure. En effet, Al pense à une autre décomposition. La non unicité de la décomposition ne leur pose donc pas de problème. Nous pouvons observer qu'ils vont tester cette hypothèse sur d'autres exemples ($n = 16$ et $n = 18$).

9 Un article de recherche concernant notre problème et écrit par Michel Mizony figurera dans les ressources du groupe.

**Groupe 2**

Un élève du groupe annonce que pour $n$ = 4 il a trouvé une solution : $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$. Un autre pense alors de suite à un lien qui peut être établi : « *il y a peut être moyen de faire quelque chose puisque 1/6 c'est ½ fois 1/3, c'est peut être un hasard mais* ». F intervient alors en pensant que c'est un hasard puisque pour $n$ = 7, ce lien n'existe pas. En effet, il a $\frac{4}{7}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{14}$. Il tente alors de développer une méthode de décomposition qu'il essaie sur la fraction $\frac{4}{5}$ : il effectue $\frac{4}{5}-\frac{1}{10}$ (car $2\times5 = 10$). Il obtient $\frac{7}{10}$. Il essaie alors d'enlever $\frac{1}{3}$, obtient $\frac{11}{30}$ qui ne lui convient pas, essaie alors $\frac{1}{4}$ puis $\frac{1}{5}$. Il trouve finalement la décomposition de $\frac{4}{5}=\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}$. Puis, il reprend son idée de départ : « *Donc ce qu'il y a de con c'est que pour 5, ça fait 1/10 + 1/5 + 1/2, à chaque fois il y a un truc des multiplications.* $2\times3 = 6$, $2\times5 = 10$, *j'en sais rien moi mais… non c'est vrai, regarde* ». Il essaie alors de décomposer $\frac{4}{6}$. Pour cela il enlève d'abord $\frac{1}{3}$. Comme il obtient $\frac{1}{3}$ il commence par dire que $\frac{4}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$ puis tout de suite il se reprend et modifie « *Ça fait 1/3, 1/4, 1/12. C'est pas un petit peu bizarre ça pour vous ? non ?*» Il conclut alors en énonçant la conjecture : « pour les nombres pairs ça marche ». Plus tard, il va expliquer cette conjecture et la tester sur deux autres valeurs de $n$, $n$ = 8 et $n$ = 20. F n'explique pas comment il a déterminé la décomposition de 1 (pour n = 4). Cette décomposition permet à L de repérer une relation entre les fractions unitaires, à savoir que la première multipliée par la seconde donne la troisième. C'est donc une première piste de réflexion vers une conjecture. F et L effectuent donc la première étape des procédures à caractère expérimental présenté dans l'analyse a priori. Mais F dément cette hypothèse avec sa décomposition de $\frac{4}{7}$ qui ne la vérifie pas. Il part alors sur une autre piste de réflexion à partir de cet exemple : il prend la moitié de 4 et la multiplie par n pour trouver une des fractions unitaires. Il essaie, grâce à cette méthode, de trouver une décomposition pour n = 5. La première procédure du pôle expérimental « faire des essais sur $n$ » concernant la recherche exhaustive de la valeur de $a$ puis de $b$ et enfin de $c$ est donc mise en œuvre sur cet exemple. Plus tard, il modifie un peu sa méthode lorsqu'il cherche la décomposition de $\frac{4}{6}$. Et c'est finalement cette méthode de décomposition qui va lui permettre de trouver la conjecture pour les nombres pairs. Il est intéressant de remarquer que L avait la conjecture dès le départ mais que le contre exemple de $\frac{4}{7}$ a posé problème. Ils n'ont en effet pas pensé à une autre décomposition possible de la fraction. La non unicité de la décomposition a donc joué un rôle important. De plus la conjecture pour les nombres pairs a été établie à partir d'exemples pour diverses valeurs de $n$, non nécessairement paires. C'est bien le fait de chercher comment décomposer la fraction qui a permis à F d'énoncer la conjecture pour les nombres pairs.

### *3.5.2 Analyse des épisodes relatifs à l'étape de la tentative de preuve.*

Ces deux épisodes concernent la démonstration de la conjecture pour $n$ un nombre pair. Pour le groupe 1, cette démonstration arrive dans la continuité de leur recherche. En effet, ils ont établi la conjecture après 1h30 de travail collectif et leur preuve est après 1h40. Tous les élèves participent donc à la discussion autour de la recherche de cette preuve. En revanche, l'étape de cette démonstration arrive une heure après avoir établit le résultat pour le groupe 2. Au moment où l'élève chargé d'écrire la production finale trouve comment établir cette preuve et abandonne l'idée du raisonnement par récurrence, les autres sont donc en train d'étudier une autre conjecture.

**Groupe 1**

Après avoir établi la conjecture pour les nombres pairs à partir d'expériences sur différentes valeurs de $n$, les élèves ne l'avaient pas formulée explicitement. Ainsi lorsque l'élève E le fait, il énonce l'égalité $\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n}{2}}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}$ et il pense, grâce à cela, que la conjecture peut être prouvée. Il dit même que c'est logique, en mettant sur le même dénominateur, l'égalité est vérifiée. Nous pouvons donc penser que pour cet élève la conjecture est démontrée. Cependant nous observons vite qu'en fait, il ne pense pas avoir démontré la conjecture, il pense seulement avoir vérifié que l'égalité donnée est vraie. Il dit d'ailleurs « *il faudrait le prouver en fait* » et il donne une piste pour cela « *Non mais à mon avis avec le truc que j'ai, on pourrait faire un raisonnement par récurrence* ». L'élève J va dans le sens de E en disant ironiquement que son égalité n'est pas un raisonnement. L'élève Al, lui, fait remarquer que ce n'est peut être pas idiot et Ar évoque les congruences. Nous pouvons donc à nouveau remarquer la volonté de se situer dans une dimension organisatrice et donc d'utiliser un raisonnement ou des connaissances connus d'arithmétique pour démontrer leur conjecture. Finalement J intervient en disant que l'égalité démontre la conjecture pour $n$ pair et il l'explique : comme $n$ est pair, on peut l'écrire $2n'$. En remplaçant dans l'égalité de E, on obtient alors $\frac{4}{n}=\frac{1}{n'}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}$. Comme il n'a pas convaincu tout le monde ou qu'il est allé trop vite, il insiste sur l'égalité : $\frac{2}{n}=\frac{1}{n'}$. A l'oral, il ne précise pas que $n'$ est un entier naturel alors que dans la production écrite, il le mentionne. Par contre, il ne note pas que si $n$ est pair alors $n$ s'écrit $2n'$. Dans leurs discussions, c'est un autre élève, Al qui précise que $a$, $b$ et $c$, dans ces conditions, à savoir $n$ pair, sont des entiers naturels, ce qui ne serait pas le cas si $n$ était impair.

**Groupe 2**

Après avoir établi la conjecture pour les nombres pairs, les élèves de ce groupe sont passés directement à la recherche d'une conjecture pour les nombres impairs. Ils n'ont pas cherché à formuler, écrire leur conjecture et encore moins à la démontrer. L'élève F pensait même que ce n'était peut être pas à leur portée et que ce n'était pas ce que nous attentions d'eux. La démonstration de leur conjecture arrive donc une heure après et sur demande des professeurs. C'est l'élève qui est chargé d'écrire la production finale qui revient sur ce résultat en évoquant la possibilité de faire une preuve sans raisonnement par récurrence. Cette preuve est basée sur la nature des nombres. Au départ il demande si la division de deux entiers naturels est un entier naturel, la réponse se faite vite entendre par les autres élèves. Mais il reprend son raisonnement à partir de $n$ pair et d'une égalité. Cette égalité provient de leurs expériences avec diverses valeurs de $n$ où ils ont remarqué que $a = \frac{n}{2}$, $b = a + 1$ et $c = a \times b$. L reprend son raisonnement en commençant par dire que $a$ est un entier naturel car $n$ est pair, $b$ est un entier naturel car la somme de deux entiers naturels est un entier naturel et $c$ est un entier naturel car le produit de deux entiers naturels est un entier naturel. La preuve est donc établie, sans récurrence. F est tout de suite d'accord avec lui, les autres n'interviennent pas. Nous pouvons remarquer qu'aucun élève n'évoque le fait que si n est pair alors il existe un entier k tel que n = 2k.

Lorsque F demande pourquoi a = $\frac{n}{2}$ est forcement un naturel, L répond « parce que n est divisible par 2 » et F comprend tout de suite. Nous pouvons donc penser que c'est un geste opératoire mais que la connaissance « $n$ est pair si et seulement si il existe un entier $k$ tel que $n = 2k$ » n'est peut être pas acquise pour ces élèves. Elle n'est, en tout cas, pas explicitée. Leur production écrite n'apporte d'ailleurs rien de plus à leur raisonnement, ils ont simplement ajouté des exemples. Nous pouvons également remarquer qu'ils n'ont pas vérifié si leur égalité de départ, conjecturée à partir d'exemples sur $n$, est vraie. Nous pouvons émettre deux hypothèses à ce propos : soit ils ont oublié, soit il n'y ont pas pensé, peut être parce qu'elle est issue de leurs expériences et qu'elle était vérifiée tout le temps.

Nous pouvons remarquer que le caractère expérimental des deux recherches correspond tout à fait à la démarche expérimentale de Perrin (Perrin, 2007). En effet, les élèves procèdent à une expérience (essais sur des valeurs de $n$), observent les résultats de cette expérience afin de formuler des hypothèses (si $n$ est multiplié par 2 alors les solutions aussi, la première fraction multipliée par la seconde donne la troisième) puis ils retournent à l'expérience (essais sur de nouvelles valeurs de $n$) afin de formuler une conjecture (si $n$ est pair alors l'équation a des solutions). L'étape de tentative de preuve viendra, soit dans la continuité de leurs recherches (groupe 1), soit plus tard (groupe 2). Dans les deux groupes, les idées pour démontrer la conjecture ont été les mêmes. La première est de faire un raisonnement par récurrence. Les élèves en discutent un peu, essaient de mettre en œuvre le raisonnement sans aboutir.

Puis vient l'idée d'étudier l'égalité qu'ils ont conjecturée pour $n$ pair, à partir de leurs expériences sur des valeurs de $n$, à savoir $\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{n}{2}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$, pour le groupe 1 et $\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{n}{2}} + \frac{1}{\frac{n}{2}+1} + \frac{1}{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1)}$ pour le groupe 2.

Le caractère expérimental des processus de recherche des deux groupes est donc de ce point de vue identique. Il apparaît également que ce soit l'expérimentation et plus précisément l'exploitation des exemples qui permette aux deux groupes d'établir la conjecture. Cependant l'utilisation des exemples diffère selon les groupes. En effet, le groupe 1 obtient sa conjecture en observant deux décompositions particulières alors que le groupe 2 formule sa conjecture en essayant de déterminer un moyen de décomposer une fraction pour un $n$ particulier. Les élèves du groupe 1 utilisent ainsi l'exemple comme un produit fini alors que les élèves du groupe 2 cherchent à construire l'exemple.

D'ailleurs le fait que le groupe 1 n'explique pas comment il trouve les décompositions de $\frac{4}{n}$ pour $n = 3$ et $n = 6$ alors que le groupe 2 essaie d'expliquer sa méthode de décomposition confirme cette différence. Nous pouvons également constater que ces exploitations différentes des exemples les conduisent à formuler des conjectures différentes comme cela a été pointé dans l'analyse *a priori*. Les rôles du contre-exemple et de la non unicité des décompositions peuvent également être mis en avant dans les deux groupes. Dans le groupe 1, la conscience de la non unicité des décompositions par un élève inhibe le rôle du contre-exemple. En effet lorsqu'un contre-exemple pour la conjecture établie est déterminé, les élèves ne remettent pas en cause cette dernière mais plutôt le contre-exemple en cherchant une nouvelle décomposition de la fraction. Le groupe 2 semble ne pas avoir une claire conscience, à ce moment précis de leur recherche, de la non unicité des décompositions. Le contre-exemple joue alors pleinement son rôle : les élèves remettent en cause leur conjecture et ne cherchent pas d'autre décomposition afin de changer éventuellement le statut du contre-exemple en exemple vérificateur.

## Conclusion

Le but de cette recherche sur la démarche d'investigation en arithmétique était de répondre à ces deux questions : comment les élèves confrontés à la résolution d'un problème ouvert utilisent-ils leurs connaissances mathématiques ? Et quelle est la place de la dimension expérimentale dans leur processus de recherche ? Les analyses *a priori* mathématique et didactique ont mis en évidence les potentialités de ce problème afin de répondre à ces questions didactiques concernant le processus de recherche d'élèves confrontés à la résolution d'un problème ouvert en arithmétique. Tout d'abord, la conjecture d'Erdös-Straus étant ouverte en recherche mathématique, elle se présente comme un bon candidat pour l'activité de recherche de problème. Nous avons pu voir que ce problème remplit ainsi les critères d'un problème ouvert au sens de Lyon 1 (Arsac et Mante, 2007) pour les élèves. En effet, l'énoncé est court afin de donner envie de chercher, il n'induit ni la méthode, ni la solution et celle-ci ne sera pas réduite à l'utilisation ou l'application du cours. De plus, il est accessible aux élèves car il se trouve dans un domaine conceptuel familier des élèves. Nous avons effectivement montré que de nombreux résultats partiels étaient à la portée d'élèves de terminale scientifique et que les connaissances nécessaires, à la résolution et à la dévolution, étaient peu nombreuses et *a priori* acquises. Nous avons également identifié de nombreuses procédures de résolution dont certaines mettent en œuvre une démarche expérimentale.

L'analyse *a posteriori* de notre expérimentation a permis de relever, d'une part, les conditions favorisant une dévolution du problème, et d'autre part, les apports pour l'enseignement, de cette recherche de résolution de problème en classe. Lors de notre expérimentation en classe de terminale scientifique, nous avons pu relever différentes conditions favorisant une dévolution du problème par les élèves. Tout d'abord, il nous semble important que la classe ait un rapport spécifique à la recherche mathématique. Nous pensons que savoir que des problèmes mathématiques ont été démontrés après plusieurs années, que d'autres sont toujours à l'état de conjectures, que l'on peut donc chercher un problème sans trouver de solutions et accepter de ne trouver que des conjectures est, par exemple, nécessaire au bon déroulement de la situation en classe. En effet, présenter cette séance de travail sans avoir déjà sensibiliser les élèves à la résolution de problème pourrait les décourager ce de genre d'enseignement des mathématiques. Dans cette même optique, nous pensons que connaître quelques notions de vocabulaire relatives à l'activité de recherche (conjectures, contre-exemples, preuve…) favorise aussi la dévolution. Enfin, la calculatrice semble être un outil, certes pas indispensable mais utile pour que les élèves entrent rapidement et longuement dans la résolution de ce problème.

Les apports pour l'enseignement de cette recherche de résolution de problème ouvert en classe sont de deux natures : mobilisation de connaissances notionnelles et développement d'une démarche expérimentale dans le processus de recherche mathématique.

Concernant les connaissances mobilisées dans les différentes procédures, nous avons pu constater que les notions de fractions, calcul fractionnaire, nombres premiers, nombres entiers, multiples et diviseurs n'ont pas posé de difficultés majeurs aux élèves. Cependant, ce problème a permis aux élèves de se questionner sur des connaissances mathématiques institutionnalisées dans des classes antérieures, notamment sur la nature et les propriétés des nombres. Nous pouvons également noter que cette résolution de problème permet un travail approfondi des notions relatives à l'activité de recherche, telles que le rôle d'un contre-exemple dans une preuve, le rôle d'un exemple générique dans la recherche de conjecture ou dans une preuve par généralisation, etc…L'étude des processus de recherche de conjecture pour les nombres pairs a mis en évidence le développement, par les élèves, d'une démarche expérimentale. En effet, ils ont réalisé des expériences (décomposition pour certaines valeurs de $n$), observé les résultats de ces expériences afin de formuler des hypothèses (si $n$ est multiplié par 2 alors les solutions aussi, la première fraction multiplié par la seconde donne la troisième) puis ils sont retournés à l'expérience (essais sur de nouvelles valeurs de $n$) afin de formuler une conjecture. Ils procèdent ensuite à l'étape de tentative de preuve, à partir des résultats conjecturés lors de leurs expériences. Ils renouvelleront plusieurs fois ces différentes étapes.

Enfin, revenons sur le choix d'un problème ouvert en recherche comme objet d'étude. Il a été motivé, en premier lieu, par un projet à long terme : étudier et comparer les processus de recherche d'élèves et de chercheurs sur un même problème. Nous supposons alors qu'un problème ouvert permet à la fois d'être non connu, suffisamment intéressant et motivant pour les chercheurs, accessible et permettant une recherche effective aux élèves. Cependant tous les problèmes ouverts ne répondent pas à ces critères. Si le qualificatif « ouvert » ne semble pas être essentiel pour les élèves, il apparaît important pour les chercheurs. En effet, cela semble garantir une dévolution de la recherche auprès de ceux-ci. En ce qui concerne les élèves, c'est plutôt la caractéristique de proximité du problème avec un domaine conceptuel qui leur est familier qui favorise la dévolution de la recherche. Ainsi un problème qui présente une distance trop importante avec leurs connaissances risque de ne pas révéler les caractéristiques des processus de leurs recherches, ces derniers n'ayant pas les outils nécessaires pour les mener. Cela dépend donc du problème ouvert.

Nous avons ainsi porté une grande importance au choix de notre objet d'étude. La recherche initiée en master (Gardes, 2009) a révélé le potentiel de ce problème pour répondre aux questions didactiques concernant l'étude et la comparaison de processus de recherche d'élèves et de chercheur. En effet, nous avons pu débuter une analyse de la pratique d'un chercheur sur ce problème. Une première comparaison entre élèves de terminale scientifique et chercheurs est ainsi possible à partir de ces travaux.

L'approfondissement de cet axe de travail est un des objectifs de la poursuite de notre recherche.

## Bibliographie


ARSAC G. et MANTE M. (2007), Les pratiques du problème ouvert, Scéren CRDP de Lyon.

BATTIE V. (2007), « Exploitation d'un outil épistémologique pour l'analyse de raisonnements d'élèves confrontés à la résolution de problèmes en arithmétique », *RDM*, Vol. 27/1, 9-43.

ERDÖS P. (1950), "On a diophantine equation". (Hungarian. Russian, English summaries), Mat. Lapok 1, 1950, pp. 192-210.

GARDES ML. (2009), Étude *du processus de recherche d'élèves de terminale scientifique confrontés à la résolution d'un problème ouvert en arithmétique*. Mémoire de master 2 recherche Histoire, Philosophie et Didactique des Sciences (HPDS), soutenu en juin 2009. Université Claude Bernard Lyon 1.

MIZONY M. (2009), « La conjecture d'Erdös-Straus », ressource Groupe Exprime, Lyon, 2009, à paraître. http://math.univ-lyon1.fr/~mizony/fregErdosdiap.pdf

MORDELL L.J(1969), *Diophantine equations*, London, New-York : Academic press, 1969, chapter 30.

PERRIN D. (2007), « L'expérimentation en mathématiques », *Revue Petit x n°73*, Ed. IREM de Grenoble, France, pp 6-34.

SCHINZEL A. (2000) On sums of three unit fractions with polynomial denominators. *Funct. Approx. Comment. Math*. 28 : 187-194, 2000.

Page de SWETT A. : http://math.uindy.edu/swett/esc.htm

Algorithme pour TI-89 : http://pagesperso-orange.fr/debart/ti92/fracegypt.html

Programme de Terminale S spécialité mathématique de 2002 : B.O. hors-série n°4 du 30 août 2001.

Programme des classes de collèges de 2008 : B.O n°6 du 19 Avril 2007.

# ANNEXE 1 : Résultats sur la conjecture d'Erdös-Straus

### Résultat de Mordell

On sait déterminer des solutions de cette équation pour tous les nombres non congrus à 1, $11^2$, $13^2$, $17^2$, $19^2$, $23^2$ modulo 840 par une certaine méthode. Ces solutions sont polynomiales en $n$.

<u>Référence</u> : Mordell L.J, *Diophantine equations*, London, New-York : Academic press, 1969, chapter 30.

***Démonstration* (d'après la démonstration de Mordell) :**

<u>Première remarque</u> : si l'équation pour l'entier $n$ admet une solution $(x, y, z)$, alors l'équation pour l'entier $kn$ admet une solution $(kx, ky, kz)$. En effet, il découle immédiatement de l'équation initiale que : $\frac{4}{kn}=\frac{1}{kx}+\frac{1}{ky}+\frac{1}{kz}$. En particulier, l'équation admet les solutions particulières suivantes :

n = 2, (x, y, z) = (1, 2, 2)
n = 3, (x, y, z) = (1, 6, 6)
n = 5, (x, y, z) = (2, 5, 10)
n = 7, (x, y, z) = (2, 21, 42)

On en déduit donc qu'elle admet des solutions pour certaines relations de congruence sur $n$ :

| $n$ | | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|---|
| $n \equiv 0$ [2] | $n = 2k$ | $k$ | $2k$ | $2k$ |
| $n \equiv 0$ [3] | $n = 3k$ | $k$ | $6k$ | $6k$ |
| $n \equiv 0$ [5] | $n = 5k$ | $2k$ | $5k$ | $10k$ |
| $n \equiv 0$[7] | $n = 7k$ | $2k$ | $21k$ | $42k$ |

<u>Deuxième remarque</u> : Si $n$ est un nombre premier strictement supérieur à 3 alors $x$, $y$ et $z$ ne peuvent pas être tous les trois multiples de $n$.

En effet, si $x = k_1n$, $y = k_2n$ et $z = k_3n$, $k_i \in \mathbb{N}^*$ pour $i = 1, 2, 3$ alors :

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \Leftrightarrow 4=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3} \leqslant 3.$$

Contradiction. Donc soit un seul est multiple de $n$, par exemple $x$, soit deux sont multiples de $n$, par exemple $y$ et $z$. On peut donc chercher, par exemple, des solutions sous la forme $(x, y, z) = (bcd, nabd, nacd)$ où $y$ et $z$ sont multiples de $n$.

L'équation initiale se transforme alors en :

$$na + b + c = 4abcd \qquad \text{(E)}$$

En choisissant convenablement $a$, $b$, $c$ et $d$, cette dernière équation permet d'obtenir des solutions pour certaines relations de congruence sur $n$ :

n ≡ 0, 2 [3]
n ≡ 0, 2, 3 [5] (ce qui revient à n ≡ 7, 13 [15])
n ≡ 0, 3, 5, 6 [7]
n ≡ 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7 [8] (n ≡ 0,2, 4, 6 [8] sont traités par le cas n ≡ 0 [2] et n ≡ 3,7 [7] sont traités par le cas n ≡ 3 [4])
Et on n'a pas de solutions, par cette méthode, pour n ≡ 1 [8], n º 1, 2, 4 [7] et n ≡ 1, 4 [15].

Récapitulatif :

| *a* | *b* | *c* | *d* | *na + b + c = 4abcd* | | *x* | *y* | *z* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $k$ | 1 | $n \equiv 2\ [3]$ | $n = 3k - 1$ | $k$ | $3k - 1$ | $k(3k-1)$ |
| 2 | 1 | 1 | $k$ | $n \equiv 3\ [4]$ | $n = 4k - 1$ | $k$ | $2k(4k-1)$ | $2k(4k-1)$ |
| 2 | 1 | $2k - 1$ | 1 | $n \equiv 3\ [7]$ | $n = 7k - 4$ | $2k - 1$ | $2(7k-4)$ | $2(2k-1)(7k-4)$ |
| 1 | 2 | $k$ | 1 | $n \equiv 5\ [7]$ | $n = 7k - 2$ | $2k$ | $2(7k-2)$ | $k(7k-2)$ |
| 1 | 1 | $k$ | 2 | $n \equiv 6\ [7]$ | $n = 7k - 1$ | $2k$ | $2(7k-1)$ | $2k(7k-1)$ |
| 1 | 1 | 2 | $k$ | $n \equiv 5\ [8]$ | $n = 8k - 3$ | $2k$ | $k(8k-3)$ | $2k(8k-3)$ |
| 2 | 1 | $2k - 1$ | 2 | $n \equiv 7\ [15]$ | $n = 15k - 8$ | $2(2k-1)$ | $4(15k-8)$ | $(2k-1)(15k-8)$ |
| 1 | 2 | $k$ | 2 | $n \equiv 13\ [15]$ | $n = 15k - 2$ | $4k$ | $4(15k-2)$ | $2k(15k-2)$ |

Déterminons maintenant l'ensemble des nombres pour lesquels cette méthode ne permet pas de trouver des solutions. D'après le théorème des restes chinois[10], il y a donc 6 classes de congruences ( $1 \times 2 \times 3$ ) et on peut alors exhiber les nombres $n$ modulo 840 pour lesquels on ne connaît pas de solution :

| | |
|---|---|
| $n \equiv 1\ [8]$<br>$n \equiv 1\ [7]$    $n \equiv 1\ [840]$<br>$n \equiv 1\ [15]$ | $n \equiv 1\ [8]$<br>$n \equiv 2\ [7]$    $n \equiv 17^2\ [840]$<br>$n \equiv 4\ [15]$ |
| $n \equiv 1\ [8]$<br>$n \equiv 1\ [7]$    $n \equiv 13^2\ [840]$<br>$n \equiv 4\ [15]$ | $n \equiv 1\ [8]$<br>$n \equiv 1\ [7]$    $n \equiv 19^2\ [840]$<br>$n \equiv 1\ [15]$ |
| $n \equiv 1\ [8]$<br>$n \equiv 2\ [7]$    $n \equiv 11^2\ [840]$<br>$n \equiv 1\ [15]$ | $n \equiv 1\ [8]$<br>$n \equiv 4\ [7]$    $n \equiv 23^2\ [840]$<br>$n \equiv 4\ [15]$ |
| **$n$ º 1, $11^2$, $13^2$, $17^2$, $19^2$, $23^2$ [840]** | |

10 Soient $n_1, \ldots n_k$ des entiers deux à deux premiers entre eux. Alors pour tous les entiers $a_1, \ldots a_k$, il existe un unique entier $x$ modulo $n = n_1 \times \ldots \times n_k$ et tel que $\begin{cases} x \equiv a_1 [n_1] \\ \ldots \\ x \equiv a_k [n_k] \end{cases}$

Donc pour $n$ ° 1, $11^2$, $13^2$, $17^2$, $19^2$, $23^2$ modulo 840, il n'y a pas de solutions déterminées par cette méthode.

**Résultat de Schinzel**

Pour les nombres congrus à 1, $11^2$, $13^2$, $17^2$, $19^2$, $23^2$ modulo 840, Andrzej Schinzel a montré que ces solutions n'étaient pas polynomiales en $n$ lorsque $n$ parcourt l'une de ces progressions arithmétiques.

Référence : Schinzel A. On sums of three unit fractions with polynomial denominators. *Funct. Approx. Comment. Math*. 28 : 187-194, 2000.

**Résultat de Swett**

La conjecture a été vérifiée pour tous les nombres inférieurs à $10^{14}$.

Référence : page Internet d'Allan Swett : http://math.uindy.edu/swett/esc.htm, 1999 et article en ligne de Michel Mizony : http://math.univ-lyon1.fr/~mizony/fredErdosdiap.pdf

## ANNEXE 2 : Algorithmes

Nous présentons ici deux algorithmes différents qui permettent de vérifier la conjecture d'Erdös-Straus pour certains nombres entiers naturels. Ils peuvent être abordés par des élèves de terminale scientifique.

Algorithme n°1 : l'algorithme de Fibonacci-Sylvester

Pour décomposer une fraction $\frac{a}{b}<1$ en somme de fractions unitaires, cet algorithme consiste à choisir la plus grande fraction unitaire inférieure à $\frac{a}{b}$.

- si a = 1, c'est terminé.
- si $a \neq 1$, on cherche le plus petit entier n tel que 1/n <= a/b
  on calcule a/b-1/n = $a_n$-1/$b_n$
  - si $a_n$-1 = 1, c'est terminé, a/b = 1/n + $a_n$-1/$b_n$
  - si an-1 ≠ 1, on réitère.

Cet algorithme fonctionne toujours (on obtient toujours un nombre fini de fractions) mais ne donne pas nécessairement une décomposition en trois fractions unitaires.

Une question serait alors : comment l'améliorer pour qu'il ne donne que trois fractions égyptiennes ? Voici une réponse :

Algorithme n°2 : programmation de l'algorithme amélioré qui donne exactement trois fractions égyptiennes. (algorithme de Mizony[11])

$$[\frac{4}{11}=[\frac{1}{3},\frac{1}{34},\frac{1}{1122}]]$$

$$[\frac{4}{13}=[\frac{1}{4},\frac{1}{18},\frac{1}{468}]]$$

$$[\frac{4}{15}=[\frac{1}{4},\frac{1}{61},\frac{1}{3660}]]$$

$$[17, non]$$

Le dernier renvoi de cet algorithme : [17, *non*] signifie que le programme ne trouve pas de décomposition en sommes de trois fractions égyptiennes pour la fraction 4/17. En effet, cet algorithme donne des solutions pour tout entier naturel différent de 1 et 17 modulo 24. L'auteur[11] de cet algorithme a crée un autre programme qui permet de traiter tous les entiers naturels jusqu'à $10^9$.

11 http://math.univ-lyon1.fr/~mizony/