

# LA DIMENSION EXPÉRIMENTALE EN MATHÉMATIQUES

## UN EXEMPLE AVEC LA SITUATION DES POLYÈDRES

Thierry DIAS

Université de Lyon, Université Claude Bernard LYON 1  
IUFM, LEPS, EA 4148, équipe LIRDHIST

Dans cet article, nous présentons une situation de résolution de problème de type *problème ouvert* (Arsac & Mante, 2007), et nous analysons deux expérimentations de ce problème conduites dans des contextes différents. Dans le cadre d'un travail de recherche que nous conduisons sur « l'intégration de la dimension expérimentale des mathématiques dans des situations d'enseignement et de formation », nous avons en effet proposé cette situation de recherche non seulement à des élèves de l'école élémentaire ordinaire, mais également à des élèves de l'enseignement spécialisé.

Nous souhaitons ainsi mettre à l'épreuve la thèse selon laquelle la dimension expérimentale des mathématiques contribue significativement à la construction des connaissances dans le champ scientifique. La situation que nous avons choisie de présenter ici concerne la géométrie dans l'espace, un champ des mathématiques généralement moins investi que d'autres par les enseignants de l'école élémentaire. Cette situation permet un travail sur la mise en évidence d'une certaine catégorie de polyèdres : les solides dits « de Platon ». Elle a été testée à plusieurs reprises et dans différents contextes de classe en permettant à chaque fois des apprentissages chez les élèves. Il semble également qu'elle soit à même de provoquer de véritables activités scientifiques grâce à l'observation, la manipulation, le questionnement, la validation et l'argumentation dans le champ des mathématiques.

### **La situation des polyèdres : analyse a priori**

#### **Enjeux mathématiques : pourquoi 5 solides ?**

Le problème proposé fait partie de la catégorie des problèmes de recherche que l'on peut rapprocher des *problèmes ouverts* (Arsac & Mante, 2007). Ce sont notamment des problèmes pour lesquels les élèves ne disposent pas de solution déjà éprouvée et pour lesquels plusieurs démarches de résolution sont possibles. Les élèves sont ainsi placés dans une situation proche de celles des chercheurs en mathématiques : la tâche qui leur est dévolue est problématisée, ce qui la positionne résolument dans le champ scientifique.

Le problème est le suivant :

« En utilisant la définition d'un polyèdre régulier (un polyèdre convexe dont les faces sont des polygones réguliers deux à deux superposables tels que, à tous les sommets corresponde un même nombre de faces), est-il possible de déterminer tous les polyèdres réguliers ? »

Le problème consiste donc à rechercher tous les polyèdres réguliers et s'appuie sur leur définition préalable, qui énonce les propriétés des objets géométriques représentés par les solides dits « de Platon ». La définition fournie aux élèves subit les aménagements langagiers nécessaires à sa compréhension par les élèves, comme nous le verrons plus loin dans les exemples présentés. Le problème est cependant toujours présenté sous la même forme : définition des objets, question sur leur détermination.

C'est donc la recherche du nombre de ces solides qui est problématique, l'ouverture de la situation résidant notamment dans l'indétermination de ce nombre : est-il fini (petit ou grand) ou infini ?

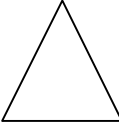

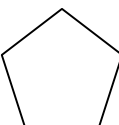
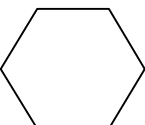
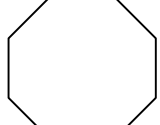
Afin d'évoluer dans la résolution de ce problème, nous proposons l'introduction d'un matériel de construction plastique<sup>1</sup> dans le milieu matériel de la situation. Avec ce matériel de type « polydrons », de nombreux emboîtements sont possibles, ce qui déclenche une phase expérimentale plus aisée, le dessin en perspective étant relativement hors de portée des élèves en général. Les solides en construction sont assez vite soumis aux contraintes du réel sensible : en effet, toutes les combinaisons de faces ne sont pas possibles ou ne conduisent pas à une réponse valide par rapport à l'énoncé.

Ainsi, deux axiomes non explicites, mais parfois formulés ou mis en acte par ceux qui les utilisent, rendent compte de ces contraintes :

- Axiome A1 : un sommet appartient à trois faces au minimum.
- Axiome A2 : la somme des mesures des angles des polygones au sommet du polyèdre est inférieure strictement à quatre fois la mesure de l'angle droit.





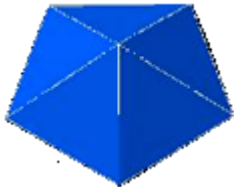


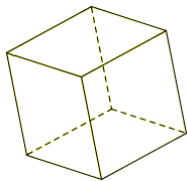

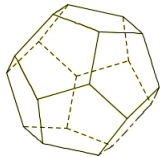
La principale différence entre les deux axiomes réside dans le fait que le premier est mis en acte sans discussion, alors que le second est l'enjeu du problème.

La première phase de la résolution consiste à sélectionner les pièces en plastique pouvant représenter les objets géométriques que sont les polygones réguliers : des triangles équilatéraux, des triangles isocèles, des carrés, des rectangles, des pentagones, hexagones et octogones réguliers. Dans le matériel proposé, la sélection donne les cinq possibilités suivantes :

triangle	carré	pentagone	hexagone	octogone
				
3 côtés	4 côtés	5 côtés	6 côtés	8 côtés

<sup>1</sup> Le matériel est fourni par l'enseignant et seulement mis à disposition sans obligation d'utilisation a priori.

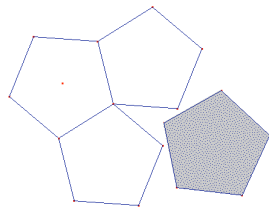
Avec cette catégorie d'objets il est possible d'envisager certaines constructions pouvant répondre aux critères fixés par l'énoncé, valides tant sur le plan sensible que dans le registre mathématique. Faisons ici l'inventaire des possibilités selon le polygone régulier choisi : triangle équilatéral (3 solutions), carré et pentagone régulier.

triangle équilatéral		3 faces par sommet	somme des angles au sommet $120^\circ$	polyèdre correspondant : TÉTRAÈDRE	
		4 faces par sommet	somme des angles au sommet $240^\circ$	polyèdre correspondant : OCTAÈDRE	
		5 faces par sommet	somme des angles au sommet $300^\circ$	polyèdre correspondant : ICOSAÈDRE	
carré		3 faces par sommet	somme des angles au sommet $270^\circ$	polyèdre correspondant : CUBE	
pentagone		3 faces par sommet	somme des angles au sommet $324^\circ$	polyèdre correspondant : DODÉCAÈDRE	

Avec des triangles équilatéraux, trois constructions sont possibles, mais le sommet constitué de cinq triangles est plus difficilement concevable, en partie à cause de son absence relative de rigidité.

L'étude des constructions à partir de carrés identiques est relativement rapide : en effet, si l'on assemble trois carrés pour former un sommet, on achève la construction et on obtient l'hexaèdre régulier (le cube). En essayant l'assemblage de quatre carrés, on trouve la limite constituée par le plan. Au cours de nos diverses expérimentations, cela n'a jamais été mis en débat par les participants.

L'étude des possibilités de construction avec des pentagones réguliers conduit à la découverte d'un seul polyèdre régulier : le dodécaèdre, dont la valeur esthétique est une référence très partagée par les élèves. Il est impossible d'assembler quatre pentagones réguliers (ou quatre octogones réguliers) sur un seul sommet, car il y a chevauchement !



Pour terminer, l'assemblage de trois hexagones réguliers conduit à la même « impasse polyédrique » qu'avec quatre carrés : le pavage du plan. Cependant, contrairement au cas du carré, cela est presque toujours l'objet de débats. Cette rencontre provoquée avec l'impossibilité de réaliser un polyèdre régulier avec des hexagones réguliers est le point nodal de ce problème de recherche. En effet, le réel sensible constitué par les matériaux utilisés, pose problème du fait de la souplesse de la matière plastique : la forme solide en cours de construction avec plusieurs hexagones semble vouloir plier ! Pour invalider cette proposition, les bâtisseurs de solides devront le plus souvent faire plusieurs allers et retours entre les objets du monde sensible qu'ils utilisent comme outils de modélisation, et les objets géométriques qui leur correspondent. La rencontre de cet obstacle oriente la recherche vers une nouvelle question, qui n'est plus celle du nombre des solides de Platon, mais plutôt celle des contraintes qui pourraient permettre ou empêcher leur réalisation.

### Enjeux didactiques

La consistance et la robustesse, du point de vue didactique, de ce problème de recherche ne sont plus à démontrer (Dias & Durand-Guerrier, 2005). Nous donnons ici un rapide aperçu sur l'analyse *a priori* de cette situation didactique<sup>2</sup>.

Après plusieurs expérimentations de la situation, nous avons pu repérer certaines connaissances régulièrement disponibles relativement à ce problème. Du côté de la géométrie dans l'espace, elles sont essentiellement de l'ordre du lexique : vocabulaire de base de la géométrie comme côté, sommet, etc. À cela, s'ajoutent fréquemment des références culturelles de ces objets particuliers que sont les solides de Platon. Le cube est, par exemple, régulièrement cité a priori comme un représentant de cette « famille », sans avoir recours à sa construction du fait de ses nombreuses références culturelles et sociales. C'est un objet du monde sensible ayant donné lieu à plusieurs expériences manipulatoires constitutives de la connaissance de ses propriétés.

L'apparence visuelle du dodécaèdre est elle aussi très remarquée car presque toujours assimilée à la géométrie du ballon de football.

---

<sup>2</sup> Pour une analyse plus approfondie, le lecteur pourra se reporter à Dias (2007) ou Durand-Guerrier (2006).

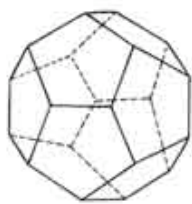


Figure 1 - Le dodécaèdre

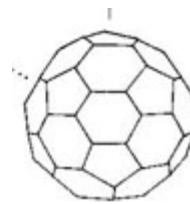


Figure 2 - L'icosaèdre tronqué

Cette assimilation se fait à tort, car la structure géométrique sous-jacente au ballon de football ne renvoie pas à un polyèdre régulier mais à un polyèdre semi-régulier constitué de pentagones réguliers et d'hexagones réguliers : l'icosaèdre tronqué.

C'est donc aussi un objet faisant partie des connaissances communes, sa construction est fortement prévisible dans la phase d'essais par emboîtements des pièces plastiques.

Enfin, la structure « cristalline » du tétraèdre (et/ou de l'octaèdre) est parfois évoquée du fait d'un esthétisme qui ne laisse pas indifférent car rappelant les pierres taillées comme le diamant.

Ces références d'ordre culturel n'ont pas, en général, pour les élèves ou les professeurs du premier degré en formation, de liens explicites ou directs avec les propriétés des objets qui les fondent, ni avec aucune définition ou règle qui pourraient les déterminer. On peut donc attendre a priori deux grands types de raisonnement par rapport à la question posée sur le nombre de ces solides :

- Le premier raisonnement est analogique et relativement théorique : il existe une infinité de ces polyèdres réguliers par association (ou relation) au nombre infini de polygones réguliers inscriptibles dans un cercle. Chacun de ses représentants étant inscriptible dans une sphère, il en existe donc une infinité, la limite étant justement la sphère.
- Le deuxième raisonnement est plus expérimental : il existe un nombre limité, et même très petit, de polyèdres réguliers. Un nombre correspondant aux trois seuls polygones permettant de réaliser effectivement un solide convexe : le triangle équilatéral, le carré et le pentagone régulier.

Il est important de noter ici que le problème, bien que posé a priori dans le domaine de la géométrie théorique, ne peut pas être résolu de manière théorique par les publics auxquels nous l'avons proposé. L'objectif est de mettre en relation les contraintes imposées par le réel, avec un résultat de géométrie théorique, l'axiome A2 : « La somme des mesures des angles des polygones au sommet du polyèdre est inférieure strictement à quatre fois la mesure de l'angle droit ». Une fois celui-ci reconnu et posé comme tel, cela permet de borner les possibilités : il y a au plus cinq polyèdres réguliers (résultat théorique). Leur existence est attestée dans le monde sensible. La preuve théorique de leur existence, postérieure à leur découverte comme objet du monde, se trouve dans le livre XIII des *Éléments* d'Euclide.

Dans ce livre XIII, le dernier de l'ouvrage des *Éléments*, Euclide traite en 18 propositions la question des polyèdres de Platon, c'est-à-dire des cinq polyèdres réguliers convexes : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre. Les six dernières propositions établissent notamment comment construire chacun de ces polyèdres réguliers, ce qui sert, selon lui, de démonstration de leur existence.

Dans nos observations, les aller et retour entre objets sensibles et objets théoriques, rendus possibles par la présence du matériel, ne suffisent pas à trancher ni sur le choix du bon raisonnement, ni même sur la validité de chacun d'entre eux. Ils peuvent au mieux nourrir l'intuition sous-jacente à la résolution. Il est nécessaire d'engager le débat entre élèves, avec ou sans participation du professeur, pour passer progressivement de la formulation à l'argumentation. Les discours portent sur les objets en jeux, des objets sensibles représentant d'autres objets géométriques. La signification des mots utilisés, et parfois leur indétermination, revêt alors une importance fondamentale lors des échanges langagiers. L'ambiguïté d'un mot comme « côté » en étant un exemple : le côté d'un polygone est aussi l'arête du polyèdre... mais ce n'est pas son côté<sup>3</sup> ! Dans l'une des expérimentations, un élève de CM2 explicite la différence entre « *une face du polyèdre* » et « *une pièce en plastique permettant de construire le polyèdre* ».

Le principal levier mathématique de la situation d'apprentissage se situe dans la découverte de l'axiome A2 (« la somme des angles des polygones au sommet du polyèdre est inférieure strictement à quatre fois la mesure de l'angle droit »). Cet axiome n'est pas un objet d'apprentissage en tant que tel, il n'est donc pas présenté par l'enseignant et ne donne pas lieu à une institutionnalisation. Son énoncé par les élèves n'étant que fort peu probable, il faut compter sur les outils de modélisation que représente le matériel mis à disposition pour le voir émerger en acte, par assemblage de formes identiques qui pavent le plan. C'est l'ensemble de toutes ces actions et leurs mise en mots qui est à l'origine des débats et des contradictions : par exemple celle du pavage ou non du plan par assemblage des hexagones. Il est alors attendu des énoncés argumentatifs en vue de tentatives de validation des conjectures émises.

Pour terminer, on peut estimer que les objectifs mathématiques poursuivis donnant lieu à une éventuelle institutionnalisation à l'issue de cette situation sont de trois types :

- Utiliser le vocabulaire de la géométrie dans l'espace : face, arête, sommet, solide, polyèdre, côté, angle, volume (*vs* à plat) ;
- Commencer à dégager quelques notions clés en géométrie : en terme de relations, de propriétés et éventuellement de classification ;
- Découvrir, agir et expérimenter avec un matériel spécifique pour des activités de type scientifique.

### **Un milieu spécifique pour la situation**

Selon nous, la recherche proposée par ce problème s'inscrit dans un environnement d'apprentissage spécifique rendant explicite la notion de *milieu antagoniste* (Brousseau, 1998). Les trois caractéristiques d'un tel milieu sont rapportées par Salin (2002) :

- Le milieu doit être porteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres afin de permettre l'adaptation de l'élève ;
- Le milieu doit développer l'autonomie de l'élève dans ses apprentissages ;
- Le milieu doit collaborer à la maîtrise de savoirs mathématiques identifiés comme tels.

---

<sup>3</sup> Lire à ce sujet Mathé (2004).

Dans la recherche des solides de Platon, nous avons pointé les résistances du milieu matériel en lien avec les obstacles mathématiques dans les paragraphes qui précèdent. Ces derniers sont source de difficultés d'apprentissage et donc d'adaptation pour les apprenants. On peut citer par exemple la contradiction du pavage théorique du plan à  $360^\circ$  et la courbure réelle du solide en construction.

Le matériel mis à disposition des élèves est en plastique semi-rigide. L'assemblage des hexagones réguliers se réalise dans le plan (conformément à l'axiome A2) mais lorsque les élèves prennent en main la construction, la semi rigidité du matériel produit un effet de courbure. Tout semble indiquer alors que la construction d'un solide est possible avec des hexagones, le tout étant une question de nombre de pièces : « *il en faudrait beaucoup et cela ferait comme une grosse boule* ». Cette référence pouvant être attribuée à des constructions réelles du type géode (Cité de Sciences à Paris, par exemple).

Le milieu de la situation permet également une autonomie relativement importante des élèves dans la résolution didactique, même si le contexte de scolarisation peut engendrer des différences significatives sur ce sujet. Dans l'enseignement spécialisé par exemple, le rôle de l'enseignant est de garantir l'avancée de la recherche par un effet catalyseur dans la confrontation des objets sensibles et des objets théoriques. Il rappelle la règle ou les définitions, fait émerger les contradictions quand elles existent dans les formulations des élèves, permet l'expression de type réflexive en utilisant le questionnement dans ses interventions.

Enfin, la dernière caractéristique d'un milieu antagoniste réside dans son potentiel à conduire les élèves à maîtriser des savoirs mathématiques bien identifiés dans la situation. La définition donnée dans l'énoncé du problème est justement de nature à identifier de façon explicite les connaissances en jeu : il s'agit d'un travail sur les propriétés particulières et invariantes d'une catégorie d'objets géométriques.

## **Mise en œuvre en classe, deux histoires courtes**

Pour mettre à l'épreuve cette situation d'apprentissage nous avons choisi deux contextes de scolarisation très différents, afin de suivre une méthodologie de type comparative pour essayer de dégager des régularités. Nous ferons d'abord le compte rendu du déroulement de l'expérience au sein d'une classe de CM2 de l'enseignement ordinaire, lors d'une séquence consacrée à l'étude et à la classification des solides au programme du cycle 3. La deuxième « histoire courte » est bâtie sur la mise en œuvre de la recherche des solides de Platon au sein d'un dispositif de l'enseignement spécialisé, intégré à un collège accueillant des élèves présentant des troubles sévères du langage. Les élèves doivent effectuer une recherche en groupe sur les solides de Platon avant de mutualiser leurs conclusions lors d'une phase de mise en commun collective. Ces deux contextes offrent des milieux très différents dont nous rapporterons les principales caractéristiques.

### **« Combien de ? » en CM2**

La classe d'accueil pour ce premier corpus d'étude est une troisième année du cycle des approfondissements d'une école du centre de Lyon. L'effectif est important (28 élèves), l'enseignant est jeune et encore peu expérimenté. Il fait partie d'une équipe pédagogique très impliquée dans la mise en place des cycles d'apprentissages à l'école élémentaire. Ainsi, aucune classe de cet établissement n'est constituée des niveaux traditionnels, mais chacune revendique l'appartenance à un cycle : celui des approfondissements pour

le cycle 3. D'autre part, aucun enseignant de l'équipe ne revendique une expertise particulière dans le champ des mathématiques; ce qui correspond à un choix délibéré de notre part pour le recueil de ce corpus. L'enseignant qui devait conduire la séance ne connaissait pas la situation, aussi avons-nous proposé aux professeurs de cet établissement une première rencontre pour une courte session de formation, avec pour objectif de permettre aux enseignants de l'école, en résolvant le problème ensemble, de repérer collectivement les enjeux mathématiques et didactiques de la situation.

### Le dispositif de recueil des données

Une séquence de trois séances portant sur les solides et certaines de leurs propriétés, a été conçue par le professeur responsable de la classe choisie. Cette séquence comportait bien entendu la situation de recherche des solides de Platon, proposée aux élèves lors de la deuxième séance. La première séance avait quant à elle pour objectif affiché « la découverte du matériel », proposée dans le cadre d'une activité de construction / classement afin de permettre à tous les élèves de faire émerger quelques énoncés fondamentaux en géométrie des solides. La séance de clôture a été réservée à un moment que le maître souhaitait résolument d'institutionnalisation portant principalement sur les critères de classification des solides.

Toutes les étapes de la séquence ont été filmées<sup>4</sup> en format numérique, l'enregistrement du son étant conforté par l'utilisation d'un baladeur enregistreur minidisc. Les conditions techniques peuvent ainsi apparaître satisfaisantes, cependant le contexte spatial de la classe (de dimensions très réduites) doublé de l'effectif important des élèves lors de ces séances, n'ont permis qu'un recueil habituel en situation de classe ordinaire<sup>5</sup>.

### Mise en scène du problème

Le problème de recherche proposé aux élèves, lors de la deuxième séance, a été énoncé et communiqué par écrit et à l'oral de la manière suivante<sup>6</sup> :

*« Un polyèdre est un solide délimité par des faces planes.*

*Un polyèdre régulier est un polyèdre convexe dont les faces sont des polygones réguliers deux à deux superposables tels que, à tous les sommets corresponde un même nombre de faces.*

*Déterminer tous les polyèdres réguliers.*

- 1. Résoudre le problème.*
- 2. Faire une affiche présentant vos résultats, leur justification, la démarche de résolution et les difficultés éventuelles.*
- 3. Prévoir un rapporteur et le contenu de ce rapport si possible par écrit. »*

---

<sup>4</sup> Avec accord préalable de tous les parents des élèves de la classe.

<sup>5</sup> Des analyses d'extraits de cette séance, par des chercheurs de différents domaines, se trouvent dans Guernier & al. (2007) *Actes des journées d'étude Interactions verbales, didactiques et apprentissages*. Presses Universitaires de Franche Comté.

<sup>6</sup> Cette formulation est la même que celle qui avait été utilisée lors de la session de formation avec les enseignants.



Le matériel de construction a été mis à disposition des élèves sous forme de boîtes isolées à plusieurs endroits dans la classe. Le dispositif social choisi était celui du travail en groupes d'environ quatre élèves. La séance a duré environ 50 minutes et a permis à tous les groupes d'élèves de résoudre au moins partiellement le problème.

Extrait du corpus à propos d'une construction avec des hexagones

Où l'on confirme notre hypothèse concernant l'antagonisme du milieu...

(E désigne les élèves et M le maître).

*« E : Ça, ce n'est pas possible.*

*M : Avec un hexagone ?*

*E : Et nous aussi on a essayé.*

*M : Alors, qu'est-ce que ça fait ?*

*E : Ça ne marche pas.*

*M : Morgan.*

*E : Ben si on fait un tout petit peu, ça tu vas appuyer un tout petit peu et puis ça va se casser.*

*E : Il faut des triangles.*

*E : Ce n'est pas très souple, c'est un ... qu'est pas très souple.*

*E : Il faut des triangles pour boucher les trous (élève du groupe ayant travaillé avec des octogones).*

*E : Oui, ça se casse.*

*E : Ça se casse.*

*M : Oui, les triangles pour boucher les trous, c'est anecdotique ça.*

*E : Nous, on a essayé avec, ben, avec l'hexagone mais, euh, déjà, on n'en avait pas assez.*

*M : Et tu penses que ça pouvait marcher alors ? S'il y en avait plus.*

*E : Ben oui.*

*E : Oui, si il y en avait.*

*M : Pourquoi ça pouvait marcher ?*

*E : Parce que quand on avait mis un certain nombre, et ben, ça commençait à plier, à prendre forme.*

*E : C'était plus simple à plier.*

*E : Là, il n'y en a pas assez.*

*E : Eh.*

*E : Parce que eux, ils les ont directement pliés, nous, on a attendu que ça se tombe tout seul et ça marchait.*

*E : Moi, je ne pense pas que c'est possible.*

*E : Au bout d'un moment ça fait.*

*E : Si, c'est possible.*

*M : Moi j'ai envie de dire que ça, ça va être comme hier, il y en avait, ils arrivaient mais on n'arrivait pas tout à fait à fermer ce qui fait qu'on était obligés de les plier un peu les formes.*

*E : Parce que, après il y a une face de trop.*

*E : Non, non.*

*E : Si.*

*E : Il y a une face de trop.*

*E : Ça se pliait tout seul.*

*E : Ben nous, ça se pliait tout seul.*

*E : Moi, je pense avec cinq faces, c'est possible, mais je ne pense pas que c'est possible avec six, parce que il nous manque, nous quand on a essayé, on était obligés de mettre des triangles pour reboucher au milieu comme après c'était.*

*M : Pour reboucher...»*

### **« À la recherche des dés du sorcier », en UPI TSL**

La classe d'accueil que nous avons choisi pour cette deuxième étude relève d'un dispositif de l'enseignement spécialisé : une unité pédagogique d'intégration (UPI) d'un collège de la banlieue lyonnaise. Le collège est situé en réseau d'éducation prioritaire sur le plateau des Minguettes à Vénissieux (69) en zone dite « violence ».

Cette unité pour élèves présentant des troubles spécifiques du langage (UPI-TSL), en est à sa première année de fonctionnement. La structure est sous la responsabilité pédagogique d'une circonscription et d'un inspecteur de l'éducation nationale ASH (Adaptation et Scolarisation des élèves Handicapés) du premier degré. L'enseignante professeur des écoles est expérimentée, mais exerce dans ce contexte pour la première année.

#### **Les élèves de l'UPI**

La classe est constituée de dix élèves (neuf garçons et une fille), tous orientés par la commission départementale de l'éducation spéciale<sup>7</sup>, présentant des troubles spécifiques du langage (dyslexie, dysphasie, troubles associés).

Ces élèves sont par ailleurs intégrés dans deux classes de sixième et une de cinquième du même collège. Les temps d'intégration en cours de mathématiques sont divers selon les élèves (certains sont intégrés partiellement, d'autres complètement) et peuvent varier dans le courant de l'année en fonction des évolutions de chaque situation individuelle. L'effectif de la classe est le suivant : six élèves de 6<sup>ème</sup> et quatre élèves de 5<sup>ème</sup>.

#### **Raisons du choix du terrain**

Pour cette étude, nous souhaitons expérimenter la situation avec des élèves de collège présentant des difficultés et un handicap perturbant les apprentissages. Dans le dispositif UPI-TSL, la situation de handicap des élèves est relativement homogène même si

---

<sup>7</sup> Cette commission (CDES) a été renommée commission des droits et de l'autonomie (CDA) dans la loi de février 2005 pour la scolarisation des élèves en situation de handicap.

la reconnaissance de ces troubles spécifiques du langage est récente. De ce fait, nous sommes conscients que si la situation paraît bien innovante, elle reste également de nature expérimentale.

La deuxième raison de notre choix était liée à la pratique pédagogique de l'enseignante dans sa classe. Nous avons en effet la possibilité de nous appuyer sur une évaluation diagnostique et sur un très bon suivi des élèves, du fait de l'organisation du dispositif UPI par l'enseignante. Cette dernière était de plus impliquée dans un processus de formation continue sur les situations de recherche en mathématiques, elle était donc très engagée tant pédagogiquement que didactiquement. De plus, la classe bénéficiait d'un effectif permettant des enregistrements audio et vidéo<sup>8</sup> de bonne qualité.

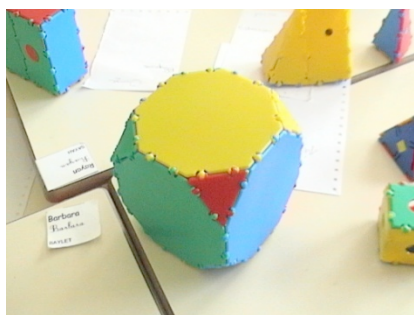
Enfin, le choix d'un terrain de l'enseignement spécialisé nous semblait garantir une expérimentation dans un contexte difficile en terme d'apprentissage et d'enseignement, les résultats en étant d'autant plus pertinents. Il était en effet important de tester ce contexte pour vérifier qu'il ne s'agissait pas seulement de dévoluer une situation faisant appel à du matériel de construction. Ce choix permet également d'observer en quoi la conduite de la classe s'en trouve modifiée et quels sont les éléments qui permettent à un enseignant de garder le contrôle nécessaire à la construction des connaissances dans une classe de l'enseignement spécialisé.

### Le dispositif de recueil des données

Les séances ont été filmées (grâce à une caméra numérique) et enregistrées en audio, soit 5 heures d'enregistrement et d'observation en tout dans l'UPI-TSL de Vénissieux.

La première séquence a été consacrée à quelques rappels de connaissance sur les polyèdres grâce à la manipulation d'un matériel, le but pour les élèves étant de réaliser le plus possible de solides fermés, de les décrire puis d'en proposer un classement argumenté. Cette séquence a notamment permis de revoir et de retravailler le vocabulaire de la géométrie dans l'espace au sein d'une situation problématique relativement ouverte. Ce fut aussi l'occasion d'amorcer la mise en mots de quelques notions clés en termes de relations, de propriétés et de classification.

Lors de la deuxième séquence, la situation de recherche a été proposée aux élèves sous la forme d'une énigme. Elle s'est déroulée en deux temps distincts, celui de la résolution de l'énigme par chaque groupe d'élèves, puis celui de la présentation et de la discussion des résultats. L'objectif principal de cette deuxième phase étant alors de stimuler l'activité langagière au titre de l'explication, du débat, de la validation, de l'argumentation et de la confrontation des procédures.



Dans l'organisation de la situation de recherche, tout comme lors de l'expérience avec les CM2, il est mis à la disposition des participants du matériel permettant de faire et défaire facilement des solides : polygones en plastique avec procédés d'articulation. Les figures proposées comprennent des triangles isocèles, rectangles ou équilatéraux, des rectangles, des losanges et des carrés, ainsi que des pentagones, des hexagones, des heptagones et des octogones réguliers. Sont également

---

<sup>8</sup> Avec accord préalable de tous les parents des élèves.

proposés règles, compas, ciseaux, équerre, etc. (ce même matériel sera utilisé pour toutes les mises en œuvre).

### Mise en scène du problème

Afin de tenir compte du contexte particulier de l'UPI (et notamment de l'âge des élèves), nous avons souhaité proposer une formulation particulière pour l'énoncé sans pour autant dénaturer le problème qui est dévolu. Même si l'habillage de la situation relève de caractéristiques différentes, il s'agit bien de provoquer la recherche de tous les polyèdres réguliers. Nous avons proposé le problème sous la forme d'une énigme, dont le texte écrit était inséré dans une enveloppe de grand format cachetée en référence au contexte des jeux de rôle. La consigne a donc été communiquée par écrit, sous une forme illustrée (au profit d'un meilleur enrôlement dans la tâche (Bruner, 1983)), empruntant le contexte des jeux de rôle, environnement que l'enseignante nous avait signalé comme partagé par quelques-uns de ses élèves.

*« Le maître du Donjon est un grand sorcier qui jette tout le temps des sorts. Pour cela, il utilise des objets mystérieux qui lui servent de dés. Mais personne ne sait combien il en cache. Une seule chose est sûre : les objets mystérieux sont tous des polyèdres réguliers\*. Pouvez-vous dire combien le maître du Donjon en possède ? Vous pouvez utiliser le matériel pour faire des essais de constructions.*

*\* Un polyèdre est un solide délimité par des faces planes. Un polyèdre régulier est un polyèdre convexe dont les faces sont des polygones réguliers deux à deux superposables tels que, à tous les sommets corresponde un même nombre de faces. »*

### Deux histoires pour un même scénario

Alors que les environnements didactiques comportaient des caractéristiques très différentes, nous avons observé de nombreuses similitudes dans le déroulement de la résolution du problème. Sans revenir sur les éléments d'analyse a priori décrits auparavant, notons tout d'abord que la mise en œuvre d'une démarche expérimentale nous a semblé indéniable dans les deux expérimentations que nous venons de présenter. Nous analyserons cet aspect dans la dernière partie de cet article, mais notons d'ores et déjà la proximité de cette démarche avec celle qui est décrite par la démarche d'investigation en sciences. Les mathématiques y sont apparues comme pouvant fournir des outils adaptés pour modéliser des phénomènes et anticiper des résultats, en permettant l'expression et le développement de nombreux éléments de connaissance.

Dans les deux expériences citées, les obstacles anticipés dans l'analyse a priori se sont avérés déterminants, à la fois dans la problématisation de la tâche et dans l'antagonisme du milieu. Ainsi, les élèves se sont-ils investis facilement dans la recherche puisqu'elle leur proposait une tâche finalisée ayant la résistance nécessaire à la constitution du sens : c'est parce que le problème en est vraiment un que les élèves ont envie de le résoudre. Le rôle du matériel à disposition qui peut apparaître comme un allié dans le milieu s'avère finalement source de questionnements. Les pièces plastiques permettent de modéliser et d'expérimenter mais c'est de leur utilisation que naissent de nouvelles questions : quel rapport peut-on faire entre la théorie et le monde sensible, entre ce qui nous est familier et ce qui apparaît comme nouveau ?

Au sein de l'UPI, la situation s'est terminée par la résolution complète de l'énigme, ce qui n'a pas été le cas dans l'expérimentation en classe de CM2 puisque l'un des polyèdres

(l'icosaèdre) n'a pas été construit par les élèves. Mais, même si quatre solides ont été évoqués au lieu de cinq, on peut affirmer que les adaptations des élèves aux difficultés rencontrées dans le problème ont permis la confrontation à des objets de savoirs et à la construction de connaissances. La présentation des enjeux de savoirs lors de la séance qui a précédé la recherche à proprement parler, nous semble déterminante dans les deux cas. Ce moment de l'apprentissage a permis un réel travail sur la définition mathématique d'un polyèdre et installé les liens nécessaires entre l'objet et ses propriétés. C'est le travail explicite sur ces savoirs qui semble donner la possibilité aux élèves de mettre en œuvre des théories en acte dans les phases expérimentales ultérieures.

## **Robustesse et invariance**

Ces deux expérimentations décrites nous permettent de formuler quelques pistes de réflexion sur les invariants didactiques et pédagogiques rencontrés. Elles concernent l'ensemble du système didactique : l'enseignant, le milieu de la situation et les apprentissages des élèves. Les données proviennent des enregistrements effectués lors des séances de travail, des affiches produites lors des mises en commun de travaux, et des notes prises pendant les situations de recherche. La synthèse de nos observations nous paraît conforme aux hypothèses que nous faisons concernant la démarche expérimentale intrinsèque à la résolution de problèmes en mathématiques.

Nous souscrivons donc au canevas<sup>9</sup> d'une séance d'investigation telle qu'elle est proposée dans le document d'application de l'enseignement scientifique au collège. Nous souhaitons suivre ici les sept moments clés qui sont repérés afin de mettre en évidence la robustesse de la dimension expérimentale des mathématiques dans la situation des polyèdres.

## **Le choix d'une situation<sup>10</sup> par le professeur**

Mettre en œuvre une situation d'apprentissage dans le domaine scientifique nécessite le travail habituel de préparation pour le professeur : analyse des savoirs visés, détermination des objectifs à atteindre, repérage des acquis initiaux des élèves et éventuellement identification des conceptions ou des représentations des élèves. Nous avons constaté que ce moment préparatoire pouvait être enrichi par la connaissance a priori d'éléments de l'histoire et de l'épistémologie des savoirs qui sont les enjeux de la situation. Cette connaissance permet à l'enseignant d'une part de s'assurer de la consistance des questions qu'il souhaite traiter, d'autre part d'opérer les choix pertinents dans l'analyse a priori de la situation et dans l'étude de sa conception. Lors de la mise en œuvre devant des élèves ou des adultes en formation, cela permet aussi d'adapter ses interventions éventuelles pendant les phases de recherche autonomes.

À travers un scénario de formation (présenté rapidement en conclusion) que nous avons proposé avec la situation des polyèdres, nous avons pu mettre à l'épreuve ce dispositif d'enseignement/apprentissage. Ainsi, la confrontation de nos hypothèses à la réalité de la classe nous a permis d'observer des enseignants exerçant à la fois avec sérénité et avec à-propos notamment dans la gestion des échanges langagiers : aide à la reformulation

---

<sup>9</sup> Sept moments clés sont dégagés dans le canevas proposé, nous les reprendrons ici dans l'ordre de leur présentation.

<sup>10</sup> Le document utilise la formulation « situation-problème », terminologie que nous ne reprendrons pas ici, lui préférant celle de « situation », en référence à la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998).

des questions pour un travail sémantique, accompagnement progressif des changements de conceptions par le recours systématique au questionnement, etc.

### **L'appropriation du problème par les élèves**

Le cadre de la géométrie nous semble avoir été déterminant pour la phase de dévolution du problème. Dans le cadre des formations que nous conduisons depuis de nombreuses années, nous avons observé que la géométrie représente un domaine des mathématiques sous investi par les enseignants. Ces derniers citent souvent le manque de formation professionnelle sur la question, mais il est aussi fait référence à des objets de savoirs relativement indéterminés ou trop ancrés dans le formel (pas assez dans l'expérimental). Cependant, ces enseignants constatent que la géométrie est un domaine très prisé des élèves. On cite par exemple le succès des situations de communication, de l'utilisation des logiciels de géométrie, des constructions dans le plan et dans l'espace (du fait de leur prise sur le sensible). Les liens inter-disciplinaires servent d'argument par exemple avec les disciplines artistiques (place de la création, du « beau », d'un espace de liberté ou moins contraignant).

Il semble donc que l'ancrage culturel des polyèdres réguliers ne soit pas étranger à la réussite de la dévolution du problème aux élèves. Cependant, cet aspect n'a qu'un impact relatif dans l'appropriation par les élèves ; c'est ensuite la formulation énigmatique de l'énoncé qui assure le maintien dans l'activité de recherche. Nous pouvons remarquer que la dévolution est facilitée par les différentes mises en scène pédagogiques auxquelles se prête cette situation.

Pour terminer, nous pensons que la dévolution réussie de la recherche des solides de Platon tient également au fait qu'elle possède deux des caractéristiques d'un problème ouvert (Arsac & Mante, 2007). L'énoncé du problème semble accessible du fait de sa simplicité apparente a priori : déterminer tous les polyèdres réguliers. Ce type d'énoncé permet l'engagement dans le problème même dans des contextes d'apprentissage difficiles comme nous avons pu l'observer. Ceci parce que la consigne invite à chercher des représentants effectifs, avant de s'interroger sur le fait qu'on les a tous trouvés ou non. Le premier travail consiste en effet à construire des objets qui répondent à la définition (Durand-Guerrier & Heraud, 2007). La deuxième caractéristique partagée avec les problèmes ouverts est celle de la proximité des objets en jeu dans la situation avec les connaissances des élèves. En effet, comme on a pu le constater avec des élèves ou avec des adultes en formation, plusieurs des solides qui sont solution du problème sont connus (en particulier le cube qui a été cité à chacune de nos interventions). Cela contribue à donner au problème une apparente facilité puisque l'on peut y répondre au moins partiellement très rapidement. C'est une caractéristique qui permet à tous les participants d'avoir prise sur la résolution, et ce quel que soit leur niveau de connaissance. C'est un paramètre déterminant dans l'enseignement spécialisé où les enseignants éprouvent souvent des difficultés dans ce domaine.

### **La formulation de conjectures, d'hypothèses explicatives, de protocoles possibles**

Dans la recherche des solides de Platon, le milieu constitué pour la situation est consistant et antagoniste, ce qui est déterminant pour la formulation des conjectures. Sa consistance réside dans les éléments qui le constituent : le milieu matériel (matériel mis à disposition, mise en scène de la situation), les connaissances en jeu, et la préparation didactique du

professeur. Ces paramètres permettent aux élèves de dépasser la phase d'entrée dans la situation (questionnement initial, émergence des conceptions ou représentations) et de formuler des hypothèses, notamment grâce au matériel mis à leur disposition, le milieu matériel contribuant ainsi au milieu objectif de la situation. C'est en effet, en élaborant des modélisations (construction de solides en plastique) des objets théoriques (les polyèdres définis dans un registre langagier selon des règles) que l'on assiste à l'élaboration progressive de protocoles expérimentaux. Il est difficile de distinguer dans ces phases ce qui relève d'une expérimentation visant à tester une conjecture ou une hypothèse de celle qui relève plutôt d'une vérification ; ce sont des allers et retours répétés entre objets familiers et objets nouveaux qui caractérisent ces moments d'apprentissage.

Bien que la démarche expérimentale en mathématiques partage quelques traits communs avec la démarche d'investigation scientifique en sciences expérimentales, il ressort de nos observations, que ces protocoles expérimentaux divergent des standards des sciences dites expérimentales comme la physique ou la biologie pour lesquelles on tente de distinguer les types d'expériences (Coquidé, 2003). En mathématiques, il nous semble raisonnable de parler d'une dialectique expérimentale pour caractériser ces phases de conjectures dans une situation de recherche. Il s'agit d'un dialogue entre les objets mathématiques théoriques et leurs représentants construits dans le monde sensible.

L'antagonisme du milieu tient essentiellement dans les rétroactions fournies par les actions et manipulations des apprenants en cours de résolution. C'est en effectuant certaines tentatives de construction que les élèves (ou les adultes) se confrontent à certains obstacles.

Ainsi, le matériel qui semblait a priori une aide certaine à la résolution du problème, devient-il peu à peu la source de nouveaux questionnements. Nous avons pu l'observer de façon systématique lors de l'assemblage des hexagones par exemple : la construction réelle s'oppose à la théorie, ceci engageant chez les adultes un débat sur les domaines de validité des théories même en mathématiques.



## **La résolution du problème conduite par les élèves**

Concernant les dispositifs de travail en classe, nous avons observé une très forte propension à conduire des travaux de groupes, dispositif habituellement peu mis en œuvre, notamment dans l'enseignement spécialisé, du fait des incertitudes en termes de conduite de classe qu'il peut augurer. L'une des inquiétudes souvent exprimées par les professeurs concerne en effet la durée des séquences qu'ils sont à même de proposer à leurs élèves. Ils les jugent souvent peu enclins à des temps de travail et de concentration importants, ce qui se révèle très différent et inattendu dans le cadre de la résolution des problèmes de recherche. On peut faire l'hypothèse que le fait « de rechercher à plusieurs » est un facteur limitant l'exposition individuelle à l'échec, phénomène dont on sait qu'il peut provoquer une grande souffrance dans le contexte de l'enseignement spécialisé. Le rapport à l'erreur s'en trouve en quelque sorte partagé et donc moins redoutable à envisager. La grande variabilité des connaissances et des savoirs de chacun semble ainsi un facteur positif non discriminatoire, ce qui n'est pas habituel dans des classes comme les SEGPA par exemple.

Lors de nos expérimentations de la situation des polyèdres, nous avons systématiquement assisté à des moments de débat interne aux groupes, mais aussi à des tentatives de description et réalisation de l'expérience sous forme de schémas (avec les adultes). Il s'agissait toujours d'explicitier des choix de méthodes, d'interprétation de résultats provisoires souvent préparatoires à la phase ultime de mise en commun.

En situation d'enseignement, le rôle de l'enseignant est considérablement modifié lors de la mise en œuvre d'une recherche comme celle des polyèdres. Sa principale fonction est celle de l'étayage raisonné pour la réussite des différents moments de la séance :

- Mise en scène et enrichissement du milieu matériel pour la réussite de la dévolution ;
- Accompagnement des travaux de groupe par des interventions localisées et adaptées aux difficultés rencontrées et aux conceptions des « chercheurs » ;
- Aide à la formulation ou à la reformulation langagière ;
- Maintien dans l'activité scientifique en garantissant ses codes : respect de la contradiction, souci de la validation, recherche de la preuve, formulation orientée vers le questionnement.

C'est donc un nouveau type de contrat qui est à l'œuvre dans la classe du fait de ce changement de posture. Un contrat qui ne tient plus dans une transmission unilatérale d'un savoir et qui permet une libre expression expérimentale nécessaire dans la construction des connaissances du domaine scientifique.

## **L'échange argumenté autour des propositions élaborées**

Les relations et interactions (élèves-élèves et élèves-professeur) pendant les phases de recherche et de mise en commun sont très différentes de celles qui sont vécues dans le quotidien ordinaire d'une classe. En se référant une nouvelle fois au contexte de l'enseignement spécialisé, la question des interactions entre les élèves est un point très sensible et souvent déterminant dans la conduite de situations d'apprentissage : de bonnes relations inter-individuelles sont nécessaires (mais non suffisantes) au processus d'acquisition des savoirs. Nous faisons l'hypothèse que c'est la présence permanente et explicite des objets mathématiques dans les discours des élèves qui sont une des causes de l'amélioration des relations.



« *Lorsqu'ils savent de quoi ils parlent, que l'enjeu du débat est partagé par tous, les débats ne dérapent jamais* » nous disait un enseignant à propos des situations de recherche.

Le dispositif de travail qui demande aux apprenants de se mettre d'accord sur une réponse assumée collectivement, provoque également un autre rapport à la tâche et par là même une relation différente au savoir. Ce dernier apparaît bien aux différents acteurs en co-construction, ce qui peut permettre de mettre provisoirement de côté les tensions et les conflits de personnes (sur le long terme, bien entendu).

L'autre élément significatif de la robustesse de la situation de recherche est celui de la qualité des débats enregistrés ; on peut parler d'une véritable communication sur les solutions élaborées, sur les réponses apportées, les résultats obtenus, et sur les interrogations qui demeurent. Ainsi peut-on caractériser le débat scientifique comme un temps de confrontation des propositions, un débat autour de leur validité, une recherche d'arguments. Il apparaît alors qu'en mathématiques aussi, cet échange peut se terminer par le constat qu'il existe plusieurs voies pour parvenir à un résultat attendu. Il est également mis en évidence dans les phases de mise en commun que l'élaboration collective de preuves est nécessaire à la validation des résultats proposés.

*M2 : Alors on peut prendre des questions maintenant, posez-les ... posez-la qu'on les voit bien, les garder, les garder pas dans la main.*

*E2 : Chazal ?*

*E3 : J'lève pas le doigt.*

*Z : Le ballon c'est pas un régulier parce que...y rentre pas dans une sphère on le met dans un...*

*E1 : Ben si, ben si il est régulier.*

*E2 : Il a les mêmes angles.*

*E1 : Ouais.*

*Z : Non... Si il a les mêmes angles mais eh... il est pas, eh, il est, y peut pas rentré dans un cercle.*

*E2 : Y peut pas rentrer dans un cercle ???*

*Z : Dans un, dans un sphère.*

*M1 : Alors, est-ce qu'y pourrait tenir... en fait c'était un cercle, c'était quoi qu'on veut dire une ?*

*E : Planisphère.*

*E : Sphère.*

*M1 : Une sphère, une sphère, est-ce que si on le mettait dans une sphère, on avait qu'en fait...*

*Z : En fait, y fallait que eh... y fallait qu'ça touche les... eh...*

*M1 : Donc tous les ? S... ?*

*Z : Sommets.*

*M1 : ... touchaient ?*

*Z : Par le sphère ?*

*M1 : La sphère. Vous pensez que ça pourrait ... même le cas ?*

*E2 : Ben ouais.*

*E : Non.*

*E2 : Si.*

*M1 : Chami pense que oui.*

*E2 : Partout ça touche partout hein, ben ouais.*

*M1 : Mais sinon, est-ce qu'il répond pas aux conditions... c'est difficile à voir ça mais, est-ce qu'il répond aux conditions ... qui étaient données pour que ce soit un polyèdre régulier ?*

*E : Oui.*

*E1 : T'as tous les mêmes longueurs, les, tout les angles, c'est bon, c'est pareil ?*

*M1 : T'es d'accord là-dessus, Zied.*

*E1 : Pareil. »*

### **L'acquisition et la structuration des connaissances**

Nous pensons que la mise en œuvre de cette situation de recherche des polyèdres permet l'acquisition de connaissances, et ce quels que soient le niveau d'apprentissage et le contexte d'enseignement ou de formation. Ces acquisitions sont de trois ordres principalement :

- Une mise en évidence (avec l'aide de l'enseignant en situation de classe) de nouveaux éléments de savoir utilisés lors de la résolution. Il peut s'agir d'une notion comme la découverte en acte d'un axiome (il faut au moins trois faces pour constituer un angle polyèdre), de l'apprentissage d'une technique (les polyèdres sont constitués de faces assemblées par leurs arêtes), ou d'une acquisition méthodologique (apprendre à stabiliser ses certitudes et à expérimenter sur ses doutes).
- Le développement de compétences langagières en lien avec la nécessité d'une formulation argumentée notamment lors de la mise en commun, mais aussi pendant les phases d'expérimentation. Chaque mise en mots de l'action, chaque proposition (sous la forme d'une conjecture ou non) est exposée à la critique du groupe. Ceci nécessite à la fois une écoute active et une prise de parole au moins explicite, voire argumentative. Dans le contexte de la classe, et plus particulièrement dans l'enseignement spécialisé, le rôle de l'enseignant est crucial dans l'étayage à cette mise en mots.
- La culture d'une attitude scientifique dans une perspective de construction des connaissances par le respect de ses codes tels que la recherche des causes d'un éventuel désaccord, l'analyse critique des expériences faites et la proposition d'expériences complémentaires, la recherche des éléments de preuve et/ou de validation, la production de traces écrites de l'activité en vue de la stabilisation des connaissances.

L'une des caractéristiques de la dimension expérimentale des mathématiques consiste en un travail spécifique sur la validation. Il est en effet connu et admis que la singularité d'une

expérience n'est pas un élément suffisant pour accéder à la généralité d'une preuve en mathématiques. Dans la démarche d'investigation appliquée aux mathématiques, nous recherchons donc essentiellement des phases de validation à l'issue des travaux d'expérimentation. Ce moment clé dans la construction des connaissances scientifiques nécessite un étayage du professeur qui doit engager la confrontation avec le savoir établi (comme autre forme de recours à la recherche documentaire, recours au manuel), en respectant des niveaux de formulation accessibles aux élèves, donc inspirés des productions auxquelles les groupes sont parvenus. Il doit veiller à organiser les liens entre les protocoles expérimentaux (constructions, modélisations, schématisations) et les objets théoriques qui leur sont sous-jacents afin de conduire progressivement et éventuellement à une reformulation écrite par les élèves, avec l'aide du professeur, des connaissances nouvelles acquises en fin de séquence.

Nous pensons que notre scénario d'enseignement pour la recherche des polyèdres garantit l'accès à cette phase de validation. Nous avons en effet observé dans toutes nos interventions des moments consacrés à la validation des propositions émises lors des phases exploratoires. À chaque fois, il a été proposé d'en établir des traces écrites (collectives et/ou individuelles) afin de stabiliser les connaissances acquises.

### **L'opérationnalisation des connaissances**

La situation des polyèdres décrite dans cet article peut donner lieu à de nombreux prolongements permettant de réinvestir certaines procédures, de maîtriser les formes d'expression liées aux connaissances travaillées : formes langagières ou symboliques, représentations graphiques, liens. On peut également envisager d'investir d'autres champs des mathématiques afin de tester le réinvestissement dans de nouveaux problèmes. C'est ce que nous essayons de conduire dans un projet en cours sur la mise en place de laboratoires de mathématiques au sein de dispositifs ou classes de l'enseignement spécialisé. Ce nouveau terrain ayant pour cadre un rallye mathématique produit déjà quelques éléments d'évaluation des connaissances et des compétences méthodologiques tout à fait prometteurs (Dias, 2006).

### **Conclusion et perspectives en formation**

La situation d'apprentissage géométrique consistant en la recherche des polyèdres réguliers nous semble particulièrement appropriée à montrer que l'intégration de la dimension expérimentale des mathématiques permet la construction des connaissances. Nous avons souhaité montrer en quoi les objets mathématiques en jeu dans cette situation ont des références culturelles et épistémologiques fortes, ce qui permet à la fois une dévolution facilitée du problème, et qui garantit aussi une riche phase de validation lors des échanges mis en œuvre dans la mise en commun.

Nous souhaitons également montrer que la dimension expérimentale en mathématiques se traduit par les allers et retours entre l'objet sensible et l'objet géométrique comme on l'a vu dans les différentes expérimentations en classe. On voit comment les propriétés d'un objet géométrique peuvent rencontrer un réel résistant qui, grâce à son statut problématique renforce l'utilisation d'arguments théoriques pour enclencher le processus de validation.

Les contextes que nous avons choisis pour expérimenter cette situation, enseignement ordinaire, enseignement spécialisé, ont permis de dégager quelques invariants que nous pouvons associer aux étapes de la démarche scientifique d'investigation. Nous pensons que

la mise en œuvre de cette démarche en mathématiques les rapproche une fois encore des disciplines dites « sciences expérimentales » comme nous l'avons déjà envisagé dans de précédents écrits (Dias & Durand Guerrier, 2005).

Forts de plusieurs expériences conduites en classe avec la situation des polyèdres (dont seulement deux sont rapportées dans cet article), nous avons émis l'hypothèse que d'autres contextes d'observation pourraient être utiles dans notre recherche. Nous souhaitons notamment interroger d'autres terrains de l'institution scolaire, afin de mettre à l'épreuve la robustesse de la situation à plusieurs niveaux. Ainsi avons-nous mis en place la recherche des solides de Platon dans plusieurs contextes de formation : en formation initiale des enseignants spécialisés (CAPA-SH), en formation continue des enseignants spécialisés (circonscription ASH), et en formation académique de formateurs.

En formation continue, avec des enseignants spécialisés, les principaux éléments en jeu dans la situation ont été repérés et explicités, ce qui a conduit les participants à s'interroger sur les modalités de l'enseignement de la géométrie à l'école et plus particulièrement sur les possibilités ouvertes par la prise en compte de la dimension expérimentale en mathématiques pour penser les rapports entre l'espace et le plan. Le débat conclusif de cette séance a porté essentiellement sur la question de l'expérimentation en géométrie conformément à l'objectif de la séance. Il a été évoqué la question du matériel et de la qualification de son rôle dans le milieu. L'aide qu'il semble apporter a priori, du fait de la difficulté du dessin dans le champ de la géométrie dans l'espace, se révèle assez vite la source du questionnement pour les apprenants (adultes et tous formateurs dans le cas présent). C'est le matériel qui s'impose peu à peu comme l'antagonisme du milieu en fournissant des rétroactions fortes sous la forme de contraintes comme par exemple :

- Assemblages impossibles : côtés de polygones non isométriques, solides non convexes ;
- Constructions limites : assemblage d'hexagones et courbure relative, solide à deux faces.

En formation de formateurs, la motivation de notre proposition s'inscrivait plutôt dans la problématique du rapport aux objets scientifiques. Nous pensons en effet que la confrontation aux objets mathématiques est particulièrement difficile à l'école élémentaire et notamment dans le champ de l'enseignement spécialisé. Dans ce contexte professionnel, le conseil pédagogique et l'analyse des difficultés d'apprentissage sont rendus encore plus délicats. Un détour épistémologique et didactique sur la notion d'expérience en mathématique a été proposé en vue d'apporter quelques éléments de déblocage de certaines situations grâce à la problématisation des difficultés. Au cours du débat, la notion d'expérimentation a été bien différenciée de celle de manipulation, puisque les actions conduites au cours des phases exploratoires avec les objets sensibles étaient des tentatives de validation ou vérification de conjectures ou hypothèses émises. C'est la simultanéité des actions et des formulations qui donnent parfois un caractère aléatoire à la démarche de recherche parfois qualifiée de « tâtonnement » par certains stagiaires.

En conclusion, nous souhaitons insister sur les deux objectifs principaux que nous poursuivons en formation grâce à cette situation. Il s'agit prioritairement de mettre en évidence la place de l'expérience dans la construction des connaissances en mathématiques par analogie avec les autres sciences expérimentales. De plus, nous souhaitons également

étudier des situations permettant de restaurer la motivation de la recherche en mathématiques pour des élèves dits « en difficulté d'apprentissage ».

## Bibliographie

- ARSAC G., MANTE M. (2007) *Les pratiques du problème ouvert*. CRDP de l'Académie de Lyon.
- BROUSSEAU G. (1990) Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble, La Pensée Sauvage, Vol. 9.3, pp. 309-336.
- BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble, La Pensée Sauvage Éditions.
- BRUNER J.-S. (1983) Le rôle des interactions de tutelle dans la résolution de problèmes, in *Le développement de l'enfant savoir faire savoir dire*. Paris, PUF, pp. 261-280.
- COQUIDE M. (2003) *Le rapport expérimental au vivant*. Actes du séminaire de travail du PREMST, IUFM de Lyon.
- DIAS T. (2004) *Le recours à l'expérience dans la construction des connaissances mathématiques*, mémoire de DEA, Université Lyon 1.
- DIAS T. (2007) *Expérimentation en Mathématiques dans le contexte de l'enseignement spécialisé. Étude des apports d'un dispositif de type "rallye" mathématiques*. Actes du colloque de la COPIRELEM, Troyes.
- DIAS T., DURAND-GUERRIER V. (2005) Expérimenter pour apprendre. *Repères IREM*, n°60, pp. 61-78.
- DURAND-GUERRIER V. (2006) *Les enjeux épistémologiques et didactiques de la prise en compte de la dimension expérimentale en mathématiques à l'école élémentaire*. Actes du colloque de la COPIRELEM, Dourdan.
- DURAND-GUERRIER V., HERAUD J.-L. (2007) Définition et règle, le mythe de la transparence en géométrie. *Interactions verbales, didactiques et apprentissages*. Presses Universitaires de Franche-Comté.
- MATHÉ A.-C. (2004) *Analyse d'une situation d'argumentation en géométrie des solides en classe de CM1-CM2*. Grand N n°74, pp. 33-50.
- MEN (2007) Introduction commune à l'ensemble des disciplines scientifiques. *B.O.* hors série N°6 - volume 2 du 19 avril 2007.
- SALIN M.-H. (2002) *Repères sur l'évolution du concept de milieu en théorie des situations*. Actes de la XI<sup>ème</sup> École d'Été de Didactique des Mathématiques. La Pensée Sauvage Éditions.