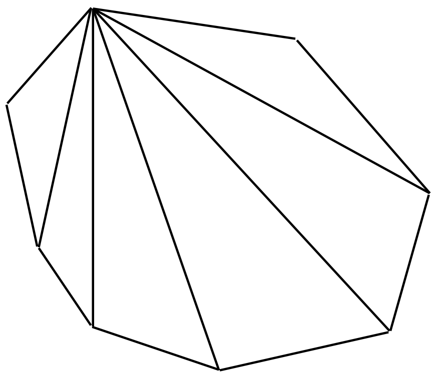
# ACTIVITÉ … OCTOGONES EMBOÎTÉS

Denise GRENIER
Institut Fourier et IREM de Grenoble

Nous proposons cette activité dans un enchaînement progressif de questions qui peuvent être adaptées aux niveaux de connaissance des élèves. Le but est de construire à l'intérieur d'un octogone régulier donné, un octogone régulier plus petit ayant une propriété particulière dont nous expliquons l'intérêt à la fin de ce texte. Cette activité est aussi une occasion d'explorer quelques sous-figures et alignements de points propres aux octogones réguliers.

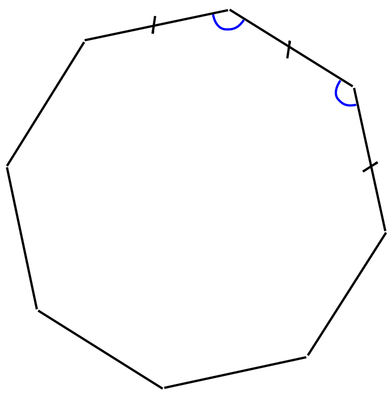
1. Préalable. Voici une partition en triangles d'un octogone non régulier mais convexe, faite à partir d'un de ses sommets.

**Combien y-a-t-il de triangles ?**
**Le nombre de triangles de la partition dépend-il du sommet choisi ?**
**Comment peut-on en déduire la somme de tous les angles aux sommets ?**



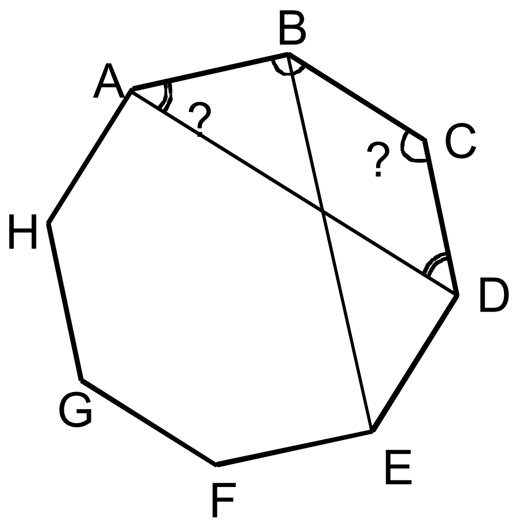
2. Un octogone est dit ***régulier*** si tous ses angles aux sommets sont égaux et tous ses côtés ont même longueur.

**Combien mesure l'angle en chacun des sommets ? Justifiez.**

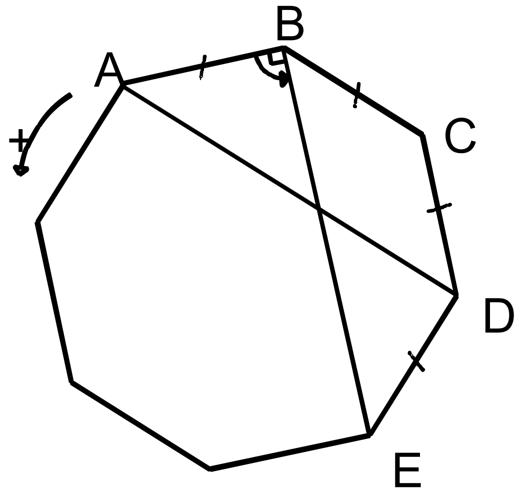


3. On considère un octogone régulier O de sommets A, B, C, D, E, F, G, H, les sommets étant numérotés dans le sens des aiguilles d'une montre (illustré ci-dessous).

**Vérifiez que ABCD est un trapèze isocèle et calculez ses angles.**
Puisque l'octogone est régulier, BCDE est aussi un trapèze isocèle, de mêmes mesures que ABCD. Et de même pour BCDE, CDEF, etc. (on peut ainsi repérer huit trapèzes isocèles égaux).

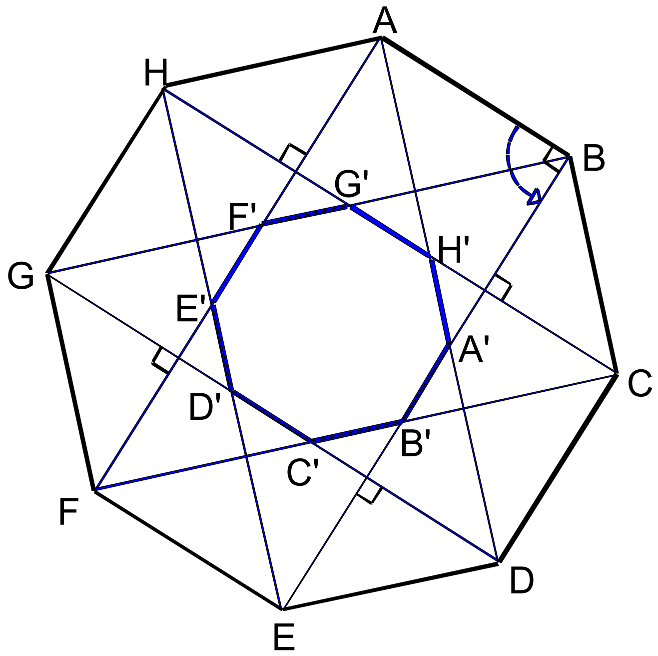



4. **A partir de l'octogone O, on va construire une autre figure de la manière suivante.**
• On oriente le plan dans le sens trigonométrique (contraire à celui donné par l'ordre alphabétique des sommets).
• On prend deux sommets adjacents, commençons par exemple par A et B. On construit A' tel que BA'=BA et ABA'= $+\pi/2$ (autrement dit, A' est l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\pi/2$, dans le sens trigonométrique).




***Remarque (importante).*** *A' est à l'intérieur de l'octogone O, car*
*- d'une part, l'angle ABA' est strictement plus petit que l'angle ABC*
*- d'autre part, BA' se trouve sur le segment AE, et BA'=BA donc BA' < BE (la corde BE de l'octogone est plus grande que le côté).*

**• On reproduit la même construction avec tous les couples de sommets.**
On obtient le point B' image de B par la rotation de centre C et d'angle + $\pi/2$, qui amène B en un point B' à l'intérieur de O. Et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on tombe sur les sommets H et A. On obtient H' par la rotation de centre A et d'angle + $\pi/2$.




On obtient donc à l'intérieur de l'octogone O un octogone A'B'C'D'E'F'G'H', appelons-le O'. O' a été construit en appliquant le même type de transformation en chacun des sommets de O. En conséquence, puisque O est régulier, **O' est régulier** : tous ses angles aux sommets sont égaux à $3\pi/4$ et tous ses côtés sont de même longueur. On peut s'en convaincre mieux (si nécessaire) par les calculs des angles et des longueurs des côtés.

*Remarque. Si on pose AB=l, alors dans le triangle rectangle ABA', Pythagore donne AA'=l√2. Et donc les côtés de O' ont tous pour longueur l (√2-1).*

## Pour quoi et pour qui cette activité est-elle intéressante ?

Il existe bien sûr de nombreuses autres constructions qui donnent un octogone régulier à partir d'un octogone donné. Celui construit ici vérifie la propriété suivante :

> **« Si dans un repère orthogonal donné, les coodonnées de A et B sont entières, alors les coordonnées de A' et B' sont elles aussi entières. »**

Il se trouve que cette propriété est centrale pour résoudre la question suivante :

> ***« Existe-t-il des octogones réguliers dont on peut mettre tous les sommets sur les mailles d'une grille carrée régulière ? ».***

Nous vous laissons réfléchir à cette dernière question ....