UNE CARACTÉRISATION NON USUELLE DES TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES DU PLAN POUR UNE FORMATION D'ENSEIGNANTS[1]

Mamadou Souleymane SANGARÉ
École Normale Supérieure de Bamako (Mali)

Résumé. Cet article décrit une situation expérimentale de formation d'élèves-professeurs de mathématiques du lycée au Mali, dont un des objectifs est de travailler les rapports entre *savoir académique* et *savoir scolaire.* Nos analyses après trois ans d'expérimentation montrent que ces futurs professeurs ont du mal à prendre en compte les interactions entre savoir académique et savoir scolaire dans l'accomplissement de certaines tâches professionnelles, en particulier celles liées à l'analyse didactique de problèmes scolaires de géométrie plane au lycée. Nous tentons alors de remédier à cette difficulté en proposant un contenu de formation qui s'appuie sur une caractérisation non usuelle des transformations géométriques du plan : les marques d'une transformation géométrique du plan.

Mots clés. Savoir académique, savoir scolaire, « marques » d'une transformation du plan, formation d'enseignants.

Introduction

La formation mathématique des élèves-professeurs à l'École Normale Supérieure de Bamako est orientée depuis l'année 2005, vers la recherche permanente d'une meilleure articulation entre *mathématiques académiques* c'est à dire les mathématiques enseignées à l'université, et *mathématiques scolaires*. Cet objectif se traduit, pour la filière « Formation des Professeurs d'Enseignement Secondaire » (PES), par la construction et la mise en œuvre d'un certain nombre de cours nouveaux intégrant des aspects didactiques et des aspects liés aux pratiques de classe en géométrie.
Notre article porte sur le cours intitulé « Enseignement de la Géométrie au Lycée » mis en place à la rentrée 2005-2006. Le vécu de ces trois premières années nous a permis de faire un premier état des lieux sur les effets de cette expérience de formation, en particulier sur la prise en compte par les futurs enseignants des différences entre *savoir universitaire* et *savoir scolaire*. Ce vécu a été fortement marqué par un triple défi auquel l'équipe de formateurs a dû faire face constamment, qui pourrait s'énoncer comme suit : permettre aux élèves professeurs de combler l'essentiel de leurs lacunes sur la géométrie du lycée, concevoir des situations pertinentes de formation d'enseignants sur ce domaine, et permettre à ces futurs enseignants de prendre de la hauteur sur cette géométrie du lycée en reliant celle-ci à la géométrie universitaire, tout cela dans un volume horaire de 60 heures.

1 Cette expérience de formation a fait l'objet d'une communication lors du colloque EMF de Dakar en 2009.

I. Contexte de l'expérience

I.1 La formation d'enseignants à l'École Normale Supérieure de Bamako

L'ouverture de l'université de Bamako en 1996 a entraîné un changement dans les missions de l'École Normale Supérieure de Bamako. Deux filières de formation d'enseignants sont ouvertes actuellement.
Une filière *Formation des Professeurs d'Enseignement Secondaire* (PES)[2] sur deux ans. Le recrutement s'effectue sur concours direct avec un niveau minimal fixé à la licence. La première année est consacrée à des compléments disciplinaires et à la didactique des mathématiques; la seconde année est réservée au stage pratique dans un lycée et à la préparation d'un mémoire professionnel.
Une filière *Formation des Professeurs d'Enseignement Fondamental* (PEF)[3]sur quatre ans. Le recrutement s'effectue sur concours professionnel avec comme niveau minimal le grade de maître principal (à peu près le niveau Baccalauréat). Les deux premières années sont consacrées à des compléments disciplinaires correspondant au niveau du *DEUG*. La troisième année est réservée aux enseignements liés à la pédagogie et à la didactique. La quatrième année comprend un stage pratique avec un volet administratif et un volet pédagogique, qui est effectué en lien étroit avec la préparation d'un rapport de stage.

I.2 Bref aperçu sur le module « Enseignement de la géométrie au lycée »

I.2.1 Objectifs de la formation

Deux principaux objectifs sont assignés à ce module.
- Donner aux élèves-professeurs des connaissances théoriques et des outils méthodologiques qui leur permettent de maîtriser de façon satisfaisante les éléments de géométrie du lycée[4].
- Permettre aux élèves-professeurs de construire et de réaliser en classe des séquences d'enseignement de la géométrie qui respectent l'esprit des programmes du lycée au Mali.

I.2.2 Contenu de la formation

Le contenu est modulable suivant l'état de connaissances des élèves-professeurs à l'entrée en première année P.E.S ou encore selon les recommandations faites en conseil pédagogique en fin d'année. Néanmoins, les éléments de contenus ci-dessous ont été retenus durant ces trois premières années d'application.

Étude des figures de base du plan et de l'espace. Il s'agit de faire le point sur les figures de base du plan et de l'espace au programme du lycée.

Constructions Géométriques. Ce thème est assez ouvert. Son but essentiel est de faire que l'usage des instruments soit effectif dans les pratiques enseignantes des élèves-

2 Au Mali, le Professeur d'Enseignement Secondaire enseigne au lycée.
3 Le Professeur d'Enseignement Fondamental enseigne au Second Cycle Fondamental (équivalent du collège en France).
4 Les contenus des programmes de géométrie du lycée au Mali sont globalement proches de ceux de la France.

professeurs, lorsque les activités géométriques proposées aux élèves s'y prêtent. Pour cela, il est nécessaire que les élèves-professeurs le pratiquent eux-mêmes.

Étude des transformations du plan et de l'espace. Il s'agit de faire un inventaire des applications affines d'un espace affine quelconque de dimension au plus égal à 3. Il est suivi de l'étude des applications affines d'un espace affine euclidien. L'accent est mis sur l'étude des applications affines figurant aux programmes des classes de lycée.
L'enseignement de ce module commence en principe chaque année, après une avancée significative du complément de cours de mathématiques intitulé *Algèbre linéaire et Géométrie Affine de la Droite du Plan et de l'Espace*. Sa mise en œuvre pratique est menée en tenant compte de certains outils théoriques de la didactique des mathématiques supposés acquis. Il s'agit en particulier de :
- l'usage des concepts de jeux de cadres et dialectique outil-objet (Douady, 1996) en algèbre et géométrie ;
- l'usage des concepts de traitement dans un registre et de conversion entre différents registres (Duval, 2005) en géométrie.

I.3 Les pratiques de classe au Mali

Les pratiques de classe en mathématiques au Mali sont encore fortement marquées par des présentations de type « magistral ». Les enseignements se préparent le plus souvent en exploitant plusieurs manuels scolaires tout en se référant aux programmes de mathématiques. Dans le domaine géométrique, les mises en situation de recherche des élèves sont rares. En particulier, les problèmes de type « construction géométrique avec contrainte(s), de figures usuelles du plan à l'aide d'instruments » sont pratiquement absents au lycée. Il s'en suit que la tâche professionnelle « construire et mettre en œuvre une situation expérimentale en géométrie au lycée » est problématique pour les professeurs parce que, dans leur propre scolarité, ils n'ont pas bénéficié de ce type de situation.

II. Origine et motivations de cette expérience de formation

II.1 Un problème de construction géométrique

Le problème à l'origine de cette expérience en première année *P.E.S.* a été donné dans le module *Étude des transformations du plan et de l'espace,* avec pour objectif d'utiliser une rotation comme outil de construction d'une figure. En voici le texte.

L'exercice suivant est proposé aux élèves d'une classe de 10^e^ S[5], après enseignement de la leçon sur la rotation plane.

5 La *10^e^ S* est à peu près équivalente à la *2^e^ S.*

Le triangle ABC est isocèle en A. La rotation d'angle α représenté par la figure (Fig.1) transforme ABC en XYZ dans cet ordre. Ce triangle-image a été effacé sauf le point X, transformé du point A. Peux-tu reconstruire le triangle XYZ ? Explique ta construction.

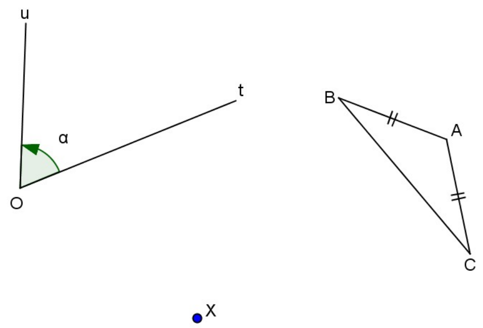

Fig.1

Travail des élèves-professeurs

On vous demande d'effectuer les tâches suivantes :

(T_1) : Résoudre l'exercice; on décrira à chaque fois :
- la technique de construction ;
- les propriétés géométriques utilisées dans chaque étape de la construction.

(T_2) : On suppose que l'utilisation du centre de la rotation considérée n'est pas autorisée pour la construction du triangle *XYZ*. Pouvez-vous identifier deux points possibles de blocage des élèves dans la résolution de cet exercice ? Justifiez à chaque fois votre réponse.

II.2 Objectif du problème et stratégies de résolution

Il faut remarquer que l'angle α de la rotation est non nul et distinct de l'angle plat : la rotation en jeu ne se réduit ni à une translation ni à une symétrie centrale.

II.2.1 Objectif

Rappelons que dans les programmes de lycée (10ème sciences), il est prévu d'utiliser les transformations de figures pour construire une figure, démontrer une propriété, recherche un ensemble de points. L'objectif était double :
- tester les compétences des élèves-professeurs dans une tâche de construction géométrique à l'aide d'instruments;
- les inciter à explorer d'autres techniques de construction qui n'utilisent pas le centre de la rotation pour construire le triangle image *XYZ*.

La motivation de cette situation réside dans le fait que nos pratiques de classe tendent à privilégier des techniques liées à la détermination préalable du centre de rotation. La stabilité de cette technique peut être considérée comme un facteur qui s'oppose à l'apprentissage d'autres techniques de résolution en particulier, celles utilisant d'autres invariants géométriques de la rotation. C'est ce qui justifie le choix de la tâche (**T_2**).

II.2.2 Stratégies de résolution du problème

Deux stratégies de résolution que nous noterons respectivement (**S_1**) et (**S_2**) sont attendues.

- La stratégie (**S_1**) est fondée sur la détermination préalable du centre de la rotation, considéré ici comme le sommet d'un triangle isocèle *orienté* dont on connait la base $[AX]$ et l'angle orienté associé à ce sommet qui est l'angle de la rotation en jeu. La construction des points Y et Z s'effectue par des techniques utilisant uniquement le centre et l'angle de la rotation en jeu.
- La stratégie (**S_2**) se fonde sur d'autres propriétés qui ne sont pas explicitement liées au centre de la rotation (conservation des distances, des angles orientés, de l'orientation du plan, etc.). Nous donnons en Annexes deux procédures de construction relevant de cette stratégie.

II.3 Résultats

II.3.1 Synthèse des productions des élèves-professeurs

Cette séance a été suivie par 24 élèves-professeurs. Les deux tâches ont été réalisées de façon individuelle. Les deux tableaux ci-dessous, donnent un résumé des stratégies de résolution de la tâche (**T_1**) et la résolution de la tâche (**T_2**) par la stratégie (***S_2***).

T_1	**(S_1)**	**(S_2)**	**Réponses erronées**
	17	***0***	***7***

Tableau 1

T_2	**(S_2)**	**Réponses erronées**	**Pas de réponse**
	6	***8***	***10***

Tableau 2

II.3.2 Difficultés révélées à l'issue de cette activité

Les réponses de type « Réponses erronées » du Tableau 1 ainsi que les réponses du type « Pas de réponse » du Tableau 2, s'expliquent par la difficulté des élèves-professeurs de passer d'une stratégie fondée sur le centre, pour utiliser les propriétés de conservation de la rotation, et les transformés de figures élémentaires (segment, demi-droites, …). Une analyse plus fine nous revèle que cette difficulté est due à l'absence de certaines compétences et (ou) à l'absence d'articulation de celles-ci pour résoudre le problème. Il s'agit entre autres de :

- savoir construire le centre d'une rotation dont on connait l'angle et un couple de points homologues ;
- savoir construire l'image d'une demi-droite par une rotation dont on connaît l'angle et l'image d'un point de cette demi-droite ;
- savoir anticiper la position du centre d'une rotation dont on connaît l'angle et un couple de points homologues.

Les propriétés de la rotation, considérées comme outils de construction de figures posent problème aux élèves-professeurs. Or, les programmes de 10^e sciences stipulent que : « l'on présentera quelques situations où interviennent les transformations pour démontrer une propriété, construire une figure, rechercher un ensemble de points. »

(1992, p.5). Par ailleurs, les productions montrent que les connaissances non disponibles et nécessaires à la résolution du problème posé, relèvent à la fois du domaine géométrique et du domaine spatial (emplacement du centre d'une rotation dont connait un couple de point homologues et son angle, opérationnalisation de la conservation de l'orientation du plan par la rotation dans une tâche de construction géométrique).

II.3.3 Des indices d'un besoin de formation

Par ailleurs, nous avons constaté chez les élèves-professeurs une assez bonne maîtrise des connaissances mathématiques exigibles sur le cours intitulé *Compléments d'algèbre linéaire et de géométrie*. Cependant, le réinvestissement de ces acquis n'est effectif que dans le domaine de la géométrie analytique. En résolution de problèmes, la transformation du plan est réduite à sa forme ponctuelle et traduite en un système d'équations linéaires de $\mathbf{R}^2$. En revanche, par rapport à la géométrie du début de lycée, bon nombre d'élèves-professeurs semblent démunis : pour les transformations du plan, le contrôle se résume le plus souvent à la comparaison de visu des positions relatives des figures homologues. Les acquis en formation académique semblent déconnectés des exigences professionnelles. Ces difficultés qui semblent anodines, sont pour nous des indices d'un besoin de formation que l'on peut situer à mi-chemin entre la géométrie du lycée, très partiellement enseignée avec des chapitres occultés ou renvoyés à la fin de l'année scolaire, et les mathématiques académiques non opératoires sur les situations de classe au lycée. Or ces futurs professeurs sont appelés à faire acquérir à leurs élèves de 10^{e} science des compétences précises, telles que :

- formuler les propriétés géométriques d'une transformation ;
- établir une classification des transformations géométriques du plan ;
- caractériser une transformation géométrique du plan.

III. Contenu de formation – Dispositif de formation

III.1 Contenu de formation : la marque d'une transformation géométrique du plan

La marque d'une transformation géométrique du plan est considérée ici comme un contenu de formation ; elle est issue de résultats de recherche en didactique des mathématiques (Sangaré, 2000). Il s'agit d'une approche non usuelle des transformations géométriques du plan. Elle est destinée à des niveaux scolaires allant du second cycle fondamental au lycée. L'objectif essentiel était de faire évoluer les conceptions d'élèves en début de lycée sur les transformations géométriques du plan. Cette évolution se situe dans une problématique de passage des conceptions transformations de figures aux conceptions transformations ponctuelles (Jahn,1998).

La définition proposée est la suivante :

> *Une marque d'une transformation est un segment [MM'] qui joint un point M de la figure objet à son transformé M' sur la figure image.*

Les marques constituent une représentation visuelle du lien fonctionnel de la transformation en jeu. Elles peuvent être tracées de façon effective comme elles pourraient être évoquées au cours d'un processus de résolution de problème.

Sur la figure *Fig.2*, F_o et F_i (en traits pleins) désignent respectivement les figures objet et image dans la transformation *f*. Le lien fonctionnel est matérialisé par les traits en pointillés représentations graphiques des marques d'extrémités un point de F_o et son image sur F_i.

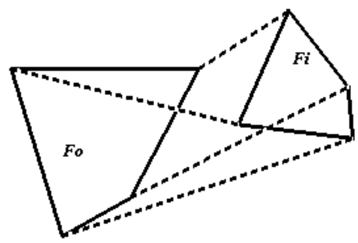

Fig.2

Par ailleurs, pour une transformation donnée *f*, l'existence d'une marque réduite en un point est significative de cette transformation : il s'agit d'un point invariant par *f*. Nous l'appelons "marque ponctuelle" ; l'ensemble de telles marques constitue alors l'ensemble des points invariants par *f*. Pour la formulation de certaines propriétés géométriques, il est commode d'utiliser, la « droite-support » (ou une « demi-droite-support ») plutôt que la marque elle-même.

III.2 Pourquoi le choix des marques ?

Le choix de cette approche par les marques comme contenu de formation repose sur certains critères qui nous semblent pertinents par rapport à la prise en compte des interactions entre savoir académique et savoir scolaire au lycée.

III.2.1 Légitimité mathématique

Pour une transformation donnée *f* et pour tout point *M* de la figure objet *F*, il existe un et un seul segment de points homologues [*MM'*] et par suite une seule marque tel que *M' = f(M)*. Cette unicité confère à la marque une signification théorique. Le contrôle préalable sur sa validité relève de compétences liées aux mathématiques académiques et exigibles du futur professeur. En l'absence de ce type de contrôle, la voie est ouverte à toute sorte de dérapage sur les objets d'enseignement, au moment où le libre accès à une profusion de ressources pédagogiques (numériques ou non) s'installe de plus en plus dans nos pratiques professionnelles, quelques fois sans aucune prise de précaution.

III.2.2 La marque comme contenu d'enseignement en début de lycée

Par rapport au classement de Grenier et Laborde (1988), l'approche par les marques se situe entre le *niveau1* où «la transformation est considérée comme une relation entre deux configurations ou entre deux parties d'une même configuration (le caractère fonctionnel est absent) » (Grenier et Laborde, p.66), et le *niveau2* où « la transformation est considérée comme une application ponctuelle du plan dans lui-même (il s'agit de l'objet fonctionnel) » (ibid.). De plus, la construction du *niveau2* n'est pas encore achevée à la fin du lycée au Mali. L'approche par les marques peut être considérée comme une contribution pour atteindre cet objectif. En effet, elle constitue une rupture avec les configurations attachées aux figures familières (polygones réguliers ou non, cercle, etc.) pour proposer de nouvelles configurations, attachées à des segments. Il s'agit d'une autre façon d'aborder les transformations en utilisant certaines traces graphiques particulières, présentes dans les représentations graphiques associées à une transformation à travers un couple de figures homologues. Elle offre d'autres possibilités d'utiliser des connaissances sur des objets de l'environnement graphique, pour produire, induire, déduire, des propriétés sur les objets géométriques.

L'exemple ci-après (*Fig.3* et *Fig.4*) sur la symétrie orthogonale, illustre cette rupture en termes de reconfiguration, c'est à dire « l'opération qui consiste à réorganiser une ou plusieurs sous-figures différentes d'une figure donnée en une autre figure » (Duval, 1995, p. 184), dans un processus de résolution d'un problème de géométrie.

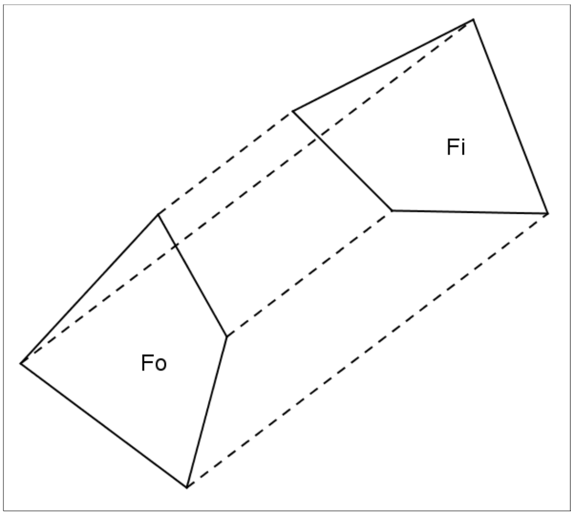

Fig.3

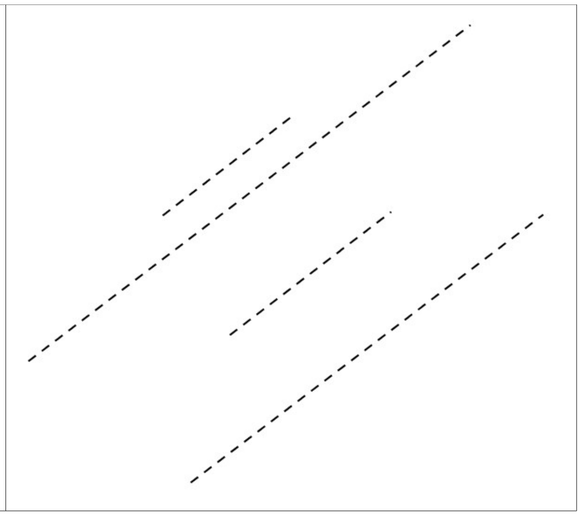

Fig.4

Sur la figure *Fig.3*, F_o représente un quadrilatère d'image F_i par une symétrie orthogonale d'axe non donnée avec les marques (traits en pointillés) attachées aux couples de sommets homologues. Une appréhension visuelle de la transformation en jeu à partir de cet ensemble pourrait interférer avec l'appréhension d'une figure de l'espace de dimension 3.
De la figure *Fig.3*, on extrait (de façon effective ou invoquée) les marques attachées aux sommets homologues (*Fig.4*). Celles-ci constituent une famille de segments qui fait apparaitre une nouvelle configuration géométrique significative de la symétrie orthogonale.

L'intérêt de ce type de reconfiguration réside dans le fait qu'elle permet à la fois de mettre au second plan le couple de figures homologues (F_o, F_i) par la transformation en jeu, et de faire apparaître autrement certaines relations de la transformation qui sont perceptibles visuellement à travers la configuration obtenue avec les marques. Du côté des élèves en début de lycée, le segment est un objet géométrique familier. Sa représentation dans le domaine *spatio-graphique* peut être entièrement située à l'intérieur de supports généralement utilisés dans l'enseignement de la géométrie (feuille de cahier, tableau noir, support plan d'une machine mécanique, écran d'un ordinateur, etc.) : il peut être l'objet d'un traitement effectif avec les instruments de géométrie.

III.2.3 Les marques comme contenu de formation d'enseignants de mathématiques

Les marques constituent une nouvelle approche des transformations du plan inconnue des élèves-professeurs. Elles offrent une opportunité pour travailler simultanément sur deux types de tâches que nous estimons nécessaires dans un projet de formation initiale d'enseignants de mathématiques du secondaire.

• *Premier type de tâches :* « Étudier la légitimité mathématique des transformations géométriques par une approche fondée sur les marques » constitue le premier type de tâches qui relève de connaissances académiques. Elle doit inciter le futur enseignant à exercer une vigilance épistémologique sur ce qu'il enseigne à ses élèves. Par exemple, la légitimité théorique de la définition donnée d'une marque est à construire. En conséquence, il en est de même pour une caractérisation d'une transformation à partir de ses marques. Ce type de tâche ne semble pas trivial pour de futurs professeurs de mathématiques comme le montrent les résultats obtenus par Ouvrier-Buffet (2003).
Pour étayer ce point de vue, appuyons-nous encore sur l'exemple de la symétrie orthogonale (*Fig.3* et *Fig.4*). Une caractérisation de cette transformation du plan pourrait être formulée comme ci-dessous :

> Soit (X, Y, Z) un triplet de points non alignés du plan transformé en le triplet de points (X', Y', Z') par une isométrie inconnue f. Dire que les marques $[XX']$, $[YY']$ et $[ZZ']$ ont même médiatrice équivaut à dire que f est une symétrie orthogonale.

En effet, dans un espace affine de dimension finie E, toute application affine f de E dans lui-même est déterminée par la donnée d'un repère affine de E et de son image par f. Lorsqu'il s'agit du plan affine euclidien, trois points non alignés constituent un repère affine; la donnée de leurs images respectives par f détermine parfaitement cette application.
Un futur professeur de mathématiques doit être capable de produire une telle argumentation ; chercher le fondement théorique de la *caractérisation* proposée ci-dessus et découvrir l'intérêt que cela peut avoir dans le travail avec les élèves, constituent a priori des tâches pertinentes en formation initiale. Aussi, étudier les interactions entre le savoir scolaire et le savoir académique est de notre point de vue une tâche professionnelle préalable à la construction de toute situation didactique qui se veut porteuse de sens. De plus, cette *caractérisation* proposée peut être intégrée a priori au savoir scolaire allant du second cycle fondamental au lycée. Elle peut être vérifiée de façon expérimentale à l'aide des instruments ou être simplement admise.

• *Deuxième type de tâches :* « Étudier les potentialités offertes par une approche des transformations géométriques à l'aide d'un nouvel élément », constitue aussi un type tâche pertinente en formation d'enseignants. A ce sujet, nous adoptons le point de d'Amigues : « L'école transmet des *savoirs enseignés* qui ne sont ni des *savoirs savants* ni des savoirs simplifiés, mais des savoirs scolaires spécifiquement reconstruits pour être transmis » (Amigues, 2001). En effet, l'approche des transformations géométriques du plan par les marques peut être considérée comme une tentative de reconstruction d'un savoir scolaire. Elle doit inciter le futur enseignant, à se poser et à étudier des questions telles que :
- cette approche peut-elle contribuer de façon pertinente à l'apprentissage en 10^{e} science de l'objet d'enseignement transformation géométrique ?
- quelles sont les connaissances qu'elle peut mettre en relief?

- quelles sont celles qui sont inhibées par cette approche?

En réponse aux deux premières questions, on peut dire que l'approche par les marques peut contribuer à l'enseignement de toutes les transformations géométriques planes prévues dans les programmes du second cycle fondamental et du lycée. En particulier, elle peut être sollicitée de façon pertinente sur les problèmes tels que :

- construire l'image d'une figure donnée par une transformation définie par son (ou ses) élément(s) caractéristique(s) ;
- reconnaître et (ou) caractériser une transformation donnée par un couple de figures homologues.

Ainsi, il est possible de formuler à l'aide des marques, certaines propriétés de la symétrie orthogonale (*Fig.4*) qui peuvent être mobilisées comme outils de résolution de problèmes cités ci-dessus.

- Les droites-supports des marques sont parallèles.
- Les marques non ponctuelles ont même médiatrice.
- Toute marque ponctuelle est sur l'axe de symétrie.
- L'ensemble des marques ponctuelles est une droite qui est l'axe de symétrie.

A la troisième question, nous disons que pour certaines transformations planes la seule configuration géométrique obtenue à partir des marques est sur le plan visuel assez pauvre en information pour induire chez les élèves une conjecture sur ces transformations. L'exemple de l'homothétie de rapport positif est significatif de ce constat. En effet l'une des rares informations pertinentes qu'on peut tirer de la figure *Fig.5* est : deux marques d'une homothétie de rapport positif dont les droites-supports sont distinctes n'ont pas de point commun.

Une reconfiguration de la figure (*Fig.5)* est nécessaire pour faire apparaître certaines informations qui n'étaient pas perceptibles à l'aide des seules marques ; c'est le cas par exemple du tracé des droites-supports des marques qui sont concourantes (*Fig.6*). Ainsi, pour l'homothétie de rapport positif, on peut visualiser sur le graphique la propriété suivante : *les marques sont non concourantes mais leurs droites-supports sont concourantes*.

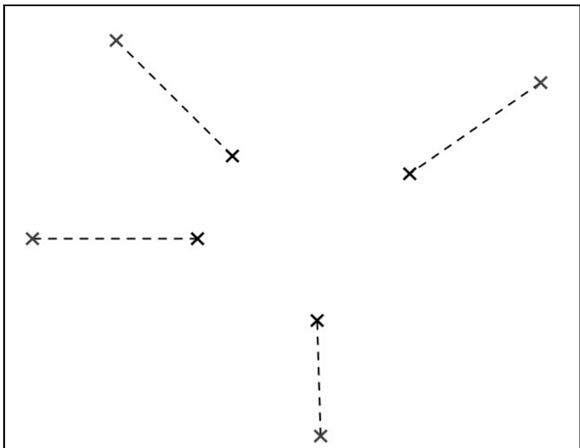

Fig.5

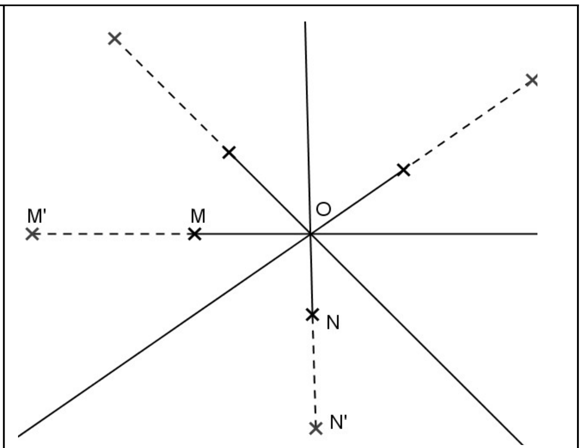

Fig.6

Cependant, l'accès à cette configuration pertinente n'est pas immédiat ; il doit être l'aboutissement d'un travail intense des élèves jonché d'essais infructueux sur les configurations. Or cette activité de recherche, indispensable à l'élève pour donner du sens au problème et à sa résolution, est escamotée le plus souvent par les enseignants par une réduction à la portion congrue du temps qui lui est alloué.

En l'absence de ces types de tâche dans la formation initiale, on occulte a priori un aspect essentiel d'une formation réfléchie (Altet, 2001). En conséquence, le futur enseignant serait réduit à une fonction *d'applicateur de recettes pédagogiques,* (par exemple le choix d'une seule ressource pédagogique) conçues et mises en œuvre dans des conditions totalement différentes de celles de sa classe. L'approche des transformations géométriques par les marques est non usuelle chez élèves-professeurs concernés par cette formation : ce facteur nous semble pertinent pour les inciter à s'engager dans un travail réflexif à la fois sur leur formation académique et sur l'analyse des situations de classe.

III.3. Dispositif de Formation

Le dispositif conçu pour cette séquence de formation est bien sûr expérimental ; il s'appuie essentiellement sur la notion de « formation à l'analyse des tâches à effectuer par les élèves » (Rauscher, 1994, p. 297). Ce choix repose sur l'hypothèse selon laquelle, l'analyse des tâches d'élèves par le professeur de mathématiques exige à priori la mise en rapport du savoir académique et du savoir scolaire par le biais de la didactique. En effet, le premier est source de légitimité et de contrôle pour le second, le second est le plus souvent, un reconstruit du premier suivant certaines contraintes.
Par ailleurs, il faut noter que les élèves-professeurs au nombre de 24, ont l'habitude de travailler selon un type d'organisation durant toute la durée de leur formation. Il peut être décrit par le schéma, « recherche individuelle puis mise en commun par petits groupes→bilan→synthèse ». Chaque groupe est composé de 3 personnes.

IV. Déroulement de la séquence de formation

IV.1 Brève présentation

Nous nous proposons de réinvestir l'approche par les marques dans une formation initiale d'enseignants de mathématiques pour le second cycle fondamental et le début de lycée. A cet effet, nous adoptons le point de vue de Robert, sur la distinction entre transformation et application dans l'enseignement : « Nous ne faisons pas de différence entre ces deux mots. Il est toute fois habituel de distinguer dans l'enseignement secondaire les transformations, désignation réservée aux bijections de $\mathbf{R}^2$ (ou $\mathbf{R}^3$) sur lui-même, et les applications de $\mathbf{R}^2$ (ou $\mathbf{R}^3$) dans lui-même, non bijectives) » (Robert, 1998, p. 25).

La séquence proposée est structurée en quatre situations, avec une description succincte de chacune d'elles, ainsi que la formulation de leurs objectifs respectifs. Nous présentons ensuite les principaux éléments de l'analyse a priori suivi d'un bref résumé des comportements d'élèves-professeurs.

IV.2 Situation 1. Une première rencontre avec la notion de marque

IV.2.1 Énoncé

Pour une transformation géométrique du plan donnée *f*, on a proposé à des élèves de 10^e science la définition suivante :

> On appelle marque d'une transformation, tout segment [*MM'*] qui joint un point *M* de la figure objet à son transformé *M'* sur la figure image.
>
> Exemple : *A'B'C'D'* est l'image de *ABCD* par *f*, transformation géométrique du plan (*Fig.7*) ; [*AA'*], [*BB*'], [*CC'*] et [*DD'*] sont des marques de *f*, (*Fig.8*).

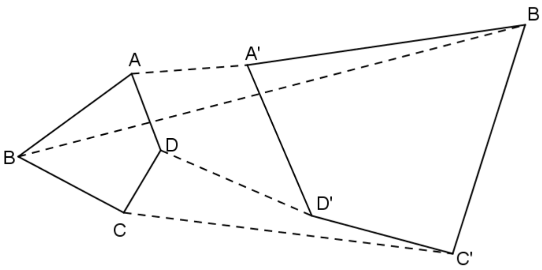

Fig.7

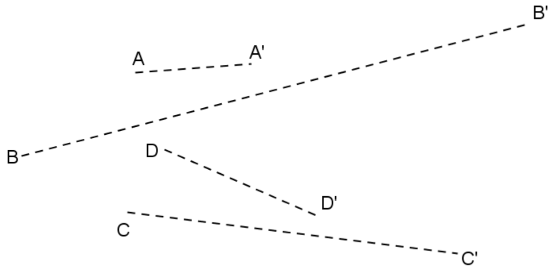

Fig.8

> Voici les tâches à effectuer :
> T1 : Cette définition vous semble-t-elle correcte ? Justifiez votre réponse.
> T2 : Donnez un nom lié au terme « marque » d'une transformation donnée f à chacun des objets définis ci-dessous :
> - un point invariant par f ;
> la droite qui contient une marque de f.

IV.2.2 Objectifs et attentes

L'objectif de la situation 1 est double.
- Amener les élèves-professeurs à réfléchir sur la légitimité mathématique d'un nouvel élément lié aux transformations géométriques du plan.
- Faire construire par les élèves-professeurs, des termes pour désigner d'autres éléments liés à la marque d'une transformation.

Les tâches de validation d'une définition mathématique ne sont pas courantes dans nos pratiques de formation a fortiori dans nos pratiques de classes au lycée. Une définition est le plus souvent considérée par les enseignants comme une sorte de postulat imposé soit par l'institution, soit par des manuels scolaires dits de référence.
Dans l'énoncé, le nouvel outil en jeu est défini dans le registre de l'écrit en français et illustré par un exemple dans le registre des figures. De plus, la justification théorique de cet outil n'est pas immédiate sous la formulation proposée. Ces facteurs rendent a priori la situation problématique. En effet, nous nous attendons à ce que les élèves-professeurs puissent s'engager dans l'identification des *éléments définitoires* (Ouvrier-Buffet, 2006) du nouvel élément et dans la détermination de leur lien avec ce dernier. Cette précaution nous semble nécessaire pour l'établissement de son unicité. Par ailleurs, le choix de termes pour désigner un élément géométrique du plan peut favoriser ou inhiber la construction d'une bonne représentation mentale de cet élément.

IV.2.3 Synthèse des comportements d'élèves-professeurs

Sur les huit groupes de travail et pour la première tâche, six ont eu une réponse correcte ; leur procédure peut être décrite de la façon suivante :
- identification de la transformation f et du point M comme éléments définitoires de la marque.
- établissement de la preuve de l'unicité du bipoint (M, M') et par suite, celle du segment [MM'] en rapport avec les éléments définitoires de M'.

La réponse du groupe 1, dont une copie est ci-dessous, semble relever de cette procédure avec la marque parfaitement définie par la donnée d'un point *M* et l'unicité de son image *M'= f(M)* ; néanmoins une marque est considérée par ce groupe, comme une partie de sa droite-support.

T1: Oui ; car pour toute transformation géométrique du plan donnée l'image d'un point est bien définie. On sait ~~que pour~~ entre deux points distincts ~~du~~ plan ne peut passer qu'une seule droite, donc entre un point et son image il ne peut y avoir qu'une ~~seule~~ et une seule marque (bien définie)

Par contre, deux groupes ont donné une réponse erronée. L'une de ces deux productions (groupe 5) nous paraît significative des lacunes relevant à la fois des mathématiques du lycée et des mathématiques académiques. Après avoir accepté la définition comme correcte, ce groupe se rétracte et la rejette comme le montre la copie scannée de leur feuille de tâches.

~~T1/ La définition ci dessus est correcte en mathématiques car dans toute transformation géométrique l'image d'un point si elle existe, elle est unique.~~

T1/ Cette définition n'est pas correcte en mathématiques car dans le cas où M = M' on aura pas un segment mais un point. si M ≠ M' la définition est correcte car dans toute transformation géométrique l'image d'un point si elle existe, elle est unique.

Ce texte indique que si *f(M) =M*, alors *[MM']* est un point et non un segment. La prégnance du dessin a été un facteur inhibiteur.

Pour la deuxième tâche, deux groupes sur les huit seulement ont pu donner des noms composés avec le terme marque :

- *marque-point* pour un point invariant par *f*
- *droite de la marque*.

Ce résultat semble montrer que l'élaboration de termes évocateurs d'objets géométriques désignés pour des élèves en début de lycée, n'est pas une tâche triviale pour la plupart des élèves-professeurs. Cette difficulté est due en partie à une maîtrise insuffisante de la langue française par des élèves-professeurs habitués à communiquer le plus souvent dans un seul registre, celui du symbolisme mathématique.

IV.3 Situation 2 : propriétés pouvant se formuler à l'aide des marques

IV.3.1 Énoncé

Pour chacune des transformations géométriques du plan enseignées en 10^e^ science (projection parallèle, symétrie orthogonale, symétrie centrale, translation, rotation, homothétie), effectuer les tâches ci-dessous :

T_1 : Choisir et représenter le(s) élément(s) caractéristique(s) de chacune d'elles.

T_2 : Pour chaque transformation, dessinez un quadrilatère convexe non particulier ABDC puis construire son transformé A'B'C'D' par celle-ci.

T_3 : Pour chaque transformation, construire les marques associées aux sommets A, B, C, et D du quadrilatère objet.

T_4 : Formuler si possible les propriétés géométriques de chaque transformation à partir des marques uniquement.

IV.3.2 Objectif et attentes

Un seul objectif est visé par cette situation : inciter les élèves-professeurs à formuler les propriétés d'une transformation géométrique à partir de la configuration obtenue par ses marques au niveau de la classe de 10^e^ science.

Les tâches (**T_1**), (**T_2**) et (**T_3**) nous permettent d'avoir au niveau des élèves-professeurs, un bref aperçu sur leur maîtrise des constructions géométriques avec les instruments, selon les pratiques habituelles de classe. En effet, la construction de l'image d'une figure donnée à partir de (ou des) élément(s) caractéristique(s) de la transformation en jeu, est encore une tâche classique en début de lycée. Le travail en groupe permet à ceux qui ont des lacunes d'y remédier.

La tâche (**T_4**) n'est pas familière, elle rompt avec les trois premières tâches. Cette rupture offre l'occasion d'initier le futur professeur à l'élaboration d'outils d'enseignement. Nous espérons que l'exécution de cette tâche permette aux élèves-professeurs , d'enrichir le sens de leurs connaissances sur les transformations géométriques du lycée et de s'initier à diverses formulations (ici dans les registres des figures et de la langue d'enseignement, le français) pour les besoins de compréhension des élèves. Enfin, sa réalisation exige de faire un pas de côté par rapport aux pratiques habituelles de formulation de propriétés des transformations fondées principalement sur leurs effets respectifs sur les invariants géométriques (direction de droite, parallélisme, distance, angle etc.).

La nouvelle approche met en relief les propriétés liées aux marques sur chacune des transformations en jeu. A titre indicatif, on peut espérer sur les résultats ci-dessous.

La projection parallèle :

Il s'agit ici d'une projection sur la droite (*L*) parallèlement à la direction de droites (*Δ*) (*Fig. 9*). Nous pouvons considérer la figure (*Fig. 10*) comme une configuration extraite de la figure (*Fig. 9*).

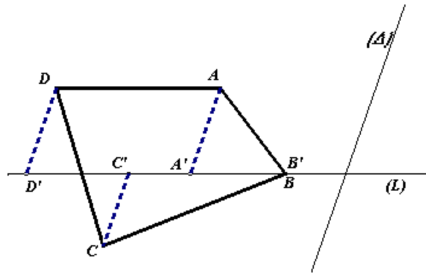

Fig. 9

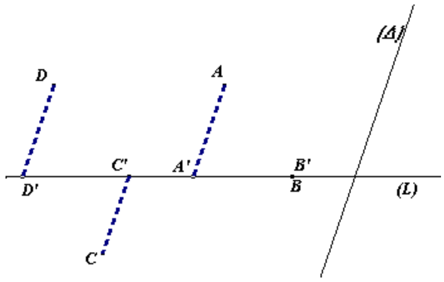

Fig. 10

En conséquence, on peut formuler les propriétés suivantes pour une projection parallèle :

Les droites-supports des marques non ponctuelles sont parallèles.

La direction de la projection est la direction de la droite-support de toute marque non ponctuelle.

Toute marque ponctuelle est un point de la droite de projection.

L'ensemble des marques ponctuelles est une droite qui est la droite de projection.

La rotation :

Le point *O* est le centre de la rotation en question (*Fig. 11*). La figure (*Fig. 12*) extraite de la figure (*Fig. 11*), laisse apparaître très peu d'indices sur les propriétés de la transformation en jeu. La configuration extraite dans ce cas, s'avère inhibitrice dans une tâche de découverte de la rotation.

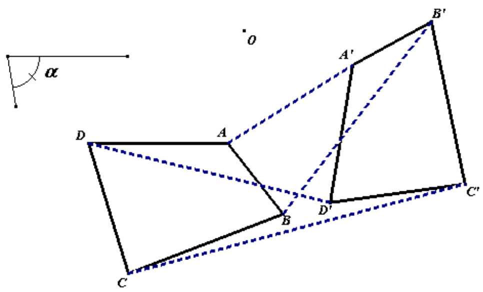

Fig. 11

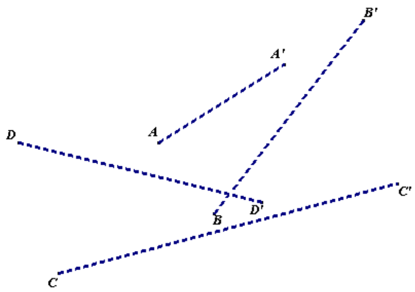

Fig. 12

Cependant, avec des tracés supplémentaires sur le modèle, (donc une reconfiguration au sens de Duval, 1995), il est possible de mettre en évidence de visu, les éléments caractéristiques de la rotation (centre et angle). Ainsi, nous pouvons émettre que :

Les médiatrices des marques sont concourantes.

1. Le point commun des médiatrices des marques est le centre de rotation.
2. L'angle de rotation est l'angle sous lequel on « voit toute marque non ponctuelle à partir du centre de rotation »

<u>*L'homothétie de rapport négatif*</u> :
Nous avons ici une homothétie de rapport négatif (*Fig. 13*). On considère la figure (*Fig. 14*) comme une configuration extraite de la figure (*Fig. 13*).

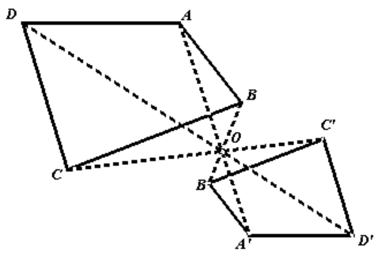

Fig. 13

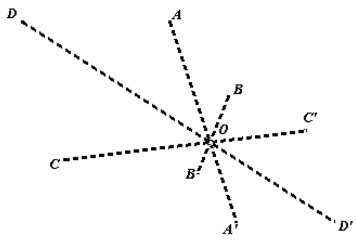

Fig. 14

Ainsi, nous pouvons émettre les propriétés suivantes d'une homothétie de rapport négatif :
1. Les marques sont concourantes.
2. Le point commun à toutes les marques est le centre de l'homothétie.
3. Le centre d'une homothétie de rapport négatif, partage en mesure algébrique, chaque marque dans le même rapport que celui de l'homothétie.

IV.3.3 Synthèse des comportements d'élèves-professeurs

Les résultats de six groupes (sur huit) ont été conformes dans l'ensemble à nos attentes à l'exception de deux cas.
- Le premier est relatif à la formulation des propriétés d'une homothétie de rapport positif : les marques sont très peu fonctionnelles alors que leurs droites-supports respectives le sont.
- Le second cas est lié à la rotation ; il faut apporter des modifications à la *figure des marques* par des tracés supplémentaires, pour faire apparaître de visu certaines propriétés de la rotation.

Ces deux types de lacune relèvent de notre point de vue du fait que les connaissances exigibles pour la conversion entre deux registres (ici figures et texte) ne sont pas disponibles (Duval, 2003, p.*54*). Elles sont à construire car, apprendre aux élèves à formuler une propriété mathématique dans différents registres est une tâche pédagogique inévitable pour un futur professeur.

Par contre, les deux autres groupes ont exprimé les propriétés selon les pratiques usuelles en termes de conservation d'invariants géométriques. Ce qui indique qu'ils n'ont pas pu changer de point de vue pour cette tâche. C'est le cas du groupe 4 qui ne fait aucune allusion à l'expression « marque d'une transformation géométrique du plan » dans le texte produit dont une copie est donnée ci-dessous.

$\boxed{T_2}$

* Pour la projection parallèle sur (Δ) de direction $\vec{u}$

- la projection parallèle sur (Δ) de direction $\vec{u}$ est le projeté d'un point du plan sur (Δ) de même direction que $\vec{u}$

Car à tout point M du plan ~~on associe~~ son image est sur (Δ

- La projection parallèle sur (Δ) de direction $\vec{u}$ est le projeté d'un point invariant du plan sur (Δ). Car $B = B'$

* Pour la translation de $\vec{u}$

- La translation de $\vec{u}$ par un point M du plan est égale à son image M' ~~car~~ $\vec{MM'} = \vec{u}$

- La translation de $\vec{u}$ par l'image M' du plan est égale à son image M'' Car $M = M'$, $M' = M''$, $\vec{M'M''} = \vec{u}$

* Pour l'homothétie :

IV.4 Situation 3 : une classification des transformations géométriques selon les marques

IV.4.1 Énoncé

On veut établir à partir de la notion de marque, une classification des transformations suivante : projection parallèle, symétrie orthogonale, symétrie centrale, translation, rotation, homothétie de rapport positif et homothétie de rapport négatif. A cet effet, deux variables sont retenues.

La première variable notée (K_1) est liée à la longueur des marques et prend deux valeurs :
- (**$K_{1.1}$**): « les marques ont même longueur »
- (**$K_{1.2}$**): « les marques n'ont pas même longueur ».

La deuxième variable notée (**K_2**) est liée à la position relative des marques; elle prend trois valeurs :
- (**$K_{2.1}$**) : « les marques sont parallèles »
- (**$K_{2.2}$**) : « les marques sont concourantes »
- (**$K_{2.3}$**) : « les marques ne sont ni parallèles ni concourantes ».

T_1 : On vous demande d'établir cette classification sous forme de tableau.

T_2 : Que pouvez-vous dire de cette classification :
- Par rapport aux mathématiques ?
- Par rapport à l'enseignement/apprentissage des transformations du plan en 10ème science ?

IV.4.2 Objectifs et attentes

Nos objectifs sont
- d'une part, de faire établir par les élèves-professeurs une classification des transformations géométriques considérées à l'aide des marques ;
- d'autre part, d'inciter les élèves-professeurs à faire un travail réflexif sur cette classification par la production d'un commentaire.

Rappelons qu'en *10ème* science, la classification des transformations géométriques du plan s'effectue selon un premier critère attaché au caractère bijectif (ou non) de la transformation. Ceci permet de classer la projection parallèle car elle est non bijective. Le second critère est le caractère isométrique (ou non) de la transformation : ceci permet de classer dans un même groupe, symétrie orthogonale, symétrie centrale, translation, rotation puis, l'homothétie dans un autre groupe.
L'approche par les marques propose une autre classification, fondée à la fois sur des propriétés spatiales (comme la perception visuelle de l'intersection ou non de marques) et sur des propriétés géométriques (comme l'égalité des longueurs de marques ou le parallélisme de leurs droites-supports …). On peut ensuite émettre des conjectures de regroupement de ces transformations selon les valeurs des deux variables retenues.
Le tableau 3 ci-après est une proposition de classification.

LONGUEURS DES MARQUES POSITIONS DES MARQUES	**Les marques sont de même longueur**	**Les marques ne sont pas de même longueur**
Les marques sont parallèles	Translation	Projection parallèle Symétrie orthogonale
Les marques sont concourantes		Symétrie centrale Homothétie de rapport négatif
Les marques ne sont ni parallèles ni concourantes		Rotation d'angle distinct de l'angle nul et de l'angle plat. Homothétie de rapport positif

Tableau 3

En particulier, on peut déduire de ce tableau, une classification des isométries enseignées en 10ème science à savoir, la symétrie orthogonale, la symétrie centrale, la translation et la rotation[6] : ces quatre isométries se distinguent les unes des autres à partir des marques puisque dans le Tableau 3, chacune occupe une et une seule cellule.
Il faut noter qu'il possible d'obtenir une classification plus fine en ajoutant d'autres variables telles que la configuration des droites-supports des marques.

V.4.3 Un résumé des comportements d'élèves-professeurs

Le tableau de classification a été réalisé non sans difficulté par tous les groupes. Il en a été de même pour son rapport avec les mathématiques et son éventuel usage didactique. En effet, les élèves-professeurs pour la plupart, se sont heurtés à la question suivante: « comment établir une classification des isométries enseignées en 10e science sans utiliser la méthode usuelle décrite plus haut ? ». Afin de relancer l'étude du tableau,

6 La symétrie glissée n'est pas concernée dans cette classification car elle ne figure pas au programme de *10e* science. Elle apparaît en *11e*SE (*1è* S en France). Néanmoins, on pourrait la classer dans la même case que la rotation et l'homothétie de rapport positif. Par ailleurs, les marques d'une symétrie glissée permettent de déterminer son axe par la propriété suivante : « *L'axe d'une symétrie glissée est l'ensemble des milieux de ses marques* ».

nous leur avons signalé de nouveau, que la classification cherchée doit s'effectuer en faisant usage uniquement des marques d'une transformation. Les résultats consécutifs à cette relance ont été fructueux dans l'ensemble : quatre groupes sur les huit se sont engagés dans des stratégies de distinction des quatre isométries suivant des critères d'ordre perceptifs tels que « les marques se coupent ou non »; « les marques sont de même longueur ou non »; etc.. Ces critères sont le plus souvent validés par un contrôle pragmatique à l'aide des instruments de géométrie, alors qu'ils peuvent l'être par des propriétés géométriques. En fait, nous avons identifié chez ces élèves-professeurs des difficultés relatives à une bonne formulation écrite des critères de classification.

Les quatre autres groupes sont restés bloqués après l'élaboration du tableau ; ils n'ont pas su interpréter le contenu de ce tableau. Parmi ces quatre, deux groupes refusent de valider cette classification car selon eux « elle découle d'une simple observation visuelle » et non d'une démonstration comme le montre la production du groupe 6 ci-dessous.

T1)

	$K_{1.1}$	$K_{1.2}$
$K_{2.1}$	Translation	Projection parallèle Symétrie orthogonale
$K_{2.2}$		Symétrie centrale Homothétie de rapport $k<0$
$K_{2.3}$		Rotation Homothétie de rapport $k>0$

T2) Cette classification n'est pas mathématique car elle utilise des traits uniquement —

T3) Cette classification peut tromper les élèves car elle n'est pas mathématique.

Ainsi, ce texte semble se fonder sur un point de vue selon lequel l'usage des connaissances spatiales ne doit pas être accepté dans un enseignement de la géométrie en *10*^e^ science.

IV. 5 Situation 4 : une caractérisation des isométries du plan en 10e science

IV.5.1 Énoncé

On se propose d'étudier en particulier les quatre isométries du plan enseignées (symétrie orthogonale, symétrie centrale, translation et rotation) en 10e science, en utilisant uniquement les marques. Effectuez les tâches ci-dessous :

T_1 : Formuler une « propriété caractéristique » de chacune de ces isométries, en utilisant uniquement les marques, les droites ou les demi-droites supports des marques, à l'intention d'élèves de 10e science.

T_2 : Y-a-t-il un lien entre cette caractérisation des isométries du plan fondée sur les marques avec les connaissances apprises sur le cours relatif aux applications affines du plan. Si oui lequel ?

IV.5.2 Objectifs et attentes

Nos objectifs sont :
- Établir une caractérisation des transformations fondée uniquement sur les marques.
- Étudier l'existence d'un lien entre une caractérisation selon les marques, et les caractérisations possibles reçues en formation académique.

L'observation d'une figure en lien étroit avec les possibilités multiples de sa reconfiguration en d'autres figures ou sous-figures à l'aide d'instruments de géométrie, permet de faire apparaître de nouvelles configurations qui peuvent être pertinentes dans la résolution du problème posé. En particulier, les configurations liées aux marques, pourraient susciter l'appréhension de nouvelles propriétés de la figure. Aussi, les résultats obtenus à l'issue de la *Situation 2*, pourraient être un vivier potentiel pour s'engager dans l'exécution des tâches liées à la *Situation 4*.

On pourrait énoncer les propriétés caractéristiques ci-dessous :

Soit (X, Y, Z) un triplet de points non alignés transformé en le triplet de points (X', Y', Z') par une isométrie inconnue f.

- Dire que les marques [XX'], [YY'] et [ZZ'] ont même milieu équivaut à dire que f est une symétrie centrale.
- Dire que les marques [XX'], [YY'] et [ZZ'] ont même longueur, que les demi-droites [XX'), [YY'), [ZZ') sont parallèles et de même sens, équivaut à dire que f est une translation.
- Dire que les médiatrices des marques [XX'], [YY'] et [ZZ'] sont concourantes en point I et que ces 3 marques sont vues sous le même angle orienté à partir de I, équivaut à dire que f est une rotation.
-

L'appréhension de ces propriétés caractéristiques se fait d'abord par l'appréhension des propriétés spatiales perçues sur la configuration obtenue à partir des marques. Ces connaissances spatiales doivent être considérées à ce niveau scolaire comme un moyen et non comme une finalité pour l'apprentissage de la géométrie.

IV. 5.3 Résumé des comportements d'élèves-professeurs

A l'exception de la rotation, cinq groupes sur huit ont émis des formulations correctes liées aux configurations attachées aux marques de chaque isométrie. Le fait que pour un point *X* donné, un segment [*XX'*] peut être une marque relative à plusieurs isométries, a incité ces groupes à choisir trois points *X*, *Y*, *Z* non alignés permettant de définir un repère affine du plan. C'est le cas du groupe 7, qui appréhende un repère affine du plan affine à travers la configuration *triangle non aplati*, comme libellé ci-dessous.

T1)
* Si ABC, est un triangle non aplati et f une isométrie, tel que f(A) = A'; f(B) = B'; f(C) = C' : f, est une symétrie centrale les marques AA'; BB'; CC' ont le même milieu.
* Si ABC, est un triangle non aplati et f une isométrie tel que f(A) = A'; f(B) = B'; f(C) = C' : f est une symétrie orthogonale ssi les marques AA'; BB'; CC' ont la même médiatrice.
* Si ABC, est un triangle non aplati et f une isométrie tel que f(A) = A'; f(B) = B'; f(C) = C' : f est une translation ssi les marques AA'; BB'; CC' sont parallèles, ont la même longueur et même direction.
* Si ABC, est un triangle non aplati et f une isométrie tel que f(A) = A'; f(B) = B'; f(C) = C' : f est une rotation ssi les marques AA'; BB'; CC' ont des médiatrices qui se coupent en un seul point O et si O est le sommet des triangles isocèles semblables de bases les marques AA'; BB'; CC'.

T2)
Il y a un lien avec les applications affines car, avec un triangle non aplati ABC on a une base du plan $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

Les trois autres groupes ont donné des réponses erronées pour l'une au moins des deux raisons ci-dessous :
- aucune exigence n'est faite sur le nombre minimal de marques à choisir ;
- dans le cas où ce nombre est fixé à trois, aucune exigence n'est faite sur la position relative des trois points objets X, Y et Z.

C'est le cas de la production du groupe 5, dont une copie est reproduite ci-après.

T1) - une isométrie est une symétrie orthogonale si et seulement si les marques sont parallèle et de longueur differentes
- une isométrie est une symétrie centrale ssi les marques sont concourantes de longueurs differentes
- une isométrie est une translation ssi les marques sont parallèles et de même longueurs.
- une isométrie est une rotation si les marques n'ont pas la même longueurs, sont non parallèles et non concourantes.

Ainsi, le contrôle de la légitimité mathématique n'a pas été exercé sur les propriétés caractéristiques candidates par ce groupe.

V. Conclusion

La séquence expérimentale a été menée en deux séances (de 90 minutes chacune sur deux jours consécutifs). Les résultats sont parcellaires, mais les élèves-professeurs ont pu se convaincre de certains principes liés à l'enseignement des mathématiques en début de lycée. Une maitrise suffisante des mathématiques académiques ne suffit pas pour exécuter les tâches pédagogiques, en particulier celles liées à l'analyse des tâches d'élèves. Le refus de certains groupes d'accepter la classification établie au Tableau 3 est significatif de ce principe. Elle a permis à ces futurs enseignants de prendre conscience de l'intérêt didactique lié à l'étude des interactions entre une géométrie académique ponctuelle, où la figure est absente ou considérée comme une partie "anonyme" du plan, et une géométrie du compas et de la règle s'appuyant sur des figures familières où les premières connaissances perceptibles sont d'ordre spatial.

Le contrôle d'une certaine légitimité mathématique de tout objet d'enseignement est également une tâche professionnelle exigible de tout professeur de mathématique : les réponses erronées des trois groupes dans la Situation 4 en sont des indices.

Enfin, une retombée éventuelle de cette situation de formation est d'inciter les élèves-professeurs à concevoir et mettre en œuvre en classe des situations-problèmes qui sont à la fois porteuses de sens dans l'apprentissage de la géométrie au lycée et qui ne transgressent en rien l'esprit des programmes en vigueur. L'approche par les marques se situe dans cette perspective.

Références Bibliographiques

ALTET M. (2001) Les compétences de l'enseignant-professionnel : Entre savoirs, schèmes d'action et d'adaptation, le savoir analyser, in Léopold Pakay, Marguerite Altet, Philipe Perrenoud (Éds), 27-37, DeBoeck Université.

AUDIN M. (1998) *Géométrie, De la licence à l'agré*gation, Éditions Scientifiques & Culturelles, BELIN.

DOUADY R. (1996) Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. In *L'enseignement des Mathématiques : des Repères entre savoir, programmes et pratiques*. 241-256. TOPIQUES éditions.

DUVAL R. (2003) Décrire, visualiser ou raisonner : quels "apprentissages premiers" de l'activité mathématique ? *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 8/2003. IREM de Strasbourg.

DUVAL R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine – Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels,* Peter Lang.

GRENIER D., LABORDE C. (1988) "Transformations géométriques : le cas de la symétrie orthogonale". In *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, Actes du Colloque de Sèvres, mai 1987, pp.65-86. Grenoble : la pensée sauvage.

JAHN A.P. (1998) *Des transformations de figures aux transformations ponctuelles : étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-géomètre – Relations entre aspects géométriques et fonctionnels en classe de seconde.* Thèse Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

OUVRIER-BUFFET C. (2006) *Des définitions pour quoi faire ? Analyse épistémologique et utilisation didactique.* Édition Fabert.

OUVRIER-BUFFET C. (2003) *Construction de définitions/construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques. Étude épistémologique et didactique de la définition. Étude théorique et expérimentale de la dévolution de problèmes de construction de définitions, auprès des étudiants de 1ère année d'université*. IMAG, Grenoble. Thèse de l'Université Joseph Fourier.

RAUSCHER J-C (1994) Les enjeux de l'enseignement de la géométrie au début du collège et leur prise en compte par les professeurs. In Artigue et al., eds : *Vingt ans de didactique des mathématiques en France.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

ROBERT A. (1998) *L'épreuve sur dossier à l'oral du CAPES de mathématiques*, I. Géométrie, 2e édition, ellipses.

SANGARÉ M.S. (2004) Modélisation didactique d'un savoir mathématique : la marque d'une transformation géométrique. Symposium Malien des Sciences Appliquées. MSAS 2004 Proceedings http://msas.maliwatch.org/msas2004/proceedings/proceedings.html

SANGARÉ M. (2000) *La rotation : approche cognitive et didactique ; une étude de cas au Mali*. Thèse de l'université du Mali, I.S.F.R.A. Bamako.

Autres documents consultés

• Rapport (2003) Atelier de formation sur les aspects pratiques de la formation des élèves-professeurs de l'École Normale Supérieure de Bamako ; du 15 au 30 septembre 2003 – Bamako.
• « Enseignement de la géométrie au lycée » (2005) séminaire sur les Contenus de formation en mathématiques, DER de Mathématiques, E.N.Sup., mars 2005 – Bamako.

• Programmes de mathématiques du Second Cycle Fondamental (1990) IPN- MEN. Mali.

• Programme de mathématiques de l'Enseignement Secondaire Général (1992) IPN-MEN. Mali.

ANNEXE. Construction du triangle isocèle *XYZ* relevant de la stratégie (S_2)

Plusieurs procédures relevant de la stratégie **(S_2)** peuvent être mises en œuvre pour la construction du triangle-image *XYZ* par la rotation en jeu. Nous en proposons deux.

Procédure1 :

- Construire la demi-droite [*Xx*) parallèle à la demi-droite [*AB*) et de même sens.

- Construire la demi-droite [*Xx'*) telle que ([*Xx*), [*Xx'*)) = α Alors [*Xx'*) est l'image de [*AB*) par la rotation en jeu.

- Construire sur la demi-droite [*Xx'*), le point *Y* qui tel que *XY* = *AB*. *Y* est l'image de *B* par la rotation en jeu.

- Construire le point *Z* en utilisant la conservation des distances et la conservation de l'orientation du plan par une rotation.

Procédure 2 :

- Construire le transformé du triangle *ABC* par la translation qui envoie *A* sur *X*. Notons *XA'B'* ce transformé.

Construire le transformé de *XA'B'* par la rotation de centre *X* et d'angle α. Alors ce transformé est le triangle *XYZ* cherché