QUEL IMPACT D'UNE ÉVOLUTION DU CURRICULUM OFFICIEL SUR LES PRATIQUES ENSEIGNANTES ? ETUDE DE CAS DANS LE CONTEXTE TUNISIEN

Sonia BEN NEJMA, LDAR Paris 7
Faculté des Sciences de Bizerte, Tunisie

Résumé. Cet article s'inspire de notre recherche (Ben Nejma 2009), qui vise à étudier l'impact potentiel d'une évolution du curriculum sur les pratiques enseignantes de professeurs chevronnés. A partir d'une étude de cas en algèbre dans le contexte de l'entrée au lycée en Tunisie, nous essayons d'apporter des éléments de réponses aux questions suivantes : les changements apportés par une réforme impliquent-ils systématiquement les évolutions attendues au niveau des pratiques enseignantes ? Les enseignants passent-ils aisément d'une réforme à une autre au regard des injonctions institutionnelles ? Partant des nouvelles prescriptions curriculaires analysées en termes d'organisations mathématiques et didactiques du savoir à enseigner, nous mettons en évidence, dans le cadre d'une approche anthropologique, les enjeux liés à l'adaptation des pratiques enseignantes à des modifications du curriculum officiel.

Mots clés. Pratiques enseignantes, algèbre, réforme, curriculum, stabilité, adaptations.

Introduction

Nous vivons à l'heure des grandes réformes scolaires basées en partie sur des évolutions des paradigmes d'apprentissages. Au-delà d'évolutions concernant uniquement les objets de savoir à enseigner, les réformes récentes nous semblent suggérer de nouveaux moyens et de nouvelles méthodes d'enseignement des mathématiques.
En partie pour cette raison, il nous a paru intéressant d'observer de près les bouleversements induits par une réforme récente des programmes officiels sur les pratiques de professeurs expérimentés et de chercher à mieux comprendre l'évolution de ces pratiques. Le contexte de notre étude est celui d'une réforme actuelle de l'enseignement des mathématiques au début du lycée en Tunisie. Cette nouvelle donnée institutionnelle fournit *a priori* un cadre et des contraintes nouvelles pour les pratiques des enseignants de mathématiques (Robert 2002, Roditi 2003), mais les professeurs passent-ils aisément d'une organisation de leur enseignement des mathématiques à une autre au regard d'injonctions institutionnelles ? Observe-t-on des résistances ? Des changements ? Des évolutions ? Quels choix adoptent-ils dans ce contexte d'innovation ? Quelles formes prennent d'éventuelles évolutions de pratiques des professeurs, inhérentes à ces modifications du curriculum ? Pour quelles raisons se produisent ou non ces évolutions de pratiques enseignantes ?
Nous exposons tout d'abord une brève étude des différentes réformes des programmes scolaire tunisiens, liés à l'enseignement des mathématiques au début du lycée. Puis nous présentons les résultats issus des analyses de cahiers d'élèves que nous considérons comme un premier révélateur des pratiques enseignantes. Cette étude illustrée par deux études de cas permet de dégager les caractéristiques les plus marquantes des pratiques

de professeurs chevronnés (d'au moins 20 ans d'expérience), en rapport avec les réformes du curriculum, étudiées au préalable. Enfin nous présenterons une étude de cas : les pratiques données à voir par une enseignante viendront éclairer les difficultés apparentes de professeurs expérimentés à adhérer ou à s'adapter aux changements suggérés par la réforme actuelle.

1. Étude institutionnelle : évolutions récentes du curriculum autour de l'algèbre élémentaire, à l'entrée au lycée

1.1 Cadre théorique adopté

Notre recherche se situe dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique, pour étudier ce que nous avons appelé les perturbations exogènes (c'est-à-dire relatives au contexte institutionnel). Nous étudions ainsi les changements prescrits par l'institution considérée dans les *organisations praxéologiques mathématiques et didactiques du savoir à enseigner*. Nous ne nous sommes pas contentée de la réforme des programmes en cours, ou actuelle. La prise en compte de différentes périodes d'enseignement nous a paru cruciale : les organisations mathématiques et didactiques du savoir à enseigner du passé peuvent surgir comme des alternatives consciemment envisagées par des professeurs, ou avoir des influences plus indirectes sur les pratiques enseignantes actuelles.
Les influences de pratiques institutionnelles rencontrées par un sujet au fil de l'histoire des institutions auxquelles il a été assujetti (que ce soit en position d'élève ou de professeur), ont été envisagées par Chevallard (1995) : une personne est quasiment toujours dans une certaine mesure un mauvais sujet de l'institution car son rapport aux objets de savoir se forme par l'intégration au fil du temps des influences exercées par les divers rapports institutionnels auxquels elle a été assujettie. Certaines recherches portant sur les pratiques enseignantes s'appuyant sur l'approche anthropologique (Chaachoua 1997, Coulange 2001) révèlent ainsi des pratiques d'enseignement (d'un thème d'étude donné) contrastées qui bien que contemporaines, se réfèrent à des périodes scolaires antérieures. C'est précisément ce que nous explorons plus avant dans notre travail. Afin de cerner l'impact d'une réforme sur les pratiques enseignantes, il nous a paru intéressant d'analyser les pratiques de professeurs, en nous interrogeant sur l'influence potentielle ou effective de diverses périodes d'enseignement éventuellement vécues par eux en tant qu'acteurs en position d'enseignant au sein de l'institution considérée.
Dans ce cadre, nous considérons les organisations praxéologiques du savoir mathématique à enseigner prescrites à différentes périodes comme pouvant être des repères auxquelles les pratiques enseignantes se réfèrent plus ou moins partiellement, de façon plus ou moins consciente pour les professeurs concernés. Nous parlerons dès lors *d'organisations mathématiques et didactiques de référence.*

1.2 Un contexte institutionnel, l'entrée au lycée en Tunisie et deux thèmes d'étude algébriques

Notre étude s'inscrit dans le contexte scolaire tunisien et nous nous intéressons plus particulièrement à l'entrée au lycée. Précisons quelques éléments de ce contexte pour le

lecteur. La première année de lycée est la première année où l'enseignement se fait en français.[1]. D'autre part, en Tunisie il existe un seul ouvrage scolaire mis à disposition des enseignants et des élèves. L'unicité du manuel officiel tunisien nous a semblé jouer un rôle important du point de vue des marges de manœuvre du professeur dans le choix des organisations mathématiques et didactiques à développer en classe. La mise en texte unique du savoir à enseigner nous paraît a priori devoir contraindre davantage les pratiques des professeurs que dans d'autres contextes où la diversité des manuels scolaires pourrait favoriser l'existence de nombreuses alternatives.
Les programmes officiels liés à l'enseignement des mathématiques au lycée ont subi plusieurs évolutions curriculaires importantes au fil de ces 50 dernières années, relativement similaires pour une part à celles de l'enseignement français. Le schéma ci-dessous récapitule les principales périodes d'enseignement identifiées, correspondant aux changements de programmes officiels (et aux manuels correspondants) :

Période Classique	*Période Maths Modernes**	*Période Contre-réforme*	*Période Contemporaine*	*Période Actuelle*
1958- 1968	*1968-1978*	*1978-1991*	*1991-2002*	*réforme 2002 applicable en 2004*

Nous avons par ailleurs, choisi de centrer notre travail sur l'enseignement de deux thèmes d'étude algébrique : les équations et les systèmes d'équations, qui nous ont paru particulièrement concernés par les récentes évolutions du curriculum.

1.3 Un premier constat : une évolution topogénétique forte suggérée par les organisations didactiques contemporaines et actuelles

Concernant à la fois ces deux thèmes mathématiques spécifiques, mais aussi l'ensemble du savoir mathématique à enseigner à l'entrée au lycée, notre étude a permis de constater une fracture importante entre les organisations didactiques typiques des périodes antérieures (classique, maths modernes et contre-réforme) et celles des deux périodes plus récentes (contemporaine et actuelle). Le changement attendu est avant tout topogénétique, c'est-à-dire relatif aux rôles respectifs des élèves et du professeur dans le processus d'étude, tout comme en France à une époque proche (Coulange 2001, Matheron 2002).
Depuis le début des années 1980, les deux dernières réformes semblent marquer le passage à des formes scolaires d'inspiration constructiviste, avec une place nouvelle faite à l'activité de l'élève souhaitée dans le processus même d'enseignement. Cela se traduit notamment par l'avènement d'activités introductives ou de découverte des savoirs à enseigner dans les manuels officiels (suggérant une place importante laissée au travail de l'élève), et par la diminution nette voire le morcellement d'une mise en texte type « cours » de ces savoirs (se rapportant davantage au discours tenu par l'enseignant).

1 Ce qui nous permettra de citer des extraits des ouvrages scolaires concernés, ou des épisodes de classe sans avoir à les traduire. Une étude plus ancienne (Ben Nejma 2004) visait précisément à étudier les effets de ce changement de langue dans l'enseignement des mathématiques à l'entrée au lycée.

1.4 Un deuxième constat : des dialectiques nouvelles entre différents registres qui interviennent dans le savoir algébrique à enseigner

Concernant l'enseignement de l'algèbre élémentaire au début du lycée, ce changement va de pair avec un accent nouveau mis sur la dimension outil des savoirs algébriques pour modéliser, résoudre des problèmes extérieurs au champ même de l'algèbre, et qui ne soient pas issus comme autrefois (à une période dite classique) uniquement issus du champ de l'arithmétique traditionnelle. Cette perspective d'enseignement se traduit, dans la réforme actuelle, par des dialectiques nouvelles envisagées entre les registres de représentations sémiotiques : registre du langage naturel, registre des écritures algébriques, registre numérique, registre fonctionnel et registre graphique, au sein des organisations mathématiques du savoir à enseigner. La flexibilité entre ces registres et l'élargissement d'application des outils algébriques paraît être une partie du pari de la réforme de l'enseignement tunisien.

1.5 Les thèmes d'étude : équations et aux systèmes d'équations

Nous nous centrons maintenant sur les deux thèmes d'étude : équations et systèmes d'équations (comme étant les plus développés à ce niveau), et les organisations mathématiques et didactiques relatives à ces objets de savoir algébriques, qui apparaissent dans le manuel officiel actuel.
Tout d'abord, le nombre important d'activités introductive ou de découverte (10 pour le seul thème d'étude : systèmes de deux équations à deux inconnues) suggère effectivement une part importante laissée à l'élève dans les premiers moments de l'étude (correspondant à la première rencontre avec les savoirs concernés) et traduit le bouleversement topogénétique annoncé. Ces activités révèlent par ailleurs un souci constant de faire émerger, au sein des organisations mathématiques de savoir à enseigner, des dialectiques entre le registre algébrique et différents registres : numérique et arithmétique, graphique et fonctionnel. Ainsi en va-t-il des trois activités suivantes au sein du thème des équations à deux inconnues, présentes dans le manuel.

Activité 1
Deux dés équilibrés ont leurs faces numérotées de 1 à 6, on lance les deux dés et on fait la somme des nombres obtenus, on désigne par x et y les nombres qui apparaissent sur chaque face.
1-a) Quelle relation doivent vérifier x et y si la somme obtenue est égale à 6 ?
b) Dénombrer alors tous les couples (x, y)
2-a) Quelle relation doivent vérifier x et y si la somme obtenue est égale à 10 ?
b) Dénombrer alors tous les couples (x, y).

Activité 2
Amine dépense 100dinars pour l'achat de cassettes et de CD. Le prix d'une cassette est de 2.50 dinars et celui d'un CD est 15 dinars.
1. Modéliser la situation par une équation.
2. On suppose que Amine a acheté quatre cassettes, combien a-t-il acheté de CD ?
3. On suppose que le nombre de cassettes achetées est le double de celui des CD. Déterminer le nombre de cassettes et le nombre de CD achetés.
4. On suppose que le nombre de CD achetés est égal à une fois et demi celui des cassettes. Déterminer le nombre de cassettes et le nombre de CD achetés.

Activité 3
On se propose de trouver deux nombres m et n tels que le tiers de leur différence est égal à leur somme.
1. Mettre le problème en équation
Donner une valeur du couple (m ; n)
Le couple (3/5,11) répond-il au problème ?
On suppose que n = 3. Trouver m.
a. Donner cinq couples (m ; n) qui sont solutions du problème.
b. Placer les points de coordonnées (m ; n) dans le plan muni d'un repère (O ; OI; OJ). Que remarque-t-on ?

Ce souci d'articuler différents registres du cadre algébrique coïncide avec un rapprochement visible entre les notions de fonctions et d'équations, à travers notamment le lien fait entre la courbe représentative d'une fonction affine (objet d'étude d'un thème au préalable) et l'équation à deux inconnues, qui viennent légitimer la technique résolution graphique d'un système d'équations. L'activité suivante du manuel l'illustre bien :

Une salle de sport propose à ses clients les deux options ci-après.
Première option : le client paye 5 dinars par séance.
Deuxième option : le client paye un abonnement de 28 dinars puis 3 dinars par séance.
On se propose de déterminer graphiquement l'option la plus avantageuse, en fonction du nombre de séances.
1. Exprimer le prix p(x) à payer pour x séances selon la première option.
2. Exprimer le prix p'(x) à payer pour x séances selon la deuxième option.
3. Le plan est muni d'un repère (O, OI, OJ). Déterminer graphiquement le nombre de séances pour lesquelles les deux options sont équivalentes.
4. Discuter suivant les valeurs de x l'option la plus avantageuse.

Mais pour autant dans le manuel officiel (destiné aux élèves), il n'apparaît aucun commentaire d'ordre technologique à ce sujet qui expliciterait les dialectiques entre les registres graphique et algébrique en jeu, ou encore les articulations possibles entre les objets de savoir concernés (notamment entre les fonctions affines et les équations). D'ailleurs, plus généralement, le discours technologique ou théorique apparaît restreint et concentré uniquement sur les savoirs algébriques. La partie identifiable à un cours de l'ouvrage se réduit grosso modo à une présentation des objets de savoir algébrique « équation à deux inconnues » et « système de deux équations à deux inconnues » (enfaisant référence aux types de tâches emblématiques « résoudre une équation ou résoudre un système d'équations ») et une simple description en langage naturel des techniques de résolution algébrique par élimination et par substitution des systèmes d'équations. Contrairement à ce qu'on constate d'ailleurs dans le manuel officiel de la période précédente, tout comme les techniques de résolution graphiques, les techniques de mise en équation sont rendues *muettes* ou *invisibles.*[2] Elles ne font plus l'objet d'aucun commentaire d'ordre général dans l'ouvrage actuel.
Au final, les dialectiques entre différents registres qui émergent au fil des activités de découverte ne font l'objet d'aucun discours technologique ou théorique, visant à

2 Pour préciser la place des techniques dans le travail mathématique, nous adoptons la catégorisation de Assude (2007) qui définit trois types de techniques en fonction des relations entre techniques et discours : « les techniques invisibles (ou muettes) dans une institution sont celles qui permettent de produire un résultat mais qui ne sont pas explicitées, le discours de la technique est absent ou invisible. »

justifier et à légitimer la mise en concurrence ou les articulations données à voir entre les différentes techniques à la fois numériques, algébriques et graphiques enseignées.

Cela nous amène à interroger la visibilité des changements attendus et à leur prise en compte par les professeurs : les enseignants ont-ils conscience des dialectiques entre les différents registres numérique, graphique et algébrique qui émergent au fil des activités du manuel officiel ? En l'absence de discours officiel technologique et théorique à ce sujet, les professeurs sont-ils outillés à la fois sur le plan mathématique et didactique pour gérer de telles dialectiques[3] au sein de leur classe ? Les font-ils vivre et comment ?

2. Étude des pratiques enseignantes, un premier volet à partir de cahiers

Dans un premier temps, afin de nous renseigner sur les pratiques des professeurs dans ce contexte de réforme, nous avons recueilli huit cahiers d'élèves de professeurs chevronnés. Ces cahiers ont été choisis par les enseignants eux-mêmes : nous avons donc fait l'hypothèse que les contenus correspondent bien à leurs attentes. Le choix d'enseignants qui ne soient pas totalement novices se justifie par notre questionnement initial : il s'agit de voir comment les évolutions du curriculum se traduisent ou non par des changements dans les pratiques des professeurs. Nous pensions par ailleurs que l'étude des pratiques d'enseignants très expérimentés, ayant au moins 20 ans d'expérience, nous renseignerait sur l'impact des réformes successives vécues par ces enseignants dans leurs pratiques.

2.1 Les cahiers comme premier indice des pratiques enseignantes

Notre choix méthodologique s'est donc basé sur l'utilisation de cahiers d'élèves comme premier indice des pratiques enseignantes. Tout comme Noirfalise (1995) qui l'avait fait avant nous, ces écrits nous semblent être révélateurs d'une part de ces pratiques, notamment comme mise en texte du travail conduit en classe (dans une partie exercices ou activités), ou comme mémoire du savoir institutionnalisé (dans une partie davantage identifiable à un cours).[4] Précisons toutefois que nous sommes consciente des limites de ce premier indice des pratiques, qui ne dit rien ni des conditions du travail effectué, ni de ce qui a amené aux savoirs apparemment institutionnalisés. Le deuxième volet de notre recherche donnera d'ailleurs une idée de ces limites. A travers l'étude de ces cahiers nous repérons une part des organisations mathématiques et didactique mises à l'étude par les professeurs, autour des thèmes d'étude considérés, et nous mesurons l'écart ou la proximité de ces organisations du savoir enseigné avec *des organisations mathématiques et didactiques de référence* à la fois actuelles ou plus anciennes.

Nous tentons ainsi d'apporter des éléments de réponse aux questions suivantes :

3 Et ceci, alors même que le chercheur en didactique des mathématiques ne doute pas de la difficulté de l'exercice. On peut renvoyer à ce sujet à la notion de jeux de cadres développée par R. Douady (1987)
4 Dans le contexte tunisien, les cahiers d'élèves livrent bien davantage que « ce qu'il y a à savoir ». Tous les cahiers recueillis comportent notamment à la fois une partie « cours » mais aussi toutes les activités et tous les exercices proposés aux élèves et qui ont donné lieu à une correction de la part des enseignants.

* Qu’est ce qui, dans les organisations mathématiques apparemment mises à l’étude par les enseignants, pourrait renvoyer à une organisation mathématique de référence passée ou présente, voire à plusieurs organisations mathématiques ?
* Que révèlent les praxéologies mathématique et didactique sous-jacentes ?
* Quels sont les aspects de conformité ou de non-conformité à ces pratiques de référence autour du savoir à enseigner ?

Pour exemplifier la méthodologie d’analyse suivie, nous présentons deux cahiers d’élèves révélateurs de pratiques contrastées autour des thèmes d’étude *équations du premier degré à deux inconnues et systèmes linéaires* et de rapports institutionnels développés différemment autour des objets algébriques.

2.2 Deux études de cas

2.2.1 Le cahier de Samia

L’étude du cahier de Samia nous paraît dévoiler des contenus typiques d’un enseignement intermédiaire entre réforme (des mathématiques modernes) et contre-réforme.

Des objets de savoir et des techniques algébriques théorisés

L’objet de savoir « équations du premier degré à deux inconnues » est d’abord défini avec une écriture paramétrée (type ax + by + c = 0). Puis des exemples d’équations à deux inconnues sont donnés, avec le souci de présenter différents cas possibles en attribuant des valeurs éventuellement remarquables aux paramètres.

Exemples :
5x+2y -3 = 0
-3x+7y -19=0
2x-10= 0 (cas particulier b=0)
y +1 = 0 (cas particulier a=0)
-7x+9y = 0 (cas particulier c=0)

A la suite de cette introduction, il s’agit de résoudre algébriquement une équation du premier degré à deux inconnues. L’enseignant aborde ce type de tâche en mettant l’accent sur l’infinité des solutions qu’une telle équation peut admettre. Une activité vise explicitement à installer la notion de couple solution. La substitution de valeurs numériques entières ou rationnelles prises par les couples de nombres proposés permet de tester l’égalité en jeu et de faire admettre aux élèves qu’en général, ces équations du premier degré ont une infinité de solutions dans ***R***x***R***.

2) Solutions d’une équation du premier degré à deux inconnues
Activité : Soit l’équation E : 2x-4y +5 = 0. Dire dans les cas suivants si les couples sont solutions de E :(-5/2,0), (1,7) (-1/2,1) (-3,2) (-3/2,0) (4,13/4)
Savoir : Une équation du premier degré à deux inconnues admet une infinité de solutions *dans* ***R***x***R*** *qui sont exprimées sous forme de couples.*

Ensuite, la technique algébrique de résolution d’une équation à deux inconnues est présentée au travers d’écritures d’expressions littérales paramétrées et d’ostensifs symboliques « ensemblistes » qui viennent supporter le propos théorique. Ainsi les trois lettres *sig* (qui figurent avant chaque nouvelle ligne de calcul) sont mises pour « signifie »: elles sont un indice de ce que les professeurs, privés de la possibilité d'employer, à ce niveau, le signe d'équivalence, lui ont trouvé un substitut qui satisfait ce que l'enseignement des « maths modernes » identifiait comme sens de la rigueur.

<u>2° Résolution par le calcul</u>
Soit E: a x +by +c = 0
sig by = - a x – c
sig $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$
$S_R^2 = \{ (x, -\frac{a}{b} x - \frac{c}{b}),\ x \in R \}$
Exemple : On considère l'équation E: 3x – 5y + 7 = 0
1) Résoudre dans R^2 l'équation E
3x-5y +7 = 0
sig -5y = -3x -7
sig $-y = -\frac{3}{5}x - \frac{7}{5}$
sig $y = \frac{3}{5}x + \frac{7}{5}$
$S_R^2 = \{ (x,\ \frac{3}{5}x + \frac{7}{5})$ *avec* $x \in R \}$
2) Citer quelques solutions réelles de E
(0,7/5) ; (4,19/5), (-3,-2/5) $(\sqrt{2},\ \frac{3\sqrt{2}+7}{5})$

A la suite de ce propos – qui se veut un travail sur le cas général d'une équation du type ax + by + c = 0 – est développé un exemple de résolution d'une équation donnée : on note, à la suite de cette résolution, la présence de couples solutions variés dont des couples d'irrationnels qui ont dû être testés, comme pour attester de façon pragmatique de l'infinité de solutions qu'admet une telle équation. Cette technique est ensuite travaillée au fil de quatre équations données (sous la forme canonique cartésienne) :

(E1) 5x -2y +1= 0 ; (E2) 2x -1= 0 ; (E3) $y + \frac{3}{2} = 0$ *; (E4) mx +2y +3= 0*

Les trois premiers exemples montrent le souci d'exhaustivité des cas étudiés (avec des coefficients nuls pour E2 et E3). La dernière équation fait intervenir un paramètre sans que pour autant grand-chose n'apparaisse à ce sujet : le choix d'exprimer y en fonction de x évite d'entrer dans une discussion autour du domaine de validité de l'expression littérale, dont on ne sait si elle a été évoquée dans le cas où l'on aurait choisi d'exprimer x en fonction de y.

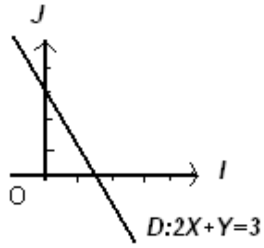
(E4) mx +2y +3= 0
sig 2y = -mx -3
sig $y = -\frac{mx}{2} - \frac{3}{2}$
$S_R^2 = \{(x,\ -\frac{mx}{2} - \frac{3}{2})$ *avec* $x \in R \}$

Une étude partielle de la technique graphique

Dans ce même cahier, la technique graphique de résolution d'une équation à deux inconnues et celle d'un système d'équations sont abordées à la suite des techniques de résolution algébrique. La représentation graphique des solutions est présentée sans arrière plan technologique. L'organisation mathématique développée se résume à un exposé des trois cas possibles qui correspondent aux paramètres a ou b nuls, s'appuyant sur des exemples de tracés de points. La nature de la représentation graphique d'une équation à deux inconnues se réalise sur la base d'un simple constat d'alignement de trois points choisis arbitrairement.

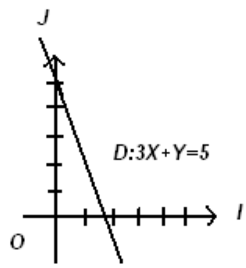
Représentation graphique des solutions d'une équation à deux inconnues :

Soit l'équation 2x +y = 3 ; (1,1) (0,3) (2,-1) sont des solutions
Les points A (1,1), B(0,3) et C(2,-1) sont alignés sur la droite D.
D est la représentation graphique des solutions de l'équation 2x +y = 3
Ainsi les coordonnées de chaque point de D désignent une solution de D : 2x+y=3

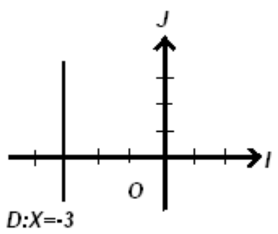


Exercice

Représenter graphiquement les solutions de l'équation 3x+y = 5
3x1 +2 = 5 donc (1,2) solution
3x2 + (-1) = 5 donc (2,-1) solution
3x0 +5 = 5 donc (0,5) solution



**Représenter graphiquement les solutions de l'équation x = -3*
a x +by =c
1x +0y = -3
A (-3,0), B (-3,1)



Savoir *La représentation graphique des solutions de l'équation y = c est la droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point M (0, c).*

La représentation graphique des solutions de l'équation x = c est la droite parallèle à l'axe des ordonnées et passant par le point M(c, 0).

L'organisation mathématique développée autour des systèmes d'équations se présente sous la même forme et laisse penser que ce n'est pas le travail graphique qui constitue l'objectif visé par l'étude de ce thème. Les seuls graphiques qui apparaissent d'ailleurs, dans ce cahier, que ce soit au sein de la partie identifiable au « cours » de l'enseignant ou de la partie « exercices », sont ceux qui correspondent à l'étude des trois cas possibles d'ensembles de solutions d'un système de deux équations à deux inconnues, laquelle est fondée sur les trois positions relatives de deux droites dans le plan.

Un travail quasi-exclusif et isolé des techniques algébriques

Le contenu de ce cahier révèle un enseignement des équations à deux inconnues fortement organisé autour de la résolution algébrique et basé sur un formalisme essentiellement ensembliste. Il est ainsi possible de voir qu'une équation à deux inconnues possède une infinité de solutions et que l'intersection des ensembles infinis de solutions pour un système d'équation donnés aboutit à une solution unique ou à une infinité de solution dans le cas d'équations équivalentes. Cette technique algébrique est travaillée de manière isolée sans être investie dans un contexte de résolution de problèmes. Nous avons aussi noté l'absence frappante de travail sur la mise en équation alors qu'une place importante est accordée au discours théorique, qui légitime et justifie les techniques de résolution algébrique dont le travail est largement prépondérant dans les exercices. Les techniques graphiques mises à l'œuvre sont muettes et apparaissent plus à titre d'illustration, ou « pour donner corps » aux objets de savoir algébrique. Les organisations mathématiques étudiées renvoient à des caractéristiques de praxéologies développées pendant la période de la réforme ; en Tunisie, comme en France : on constate notamment « la disparition d'une dialectique entre arithmétique et algèbre et la « mort » des « problèmes concrets », qui « sont vraisemblablement symptomatiques d'une absence d'enjeux didactiques associés à la mise en équation de problèmes » pendant cette période (Coulange 2000).

Le discours théorique visant à introduire le système de deux équations à deux inconnues se présente sous la même forme : l'objet de savoir est d'abord défini au travers d'une écriture contenant des paramètres puis quelques exemples s'ensuivent, visant à installer la notion de « couple solution d'un système donné » et généraliser cette notion pour un couple (x_0, y_0) donné.

Systèmes de deux équations à deux inconnues

1) Définition

Un système de deux équations à deux inconnues est la donnée de deux équations :

$$\begin{cases} a\,x+by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

où x et y sont les inconnues. Résoudre un tel système c'est trouver l'ensemble des couples (x,y) pour lesquels les deux égalités sont vraies à la fois. Chaque couple est appelé solution du système. Exemple :

$$\begin{cases} 4x + y = 11 \\ x + y = 5 \end{cases} \qquad \textit{(2,3) est-il solution du système ?}$$

$$\begin{cases} 4\text{x}2 + 3 = 11 \\ 2 + 3 = 5 \end{cases} \quad \textit{donc (2,3) est solution du système}$$

Plus généralement (x_0 ; y_0) est solution du système (S) signifie

$$\begin{cases} a\,x_0+by_0 = c \\ a'x_0 +by_0 = c' \end{cases}$$

La présentation des techniques de résolution par substitution, par élimination et par égalisation, est relativement homogène. Elle débute par un discours explicite autour de chaque technique, puis des exemples sont proposés avec une variété dans le choix des valeurs des couples solutions (entières, rationnelles, réelles) mais qui restent à solution unique. On peut citer, pour illustrer, la technique par addition suivie d'un exemple :

Résolution d'un système

a/ Méthode dite par addition

- Exprimer une inconnue en fonction de l'autre à partir de l'une des deux équations.

- Remplacer dans l'autre équation cette inconnue par l'expression trouvée.

- Résoudre cette nouvelle équation.

Déterminer si elle existe la valeur de l'autre inconnue.

Résoudre dans $\mathbf{R}^2$ *:*

$$\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 4x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} x = 5 + 3y \\ 4x + 3y = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 5 + 3y \\ 4(5 + 3y) + 3y = -1 \end{cases}$
$\begin{cases} x = 5 + 3y \\ 15y = -21 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 5 + 3y \\ y = -21/15 \end{cases}$
$\begin{cases} x = 5 - 21/5 \\ y = -7/5 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 4/5 \\ y = -7/5 \end{cases}$

Contrairement à ce qui est développé dans le manuel officiel de la réforme actuelle, les arguments technologico-théoriques qui viennent légitimer les techniques de résolution algébrique des systèmes sont explicités. L'accent est mis sur l'équivalence de systèmes d'équations en rapport avec les règles de conservation de l'égalité comme nous pouvons le constater :

2) Systèmes équivalents

Savoir *: Deux systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues sont équivalents lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions*

$$(S) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$(S') \begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 4x - 4y = 4 \end{cases}$$

$$(S'') \begin{cases} x = 5 - 2y \\ x = 1 + y \end{cases}$$

(S) (S') et (S'') sont des systèmes équivalents

Par ailleurs, on retrouve quelques énoncés à travers lesquels est représenté un système dépendant d'un paramètre mais dont la résolution ne nécessite pas de discussion suivant la valeur du paramètre (on retrouve, sans condition particulière sur m, la valeur de x correspondante) ou certains systèmes dont la résolution s'appuie sur un changement de variables :

Résoudre dans $\mathbf{R}^2$ *:*

$$\begin{cases} 5x^2 + 6y^2 = 26 \\ 4x^2 - 12y^2 = 4 \end{cases}$$

On pose $X = x^2$ *et* $Y = y^2$ *on obtient :*

$$\begin{cases} 5X + 6Y = 26 \\ 4X - 12Y = 4 \end{cases}$$

D'après le système précédent on a
X = 4 et Y = 1
X^2 = 4 et y^2 = 1
x =2 ou – 2 et y 1ou -1

En résumé, on peut dire que dans ce cahier, l'enseignement des équations à deux inconnues et des systèmes linéaires est fortement organisé autour de la résolution algébrique, se basant sur un formalisme en lien avec les notions d'ensembles. Il est ainsi possible de voir qu'une équation à deux inconnues possède une infinité de solutions et que l'intersection des ensembles infinis de solutions pour un système d'équation donnés aboutit à une solution unique ou à une infinité de solution dans le cas d'équations équivalentes. Cette technique algébrique est travaillée de manière isolée sans être investie dans un contexte de résolution de problèmes. Signalons, d'ailleurs, l'absence frappante de travail sur la mise en équation alors qu'une place importante est accordée au discours technologico-théorique qui légitime et justifie les techniques de résolution algébrique dont le travail est largement prépondérant dans les exercices. Les techniques graphiques mises à l'œuvre sont muettes et apparaissent plus à titre d'illustration, ou « pour donner corps » aux objets de savoir algébrique.
Les organisations mathématiques ainsi étudiées renvoient selon nous, à des caractéristiques de praxéologies développées pendant la période de la réforme. L'absence de tout travail isolé de la technique graphique et d'une articulation entre les registres algébrique et graphique, sont des points qui renvoient aussi à une tendance de l'enseignement de l'algèbre de l'époque. Cela ne semble pas être le cas pour le cahier de Meriam, qui semble accorder davantage d'importance à l'aspect graphique du travail algébrique.

2.2.2 Le cahier de Meriam

Les organisations mathématiques développées dans ce cahier mettent en avant certaines caractéristiques propres à la période de la contre réforme. Dés le départ, l'aspect graphique est privilégié pour la construction d'une interrelation étroite entre l'enseignement de l'algèbre et de la géométrie.

Des objets de savoir introduits dans un contexte géométrique

Les « équations à deux inconnues » sont introduites dans un contexte géométrique, à travers une activité qui met en jeu l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient une relation linéaire à deux inconnues

I- Ensemble des points M(x,y) du plan vérifiant a x +by +c = 0
Activité
Soit Δ = {M(x, y) / 2x –y +3) = 0}
Vérifier si les points A (-1,1), B (0,3) C (-5,4) D (2,0) E (-3/2,0) appartiennent à Δ.
A (-1,1) : 2x(-1) -1 +3
= -2-1+3
= 0 donc $A \in \Delta$
B (0,3)/ 2x (0) - 3 +3
= -3+3
= 0 donc $B \in \Delta$
C (-5,4)/ 2x (-5) - 4 +3
= -10 -1
= -11 donc $c \notin \Delta$

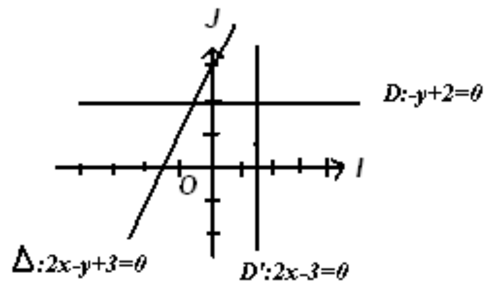
Des techniques de résolution prenant appui sur le registre graphique

A la suite de cette introduction, on voit apparaître le travail graphique qui vient supporter le travail algébrique et qui semble favoriser le passage du formalisme algébrique caractéristique des périodes d'enseignements passées. Ainsi que le dit Coulange (2000) :

« La résurgence du langage « ensembliste » trouve d'ailleurs sans doute ici sa principale raison d'être dans ce rapprochement entre algèbre et géométrie : la droite correspondant à une équation linéaire à deux inconnues est définie comme « ensemble » infini de point ; ceci permet dans l'esprit de la contre réforme de visualiser l'infinité de solutions qu'admet une telle équation » (Coulange 2000, p .130).

La présentation de cette technique faisant toujours apparaître la forme cartésienne de la droite est directement étendue aux cas particuliers des paramètres a et b nuls, en associant la position relative des droites avec les axes du repère comme en témoigne cet extrait :

> *Soit Δ = {M(x, y) / 2x –y +3) = 0}*
> *2) Construire dans un repère orthonormé les points du 1)*
> *3) Que pouvez-vous en déduire ?*
> L'ensemble *Δ = {M(x,y) / 2x –y +3) = 0 } est une droite*
> ***Cas particulier***
> *1^er^ cas a = 0*
> *Construire D = {M(x, y) / –y +2 = 0) dans le repère (o,i,j)*
> *La droite D est parallèle à l'axe des abscisses*
> *2^ème^ cas b = 0*
> *Construire D' = {M(x,y) / 2x -3 = 0)*
> *La droite D est parallèle à l'axe des ordonnées*



Contrairement au cahier précédent, le graphique prend nettement le pas sur l'algébrique. L'alignement des points est prouvé en empruntant des outils de la géométrie analytique comme ceux de vecteurs et de colinéarité disparus des programmes actuels. Ceci permet ensuite une généralisation et une extension du travail aux différents cas particuliers.

> *La représentation graphique de l'ensemble des solutions de l'équation m + 2n = 0 dans un repère du plan est une droite*
> *Démontrons que les trois points A (1,-2) ; B (3,-6) et C (5,-10) sont alignés*
> $\overrightarrow{AB}=(2,-4)$ et $\overrightarrow{AC}=(4,-8)$
> $\dfrac{x_C - x_A}{x_B - x_A} = 4/2 = 2$
> $\dfrac{y_C - y_A}{y_B - y_A} = -8/-4 = 2$
> $\overrightarrow{AC}=2\,\overrightarrow{AC}$

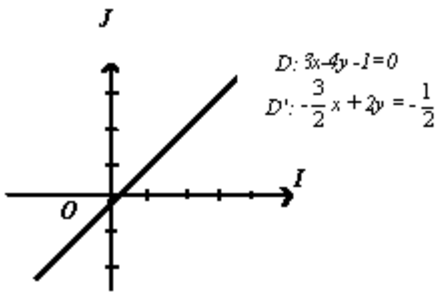
Les vecteurs sont colinéaires donc les points A, B et C sont alignés.
Retenons (0,i,j) est un repère cartésien du plan.
La représentation graphique des solutions de l'équation a x +by +c = 0 est une droite.
Cas particulier
1/ si a = 0 et b ≠ 0 0x +by +c = 0 donc y = - c/b la droite est parallèle à l'axe des abscisses.
Donc $S_R^2 = \{(x,-c/b)$*, tel que* $x \in R\}$
2/ si a ≠ 0 et b = 0 ax +0y +c = 0 donc x = -c/a la droite est parallèle à l'axe des ordonnées.
Donc $S_R^2 = \{(-c/a, y)$*, tel que* $y \in R\}$.

Nous retrouvons un nombre relativement important d'exercices qui portent sur le travail de cette technique. Le type de tâche « résoudre graphiquement les systèmes d'équations donnés » s'étend à l'étude des trois cas particuliers d'ensembles de solutions, qui correspondent aux positions relatives de deux droites dans le plan. Cependant, et contrairement à ce qu'on a pu observer dans les autres cahiers, la formulation des réponses n'est pas apportée sous une forme algébrique .Un discours technologique supporté par la visualisation sur le graphique supplante le formalisme algébrique. Dans le cas où l'ensemble des solutions d'un système est infini, on ne voit pas apparaître l'ensemble de couples de nombres $\{(x, \ldots), x \in \boldsymbol{R}\}$ solutions dans $\boldsymbol{R}\text{x}\boldsymbol{R}$. Un commentaire permet de visualiser graphiquement l'infinité de solutions :

Résoudre graphiquement le système

$$\begin{cases} 3x-4y-1=0 \\ -\frac{3}{2}x + 2y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

D = {M(x,y) / 3x- 4y - 1 = 0)
A (1,1/2) B(3, 2)
D' = { M(x,y)) $\frac{3}{2}x + 2y = -\frac{1}{2}\}$
C (3,2), D (1/3,0)
Les droites sont confondues et les solutions sont donc tous les points de la droite.



Une présentation des techniques algébriques sur la base d'exemples

Comme nous l'avons remarqué, la résolution algébrique occupe une place nettement moins importante que celle relevée dans le cahier précédent. En effet, le type de tâche résolution algébrique des équations à deux inconnues ne fait plus l'objet d'enseignement, seules les techniques algébriques des systèmes d'équations sont enseignées à la suite de la technique graphique avec un appauvrissement visible de l'algèbre enseignée. Nous voyons apparaître sur des exemples, les trois méthodes de résolution, par addition, par substitution et par égalisation. Les techniques sont présentées par ostension. Elles apparaissent de ce fait, faibles voire « muettes »puisqu'on ne relève aucune trace d'un discours technologique qui justifie la conservation de l'équivalence, l'ostensif langagier « *signifie* » semble suffire à pointer le contrôle logique des solutions, absent de l'organisation mathématique étudiée. Tous les systèmes sont non seulement présentés sous la même forme (canonique), mais ils comportent tous des équations à coefficients entiers et admettant une solution unique.

Méthode par substitution

Résoudre dans $\mathbf{R}^2$ *le système*

$\begin{cases} 3x+y+1=0 \\ -x+2y+9=0 \end{cases}$ *signifie*

$\begin{cases} y=-3x-1 \\ -x+2(-3x-1)\,y+9=0 \end{cases}$ *signifie*

$\begin{cases} y=-3x-1 \\ -7x+7=0 \end{cases}$ *signifie*

$\begin{cases} y=-3\times 1-1 \\ x=1 \end{cases}$ *signifie*

$\begin{cases} y=4 \\ x=1 \end{cases}$ *signifie*

$S_{R^2}=\{(1,-4)\}$

Toutefois, certaines caractéristiques du travail algébrique comme la présentation des techniques algébriques « par ostension » ou l'interrelation entre fonction affine et équation de droite (faite au détour d'un énoncé) apparaissent comme des points de rapprochement avec les tendances de la période contemporaine, voire actuelle.

Un lien ténu entre équation de droite et courbe de représentation d'une fonction affine

Le contenu de ce cahier laisse entrevoir le lien entre les fonctions affines et les équations à deux inconnues à travers une application : C'est d'ailleurs la seule occasion ou l'on a retrouvé une trace d'une articulation entre les résolutions graphique et algébrique pour la résolution d'un système d'équations.

On considère les fonctions affines f et g définies par $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *qui à* $x \to 3x-2$ *et* $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *qui à* $x \to 2x+4$

1) *Construire les fonctions affines f et g.*
2) *Déterminer les coordonnées du point d'intersection de* C_f *et* C_g
3) *On considère le système*

$\begin{cases} 2x-y+4=0 \\ -3x+y+2=0 \end{cases}$

Résoudre le système par la méthode d'égalisation. Que remarquez-vous ?

En résumé, nous pouvons dire que le travail autour du graphique représente la principale caractéristique de ce cahier. Contrairement au cahier précédent, le graphique prend visiblement le pas sur l'algébrique. Les dialectiques entre les registres numérique, algébrique et graphique n'apparaissent pas au niveau des types de tâches suggérées.

2.3 Une classification des types de cahiers

Nous ne pouvions bien sûr développer dans cet article l'ensemble des analyses faites sur les cahiers d'élèves dont nous disposons, aussi nous avons fait le choix de montrer comment nous nous sommes servie des questions génératrices d'étude pour analyser les praxéologies développées par les enseignants concernés et les mettre en rapport avec *les praxéologies de référence*. Ainsi notre travail a permis d'aboutir aux résultats suivants pour d'autres cahiers types dont les principales caractéristiques des organisations mathématiques sont synthétisées dans le tableau suivant :

Classification des types de cahiers	**Spécificités du travail algébrique développé**	**Référence aux différentes réformes**
Sara et Samia	• Des objets de savoir et des techniques algébriques théorisés. • Un travail quasi-exclusif et isolé des techniques algébriques. • Une étude partielle de la technique graphique	***Un intermédiaire entre Réforme et Contre-réforme***
Sandra	• Un travail explicite autour de la technique graphique. • Un travail de la technique graphique en lien avec la résolution algébrique. • Une interrelation des techniques algébrique et graphiques dans la résolution des systèmes d'équations.	***Une tendance davantage marquée Contre- réforme***
Meriam	• Des objets de savoir introduits dans un contexte géométrique. • Des techniques de résolution prenant appui sur le registre graphique. • Un lien ténu entre équation de droite et courbe représentative d'une fonction affine. • Des techniques algébriques présentées par ostension sur la base d'exemples. • Une mise en équation qui a le statut de problèmes d'application.	***Une tendance davantage marquée Contre- réforme***
Ramzi	• La mise en équation : un enjeu d'enseignement. • Des objets de savoir algébriques introduits en prenant appui sur le registre numérique. • Des techniques algébriques introduites avec une dialectique ancien-nouveau. • Un travail explicite autour de la résolution graphique. • Une importance nouvelle donnée aux fonctions dans le thème d'étude système d'équations	***Réforme «contemporaine»***
Fatma et Imed	• Une étude peu explicite de la mise en équation. • Des objets de savoir introduits dans un contexte plus algébrique que prévu. • Des techniques algébriques peu explicitées. • Des techniques graphiques qui ne s'appuient pas sur le registre fonctionnel.	***Réforme « actuelle » avec des résidus d'anciennes réformes.***
Siwar	• Une mise en équation présente au fil des activités. • Des objets de savoir « naturalisés » introduits au travers des activités du manuel. • Des techniques de résolution fidèles aux consignes. • Une technique graphique « muette ».	***Réforme « actuelle »***

2.4 Bilan de l'étude

L'analyse réalisée autour des thèmes d'étude « équations à deux inconnues » et « systèmes d'équations à deux inconnues » a permis de dégager certaines caractéristiques du travail algébrique développé par ces enseignants. D'abord, l'absence d'un travail autour de la mise en équation est presque partout manifeste. La résolution de problèmes est quasiment absente alors que l'aspect purement technique est prépondérant accentuant la distanciation par rapport aux organisations préconisées par la réforme.
Le rapport développé à l'algèbre est essentiellement organisé autour de la dimension « objet ». L'enseignement dispensé parait enfermé dans l'utilisation de techniques algébriques algorithmisées qui s'accompagnent d'un discours théorique plus ou moins important. Les techniques mises à l'œuvre autour de la résolution des équations ou des systèmes linéaires sont souvent accompagnées d'une théorisation ou d'un formalisme algébrique et d'une technologie en rapport avec la notion d'équivalence, lesquelles ne font plus l'objet d'étude dans la réforme actuelle. Quant au graphique, les techniques développées servent souvent à illustrer le travail algébrique dominant au sein du domaine d'étude, en se basant essentiellement sur une démarche de pointage : c'est le cas des cahiers de Sara, Samia et Sandra. Exception faite du cahier de Meriam qui révèle des organisations mathématiques plus proches de la « contre réforme », le travail graphique parait être au centre des organisations mathématique. Mais les praxéologies développées à ce sujet prennent davantage appui sur le cadre géométrique que sur le registre fonctionnel, ce qui les éloigne des tendances actuelles.

Dans les cahiers de Fatma et de Imed, le contenu renvoie presque toujours explicitement aux activités du nouveau manuel officiel. Toutefois, les organisations didactiques et mathématiques enseignées sont décalées par rapport aux attentes institutionnelles. Notre analyse pointe des résidus importants d'anciennes réformes qui détournent les enjeux des activités mises en œuvre, l'introduction des outils algébriques paraissant rarement problématisée au fil des dialectiques avec les registres numérique et fonctionnel suggérés par les directives officielles.

En ce qui concerne les organisations didactiques qui accompagnent la mise en place des organisations mathématiques développées autour de ces deux thèmes d'étude, elles montrent des caractéristiques qui ne sont pas propres à l'enseignement de ces notions. Il s'agit d'une organisation ternaire proche du « cours magistral » qui fait apparaître trois phases : une première phase où l'objet d'étude est présenté par ostension sur un exemple, une phase de synthèse où l'objet est institutionnalisé et une phase d'application où l'objet d'enseignement est directement investi à travers une application directe de la définition, propriété ou technique institutionnalisée.
Seul le cahier de Siwar semble en relative conformité avec l'organisation de l'étude prévue dans le manuel officiel : même si les activités choisies reposent sur des énoncés plutôt « classiques » et si on entrevoit ici ou là quelques résidus symboliques plutôt typiques des anciennes réformes. les activités du manuel sont reprises et ne semblent pas « détournées ». Notamment, le travail de mise en équation est développé dans le sens prévu (avec des étapes de modélisation rendues explicites). On ne trouve pas de trace d'un discours formel tenu sur les techniques de résolution algébrique, et la technique graphique est abordée en lien avec le registre fonctionnel.

Mais cette « fidélité apparente » aux organisations mathématiques et didactiques de référence pour la réforme actuelle reste difficile à confirmer sur la seule base de l'étude d'un cahier. Cette étude ne permet pas en effet, d'approcher la gestion didactique qui accompagne les activités ou tâches mises en œuvre. Qu'en est-il dans les faits des pratiques enseignantes du professeur de *Siwar* ? C'est cette question qui nous a conduit à mener l'étude de cas, que nous allons maintenant évoquer.

3. Étude de cas : analyse des pratiques de professeur en classe

Nous avons choisi d'observer plusieurs séances dans la classe de Madame P, professeur de l'élève Siwar, au fil de son enseignement dispensé sur les équations à deux inconnues et les systèmes d'équations. L'analyse du corpus de données relatives à ces observations permet de mettre en évidence les aspects de conformité ou de non-conformité des pratiques de l'enseignante aux organisations mathématiques et didactiques mises en avant par la réforme actuelle.

3.1 Des organisations mathématiques « calquées » sur les praxéologies de référence

Tout comme pouvait le laisser penser l'étude préalable du cahier de Siwar, les organisations de savoir mises à l'étude comportent de nombreux points de conformité apparents avec les praxéologies mathématiques de référence.
Notamment Mme P reprend scrupuleusement les activités de découverte proposées par le manuel officiel en suivant l'ordre indiqué .Les consignes sont suivies pas à pas, en respectant les découpages préconisés par l'ouvrage. Mais sa gestion laisse entrevoir des déséquilibres apparents au niveau des types de tâches abordés.

3.2 Un travail de mise en équation muet ou masqué ?

En ce qui concerne le travail de mise en équation, nos observations ont pointé le fait que les techniques afférentes (choix des inconnues, identification des relations et écriture des équations), sont rendues muettes par Mme P. De fait, l'enseignante ne fait pas d'extension de l'organisation mathématique à ce sujet et ne cherche aucunement à légitimer la technique de mise en équation .Plus encore, ces techniques paraissent totalement masquées par sa gestion didactique. Même lorsque les consignes convoquent des types de tâches non triviaux, les techniques mises en jeu sont systématiquement passées sous silence. C'est toujours l'enseignante qui propose elle-même d'emblée l'équation modélisant la situation, soit en dictant la réponse à l'élève envoyé au tableau, soit en prenant à sa charge l'écriture de cette équation et en faisant apparaître tout au plus l'étape de désignation des inconnues. Les deux extraits de transcription suivants (relatifs aux activités 1 et 2 sur les équations à deux inconnues précitées) le montrent bien.

Activité 1
E1 : Madame Madame
E1 passe au tableau et P lui dicte :
P : On désigne par x et y les nombres qui apparaissent sur chaque face des deux dés
a- La relation entre x et y est définie par : $x + y = 6$

P : vous encadrez le résultat, bon 2ème question combien il y a de couples (x, y) tel que x plus y égal 6.
P : Activité 2, notre problème est de modéliser la situation le prix d'une cassette est 2.500 dinars le prix d'un CD est 15 dinars et la somme d'argent est 100 dinars.
E2 : Madame / P1 : Il faut d'abord désigner x le nombre de cassettes et y le nombre de CD
P écrit au tableau et les élèves recopient :
a) On désigne par x le nombre de cassettes. On désigne par y le nombre de CD. Sachant que le prix d'une cassette est 2,500D et le prix d'un CD est 15D
b) Mise en équation : 2,500 x + 15 y = 100

Cela va de pair avec un *topos* inexistant pour l'élève relativement à ce travail de mise en équation, l'élève envoyé au tableau se contentant au plus de recopier ce que P lui dicte (et les autres de recopier ce qui est écrit au tableau). Cela se traduit par une "phase d'action" récurrente : Mme P fait lire l'énoncé par un élève, fait passer un deuxième élève au tableau pour lui dicter la réponse, celui-ci lui servant dès lors de *porte-craie* sur cette phase de l'activité. Et ce malgré une volonté parfois apparente de certains élèves souhaitant intervenir publiquement pour contribuer à l'accomplissement de la tâche de mise en équation.
Ces constatations nous ont conduit à supposer que la mise en équation ne représente pas un véritable enjeu d'enseignement pour l'enseignante ; ceci est confirmé par la quasi-absence de ce type de tâches dans les contrôles.

3.3 Des déséquilibres apparents dans les dialectiques entre registres

Par ailleurs, si les organisations mathématiques apprêtées par Mme P convoquent effectivement des passages entre le registre algébrique et les registres graphico-fonctionnel ou numérique, ces passages ne sont pas mis en valeur ou problématisés par sa gestion de classe.

3.4 Des techniques numériques cachées ou ignorées

Ainsi si notre analyse *a priori* des deux premières activités introductives des équations à deux inconnues et des systèmes d'équations permet d'envisager des résolutions à caractère numérique des problèmes proposés, ce type de stratégies semble masqué ou ignoré par P en situation de classe. En effet elle réinterprète ou détourne les stratégies d'élèves émergeant visiblement du cadre numérique dans le cadre algébrique. Par exemple, pour l'activité 1 précitée, l'enseignante reformule les réponses d'élèves en introduisant les notions de couples *(x ; y)* et d'équation comme si elles allaient de soi.

P: La question c'est ? Dénombrer tous les couples (x, y)
E3 : Madame / 19-P1 : oui / 20-E3 : 1plus 9 / 21-E1 : 2+8
P : ne parlez pas ensemble, chut est ce qu'on peut avoir 2+8 ? Regardez les faces ne dépassent pas…
E5 : oui madame encadré entre 1 et 6 /
P : On va donc dénombrer ces couples
E : les couples 4,6 ; 5,5 ; 6,4
P : que peut-on dire de des couples ? Chaque couple vérifie l'équation….

De la même façon, en ce qui concerne l'activité introductive des systèmes d'équations, l'enseignante refuse les propositions d'élèves qui vont dans ce sens alors qu'elles paraissent d'autant plus naturelles qu'à ce moment de l'étude aucune technique algébrique de résolution des systèmes d'équations n'a été introduite. Elle impose d'emblée une technique algébrique de résolution qui s'apparente à la méthode par élimination :

> *P : maintenant on va chercher N et R, les valeurs de N et R doivent vérifier la 1ére et la 2éme équation, ce sont les mêmes nombres (le silence règne dans la classe, P reprend)*
> *P : Une idée ? on veut trouver R et N, vous avez un nombre bien déterminé de boules rouges et un nombre bien déterminé de boules noires dans la boite, ce nombre ne va pas changer, comment faire pour trouver ces nombres ? /*
> *E5 : On peut simplifier madame ?*
> *E3 : On choisit des nombres*
> *P : **Donne-moi une façon pour passer au tableau** /*
> *E2 : La somme madame*
> *P : Chut…suivez, on obtient quoi, on fait 3N plus 4N égal R-3 plus R+4, 7N égal 2R +1, une équation qui a combien d'inconnue ? On veut obtenir R tout seul et N tout seul. C'est clair ou non ?*
> *E : Non.*

Le commentaire de P : « donne-moi une façon pour passer au tableau » peut d'ailleurs être interprété comme une explicitation d'une règle du contrat didactique : les solutions attendues ou qui méritent d'être rendues publiques sont de nature algébrique.

3.5 Une technique graphique dévalorisée

Le travail graphique autour de la résolution n'est pas mis en avant dans la gestion de Mme P : elle dicte à l'élève envoyé au tableau les sous-tâches isolées correspondantes qui convoquent des techniques étudiées au préalable au sein des thèmes d'étude « fonctions linéaires et affines », sans préciser au final qu'il s'agit d'une autre technique de résolution des systèmes. De plus, suite à des difficultés d'échelle rencontrées par les élèves dans la représentation graphique, l'enseignante sollicite d'emblée une résolution algébrique afin de valider la solution trouvée graphiquement :

> *P dicte à Amel qui écrit au tableau :*
> *p(x) et p'(x) désignent les prix à payer pour x séances respectivement pour la $1^{ère}$ et la $2^{ème}$ option.*
> *p(x) = 5x*
> *p'(x) = 28 + 3x*
> *P : la première c'est une fonction ? / E : linéaire / P1 : la $2^{ème}$? / E : affine Amel écrit : p : est une fonction linéaire ; p' : est une fonction affine / P1 : vous savez bien que la fonction linéaire se représente par une droite, bon on va faire des tableaux de valeurs.*
> *P : ça suffit, 28 c'est trop ? Qu'est ce qu'on va faire, bon termine, chut…*
> *E2 : On prend –7, Madame*
> *E3: -5 !*
> *P : Quoi? On va payer des séances négatives ! il faut être précis, on peut ajouter quelques valeurs de x et ajouter d'autres points. Qu'est ce que vous remarquez pour A ? Il doit vérifier la $1^{ère}$ et la $2^{ème}$. Si x = 14 ? Silence !*
> P écrit au tableau *: D : y = 5x*
> *D' : y = 3x + 28*
> *P : Il faut vérifier à la fois la $1^{ère}$ et la2ème, à la fois, les deux options sont équivalentes lorsque p(x) = p'(x).*

3.6 Un registre algébrique omniprésent

Le travail algébrique apparaît d'ailleurs omniprésent au fil de la gestion des activités proposées ; contrairement au travail graphique, il fait l'objet de diverses explicitations de la part de l'enseignante. Notamment, celle-ci explicite systématiquement les sous-tâches à l'œuvre derrière les tâches convoquées par les énoncés, ce qui minore certes le travail autonome des élèves à leur sujet, mais lui permet de tenir un discours sur les techniques en introduisant parfois des éléments de savoir justifiant pour elle l'utilisation de ces techniques.

> *E1 : on prend 3Nsur 4N égal R-3 sur R +4.*
> *P : N disparaît, si on divise, peut être bien, on fait le rapport vous essayez, peut être bien.*
> *P écrit au tableau :*
> *N= (R-3)/3*
> *N= (R+4)/4*
> *P : on obtient deux équations équivalentes à la 1ére, N c'est le même N.*
> *Elle continue à écrire : (R-3)/3 = (R+4)/4*
> *P : par suite on fait./ 70-E : 3 fois… produit des moyens égale produit des extrêmes*
> *4(R-3)=3(R+4) et 4R – 12 = 3R +12*
> *P : on obtient alors une équation à une inconnue, on continue…*

On voit comment l'enseignante cadre fortement le travail effectué par un élève – voire par elle-même – au tableau tout en rajoutant des commentaires : « on obtient deux équations équivalentes à la 1ère, N c'est le même N. », « produit des moyens égale produit des extrêmes », commentaires qui visent à décontextualiser les techniques mises en œuvre ou à en justifier l'usage en se plaçant à un niveau technologique. Ce discours enseignant qui renforce les techniques algébriques est récurrent au fil des observations conduites.

3.7 Le *topos* de l'élève lié aux connaissances anciennes devenues mobilisables

Cette gestion des organisations mathématiques relatives à la résolution des équations et des systèmes d'équations linéaires fait que le *topos* de l'élève parait restreint, se contentant *à minima* de suivre les explications données au tableau. Mais l'élève presque systématiquement envoyé au tableau se voit accorder davantage d'autonomie dans le travail mathématique. Pour une technique algébrique nouvelle, le découpage en sous-tâches reste pris en charge par l'enseignante qui dicte les différentes étapes correspondantes. Mais si ces sous-tâches correspondent à la mobilisation de connaissances anciennes (comme la résolution d'une équation à une inconnue, représentation graphique de fonctions par exemple, traitement des expressions algébriques), l'élève est censé les accomplir sans l'aide de la professeure.
L'épisode retranscrit ci-dessous illustre bien cette répartition du travail algébrique entre l'enseignante et l'élève au tableau : charge au professeur d'indiquer les techniques en jeu (« vous simplifiez », « puis on regroupe les m et n », etc.), et à l'élève d'exécuter les tâches indiquées rencontrées auparavant au sein du domaine algébrique.

> *P fait passer un élève au tableau qui écrit : 1/3(m-n) - (m +n) = 0*
> *P : ça s'écrit aussi…continue E3 écrit : m/3 – n/3 –m – n = 0*
> *P : vous simplifiez jusqu'à la fin puis on regroupe les m et n*
> *E3 écrit m/3 – 3m/3 –n/3 – 3n/3 = 0*
> *-2m/3 – 4n/3 = 0*

P : on aurait pu écrire m-n = 3 (m + n) c'est plus facile encore bon alors ça s'écrit encore…
E3 écrit 2m + 4n = 0
P : simplifie encore

3.8 Le rajout d'ostensifs symboliques avec une illusion de transparence

L'omniprésence du registre algébrique se traduit également par le rajout d'ostensifs sans en problématiser l'introduction ou en préciser la fonctionnalité, comme si les non-ostensifs ainsi convoqués allaient de soi pour les élèves. C'est particulièrement visible dans les activités introductives : Mme P se saisit des réponses à caractère numérique des élèves concernant des paires solutions de l'équation symétrique : x + y = 6, en les restituant sous formes de couples solutions sans aucune justification, notamment sans s'attarder sur les « couples symétriques » qu'elle rajoute d'elle-même à la liste de nombres donnée par les élèves :

E2 : x égal 3 y égal3/ E3 : x égal 2 y égal 4
P : bon on va compter tous les couples Maroua écrit au tableau ce que P1 lui dicte : (3 ;3), (5 ; 1), (2 ; 4), (1 ; 5), (4 ; 2)
P : il y a cinq couples, à votre place, on passe à la $2^{ème}$ question essayez de répondre

Pourtant la nature même de cette activité pouvait inciter à ce type d'effets didactiques, puisqu'il s'agissait bien d'écrire les couples solutions de cette équation, sur la base d'un travail qui pouvait être mené dans le cadre numérique sans se préoccuper de la nature symétrique de la relation reliant les données. D'autre part, sans que le manuel officiel n'y fasse référence, l'enseignante importe parfois d'elle-même des ostensifs renvoyant à des non-ostensifs qui paraissent transparents à ses yeux. Elle agit ainsi pour des ostensifs symboliques liés aux ensembles de solutions :

P : Vous écrivez donc S égal quoi ?
E : le couple moins cinq deux
P : bien vous écrivez (elle écrit au tableau) $S_{R^2} = \{(-5,2)\}$
E1 :Brouhaha… Madame
P : Taisez vous silence, je vous ai donné l'activité 9, vous l'avez fait ou non. ?

L'ostensif « $S_R{}^2 = \{…\}$ » ne fait pourtant l'objet d'aucune attente institutionnelle liée à la réforme et n'apparaît nulle part, ce qui peut expliquer la réaction tant soit peu agitée des élèves rencontrée lorsque l'enseignante l'introduit sans en dire un mot. Et pourtant, Mme P en attendra bien un usage de leur part par la suite.

On peut interpréter ces rajouts répétés d'ostensifs symboliques, sans introduction explicite ou problématisée des non-ostensifs correspondant de la part de l'enseignante, comme des héritages incontrôlés de la dimension ostensive des organisations de savoir algébrique enseignées par le passé (Réforme, Contre-Réforme). Cette introduction « naturalisée » d'ostensifs symboliques ne se heurte pas toujours, de la part des élèves, à des résistances aussi clairement exprimées que dans l'épisode évoqué ci-dessus. Les élèves envoyés au tableau tentent d'ailleurs d'eux-mêmes de les réutiliser par la suite pour répondre aux attentes de l'enseignante, mais parfois de façon incontrôlée et confuse.
Ainsi des confusions apparaissent par la suite, révélant l'absence de significations données par les élèves aux symboles mis en jeu :

E3 écrit au tableau après avoir résolu le système : S = {480, 320}
P : Rajoute les parenthèses … vérifiez …
*E6 : Pourquoi on met pas **R** au carré madame ?*
P : C'est pareil, c'est une solution unique P rajoute $\boldsymbol{R}^2$*.* $S_{\boldsymbol{R}^2}$ *= {(480, 320)}. L'ensemble des solutions de ce système est formé par le couple quatre cent quatre-vingts, trois cent vingt*

3.9 Bilan : une conformité en surface à la réforme actuelle

Tout comme pouvait le laisser penser l'étude préalable de ce cahier, les organisations de savoir mises à l'étude comportent de nombreux points de conformité apparents avec les praxéologies de référence et une appropriation par l'enseignante de la structure macro de l'organisation didactique. Toutefois, si le support du travail en classe est assez fidèle aux propositions du manuel officiel, la conformité des organisations mathématiques et didactiques enseignées au praxéologies de référence reste une conformité « de surface ». L'activité mathématique liée à la mise en équation a priori convoquée par ce support est presque totalement masquée par l'enseignante ou tombe dans le topos du professeur, l'élève ne les assume pas en première personne, il lui est seulement demandé d'en suivre l'effectuation. Mais ce point, rendu aveugle au niveau des organisations mathématiques enseignées par Mme P, ne demeure pas le seul vide institutionnel perçu : nous avons mis en avant l'absence de problématisation du passage d'un registre de représentation sémiotique à un autre. Cette absence d'enjeu opère un effet sensible sur la dimension sémiotique des organisations mathématiques, notamment par le rajout non problématisé d'ostensifs et une illusion de transparence.

Conclusion

Notre étude a permis de montrer une forte stabilité des pratiques enseignantes typiques de périodes d'enseignement pourtant anciennes, type réforme ou contre-réforme, qui correspondraient aux périodes vécues par les enseignants concernés lors de leurs premières années d'exercice. Leurs pratiques nous ont paru peu transformées ou marquées par les deux dernières réformes entrées en vigueur. L'enseignement dispensé reste essentiellement organisé autour de la dimension objet des savoirs algébriques à enseigner ; les techniques de résolution algébrique mises à l'étude font l'objet d'un discours théorique important, soutenu par des contenus formels explicites. En revanche, les techniques de résolution graphique (présentes à titre principalement illustratif des techniques algébriques) ou la mise en équation de problèmes (absente) sont loin d'occuper la place attendue. Ces résultats nous ont paru d'autant plus forts dans le contexte tunisien que la présence d'un manuel officiel « unique » aurait pu laisser croire à un système de contraintes explicites imposant une « unique » façon de faire aux enseignants concernés – par contraste avec d'autres pays où, pour une même réforme du curriculum, plusieurs manuels existent, et représentent des alternatives éventuelles de pratiques, plus ou moins conformes aux attentes institutionnelles. Le détournement fort d'organisations mathématiques du manuel officiel par certains enseignants « résistants » au changement (qui ne retiennent, par exemple, des problèmes à mettre en équations, que les équations ou les systèmes d'équations qu'ils donnent directement à résoudre à leurs élèves), ainsi que l'importation d'organisations mathématiques du savoir à enseigner sans lien aucun avec ce manuel interrogent les libertés prises par les enseignants expérimentés dans ce décor institutionnel. Est-il aussi simple de s'adapter à une réforme ?

L'étude de cas que nous avons menée nous a permis d'interroger la stabilité des pratiques observées, en nous éclairant de façon complémentaire sur ces formes de résistance au changement. Elle montre, d'une part, la difficulté d'une enseignante de faire évoluer sa pratique, notamment du point de vue des bouleversements topogénétiques attendus. La répartition des rôles entre le professeur et les élèves vis-à-vis des savoirs engagés est toujours la même : le *topos* de l'élève se résume *a maxima* à la mobilisation de techniques algébriques déjà étudiées, suivant un découpage prédéterminé par l'enseignante. Cet agencement est loin de l'organisation de l'étude visiblement attendue par les auteurs du manuel officiel, qui sous-entendent un important déplacement du travail conduit en classe « vers l'élève » au fil des activités proposées. D'autre part, cette étude montre l'existence de zones d'implicites dans les organisations mathématiques de la réforme actuelle qui semblent faire difficulté dans leur mise en scène didactique par le professeur, finalement peu averti des tenants et aboutissants épistémologiques de ces organisations du savoir à enseigner. L'étude des pratiques effectives d'une enseignante montre ainsi une reprise des activités ou des bribes de discours théorique de l'ouvrage presque « tels quels », tandis que ses interventions didactiques semblent souvent modifier le projet didactique global attendu. Par exemple, sa gestion déséquilibre fortement les dialectiques prévues entre les techniques arithmétiques, numériques ou graphiques et les techniques algébriques, les premières étant d'emblée rendues muettes ou très faibles. Seules les techniques algébriques apparaissent sur le devant de la scène didactique. La présentation de ces techniques, qui sont implicites voire naturalisées dans la réforme, donne parfois lieu à l'ajout d'ostensifs symboliques par l'enseignante, sans que ceux-ci ne fassent guère l'objet d'explicitation, le tout renforçant davantage la dimension symbolique du travail algébrique.

Au final, si notre travail a permis d'éclairer certains phénomènes liés aux pratiques enseignantes dans un contexte de réforme, elle nous semble aujourd'hui aboutir à un nouveau questionnement lié aux conditions de diffusion d'une réforme, ou d'un nouveau projet global d'enseignement (d'un domaine d'étude, voire d'une discipline). Il y a là une réalité essentielle : les enseignants peuvent appliquer une réforme de façon « superficielle », le changement induit n'a d'impact réel que s'il est signifiant pour les enseignants, s'ils en comprennent les finalités, adhèrent à ses orientations et s'approprient ses fondements par des adaptations qui s'inscrivent dans une démarche d'apprentissage. Cette nouvelle problématique nous parait renvoyer à des questions attenantes à la formation des pratiques si l'on considère la formation initiale et continue comme un instrument permettant une adaptation, voire une adaptabilité des pratiques – c'est-à-dire, plus généralement, une capacité des pratiques enseignantes à s'adapter au fil de différentes réformes.

Bibliographie

ASSUDE T., GELIS M. (2002) .La dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de cabri- géomètre à l'école primaire. *Educational studies in Mathematics*, 50.3, 259-287.

ASSUDE T ; MARGOLINAS C. (2005) Aperçu sur les rôles des manuels dans les recherches en didactique des mathématiques. Manuel scolaires, regards croisés.

BEN NEJMA S. (2004) *La mise en équation en première année de l'enseignement secondaire tunisien : Transition collège/Lycée*. Mémoire de DEA, Université de Tunis.

BEN NEJMA S. (2009) *D'une réforme à ses effets sur les pratiques enseignantes-Une étude de cas : l'enseignement de l'algèbre dans le système scolaire tunisien* .Thèse de Doctorat, Université Paris-Diderot, Paris7 et Université de Tunis.

CHAACHOUA H. (1997) *Fonction du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Etude d'un cas : la vie des problèmes de construction et rapport des enseignants à ces problèmes*, Thèse de Doctorat de l'université Joseph Fourrier- Grenoble1.

CHEVALLARD Y. (1989) .Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège, deuxième partie, perspectives curriculaires : la notion de modélisation, *Petit x* 19, 43-72.

CHEVALLARD Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. 3ème partie : voies d'attaques et problèmes didactiques. *Petit x*, 23, 5-38.

CHEVALLARD Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol 12 n°1, 73-111, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*. 19(2) 221-266.

CHEVALLARD Y. (2002) Organiser l'étude 1 : Structures et Fonction. *Actes de la 11éme école d'été de didactique des mathématiques*. pp1-19. La pensée sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD Y. (2002) Organiser l'étude 3 : Ecologie et Régulation. *Actes de la 11éme école d'été de didactique des mathématiques*. 1-24. La pensée sauvage, Grenoble.

COULANGE L. (2000) *Etude des pratiques du professeur du double point de vue écologique et économique-Cas de l'enseignement des systèmes d'équations et de la mise en équations en classe de troisième*. Grenoble: Thèse de l'Université Joseph Fourier

COULANGE L. (2001) Evolutions du passage arithmétique-algèbre dans les manuels et les programmes du 20ème siècle. Contraintes et espaces de liberté pour le professeur. *Petit x*. 57, 61-78.

MATHERON Y. (2002) Les pratiques ostensives comme travail de construction d'une mémoire officielle de la classe dans l'action enseignante. *Revue française de pédagogie*, n°141, pp57-66.

NOIRAFALISE R (1995) Une analyse de pratiques des élèves et des enseignants de mathématiques à partir du cahier de l'élève : d études de cas. Petit x.N°38. p. 5-29.

ROBERT A., ROGALSKI J. (2002) Le système complexe stable et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *La revue canadienne de l'enseignement des sciences mathématiques et technologiques.* pp505-528.

ROBERT A. (2007) Stabilité des pratiques enseignantes de mathématiques (second degré) : une hypothèse, des inférences en formation. *Recherches en didactique des mathématiques*. 27(3) 271-312.

RODITI E. (2005) Régularité et variabilité des pratiques ordinaires d'enseignement. Le cas de la multiplication des nombres décimaux en sixième, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 23/2, pp 183-216 éd. La pensée sauvage, Grenoble.

ROGALSKI J. (2003) Y a t-il un pilote dans la classe ? Une analyse d l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 3, pp 343-388, éd. La pensée sauvage, Grenoble.

SENSEVY G., MERCIER A et al. (2007) Agir ensemble : L'action didactique conjointe du professeur et des élèves. *Presses universitaires de Rennes*.