RÉSOLUTION DES PROBLÈMES D'OPTIMISATION LINÉAIRE PAR DES ÉLÈVES DE 16 ANS AU SECONDAIRE. L'analyse d'une expérimentation

Adolphe Adihou
Université du Québec à Rimouski

Résumé. L'article présente une étude traitant des activités algébriques qui sous-tendent la résolution des problèmes d'optimisation linéaire proposés à des élèves de 16 ans au secondaire[1] (résolution des systèmes d'équations et d'inéquations). La résolution de ces problèmes se situe dans une perspective d'enseignement de la modélisation mathématique et d'enseignement par la modélisation mathématique.

Mots clés. Résolution de problèmes, système d'équations, optimisation linéaire, algèbre, modélisation.

Introduction

La résolution de problèmes d'optimisation linéaire par des élèves de 16 ans en 5[e] secondaire (l'équivalent des élèves des classes de 1[re] au lycée en France) est une activité dite globale au sens de Kieran. En effet, Kieran distingue trois catégories d'activités algébriques : des activités génératives, ces activités relevant de la dépendance fonctionnelle, de la mise en relation entre variables indépendantes et dépendantes ; des activités transformatives qui se rapportent aux expressions symboliques et à leurs différentes écritures équivalentes et des activités globales (« global-meta ») qui se réfèrent à la modélisation et à la généralisation. Par ailleurs, les problèmes d'optimisation linéaire sont semblables aux problèmes de modélisation au sens de Grugeon[2] (2000) et de Chevallard (1989). Les enseignants les proposent aux élèves pour faire le lien avec d'autres disciplines comme l'économie et la biologie, et pour donner du sens à certains objets mathématiques tels les équations, les inéquations, les fonctions, les expressions algébriques, etc. (Kieran, 1996).

Dans le programme de 5[e] secondaire, ces objets sont enseignés et utilisés comme outils pour résoudre des problèmes. Leur mise en évidence entraîne, d'une part, des activités génératives dans des situations où les élèves apprennent à formuler des équations et, d'autre part, des activités transformatives au cours desquelles ils apprennent à les manipuler. Dans les activités génératives, les élèves doivent aussi donner du sens aux systèmes d'équations linéaires en faisant des représentations graphiques (recherche du polygone des contraintes).

Si le recours aux problèmes d'optimisation est une occasion pour donner du sens à certains objets mathématiques (équations, inéquations), ces problèmes renvoient à la modélisation mathématique au secondaire, mais aussi au contrôle (Balacheff, 2001; Bélair,

1 Les élèves de 16 ans au Québec sont des élèves de 5[e] secondaire. L'équivalent de ce niveau en France est la classe de Première (1[re] lycée).

2 Grugeon (2000, 1997) situe les compétences algébriques en caractérisant quatre types de problèmes algébriques : les problèmes arithmétiques, les problèmes de généralisation, les problèmes de modélisation et les problèmes des cadres algébrique et fonctionnel.

2004) des étapes qui la structurent. À ce propos, Grugeon (2000) précise que *« la compétence algébrique ne s'évalue pas seulement à travers la capacité à transformer des expressions. Elle s'évalue aussi à travers la capacité à résoudre des problèmes où l'algèbre intervient comme outil pertinent. Il s'agit d'être capable de produire des expressions et des relations algébriques pour traduire un problème, de les interpréter puis de mobiliser les outils algébriques adaptés à sa résolution »(page 7).*

De plus les recherches doctorales de Adihou (2004) sur la résolution de problèmes à texte à l'aide des systèmes d'équations montrent comment de telles résolutions offrent l'occasion de faire de l'algèbre. Ces recherches amènent certains questionnements, entre autres, sur la pertinence de recourir aux problèmes à texte pour résoudre des systèmes d'équations, ainsi que sur l'articulation entre *«résolution de problème»* et *«utilisation de l'algèbre comme outil »* lors d'activités de résolution pour apprendre l'algèbre au secondaire. Sur la base d'observations, de productions écrites récoltées auprès d'élèves de 12 à 13 ans et d'enseignants de l'école secondaire genevoise et de l'analyse de notre corpus, nos recherches rendent compte des difficultés liées à la résolution de ces problèmes en contexte d'enseignement et d'apprentissage des techniques de résolution des systèmes d'équations à deux inconnues. Elles mettent en évidence le rôle de la méthode algébrique (marche à suivre et algèbre), ainsi que les phénomènes didactiques issus du recours à la méthode. En référence aux contenus algébriques attendus par le professeur et aux connaissances algébriques utilisées par les élèves, l'analyse des problèmes a fait ressortir les activités algébriques et les transpositions qui sous-tendent les résolutions. L'analyse de ces problèmes a permis une meilleure compréhension, d'une part, des enjeux didactiques des activités de résolution de problèmes pour apprendre l'algèbre et une meilleure compréhension du rôle de la méthode algébrique de résolution et, d'autre part, a mis en lumière les tensions et les conflits qu'entraîne le recours à la « *résolution de problème » et à « l'utilisation de l'algèbre* » comme des outils didactiques dans l'enseignement et l'apprentissage des techniques. Nous avons constaté que peu de temps est accordé à ces activités au secondaire et les élèves ne font pas toujours des résolutions algébriques (Adihou, 2004) pour mettre en évidence ces objets et les utiliser. Eu égard à ces constats, nous avions entrepris, lors de notre formation doctorale, une recherche afin de comprendre cette contradiction (Adihou, 2004).

Dans le cadre de la résolution des problèmes d'optimisation linéaire proposés à des élèves de 16 ans en 5^{e} secondaire, les activités algébriques renvoient aussi à la résolution des systèmes d'équations et d'inéquations. Les objectifs de l'étude présentée dans cet article sont de cerner les raisonnements et les connaissances mathématiques utilisés par les élèves dans les activités de résolution de problèmes d'optimisation d'une part et, d'autre part, d'identifier les contrôles qui s'opèrent entre les activités de mise en équation, de mise en évidence des formes équationnelles et de détermination de la réponse du problème. Notre questionnement se situe ainsi dans une problématique plus large : quelles sont les variables didactiques pertinentes des problèmes d'optimisation linéaire qui permettent aux élèves de s'engager dans une résolution purement algébrique? Bien que l'approche par la modélisation mathématique offre l'occasion de faire de l'algèbre et d'établir un lien avec d'autres disciplines, notre interrogation se réfère à la pertinence de certains problèmes d'optimisation proposés par des manuels et des enseignants, et de la nécessité de les résoudre par l'algèbre. Comment les élèves utilisent-ils les objets algébriques (équations, systèmes d'équations)?

Après avoir précisé notre contexte de recherche, nous présentons, dans cet article, une analyse des problèmes d'optimisation linéaire pour mettre en évidence les activités algébriques qui sous-tendent la résolution des problèmes d'optimisation linéaire. L'analyse débouche sur une meilleure compréhension des enjeux didactiques, ainsi que sur la pertinence et la nécessité de résoudre par l'algèbre certains problèmes d'optimisation proposés par des manuels et des enseignants.

1. Problématique et cadre conceptuel

1.1. Modélisation et résolution de problèmes par l'algèbre

La problématique du recours aux problèmes d'optimisation linéaire des élèves de 16 ans en 5e année du secondaire (l'équivalent des élèves des classes de 1re au lycée en France) pour résoudre les systèmes d'équations positionne celle de la modélisation mathématique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques au secondaire (Chevallard, 1989; Kieran, 1992, 1996; Grugeon, 2000, 1997) et celle du contrôle (Balacheff, 2001) didactique qui s'effectue au cours du processus de modélisation.

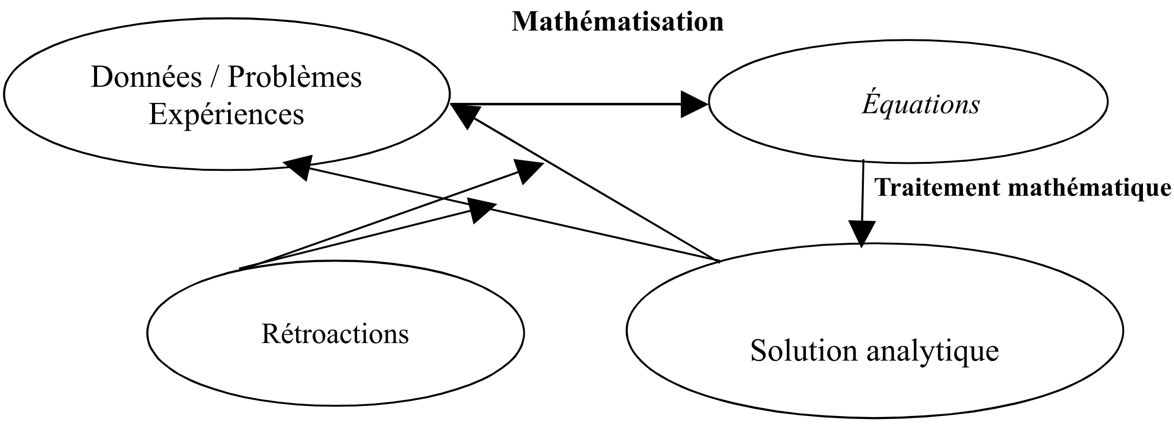


Figure 1 : Schéma du processus de modélisation mathématique (Bélair, 2004, p. 138)

La modélisation mathématique est à la fois un processus de mise en équation (mathématisation) d'une situation réelle ou fictive, de résolution de la dite équation (mathématique) et de la gestion des rétroactions en vue de cerner la pertinence des solutions de l'équation en lien avec la situation. Elle renvoie à trois sortes d'activités : *la mathématisation, le travail mathématique et les rétroactions* (Bélair, 2004). Au secondaire, le processus de modélisation mathématique est utilisé pour mettre en équation des problèmes afin de travailler les équations. Il permet de produire des objets mathématiques (équations, systèmes d'équations) pour assurer le passage de l'arithmétique à l'algèbre. Ce passage met l'élève en difficulté et il est perçu comme une rupture d'ordre épistémologique, une discontinuité, une fausse continuité ou une continuité ou une complémentarité selon les chercheurs (Chevallard, 1989; Vergnaud, 1988; Kieran, 1991, 1992; Bednarz, 1994; Bednarz et al., 1996; Adihou, 2003, 2004). La modélisation mathématique pose aussi des difficultés aux élèves mais, par la même occasion, elle sert d'approche lors de l'enseignement de l'algèbre afin de lui donner du sens. On cherche alors à montrer en quoi « l'arithmétique dépasse l'algèbre » (Coulange, 2001). Pour que cette approche soit efficace, la connaissance des champs « arithmétique et algébrique » par l'enseignant est importante (Schmidt, 1996), car les différentes formes de résolution (numérique, algébrique) mettent en évidence des procédures et des stratégies différentes.

1.2. Difficultés de résolution de problèmes par l'algèbre

La résolution algébrique d'un problème se caractérise par une nette séparation entre une phase de mise en équation et une phase de résolution de l'équation (ou des équations). La résolution des problèmes ne se fait pas de façon linéaire; il y a toujours des allers-retours, c'est-à-dire des boucles entre les étapes de résolution avant d'arriver à la solution lors d'une résolution algébrique. Plusieurs enseignants et chercheurs ont démontré que la partie la plus difficile pour les élèves est la mathématisation du problème. C'est le cas de Vergnaud et Cortes (1986). Ces auteurs ont remarqué que *« c'est la mise en équation des problèmes qui est le plus difficile, l'extraction des informations pertinentes et leur traduction algébrique devraient être l'objet d'un enseignement plus systématique »*. Kieran[3] (1992) a montré comment *« le contenu algébrique, l'enseignement de l'algèbre, et l'apprentissage de l'algèbre »* peuvent poser des difficultés aux élèves. Elle a aussi pointé la façon dont les élèves conçoivent les opérations en arithmétique et en algèbre. Par ailleurs, Kieran[4] (1996) a présenté, en faisant référence aux expressions algébriques, comment la perspective « procédurale » et la perspective « structurale » méritent d'être prises en compte dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre. Van Ameron[5] (2003), en faisant référence aux travaux de Kieran, précise deux conceptions des expressions mathématiques en faisant ressortir les difficultés en lien avec le langage algébrique.

Étant donné que l'élève éprouve des difficultés en algèbre et que cette matière est réputée difficile (Vergnaud, 1988; Vergnaud et al., 1988), comment les élèves considèrent-ils les objets mathématiques qu'ils utilisent lors de la résolution des problèmes? Quel type de contrôle fait l'élève? Est-ce un contrôle arithmétique ou algébrique (Balacheff, 2001)? Comment le contrôle « problèmes – résolution – équations » est-il géré? En effet, dans les activités de résolution de problèmes (à texte), les possibilités de générer (ou non) des expressions (numériques ou algébriques), de les transformer, de résoudre des équations, et de trouver la réponse, engendrent et imposent des contrôles en vue de l'interprétation du problème pour obtenir une forme équationnelle. Par ces tentatives de génération d'équations, l'élève fait des expériences et construit des connaissances. Ces dernières posent des problèmes didactiques. Conne (1992, 1996, 1997, 1999) a mis en évidence les rapports dialectiques entre la construction des connaissances de l'élève et le contenu des savoirs en insistant sur l'expérience. Au point de vue de la résolution de problèmes par la modélisation, ce qui est donné comme une occasion pour entreprendre un apprentissage des techniques équationnelles (résolution de systèmes d'équations) devient un outil de résolution de problèmes. L'enseignement des résolutions de problèmes par la mise en équations avec la méthode de résolution donne lieu à une substitution d'objets. En plus de l'idée préconçue que l'algèbre élémentaire est difficile, le recours à la méthode de résolution ne facilite pas l'apprentissage des mathématiques.

Par ailleurs, le professeur ignore l'objet de l'institutionnalisation. Un tel enseignement donne lieu à une substitution d'objets. Cette substitution s'explique en partie par le glissement méta-cognitif évoqué dans la théorie des situations (Brousseau, 1998). On ne devrait pas s'en étonner car la méthode de résolution est une forme d'heuristique. Cette substitution d'objets ajoute aux difficultés des élèves et on se demande ce sur quoi les élèves doivent se centrer. Un autre glissement est dû au recours systématique à la méthode de résolution pour justifier les réponses et les objets produits. Cette méthode fait que les élèves se passent de la logique de

3 Voir Annexe 1.
4 Voir Annexe 2.
5 Voir Annexe 3.

résolution pour aller au résultat. Nous avons vu des systèmes d'équations erronés, mais qui sont néanmoins résolus, car ils sont conformes aux systèmes attendus. Nous avons aussi relevé des solutions de système inadaptées. Toutefois, grâce à la méthode, le professeur donne la réponse pour éviter toute justification des erreurs. C'est une substitution du rôle assigné à l'approche par modélisation. Adihou (2003) a montré que, si une démarche est imposée à l'élève, on a une autre forme de substitution car la méthode de résolution devient un objet d'apprentissage. Ces substitutions s'expliquent en partie par le recours à la modélisation mathématique dans les manuels, étant donné que l'élève doit se l'approprier et que l'enseignant l'utilise aussi pour enseigner. Or, pour Polya (1965), la référence à une démarche pour résoudre des problèmes suppose que le résolveur maîtrise la résolution des équations. Comment les expériences faites par l'élève sont-elles gérées dans la construction de ses connaissances ?

Au secondaire, les activités de résolution de problèmes par la mise en équation sont des activités pour trouver la réponse d'un problème, mettre en évidence des expressions algébriques et des systèmes d'équations et les résoudre par la suite. Certains manuels et certains enseignants considèrent ces activités comme une généralisation de l'arithmétique. Cependant, la mathématisation est une réduction de la réalité pour travailler des objets mathématiques Bélair (2004). Dans cette perspective, l'élève fait des contrôles lors de l'interprétation du problème pour faire ressortir une forme équationnelle afin de trouver la réponse. Déterminer la réponse d'un problème d'optimisation en 5^{e} secondaire, lors d'une situation d'apprentissage de résolution d'équations au secondaire, renvoie à des contenus relatifs aux systèmes d'équations linéaires (forme équationnelle) et à l'application des techniques algébriques. Dans l'enseignement actuel des mathématiques au secondaire, on se centre sur des situations-problèmes pour travailler les savoirs. Cette approche donne l'impression que moins de cours théoriques permettent d'institutionnaliser et de décontextualiser les savoirs; ainsi *plus ou moins de responsabilités seraient laissées aux élèves dans la résolution des problèmes et dans la validation des réponses.* Les problèmes d'optimisation linéaire pourraient être des exemples de ces situations en 5^{e} secondaire. Toutefois, leur résolution pose la question des décisions des élèves face aux situations plus ou moins signifiantes, en rapport avec le quotidien d'une part, et d'autre part, pose celle de la pertinence du discours du professeur par rapport à l'activité réelle des élèves et au contenu mathématique.

L'article s'inscrit dans une recherche à trois volets. Le premier fournit des outils pour l'analyse des problèmes d'optimisation linéaire donnés en classe. Le second permet de comprendre les enjeux didactiques de l'enseignement de l'optimisation linéaire et ses potentialités dans l'enseignement. Le troisième se rapporte aux pratiques d'enseignement en classe. Cet article présente les premier et second volets. Il soumet une analyse des problèmes d'optimisation linéaire mettant en évidence les activités algébriques dans la résolution des problèmes d'optimisation linéaire sur la base du contenu attendu par le professeur et des productions d'élèves. Comment utilisent-ils les objets algébriques (équations, systèmes d'équations)? Nous étudierons les procédures utilisées par les élèves en lien avec les contenus d'enseignement pour faire ressortir l'adéquation et l'inadéquation entre les problèmes d'optimisation linéaire proposés par des manuels de 5^{e} secondaire et la nécessité de les résoudre par l'algèbre.

2. Méthodologie

2.1. Travail en collaboration avec des enseignants et observations naturalistes

Pour faire nos observations, nous avons établi un contrat spécifique avec deux enseignants. Ces derniers ont accepté d'être rencontrés et observés avant, pendant et après les situations d'enseignement (Coulange, 2000, Comiti et al. 1995). Il s'agit d'observations naturalistes. Nous ne sommes intervenus ni dans la conception des cours, ni dans leur réalisation en classe (Coulange, 2000). Nous avons recueilli deux types de données : des données externes (entretien avant la réalisation des activités de résolution, les résolutions de problèmes par les enseignants) et des données internes (productions d'élèves, entretien après la réalisation des activités de résolution). Les élèves ont travaillé en équipe de quatre pendant six périodes de 75 minutes. Les expérimentations ont été faites avec « papier-crayon ». Les élèves avaient déjà reçu un enseignement sur les systèmes d'équations.

2.2. Aperçu des problèmes d'optimisation linéaire des manuels de 5e secondaire

Nous présentons deux exemples de problème.

Problème 1 : Une compagnie propose deux catégories de téléviseurs. Des téléviseurs A et des téléviseurs B. Chaque semaine elle vend 5 téléviseurs au moins et 18 téléviseurs au plus. Par ailleurs le nombre de téléviseurs A vendu est toujours supérieur ou égal au double des téléviseurs B vendus. La compagnie réalise 200 $ de bénéfices sur les téléviseurs de type A et 800 $ sur les téléviseurs de type B. Quels sont le maximum et le minimum de bénéfices réalisables chaque semaine?

Problème 2 : Martine et Abdel travaillent tous deux comme caissière et caissier à l'épicerie du coin. Martine y travaille depuis plus longtemps qu'Abdel et l'épicier exige que le nombre d'heures qu'elle travaille à l'épicerie soit au moins le double de celui d'Abdel. Ni lui, ni elle ne peut travailler plus de 40 heures/semaine. De plus, la somme du nombre d'heures travaillées par les deux doit être plus de 50 heures/semaine, mais ne doit pas dépasser 60 heures/semaine. Si Martine gagne 10 $/heure et Abdel gagne 8 $/heure, trouvez le nombre d'heures que doivent travailler respectivement Martine et Abdel pour que cela coûte le moins cher possible à l'épicier.

Les problèmes d'optimisation linéaire contiennent des données (paramètres connus). Elles sont présentées sous la forme d'état ou de relation. Les données « état » sont des nombres réels; le plus souvent elles sont des nombres entiers. Les « relations » sont induites par des relations de type additif et multiplicatif entre les données. La résolution implique une ou plusieurs inconnues. Avec ces dernières, la mathématisation met en évidence une fonction économique et des contraintes. La solution des systèmes de contraintes permet de déterminer les sommets du polygone de contraintes par la résolution de systèmes d'équations et de déterminer la région réalisable (forme polygonale) par une représentation graphique. Par le biais du théorème suivant (admis), les extremums sont définis par calcul et comparaison des valeurs trouvées.

Théorème : Les extremums (minimum ou maximum) d'une fonction objectif ou d'une fonction économique soumises à des contraintes se trouvent aux sommets de la région réalisable, c'est-à-dire aux sommets du polygone des contraintes.

La particularité des problèmes d'optimisation en 5^{e} secondaire c'est qu'ils renvoient toujours à la détermination d'une fonction économique et d'un système de contraintes à deux variables. Dans ces problèmes, plusieurs paramètres peuvent être modifiés pour générer différentes équations. La fonction économique ou fonction objectif est une fonction linéaire et le système des contraintes est composé d'équations linéaires. Leur résolution renvoie à plusieurs étapes : l'appropriation de l'énoncé (compréhension et modélisation), la mise en action (choix de la stratégie à mettre en oeuvre, réalisation des calculs, construction du polygone des contraintes et vérification) et la communication des résultats (analyse, comparaison et justification de la démarche) Polya (1967) et Mason (1994). Nous tenons à préciser nous n'utiliserons que le problème 1 pour notre analyse.

2.3. Analyse : Structure d'analyse multidimensionnelle de l'algèbre de Grugeon

Pour analyser les situations (*exercices, problèmes à texte, situations-problèmes et projets)* qui assurent le développement des compétences algébriques, nous utilisons la *Structure d'analyse multidimensionnelle de l'algèbre* de Grugeon (Grugeon, 2000). En effet, Grugeon situe certaines compétences algébriques en caractérisant quatre types de problèmes algébriques : les problèmes arithmétiques, les problèmes de généralisation, les problèmes de modélisation et les problèmes des cadres algébrique et fonctionnel. Les problèmes d'optimisation linéaire sont des problèmes de modélisation. Ils sont aussi des problèmes des cadres algébriques selon les manuels et les enseignants vu qu'ils sont proposés pour donner du sens au recours à l'algèbre comme outil de résolution des problèmes. Ils font aussi le lien avec d'autres disciplines comme l'économie et la biologie. Ils permettent de donner du sens à certains objets mathématiques : les équations, les inéquations, les fonctions, les expressions algébriques, etc. Pour étudier l'activité algébrique, nous analysons les contenus algébriques des *exercices, problèmes à texte, situations-problèmes et projets* en utilisant le modèle de la structure d'analyse multidimensionnelle de l'algèbre.

Ce modèle est organisé autour de six composantes puis de critères qui permettent d'analyser, de caractériser les connaissances algébriques tant du côté enseignant et élève que du côté enseignement et apprentissage.

> *« À partir d'une analyse a priori du problème, on identifie les aspects de la compétence algébrique en jeu dans le problème, à un niveau d'enseignement donné. En quoi l'outil algébrique intervient-il dans la résolution du problème? Quels sont les objets de l'algèbre mis en jeu dans la résolution et avec quel traitement? Il s'agit donc d'identifier les types de traitement algébrique. »*
> Plus tard, *« Un travail d'analyse est mené pour toutes les composantes et conduit à la grille d'analyse des productions d'élèves présentée ci-dessous. Les valeurs descriptives retenues permettront de décrire en termes de cohérence le fonctionnement des élèves.»* (Grugeon, 2000, p. 15).

Composantes	Critères	Valeurs globales
Traitement algébrique	**Types de traitement algébrique :** Reproduction tâches d'ordre num. Reproduction tâche algébrique niv1 Reproduction tâche algébrique niv2 Interprétation d'une expression alg. Traduction/branchement sur formule Traduction/production guidée Traduction/production Utilisation de l'algèbre pour prouver	Correct / Incorrect / Non traité
Rapport arithmétique/algèbre	Démarche de résolution	Arithmétique / Algébrique
	Statut du signe d'égalité	Annonce résultat / équivalence
	Statut des lettres	Lettre objet / lettre évaluée / Inconnue / Nombre généralisé / variable
	Objet et statut des objets	Expression algébrique / formule /équation / fonction Opérationnel / Structural / Pseudo-structural
Gestion dans registre algébrique	Type de formation Type de traitement	Correct:/ Interprétable (lié au problème) / Non interprétable Correct:/ Interprétable (lié au problème) / Non interprétable
Articulation entre registre algébrique et d'autres registres	Type de conversion	Correct:/ Interprétable (lié au problème) / Non interprétable
Fonction de l'algèbre	Emploi de l'algèbre	Aucune / Conforme à l'attendu (cf. tableau 1) / non conforme à attendu
Rationalité algébrique	Type de preuve Type de justification	Preuve pragmatique / preuve intellectuelle Justification liée à rationalité « quotidienne » / rationalité scolaire / rationalité algébrique

Figure 2 : Structure d'analyse multidimensionnelle de l'algèbre (Grugeon, 2000, p. 11)

3. Analyse des problèmes

Nous allons utiliser la structure d'analyse proposée par Grugeon (Grugeon, 2000) pour nos analyses. Nous retenons les deux premières composantes : « Traitement algébrique et Rapport arithmétique/algèbre ». En effet les enseignants proposent aux élèves les problèmes d'optimisation pour établir un lien avec d'autres disciplines comme l'économie et la biologie et, pour donner du sens à certains objets mathématique tels les équations, les inéquations, les fonctions, les expressions algébriques, etc. Dans le programme de 5e secondaire, ces objets sont enseignés et utilisés comme outils pour résoudre ces problèmes. Nous présentons l'analyse des problèmes d'optimisation linéaire pour mettre en évidence les activités algébriques qui sous-tendent la résolution des problèmes d'optimisation linéaire, ainsi que la pertinence et la nécessité de résoudre par l'algèbre certains problèmes d'optimisation proposés par des manuels et des enseignants.

Les manuels et les enseignants proposent des problèmes de même structure et qui ressemblent aux deux exemples. Les élèves identifient les variables du système, mettent en évidence toutes les contraintes du système, les relations et les données, déterminent la fonction objectif ou la fonction économique, écrivent le système sous une forme générale, construisent le polygone des contraintes du système, déterminent les sommets du polygone (points d'intersection des droites), évaluent la fonction objectif ou la fonction économique aux sommets et déterminent le maximum ou le minimum à l'aide de la fonction objectif ou de la fonction économique au sommet du polygone des contraintes.

Traitement algébrique

La résolution renvoie à des tâches numériques (on fait des calculs) et algébriques (calcul algébrique, résolution d'équations). Elle exige la traduction, la production et l'interprétation d'expressions (Exemple : $x > 0$, $y > 0$, $x + y = 5$, $200\,x + 800\,y = C$). Pour trouver la réponse, la démarche doit être correcte ou incorrecte et alors le problème n'est pas traité.

Rapport arithmétique/algèbre

La résolution des problèmes d'optimisation suppose une démarche algébrique (mise en équation : production d'équations et d'inéquations) et fonctionnelle. Les équations sont résolues algébriquement ou numériquement ou géométriquement. Les expressions utilisées et les objets mathématiques exigent, selon le cas, des traitements arithmétiques ou algébriques ou géométriques. La résolution se fait ainsi par une démarche arithmétique ou algébrique (résolutions d'équations et d'inéquations) ou géométrique (droite dans le plan cartésien). Les diverses résolutions permettent la construction d'un polygone de contraintes.

Statut du signe d'égalité

Le signe d'égalité est utilisé pour annoncer un résultat numérique : $200 \times 12 + 800 \times 6 = 2\,400 + 4\,800 = 7\,200$. Il est utilisé pour établir des équivalences pendant la détermination des points d'intersection ou des sommets du polygone de contraintes (résolutions d'équations et d'inéquations). Exemple : $x + y = 5$ et $x = 2y$ alors $2y + y = 5$. On a $3y = 5$ et $y = 5/3$ $x = 2$ x $5/3 = 10/3$. Le signe d'égalité est utilisé pour mettre en évidence la fonction objectif. Exemple pour le bénéfice : $200\,x + 800\,y = C$. Le signe d'égalité annonce un résultat : la somme de 2 400 et de 4 800 est 7 200. Il met en évidence une relation d'équivalence : le deuxième membre de l'égalité n'est pas la réponse du premier. Les deux membres de l'équation sont deux façons différentes d'écrire le même nombre.

Statut du signe d'inégalité

Le signe d'inégalité est utilisé pour mettre en évidence la non-négativité des inconnues et les contraintes (déterminer les bornes, les domaines …). Exemple : $x > 0$, $x \in \mathbb{N}$, $y > 0$ $y \in \mathbb{N}$, $x + y > 5$, $x + y < 18$, $x > 2y$. Le signe d'inégalité met en évidence une comparaison. Il sert à trouver un domaine.

Statut des lettres

Les lettres sont utilisées pour représenter des inconnues. Elles ont aussi un statut désignatoire, ce sont des nombres généralisés. Exemple : x est le nombre de téléviseurs de type A; y est le nombre de téléviseurs de type B et C est un nombre généralisé qui désigne le maximum et le minimum de bénéfices réalisables chaque semaine. Les lettres sont utilisées pour représenter un domaine de valeurs : $x > 0$, $y > 0$, $x + y > 5$, $x + y < 18$, $x > 2y$, $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$. Les lettres représentent des inconnues et des nombres généralisés.

Statut des objets

Les objets mathématiques sont ici des expressions algébriques. Ils sont pour la plupart : des équations ($x + y = 5$; $x = 2y$, $y = -x + 1$), des inéquations ($x + y > 5$, $x + y < 18$, $x > 2y$), des fonctions ($C(x, y) = 200x + 800y$), des symboles (des signes d'inégalité, d'opération…) et des expressions. Les expressions sont utilisées dans deux perspectives : une perspective structurale : si $x = 2y$ et $x = -y + 18$, on a $2y = -y + 18$, d'où $2y + y = -y + y + 18$ et donc $3y = 18$, soit $3y/3 = 18/3$; et une perspective procédurale : soit $x=12$ et $y=6$, $C = 200x + 800y$, en remplaçant x par 12 et y par 6, on a $C_F = 200\times 12+800\times 6=2400+4800=7200$.

Paramètres : informations et données

Les problèmes mettent en évidence des informations. Elles sont toujours de deux types. Dans le cas du problème 1, qui est proposé en guise d'exemple, on a « *une compagnie propose deux catégories de téléviseurs : des téléviseurs A et des téléviseurs B »*. Quant aux données, elles sont de même nature, ce sont des nombres réels, ici des nombres entiers.

Systèmes de contraintes : contraintes et conditions

Les problèmes possèdent un système de contraintes à deux variables. Pour le problème 1, « *chaque semaine la compagnie vend au moins 5 téléviseurs et au plus 18 téléviseurs. Par ailleurs le nombre de téléviseurs A vendu est toujours supérieur au double des téléviseurs B vendus*. »

Fonction à maximiser : fonction objectif ou fonction économique

Les problèmes mettent en évidence des paramètres permettant de trouver la fonction objectif (fonction économique). Pour le problème 1, la compagnie réalise 200 $ de bénéfices sur les téléviseurs de type A et 800 $ sur les téléviseurs de type B.
L'expression $C(x, y) = 200x + 800y$ représente ici le bénéfice réalisable chaque semaine.

Avant de faire l'analyse des productions des élèves, nous ferons d'abord leur description et ensuite nous les analyserons.

4. Description et analyse des productions des élèves

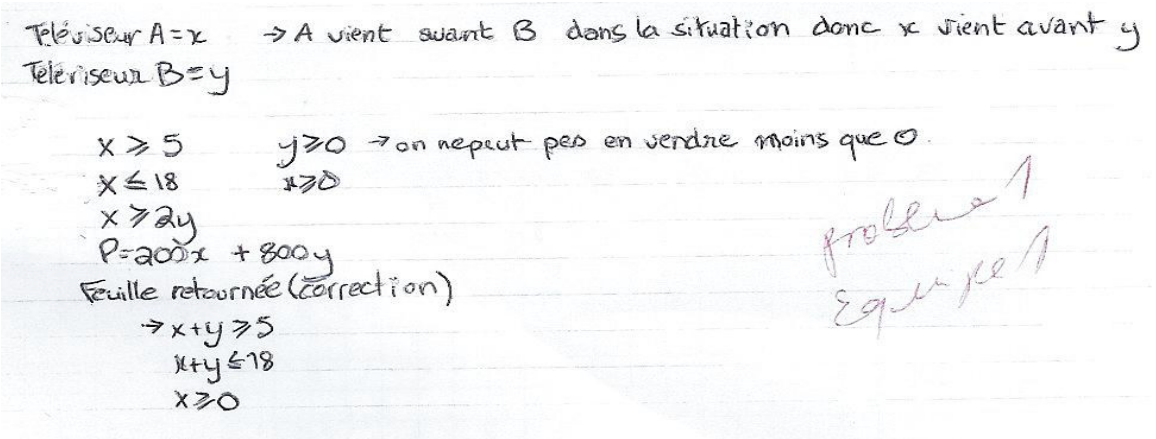
Nous décrirons les productions des élèves. Ce sont les productions des problèmes 1. Le problème 1 a été résolu par l'équipe 1. Nous respecterons la démarche de traitement des problèmes tout en mettant en évidence les objets mathématiques (variables, inconnues, relations, équations, inéquations, expressions algébriques, etc.) auxquels les élèves ont eu recours durant le travail. Ensuite nous analyserons l'activité algébrique en focalisant notre analyse sur « le traitement algébrique et le rapport arithmétique/algèbre ». (Grugeon, 2000).

4.1. Description des productions des élèves

Problème 1 (Équipe 1)

Les élèves identifient les paramètres et les inconnues du problème – le nombre de téléviseurs – avec des lettres. Ils utilisent x et y en s'inspirant (sur recommandation de l'enseignant) de l'ordre dans lequel interviennent les informations sur les deux catégories de téléviseurs :

« puisque dans le texte du problème le téléviseur A venait avant le téléviseur B, les lettres x et y devaient leur être attribuées dans cet ordre puisqu'elles se suivent dans l'alphabet ». Cette façon de faire est souvent utilisée par les enseignants. Elle est même suggérée par l'enseignant aux élèves de cette classe.
Les élèves ont ensuite identifié les contraintes : $x > 0$; $y > 0$. Ils écrivent ensuite *« On ne peut pas vendre moins que 0* [téléviseur] *».* Cette justification fait référence au fait que $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$. Ensuite, ils poursuivent en écrivant : $x > 5$; $x < 18$, $x > 2y$. Ils déterminent la fonction objectif qui permet d'obtenir le bénéfice, soit P = $200x + 800y$. Puis, ils rajoutent des contraintes supplémentaires : $x + y > 5$; $x + y < 18$, et $x > 0$.



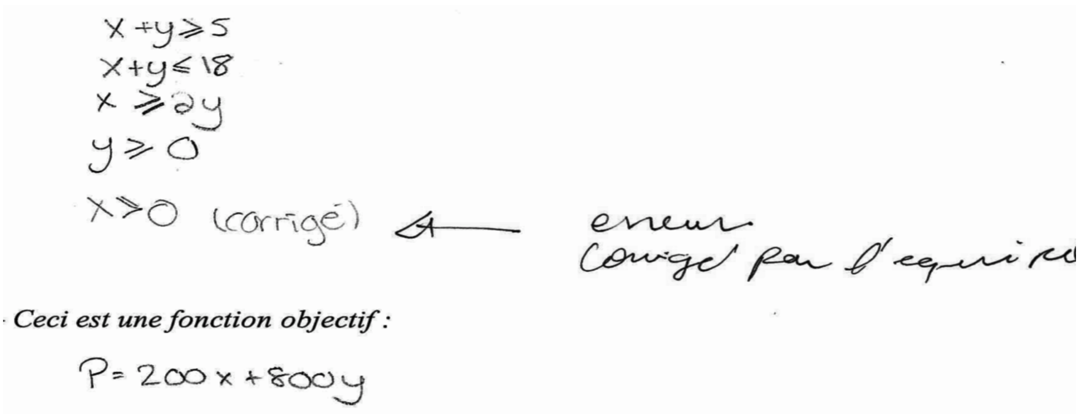
Téléviseur A = x → A vient avant B dans la situation donc x vient avant y
Téléviseur B = y

$x \geq 5$ $y \geq 0$ → on nepeut pes en vendre moins que 0.
$x \leq 18$ $x \geq 0$
$x \geq 2y$
$P = 200x + 800y$
Feuille retournée (correction)
→ $x+y \geq 5$
$x+y \leq 18$
$x \geq 0$

problème 1
Équipe 1

Les informations du problème extraites par les élèves sont faites par traduction directe (Adihou, 2003). Les données du problème et les relations qui articulent ces données s'y prêtaient. De plus, un type de contrat implicite a permis aux élèves d'identifier des inconnues. La question de la pertinence de l'algèbre dans cette phase du travail de modélisation se pose relativement à l'aspect désignatoire des lettres en arithmétique. À l'étape du choix des inconnues, l'élève se sert encore de l'arithmétique.

Le processus de mise en équation met en évidence le fait que le travail avec les lettres n'implique pas automatiquement un travail de nature algébrique. La nature du travail de traitement va déterminer le type de traitement algébrique ou arithmétique. Proposer des problèmes d'optimisation linéaire ne garantit pas l'exécution d'un travail algébrique. Ils retiennent les contraintes suivantes : $x + y > 5$; $x + y < 18$; $x > 2y$; $x > 0$ *et* $y > 0$ et la fonction objectif C = $200x + 800y$. Les élèves calculent le bénéfice avec la fonction objectif en donnant différentes valeurs à x et à y.



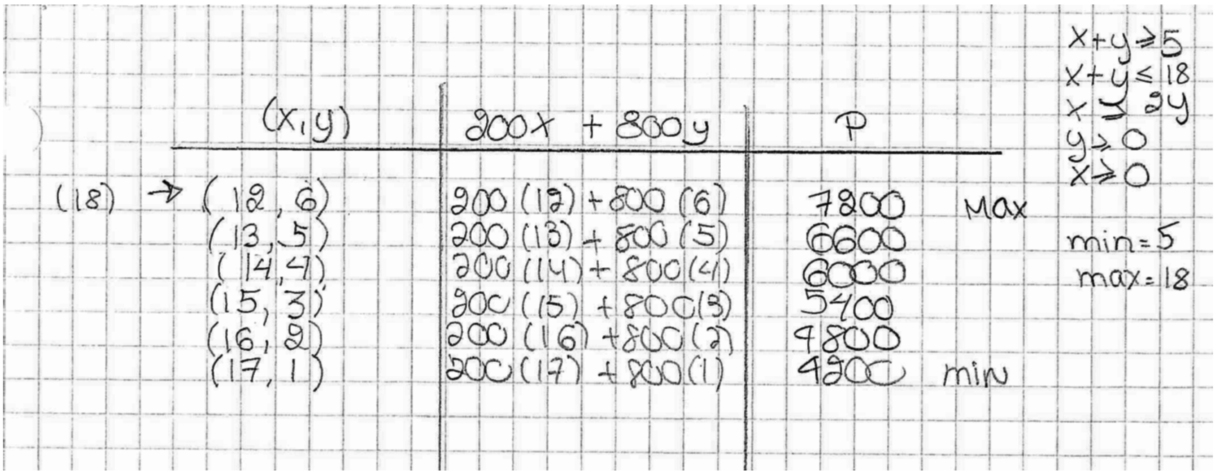
$x+y \geq 5$
$x+y \leq 18$
$x \geq 2y$
$y \geq 0$
$x \geq 0$ (corrigé) ← erreur corrigé par l'équipe

Ceci est une fonction objectif :

$P = 200x + 800y$

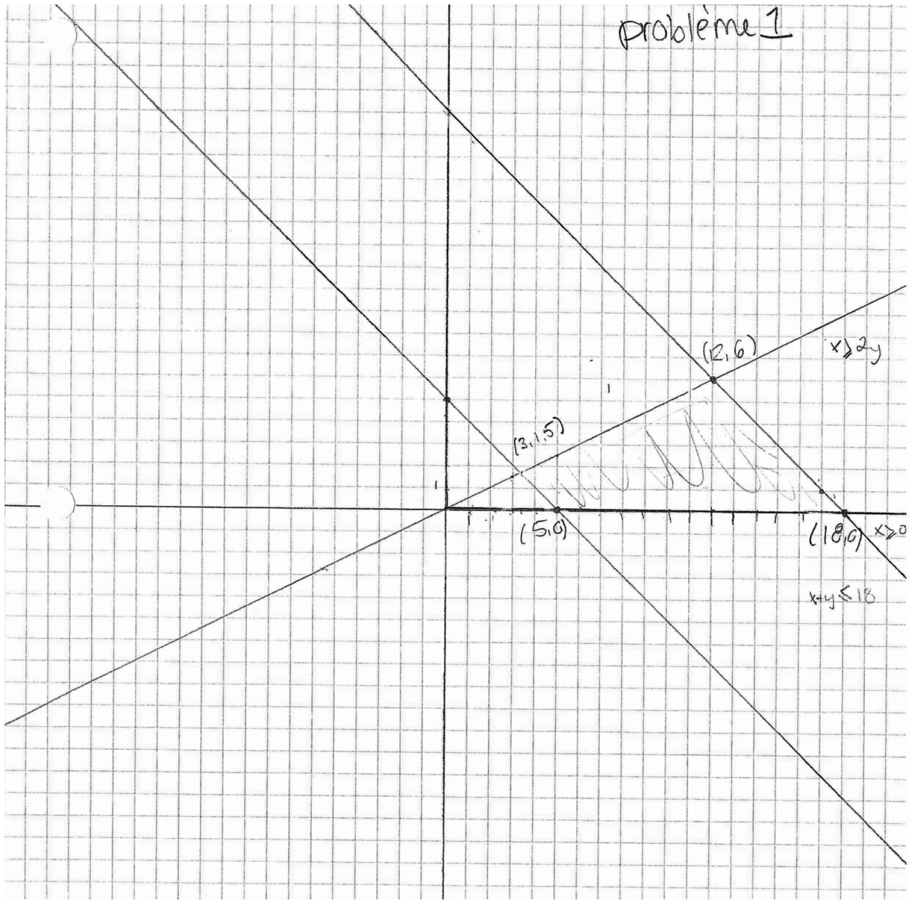
Ils écrivent : minimum 5 et maximum 18. L'information est relative au nombre de téléviseurs vendus $x + y > 5$ et $x + y < 18$. Ils utilisent des coordonnées de points $(x;\ y)$ pour mettre sous forme de tableau les valeurs qui répondent aux relations $x + y = 18$ *et* $x > 2y$, soit les points (12; 6), (13; 5), (14; 4), (15; 3), (16; 2) et (17; 1). Les élèves ont fait un choix entre le minimum 5 et le maximum 18, soit entre les relations $x + y = 5$ et $x + y = 18$. Pourquoi avoir choisi $x + y = 18$ et $x > 2y$? Le choix de la relation $x + y = 18$ s'expliquerait par le fait qu'il y a plus de possibilités de couples que $x + y = 5$.

Par ailleurs, le fait d'avoir utilisé les coordonnées de points $(x;\ y)$ met en évidence une approche géométrique et une approche fonctionnelle. Les élèves n'ont pas donné de réponse à la suite de ce travail bien que le point (12; 6) qui maximise la fonction objectif soit trouvé. Mais ils ont entrepris un autre travail qui pour eux correspond au contrat ou aux attentes du professeur.



Ils ont fait sortir tous les points qui répondaient aux contraintes, soit les points (12; 6), (13; 5), (14; 4), (15; 3), (16; 2), (17; 1) et (18; 0). Puis, ils ont fait le calcul des différents bénéfices possibles avec ces points pour en déterminer les bénéfices minimum et maximum. Ils ont substitué les nombres précédents, soit les coordonnées des points (12; 6), (13; 5), (14; 4), (15; 3), (16; 2) et (17; 1), dans la relation $C = 200x + 800y$ pour trouver respectivement :
7 200 ($200 \times 12 + 800 \times 6 = 2400 + 4800 = 7200$) ; 6 600 ; 6 000 ; 5 400 ; 4 800 et 4 200.
Le calcul des différents bénéfices possibles avec ces points donne comme maximum 7 200 au point (12; 6) et comme minimum 4 200 au point (17; 1).

Les élèves ont ensuite tracé trois droites d'équation : $x + y = 5$, $x + y = 18$ et $y = \frac{1}{2}x$. En effet, avec les contraintes ($x + y > 5$; $x + y < 18$; $x > 2y$; $x > 0$; $y > 0$), ils ont trouvé nécessaire de tracer des droites pour retrouver un polygone de contraintes avec les sommets (5; 0), (18; 0), (12; 6) et (3; 1,5). Ils ont ensuite tracé un polygone de contraintes avec les sommets (5; 0), (18; 0), (12; 6) et (3; 1,5). Le point (12; 6) étant la solution du système d'équations. Les points (13; 15), (12; 6), (5; 0) et (18; 0) étant les sommets du polygone de contraintes et le point (12; 6) étant celui qui maximise la fonction économique.



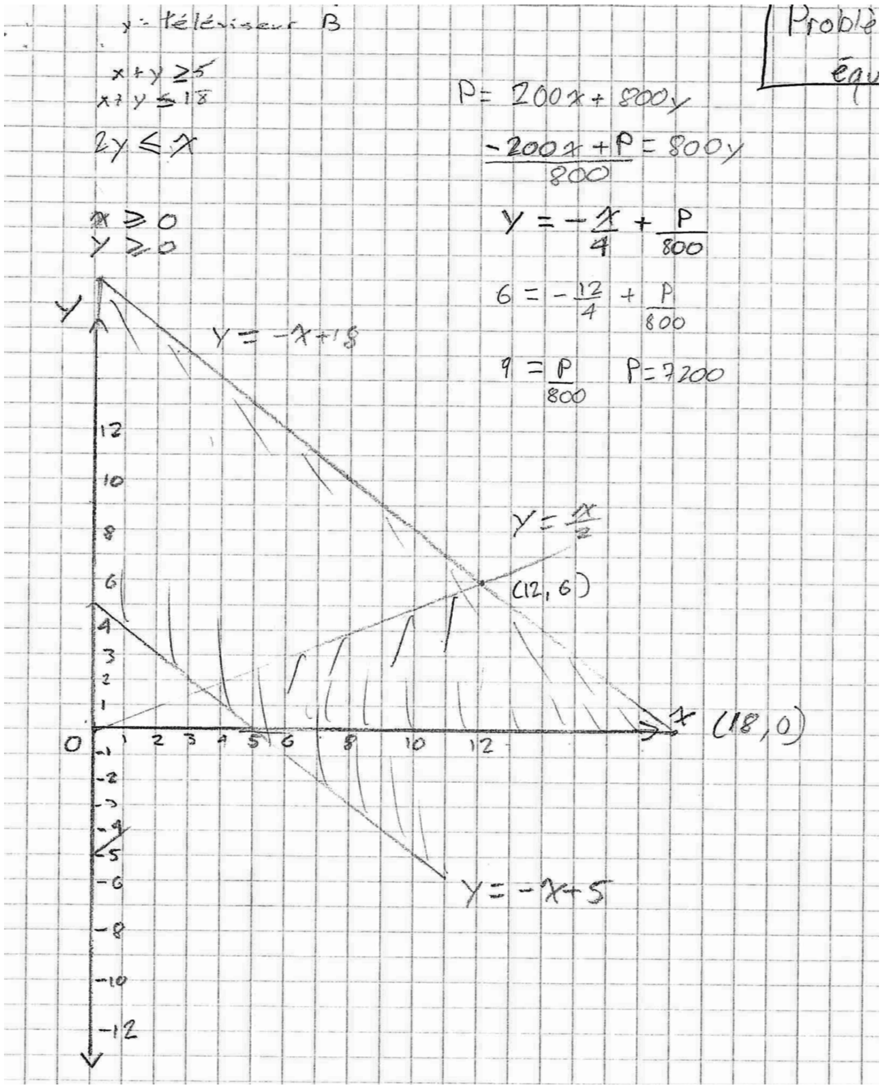
Deux démarches ont été utilisées : une première (« numérique ») qui ne correspond pas aux attentes du professeur et une autre qui respecte le contrat didactique. La démarche numérique joue sur des indices qui structurent les relations. Le travail numérique des élèves n'est pas justifiable d'un point de vue mathématique. Mais pourquoi n'ont-ils pas donné la réponse (12; 6) comme étant la solution qui maximise la fonction économique? On pourrait supposer que les élèves ont voulu répondre aux questions qui leur étaient posées ou bien qu'ils se sont rendu compte qu'ils n'avaient pas utilisé les notions auxquelles s'attendait l'enseignant.

Ils écrivent : *les points (13; 15), (12; 6), (5; 0) et (18; 0) sont les sommets du polygone de contraintes et le point (12; 6) maximise la fonction objectif*. Pour eux *« les résultats sont corrects »* et « *les données ont du sens puisque la solution du système d'équations est dans ce polygone* ». Dans leur rapport, ils ont précisé : *« Nous en avons conclu ainsi en discutant en groupe. Pierre-Luc a dit que c'était correct à cause du polygone et nous avons vérifié ensemble. Nous en sommes venus à la même conclusion »*.

Remarquons que le groupe n'a pas produit de justification. Ils ont laissé transparaître que les points donnés faisaient bien partie du polygone de contraintes et en sont venus à la conclusion que les données devaient être exactes. Ils ont répondu que le point (12; 6) était celui qui maximisait la fonction objectif.

Le point Sj qui maximise la fonction objectif
est (12, 6)

En ce qui concerne la vérification, les élèves ont repris la résolution du problème en isolant les informations. Ces dernières sont identiques à celles trouvées. Ils ont isolé la variable y dans la fonction objectif C = 200x + 800y , y = (P - 200x) / 800 pour calculer le bénéfice au point (12; 6).



4.2. Analyse des productions des élèves

Traitement algébrique

L'analyse des travaux de ces deux équipes montre que les problèmes d'optimisation linéaire requièrent un traitement algébrique. La résolution renvoie à des tâches numériques (des calculs) : mise en évidence de tous les points qui répondent à certaines contraintes, calcul des différents bénéfices possibles avec ces points pour en déterminer les bénéfices, substitution des nombres dans une relation P = 200 x + 800 y pour trouver 7 200 car :

$200 \times 12 + 800 \times 6 = 2400 + 4800 = 7200$; 6 600; 6 000; 5 400; 4 800 et 4 200.

Le calcul des différents bénéfices possibles donne comme maximum 7 200 au point (12; 6) et, comme minimum, 4 200 au point (17; 1). Avec ce travail numérique, ils n'arrivent pas à déduire. La résolution renvoie à des tâches algébriques (calcul algébrique, résolution d'équations). Elle exige la traduction, la production et l'interprétation d'expressions ($x + y = 5$, $y > 0$, $200\,x + 800\,y = C$), la résolution d'équations, la construction de droites, la recherche de points d'intersection.

Rapport arithmétique/algèbre

La résolution des problèmes d'optimisation peut se faire par l'arithmétique, l'algèbre ou la géométrie (représentation de droites dans un système cartésien). Les élèves ont utilisé des raisonnements arithmétiques, algébriques ou géométriques. Ils ont utilisé des lettres, la mise en équations. Toutefois, la question de la pertinence de l'algèbre dans cette phase du travail de modélisation se pose. Les lettres ont un statut désignatoire en arithmétique. À l'étape du choix des inconnues, l'élève a-t-il une approche arithmétique ou algébrique? Quand passe-t-il à l'algèbre? Il a été difficile de répondre à cette question. La résolution numérique par des élèves de l'équipe 1 qui ont substitué des nombres après avoir choisi les points (12; 6), (13; 5), (14; 4), (15; 3), (16; 2), (17; 1) et (18; 0) montre que les élèves veulent faire de l'algèbre, mais qu'ils ont un raisonnement arithmétique. Avec ce travail numérique ils n'arrivent pas à déduire. Avec les contraintes : $x + y > 5$; $x + y < 18$; $x > 2\,y$; $x > 0$; $y > 0$, ils représentent des droites pour retrouver un polygone de contraintes avec les sommets (5; 0), (18; 0); (12; 6) et (3; 1,5), puis résolvent au brouillon des équations pour trouver les sommets du polygone de contraintes. Il faut mentionner ici que le choix du point (12; 6) reste à questionner.

Statut du signe d'égalité

Les équipes ont utilisé le signe d'égalité pour annoncer un résultat $200\times12+800\times6=2400+4800=7200$. Dans la résolution des équations, le signe d'égalité a été utilisé pour établir des équivalences pendant la détermination des points d'intersection ou des sommets du polygone de contraintes. Exemple : $x + y = 5$ et $x = 2y$ alors $2y + y = 5$. On a $3y = 5$ et $y = 5/3$ $x = 2\times5/3 = 10/3$. Les élèves y ont eu recours pour mettre en évidence la fonction objectif. Exemple : $200\,x + 800\,y = C$.

Statut du signe d'inégalité

Les équipes ont utilisé le signe d'inégalité (comparaison) pour mettre en évidence la non-négativité des inconnues, et les contraintes pour déterminer les bornes, les domaines, etc.
Exemple : $x > 0$, $x\in\mathbb{N}$, $y > 0$, $y\in\mathbb{N}$, $x + y > 5$, $x + y < 18$, $x > 2y$.

Statut des lettres

Les deux équipes ont utilisé des lettres pour représenter des inconnues. Ces lettres ont un statut désignatoire. Exemple : x est le nombre de téléviseurs de type A et y est le nombre de téléviseurs de type B. Les lettres sont utilisées pour désigner la valeur à maximiser (C) : le maximum et le minimum de bénéfices réalisables chaque semaine et le gain, et pour représenter un domaine de valeurs : $x>0$, $y > 0$, $x + y > 5$, $x + y < 18$, $x > 2y$, $x\in\mathbb{N}$ et $y\in\mathbb{N}$.

Statut des objets

Les équipes ont mis en évidence des objets mathématiques : des expressions algébriques, des équations ($x + y = 5$; $x = 2y$, $y = - x + 18$), des inéquations ($x + y > 5$, $x + y < 18$, $x > 2y$), des fonctions ($C(x, y) = 200\,x + 800\,y$).

Les expressions sont utilisées :

- soit dans une perspective structurale :
  si $x = 2y$ et $x = - y + 18$, d'où $2y = - y + 18$, puis $2y + y = - y + y + 18$, d'où $3y = 18$, et enfin $3y/3 = 18/3$.
- dans une perspective procédurale :
  soit x =12 et $y = 6$, $C = 200\,x + 800\,y$ en remplaçant x par 12 et y par 6, on a
  $C_F = 200 \times 12 + 800 \times 6 = 2400 + 4800 = 7200$.

Les analyses nous ont permis de faire ressortir des contenus algébriques ainsi que le contrôle des activités algébriques qui sous-tendent la résolution des problèmes d'optimisation linéaire. Bien que les résolutions mettent en évidence des objets algébriques, le contrôle de ces objets est « connoté arithmétique ». En effet, l'analyse des productions a permis de constater que certains élèves ont utilisé des stratégies arithmétiques. En somme, la résolution des problèmes d'optimisation linéaire proposés dans les manuels ne permet pas toujours d'orienter les élèves vers une résolution algébrique.

Conclusion

Les manuels du secondaire et les enseignants proposent des problèmes d'optimisation linéaire qui devraient amener les élèves à faire de l'algèbre (équations et inéquations). La représentation graphique des équations de droites, la représentation du polygone de contraintes devraient être une occasion pour la validation des solutions et leur pertinence. Nous avons observé que des problèmes d'optimisation linéaire permettent le développement des compétences algébriques. Les contenus mathématiques (algébriques) qui sont réellement travaillés relèvent de l'arithmétique et de l'algèbre. Toutefois, dans le travail des élèves, les équations sont utilisées comme des outils pour un travail numérique. Les expérimentations ont montré une bonne gestion des démarches. En effet, la démarche définit bien un cadre de résolution. Dans ce cadre, un contenu spécifique est envisagé. Il participe au développement des compétences mathématiques comme le prévoit le nouveau programme au secondaire. Les expérimentations ont permis de constater une appropriation du principe de la modélisation mathématique. C'est ce principe qui structure les démarches proposées dans les manuels, voir celle de Polya (1965) et des heuristiques utilisées dans l'enseignement des mathématiques..

Quels sont alors les problèmes d'optimisation linéaire qui amènent les élèves à faire de l'algèbre ? Pour cerner cette question didactique, il faut pointer les variables didactiques qui guident les élèves dans leur approche de résolution. Les contrôles qui s'opèrent sont des activités d'interprétation, de mise en évidence des formes équationnelles et de détermination de la réponse. Ils sont arithmétiques.

La suite de cette recherche nous permettra de dégager les variables didactiques pertinentes des problèmes d'optimisation linéaire qui donneront l'occasion aux élèves de faire de l'algèbre. Nous jouerons sur ces variables en vue de construire d'autres problèmes. Grâce à une telle articulation, nous serons mieux en mesure de positionner les variables didactiques qui guident les élèves vers une démarche algébrique. En référence au travail d'identification et de variation des variables didactiques des problèmes d'optimisation linéaire dans les manuels de 5^{e} secondaire, la problématique s'articule autour de la question didactique suivante : quels sont les raisonnements et les connaissances mathématiques utilisés dans les activités de résolution de problèmes d'optimisation par les élèves ?

Bibliographie

ADIHOU, A. (2003) *Étude des phénomènes didactiques liés à la méthode de résolution de problèmes arithmétiques par la mise en équations en 9ème secondaire*, Thèse de doctorat, Université de Genève.

ADIHOU, A. (2004) Articulation « problèmes narratifs – méthode de résolution - systèmes d'équations » dans les activités de résolution de systèmes d'équations dans l'enseignement secondaire. *Actes du colloque du GDM 2004*, Université Laval. (p. 85-97)

BALACHEFF, N., (2001) Symbolic arithmetic vs algebra. The core of a didactical dilemma, *Perspective on School algebra,* R. Sutherland Éditeur, Kluwer Academic Publishers.

BEDNARZ, N. (1994) *The Emergency and development of algebra in a problem solving context : a problem analysis*, *Proceedings of the XVIII PME*, Lisbon, Volume 2, p. 64-71.

BEDNARZ, N., et B. JANVIER, (1996) Emergence and development of Algebra as a problem solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.) *Approaches to Algebra: Perspectives for research and teaching*. (p.115-136). Kluwer Academic Publisher.

BÉLAIR, J. (2004) Chaos et complexité, modèles et métaphores: quelles leçons pour l'enseignement des mathématiques. *Actes du colloque du GDM 2004*, Université Laval. (p.135-144)

CHEVALLARD, Y(1989). *Arithmétique, algèbre, modélisation : Étapes d'une recherche*. Editeur : IREM d'Aix-Marseille, Marseille, Collection : IREM d'Aix-Marseille.

COMITI, C., GRENIER, D., et MARGOLINAS, C. (1995). Différents niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situations de classe et modélisation de phénomènes didactiques liés à ces interactions. In *Différents types de savoirs et leur articulation.*, p. 93-127. La Pensée Sauvage, Grenoble.

CONNE, F. (1994) Savoir et connaissances dans la perspective de la transposition didactique, *RDM,* Grenoble, Éditions La pensée sauvage, vol. 12/2.3, 1992, p. 221-270.

CONNE, F., (1997) L'activité dans le couple enseignant/enseigné. In *Actes de la 9e École d'été de didactique des mathématiques à Houlgate*, Grenoble, Marc Bailleul Éditeur, *RDM*, La pensée sauvage.

CONNE, F., (1999) Faire des maths, faire faire des maths, regarder ce que ça donne. In *Le cognitif en didactique des mathématiques*, Montréal, Presses de l'Université de Montréal, G. Lemoyne et F. Conne Éditeurs, 1999, p. 31-69.

COULANGE, L., (2001). Activité du professeur dans l'enseignement des systèmes d'équations en classe de Troisième. *RDM,* Vol. 21.3, La Pensée Sauvage, Grenoble.

COULANGE, L. (2000) *Étude des pratiques du professeur du double point de vue écologique et économique. Cas de l'enseignement des systèmes linéaires et de la mise en équations*, Thèse de Doctorat, Grenoble, Université Joseph Fourrier-Grenoble 1.

FREUDENTHAL, H. (1962), "Logical analysis and critical study". In H. Freudenthal (ed.), *Report on the Relations between Arithmetic and Algebra*, Nederlandse Onderwijscommissievoor Wiskunde, Groningen, The Netherlands, p. 20–41.

GRUGEON, B. (1997) Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire, *RDM*, Grenoble, La pensée sauvage, vol. 17.2.

GRUGEON, B (2000) Une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire : conception, exploitation et perspectives. In L'algèbre au lycée et au collège, *Actes des journées de formation de formateurs.* Boisseron, 4-5 juin 1999, Publication :IREM, université de Montpellier II

KIERAN, C. (1991) *Une approche aidante pour faire la transition avec l'algèbre*, Bulletin AMQ, Mai 1991, p. 25-28.

KIERAN, C. (1992) The learning and teaching of school algebra. In *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, National Council of Teachers of Mathematics, New-York, Macmillan Publishing Company, D. A. Grouws Éditeurs, p. 390-419.

KIERAN, C.(1996). The Changing Face of School Algebra. In C. Alsina, J. M. Alvares, B. Hodgson, C. Laborde & A. Pérez (Eds.) In Actes de *ICME 8* (p. 271-290). Seville: S. A. E. M « Thales ».

MASON, J. (1994) *L'esprit mathématique,* Mont-Royal, Modulo, 178 pages. Collection La spirale.

SCHMIDT, S. (1996). La résolution de problème, un lieu privilégié pour une articulation fructueuse entre arithmétique et algèbre. *Revue des sciences de l'Éducation, 23*(2), 277-294.

SFARD, A. (1991), On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin', *ESM* 21, 1–36.

SFARD, A. (1995), "The development of algebra: confronting historical and psychological perspectives", *Journal of Mathematical Behavior* 14, 15–39.

POLYA, G. (1965) Comment poser et résoudre un problème, 2e éd., Paris, Dunod.

POLYA, G. (1967) La découverte des mathématiques, Paris, Dunod, Sigma.

VAN AMERON, B. A. (2003) Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics* 54: 63–75, 2003.

VERGNAUD, G., CORTES, A. & FAVRE-ARTIGUE, P. (1988). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. In G. Vergnaud, G., Brousseau & M Hulin (Eds.), *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques* (p.259-279). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Annexe 1

« À ce propos, Kieran (1992) écrit : (…) in arithmetic students conceive operations as a command to perform an action (addition, multiplication, etc…). The operation is only the means to an end: finding a numerical outcome. An operation viewed algebraically, on the other hand, is an autonomic object and the outcome is the expression itself; the operation cannot be carried out, so to speak. For example, an expression like ”5 + 3” is an open-ended action in arithmetic but in algebra it is a valid, finished product. Along the same lines of reasoning we can say that the arithmetical meaning of the equal-sign is to announce the numerical outcome of a calculation, while the algebraic, relational conception is to depict a state of equivalence. The former viewpoint agrees with a dynamic, procedural conception of operations and expressions, whereas the latter viewpoint fits a static or – at a formal level – structural perception. With these roles of operations and the equal-sign in mind, symbolic expressions can be viewed as commands for action or as static descriptions. » Kieran (1992).

Annexe 2

En effet Kieran (1996) souligne : « It is important to distinguish here the way in which the terms procedural and structural are being used in this chapter. Procedural refer to arithmetic operations carried out on numbers to yield numbers. For example, if we take the algebraic expression, 3x + y, and replace x and y by 4 and 5 respectively, the result is 17. Another example involves the solving of 2x + 5 = 11 by substituting various values for x until the correct one is found. In both these ostensibly algebraic examples, the objects that are operated on are not the algebraic expressions but their numerical instantiations. Furthermore, the operations that are carried out on these numbers are computational – they yield a numerical result. Thus, both of these examples illustrate a procedural perspective in algebra. The term structural, on the other hand, refers to a different set of operations that are carried out, not on numbers, but on algebraic expressions. For example, if we take the algebraic expression 3x + y + 8x, this can be simplified to yield 11x + y or divided by z, to yield (11x + y) / z. Equations such as 5x + 5 = 2x – 4. In both of theses examples, the objects that are operated on are the algebraic expressions, not some numerical instantiation. The operations that are carried out are not computational. Furthermore, they are yet algebraic expressions. As I have pointed out, most algebra textbooks attach a façade of procedural approaches onto their introduction to algebraic objects by providing a few exercises involving numerical substitution in algebraic expressions and various arithmetical techniques for solving algebraic equation-techniques that allow the students, in sense, to bypass the algebraic symbolism. However, this pretense is soon dropped when expressions are to be simplified and equations are to be solved by formal methods. The implicit objectives of school algebra are structural. That students may attempt to circumvent or may not be prepared to handle the structural intent of curriculum discussed in the section immediately following. The cognitive demands involved in operating on algebraic expressions as objects with operations that are quite unlike the operations of arithmetic are clearly reminiscent of the intellectual struggles that occurred during the historical development of algebra, when procedural interpretations made way for structural ones. » Kieran (1996).

Annexe 3

« Kieran speaks of two conceptions of mathematical expressions: procedural (concerned to operations on numbers, working towards an outcome) and structural (concerned with operations on mathematical objects). In the 1960s it was already clear that discrepancies between arithmetic and algebra can cause great difficulties in early algebra learning. The difficulty of algebraic language is often underestimated and certainly not self-explanatory. Freudenthal explains that its syntax consists of a large number of rules based on principles which, partially, contradict those of everyday language and of the language of arithmetic, and which are even mutually contradictory. (Freudenthal, 1962, p. 35) He then says: The most striking divergence of algebra from arithmetic in linguistic habits is a semantical one with far-reaching syntactic implications. In arithmetic 3 + 4 means a problem. It has to be interpreted as a command: add 4 to 3. In algebra 3 + 4 means a number, viz. 7. This is a switch that proves essential as letters occur in the formulae. a + b cannot easily be interpreted as a problem. The two interpretations (arithmetical and algebraic) of the sum 3 + 4 in the citation above correspond with the terms procedural and structural (or operational and structural, Sfard, 1991, 1995) » Van Ameron, B. A. (2003).