« *PROBLÈMES POUR CHERCHER* »
DES CONDUITES DE CLASSE SPÉCIFIQUES

Magali HERSANT
IUFM Pays de la Loire
CREN, Université de Nantes

Les actuels programmes de mathématiques pour l'enseignement primaire incitent à proposer des *« problèmes pour chercher »* aux élèves (MEN, 2005). Ces situations permettent de développer de façon privilégiée des compétences relatives à la résolution de problèmes et à l'argumentation. Mais, comme le montre un récent article publié dans cette revue (Thomas, 2007), faire travailler de jeunes élèves sur des objets aussi complexes que l'argumentation et la preuve en mathématiques n'est pas une évidence. La gestion de ces situations est reconnue comme particulièrement délicate, notamment pour les enseignants débutants (Douaire *et al*, 2003). Comment les enseignants répondent-ils à cette injonction institutionnelle ? L'activité mathématique des élèves dans les classes correspond-elle aux objectifs fixés par les textes officiels ?

Nous abordons ces questions à partir d'une étude de cas en cycle 3. Nous étudions deux séances relatives à un même problème mis en œuvre par deux enseignants, après un temps de préparation commune avec le chercheur en didactique des mathématiques auteur de cet article. Les enseignants ont des expériences d'enseignement différentes ; ils ont aussi une expérience mathématique différente, car l'un a fait des études universitaires de mathématiques et l'autre pas.

Il s'agit d'analyser les effets des gestions observées sur l'activité mathématique potentielle des élèves à partir des contrats didactiques instaurés dans les classes (Brousseau, 1998 ; Perrin-Glorian et Hersant, 2004) et des tâches que les enseignants proposent aux élèves (Robert, 2003).

Cette étude permet de questionner doublement l'adéquation des contrats didactiques mis en place dans les deux classes : quelles activités mathématiques potentielles des élèves permettent-ils ? En quoi correspondent-ils (ou pas) au contrat attendu pour un *« problème pour chercher »* ? Elle nous conduit ainsi à une réflexion sur le rôle de l'expérience dans la gestion de ces situations singulières et débouche sur des questions posées à la formation des enseignants.

Grand N n° 81, 2008, pp. 57 à 75

La situation mathématique

Le problème

Le problème choisi s'inspire d'une situation ERMEL « Les trois nombres qui se suivent » (ERMEL, 1999, p. 118) qui correspond à un *« problème pour chercher »* (noté par la suite « PPC ») pour des élèves de cycle 3.
Le problème général consiste à déterminer l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire comme la somme de trois nombres consécutifs. Il peut se décliner localement par un travail sur des cas particuliers. Il s'agit alors de chercher si un nombre entier n donné peut se décomposer en la somme de trois nombres consécutifs. Dans la suite de cet article, si un nombre se décompose ainsi, nous dirons qu'il vérifie la propriété P. Par exemple, 69 vérifie la propriété P, car il est la somme de 22, 23, 24 : 69 = 22 + 23 + 24. Il existe des nombres qui ne vérifient pas la propriété P, par exemple 89. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre vérifie la propriété P est qu'il soit divisible par 3[1].

Les séances de classe analysées ici portent exclusivement sur l'étude de problèmes locaux (pour 15, 96, 36 et 46), comme introduction au problème général. Toutefois, pour permettre une meilleure compréhension de ce qui se joue dans les séances qui seront analysées par la suite, nous donnerons aussi parfois des précisions sur le problème général.

Savoirs en jeu

À partir des problèmes locaux, nous souhaitons que les élèves établissent des conjectures, formulent des arguments et débattent pour arriver à une preuve mathématique. Ce sont donc des savoirs relatifs à l'argumentation et à la preuve en mathématiques qui sont visés. Toutefois, selon que le nombre donné vérifie P ou pas, les savoirs en jeu diffèrent. Quand le nombre vérifie la propriété P, exhiber trois nombres qui vérifient les deux contraintes (les nombres se suivent et leur somme est le nombre visé) suffit ; la preuve est assez simple et l'argumentation est réduite à la vérification des contraintes. Elle est plus riche quand le nombre donné ne vérifie pas la propriété P. En effet, montrer l'impossibilité de sa décomposition doit amener les élèves à élaborer des arguments, contre-arguments et preuves, dont les principaux éléments sont explicités dans le paragraphe intitulé « *analyse a priori* ». L'utilisation de contre-exemples va en particulier être intéressante pour invalider des propositions.

À l'issue du problème, il ne s'agit donc pas d'institutionnaliser une méthode (ou une règle) pour la recherche des problèmes locaux, mais de mettre en évidence, par exemple, qu'un unique contre-exemple permet d'invalider une proposition.

Objectifs

Le problème général vise trois objectifs d'enseignement / apprentissage relatifs à la résolution de « PPC » :

- comprendre et s'approprier le problème et ses contraintes ;

[1] En effet, dire qu'un nombre n vérifie la propriété P, c'est dire que n peut s'écrire comme la somme de trois nombres consécutifs que nous pouvons noter $a-1$, a, $a+1$. On a donc $n = (a-1) + a + (a+1) = 3a$, ce qui prouve bien que n est multiple de 3.

- produire des conjectures pour des cas particuliers (de type « oui (respectivement non), ce nombre vérifie la propriété P ») et les prouver (« oui/non, car... ») ;
- produire une conjecture relative à l'ensemble des solutions, la prouver.

Les problèmes locaux reprennent les deux premiers objectifs. En particulier, proposer des nombres qui vérifient la propriété P permet de travailler de façon privilégiée le premier : les élèves doivent bien identifier que deux contraintes sont à respecter. Dans le cas où le nombre proposé ne vérifie pas la propriété P, c'est plus particulièrement le second objectif qui est visé.

Prérequis

Les classes observées sont deux classes de cycle 3 : une classe de CE2-CM1-CM2 et une classe de CM1-CM2. Intéressons-nous aux prérequis mathématiques pour la résolution du problème à ce niveau.

La compréhension du problème demande de savoir ce qu'est une somme et ce que sont trois nombres consécutifs, ce que l'on peut aussi expliquer avec l'expression synonyme "trois nombres qui se suivent".
Au cours de la résolution du problème, les élèves vont avoir à effectuer des additions de trois termes, sans calculatrice : il faut donc qu'ils sachent faire une addition de trois nombres (soit en ligne, soit en colonne), ce qui implique qu'ils connaissent leurs tables et ont compris le principe de retenue. Leurs connaissances arithmétiques, en particulier autour des notions de division et multiple vont aussi intervenir, sans pour autant être cruciales : un élève qui a des connaissances solides sur les triples et quelques notions concernant les ordres de grandeur a des chances d'effectuer moins d'essais pour trouver, lorsqu'elle existe, la décomposition recherchée.

Des savoirs « transversaux »[2] sont aussi à mobiliser lors de l'élaboration de la preuve, en particulier l'utilisation d'un contre-exemple pour invalider une proposition. Ainsi, quand un élève affirme « *46 ne se décompose pas en la somme de trois nombres qui se suivent, car il est pair* », un autre élève peut rétorquer « *oui, mais 36 aussi est pair, or il se décompose !* ». Toutefois, il est difficile de considérer comme prérequis le savoir suivant : exhiber un contre-exemple suffit à invalider une proposition. C'est en effet, un savoir en construction pour la majorité des élèves de cycle 3. Autrement dit, quand un élève utilise un contre-exemple pour invalider une proposition, il n'est pas évident que, pour les autres élèves de la classe, cela suffise à rejeter définitivement la proposition.

Préparation des séances, déroulement prévu

Après avoir choisi d'un commun accord le problème, les deux enseignants volontaires et nous-même posons ensemble les principaux jalons du déroulement de la séance, à partir de la présentation et de l'analyse proposées dans ERMEL.
L'objet de cette préparation commune est de définir des éléments du déroulement de la situation (choix des nombres, modalités de travail), de préciser les objectifs des différentes

---

[2] Au sens de Grenier & Payan c'est-à-dire les savoirs « *intervenant dans de nombreux domaines mathématiques et concernant des termes tels que expérimentation, conjecture, argumentation, modélisation, définition, preuve, implication, structuration, décomposition/recomposition, induction* » (Grenier, Payan, 2003).

phases, d'envisager les propositions des élèves et aussi, pour nous, de répondre aux questions des enseignants.
Cette « préparation commune » a permis d'arrêter les points suivants.

1. Le problème général sera traité en deux ou trois séances. La première, qui fait l'objet de l'article, sera consacrée à un travail sur des problèmes locaux correspondant d'abord à des nombres qui vérifient la propriété P (15, 96, éventuellement 36), puis à un nombre qui ne vérifie pas P (46). 15 est choisi, car nous pensons que les élèves en trouveront facilement une décomposition. 96 correspond à la valeur proposée dans ERMEL (1999) et nous semble raisonnable. 46 est un nombre qui se termine par 6, comme 96 et 36. Ainsi, 96 et/ou 36 peuvent servir de contre-exemple s'il est question d'avoir 6 comme chiffre des unités. Par ailleurs, avec 46, il est assez facile pour les élèves de s'assurer qu'ils ont bien exploré les différentes possibilités de décomposition.
2. La calculatrice n'est pas disponible pour la séance 1.
3. La consigne générique pour les problèmes locaux est : « *Le nombre n peut-il s'écrire comme la somme de trois nombres qui se suivent ? Oui ? Non ? Pourquoi ?* »
4. Le travail sur le nombre 15 vise à permettre l'appropriation de la consigne et des contraintes du problème. Il fera l'objet d'une résolution orale collective qui permettra à l'enseignant de s'assurer que les élèves ont bien compris ces éléments.
5. Ensuite, individuellement et par écrit, les élèves résoudront le problème pour 96 (éventuellement 36 pour les élèves en difficulté), avec une consigne identique. Après la correction de cette question, les élèves chercheront par groupes le problème pour 46 et réaliseront une affiche reprenant leurs réponses.
6. La séance se conclut de la façon suivante : « *Aujourd'hui, nous avons montré que certains nombres se décomposent en la somme de trois nombres qui se suivent et d'autres pas. La prochaine fois, nous chercherons un moyen rapide pour savoir si un nombre se décompose ou pas en la somme de trois nombres consécutifs.* »
7. Lors de la (ou des) séance(s) suivante(s), l'enseignant demandera aux élèves de trouver d'autres nombres vérifiant la propriété P, d'émettre une conjecture sur tous les nombres qui vérifient P et de la prouver.

Une marge de manœuvre assez conséquente est donc laissée aux enseignants. En particulier leurs interventions auprès des élèves et du groupe classe ne sont ni anticipées ni contraintes et rien n'est dit de la présentation du problème aux élèves. Nous avons fait ce choix, car la situation est mise en œuvre par des enseignants volontaires dans un contexte de recherche qui vise à analyser et comprendre comment « vit » l'injonction institutionnelle « PPC » dans les classes, ce qu'en font les enseignants et ce que peuvent apprendre les élèves[3]. En particulier, le rôle de l'expérience dans la gestion de ces situations est questionné. Ce contexte de recherche explique qu'une partie seulement de la préparation de la séance soit réalisée en commun (les deux enseignants et le chercheur) pour ne pas formater les enseignants, tout en leur donnant l'occasion de poser leurs

[3] Au moment de la recherche, dans l'axe « Analyse plurielle » du CREN (Université de Nantes), nous étudions les pratiques enseignantes dans des situations « innovantes » et questionnons particulièrement le rôle de l'expérience dans la gestion de ces situations. Par ailleurs, à l'IUFM, nous sommes engagés dans la recherche INRP « Pratiques langagières et apprentissages » qui questionne les apprentissages dans les situations de débat.

éventuelles questions (sur le problème, ses finalités, son déroulement…) au chercheur. Les séances analysées correspondent donc à des séances de classe semi-ordinaires.

Analyse *a priori*

L'objet de cette analyse est de prévoir et de décrire l'activité possible de résolution du problème par les élèves, lors de la recherche ou lors de la discussion d'une proposition. En particulier, cette analyse nous permet de prévoir si des interventions de l'enseignant sont, à certains moments, nécessaires pour l'avancée de la résolution du problème ou si la classe peut résoudre le problème avec un minimum d'interventions de l'enseignant.
Cette perspective est essentielle, car les « PPC » doivent permettre aux élèves de faire des mathématiques. Pour nous, cela signifie en particulier produire une solution et avoir une capacité à critiquer cette solution. Entre autres, le travail de validation par les élèves est essentiel dans la mesure où il va leur permettre d'exercer leurs compétences liées à l'argumentation et à la preuve. C'est pourquoi nous attachons de l'importance au fait que le problème posé puisse permettre effectivement aux élèves de produire et valider (au sens de Margolinas, 1989) eux-mêmes ou entre pairs des propositions mathématiques. Dans ce cas, les élèves peuvent être responsables quant à la production des connaissances et à leur validation et ainsi faire *vraiment* des mathématiques.

Pour cette analyse *a priori,* nous nous référons aux objectifs et déroulements précisés ci-dessus. Du point de vue mathématique, les tâches prévues pour les problèmes locaux et le problème général sont très différentes. Pour les problèmes locaux, la conjecture et la preuve concernent une question relativement fermée (deux alternatives possibles : oui ce nombre se décompose en la somme de trois nombres qui se suivent ou, non il ne se décompose pas). En revanche, la résolution du problème général porte sur la recherche d'un ensemble de solutions dont on ne connaît pas *a priori* la nature (fini ou infini) et donc dont on ne sait pas *a priori* si on va pouvoir le définir en extension (lister les éléments de cet ensemble) ou en compréhension (définir l'ensemble à partir d'une propriété commune aux nombres qui le composent).

Précisons l'analyse pour les problèmes locaux, objets prévus des séances étudiées dans cet article. Ils correspondent à trois petites situations : dans les deux premières les nombres (15 puis 96 ou 36) vérifient P, ce qui n'est pas le cas de la troisième (46).

Pour 15, il est assez simple de trouver une décomposition correcte en procédant par essais successifs à partir des suites 1, 2, 3 puis 2, 3, 4 etc. Ainsi, pour résoudre le problème, les élèves peuvent :

a. établir une conjecture de type « oui » et chercher une décomposition par essais successifs ;
b. chercher une décomposition (par essais successifs) sans explicitement établir de conjecture (cas des élèves qui imaginent que, comme l'enseignant pose la question, une telle décomposition est possible) ;
c. établir une conjecture de type « non » et en chercher une preuve[4].

En cas de proposition erronée, les autres élèves de la classe, constatant le non-respect de l'une des contraintes, pourront le signifier et proposer des arguments contre les propositions faites. En cas de proposition correcte, il est aisé pour les élèves de vérifier que

[4] Nous détaillerons ensuite, pour les différents cas, ce que nous considérons comme une preuve de ce problème pour des élèves de cycle 3.

la proposition respecte les contraintes imposées. Il est donc possible que ce cas soit traité avec peu d'interventions de l'enseignant.

Pour 96, il devient plus laborieux de procéder par essais successifs. On peut penser à trouver la suite correspondante en effectuant une division par 3 de 96 ou, intuitivement, si l'on a à l'esprit que quatre-vingt-dix est le triple de trente. Lors du travail individuel, la validation d'une solution va venir essentiellement du contrôle du respect des contraintes. Les élèves ne disposant pas de la calculatrice, des erreurs de calcul peuvent subsister. Par ailleurs, si un élève s'engage dans la voie (c), la seule rétroaction possible de la situation serait qu'il trouve (par hasard) la décomposition correcte. Cela suppose donc qu'il n'ait pas réellement établi de conjecture « non ». Au moment de la mise en commun, comme pour 15, les autres élèves de la classe pourront réagir et proposer alors la « bonne » décomposition qui constitue la preuve que la décomposition est possible.

Le cas de 46 est plus compliqué que les précédents, pour deux raisons. La preuve met en jeu le caractère discret de l'ensemble des entiers naturels et la « croissance de la somme » sur les entiers naturels. Or ces propriétés sont difficiles à expliciter pour des élèves de cycle 3, car elles sont à la fois subtiles, transparentes (dans le sens où les élèves qui ne savent pas encore bien que la discrétion de IN est une propriété importante de cet ensemble ne verront pas forcément le problème qui se pose) et intuitives. Cette opacité peut nuire à l'instauration d'un débat dans la classe.
Cependant, les élèves pourront prouver que 46 ne vérifie pas la propriété P avec les éléments suivants :

- 14, 15, 16 et 15, 16, 17 sont deux triplets « consécutifs » ;
- 14 + 15 + 16 = 45 ; 15 + 16 + 17 = 48 ;
- 46 est compris entre 45 et 48 et on ne peut pas l'atteindre.

Ainsi, la preuve pour 46 consiste alors non plus à exhiber un triplet correct mais à mettre en relation des arguments pour effectuer, finalement, un raisonnement implicite par l'absurde.
Si un élève conjecture que 46 vérifie P et produit un triplet qui permet, à son avis, de le montrer, les autres élèves peuvent alors assez facilement prouver que le triplet ne convient pas, car il ne respecte pas au moins une des contraintes. Mais si un élève émet une conjecture correcte et produit une preuve erronée, il sera certainement plus difficile pour la classe de réagir aux arguments proposés. Ainsi, par exemple, la proposition « *46 ne se décompose pas en la somme de trois nombres consécutifs, car il est pair* »[5] est invalide mais l'élève émet la bonne conjecture (46 ne vérifie pas P). L'erreur réside dans la justification proposée ; or cette justification revêt une apparence très mathématique. Si des élèves ne recourent pas à un contre-exemple, en indiquant que la raison ne peut pas être la parité, car 96 vérifie P et est pair, des interventions de l'enseignant sont à prévoir pour faire émerger cette incompatibilité des arguments.

Contexte de recueil des données

Nous l'avons ébauché précédemment, le recueil des données s'effectue dans un contexte de recherche. Les séances observées ne sont donc pas des séances de classe ordinaires, elles sont contraintes par le cadre de la préparation commune, mais laissent volontairement

[5] Justification effectivement proposée par des élèves dans les classes que nous avons observées et dans celles observées par Aubertin *et al.* (2005).

aux deux enseignants des marges de manœuvre. D'autres choix sont liés à ce contexte de recherche.

Les enseignants

Concernant la façon dont les enseignants peuvent aménager l'espace didactique laissé à leur charge après la préparation commune, nous formulons deux hypothèses qui peuvent entrer en interaction.

Première hypothèse : la gestion d'une situation de type « PPC » demande d'instaurer dans la classe un contrat didactique de type « recherche ». Dans ce système particulier d'attentes réciproques entre le professeur et les élèves (voir Brousseau, 1998), les élèves ont la responsabilité de résoudre le problème, d'y proposer des solutions et de les critiquer. Pour un enseignant, la capacité à mettre en place un tel contrat de « recherche » est fortement déterminée par sa représentation de ce qu'est « faire des mathématiques ».

Seconde hypothèse : un enseignant expérimenté est rodé à la gestion de mises en commun et à la prise d'informations à partir des productions des élèves ; il devrait donc plus facilement permettre l'émergence des différentes propositions des élèves et prendre des décisions sur ce qu'il faut laisser « ouvert » et ce qu'il convient de « fermer » lors du débat.

Ces hypothèses nous ont amenés à observer deux enseignants ayant des expériences différentes en enseignement et en mathématiques. André est un maître-formateur expérimenté qui propose des situations de recherche à ses élèves depuis plusieurs années dans des disciplines autres que les mathématiques. Béatrice est une stagiaire en formation à l'IUFM qui a suivi des études universitaires de mathématiques jusqu'au niveau bac + 3. André l'accueille dans sa classe pour un stage de pratique accompagnée.

Les classes et la réalisation des séances

Les deux séances sont observées au second trimestre dans deux classes de la même école, située en ZEP.
André mène la séance dans la classe de CM1-CM2 d'une de ses collègues (classe A). Béatrice mène la séance dans une classe à triple niveau CE2-CM1-CM2 (classe B) qui est la classe habituelle d'André. Les deux enseignants travaillent donc dans des classes qu'ils connaissent peu. Pour André, ses habitudes de classe, sa connaissance des élèves et donc une partie de ses points d'appui habituels sont supprimées. Nous avons fait ce choix, extrêmement contraignant pour cet enseignant expérimenté, car nous pensons que c'est une façon de rapprocher certaines conditions d'action des deux enseignants.
La séance est d'abord réalisée par André, puis par Béatrice. Béatrice assiste à la séance menée par André avec d'autres stagiaires et une étudiante qui prépare le concours de professeur des écoles, puis André assiste à la séance conduite par Béatrice.

Le corpus

Les deux séances sont observées, filmées et retranscrites ; les productions des élèves sont recueillies. Nous travaillons essentiellement à partir de la transcription des échanges dans la classe, des notes prises au cours de chacune des séances et des productions des élèves.

De l'étude des déroulements aux activités potentielles des élèves

Les séances ont la même durée (1 h 10 environ) et, globalement, nous n'observons pas d'écart majeur par rapport au déroulement prévu. Cependant, dans la classe A, la séance va au-delà de ce qui était envisagé : l'idée que les nombres multiples de trois pourront toujours admettre une décomposition est donnée, tandis que dans la classe B, la séance se clôt sur le cas de 96. Nous avons repéré de nombreuses différences dans la gestion locale de la situation, en particulier lors de la présentation du problème et du traitement des différents cas au cours de la séance. Elles relèvent de la marge de manœuvre des enseignants.

Nous pensons que ces différences observées ont un impact fort sur l'intensité et la nature de l'activité potentielle des élèves et donc, *in fine,* sur leurs apprentissages. En effet, les interventions de l'enseignant déterminent et modulent, d'une part, la responsabilité laissée aux élèves dans la résolution du problème donc le contrat didactique (Perrin-Glorian et Hersant, 2003) et, d'autre part, modifient la tâche prescrite aux élèves. Pour nous, du point de vue de l'activité mathématique potentielle des élèves, donc des apprentissages qui en découlent, il n'est pas équivalent de laisser les élèves faire des propositions et évaluer leur validité individuellement, en collectif ou aidés de l'enseignant. Pour cette raison, nous distinguons les contrats où le collectif-classe a la charge de faire avancer le problème et les contrats où cette responsabilité est dévolue à chacun des élèves de la classe (cas du travail individuel). Dans le premier cas, il est possible que moins d'élèves se sentent concernés et s'investissent dans le travail : ils peuvent attendre que d'autres fassent avancer le problème. De la même façon, l'activité potentielle des élèves est différente dans sa nature selon qu'on leur propose la tâche « *Dire si 15 peut se découper en la somme de 3 nombres qui se suivent et le justifier* » ou selon qu'on découpe cette tâche initiale en sous-tâches techniques et isolées.

Partant de l'étude des interactions dans la classe, nous reconstruisons donc le contrat didactique instauré, en termes de responsabilités laissées aux élèves dans la production et la validation des réponses, et identifions les tâches mathématiques proposées par l'enseignant pour envisager l'activité mathématique potentielle des élèves. Au sens de Robert (2003), nous parlons d'activité mathématique potentielle, car nous n'avons pas les moyens de déterminer si cette activité est effectivement réalisée ou pas, et en particulier si elle est réalisée par chacun des élèves de la classe. L'activité mathématique dont il est question dans cet article est donc, le plus souvent, une activité mathématique potentielle pour un élève générique de la classe.

La présentation du problème aux élèves et sa dévolution

La première intervention d'un enseignant lorsqu'il présente un problème à ses élèves participe fortement au processus de dévolution de la situation qui sera ensuite entretenu tout au long de la séance. Elle précise aussi ce qui est attendu des élèves et influence donc, sans la déterminer encore totalement, l'activité mathématique future des élèves.

Nous retranscrivons ci-dessous cette première intervention dans les deux classes.

> André *: « Donc, vous, votre rôle il est … triple : d'abord, ben, vous allez apprendre quelque chose, hein, vous savez, vous savez des choses sur les nombres, vous savez faire des opérations, eh bien aujourd'hui et puis deux autres fois […] vous allez apprendre à résoudre un problème en utilisant ce que vous savez sur les nombres et sur les opérations. Je ne peux pas en dire plus pour l'instant, donc ça c'est… vous allez apprendre quelque chose, j'espère*

en tout cas. Deuxième rôle, heu… vous allez aider heu … les étudiantes … à apprendre puisque ces étudiantes vont devenir… institutrices l'année prochaine. Et dernière chose, eh bien pour nous, [...] ce que vous ferez nous apprendra pour savoir comment on peut faire faire des maths aux élèves. Voilà. Aujourd'hui... on va…Certains nombres, écoutez bien. Certains nombres se décomposent en une somme de trois nombres qui se suivent et d'autres pas. On va expliquer tout ça. Eh bien aujourd'hui, on va apprendre à trouver ces nombres, à en trouver certains et surtout expliquer pourquoi. Je vais vous donner un exemple. ... Par exemple, le nombre 15… 15, il se décompose en la somme de trois nombres qui se suivent. »

Béatrice *: « Le problème aujourd'hui, il faudra bien, bien faire attention. Il faudra toujours justifier, dire pourquoi on fait quelque chose, alors il ne faudra pas répondre au problème en disant seulement oui, non. D'accord ? Il faudra toujours dire oui parce que […] quelque chose ou alors non parce que quelque chose. D'accord ? Donc aujourd'hui, je vais vraiment vous demander de faire ça. C'est bien, à chaque fois que vous répondez à quelque chose […] c'est toujours de faire des phrases en disant « parce que quelque chose ». D'accord ? Alors notre petit problème aujourd'hui, ça va être … d'écrire… alors écoutez bien là ça va être un petit peu compliqué au début…d'écrire des nombres, d'accord ? Comme une somme, une somme c'est comme une addition, de trois nombres qui se suivent. Alors là, ça paraît un petit peu difficile. On va… on va faire un exemple tous ensemble d'accord ? … alors l'exemple, tous ensemble, ça va être avec le nombre 15. »*

Dans ces interventions, nous relevons plusieurs différences qui nous semblent pouvoir influencer, plus ou moins, et de différentes façons, l'activité mathématique potentielle des élèves au cours de la séance.

L'enrôlement des élèves

La manière dont l'enseignant s'adresse aux élèves au début de la séance, et en particulier les pronoms employés, initie le processus de dévolution du problème et définit une première mise en responsabilité de résoudre le problème qui pourra évoluer au cours de la séance. Cette introduction influence ainsi l'engagement des élèves dans l'activité mathématique. Ici, André s'adresse dès le début directement aux élèves (« *vous* », « *votre* »), puis utilise le « *on* » à la fin de la présentation. Il précise clairement que le rôle des élèves s'inscrit dans une double logique : logique d'apprentissage, logique d'aide. Béatrice n'implique pas personnellement les élèves dans la résolution du problème et s'adresse rarement directement à eux (au début, utilisation du « *il faudra* » puis du « *vous* » et enfin du « *on* », « *nous* »).

Par ailleurs, la difficulté annoncée du problème qui peut affoler ou rassurer certains élèves va aussi potentiellement modifier leur engagement dans le travail mathématique. Béatrice présente à plusieurs reprises le problème comme un problème difficile et « *petit* » alors qu'André ne donne aucune précision de ce type au départ. Par la suite, pour le cas de 15, il précisera que c'est « *simple en fait* ».
Du point de vue de la dévolution du problème, il est donc possible que les élèves de la classe B, à l'issue de cette introduction, se sentent moins engagés dans l'activité que ceux de la classe A.

Pourquoi résoudre ce problème ?

La place donnée au problème dans les apprentissages mathématiques, et d'un point de vue social, constitue pour nous un autre facteur ayant un impact sur l'engagement des élèves dans la situation : cela peut modifier le but que les élèves assignent à la situation (apprendre, faire plaisir / aider, résoudre le problème). Ainsi, cela influence la nature de leur activité mathématique potentielle et son intensité, c'est-à-dire son degré de mathématique. Par exemple, la place attribuée au problème permet - ou pas - de le repérer comme une activité mathématique, comme un travail qui demande - ou pas - de mobiliser des connaissances mathématiques antérieures.

Or, ici, les deux enseignants procèdent de façon très différente. André situe le problème dans la continuité des apprentissages des élèves, leur indique clairement qu'ils vont apprendre à résoudre des problèmes et en particulier qu'il s'agit d'apprendre à trouver les nombres qui se décomposent en la somme de trois nombres consécutifs, en expliquant pourquoi et en utilisant leurs connaissances antérieures. Cela lui permet de donner une certaine épaisseur au problème en le situant dans les apprentissages et de motiver les élèves en évoquant des raisons extérieures à la classe (logique d'aide). En revanche, Béatrice attribue au problème un caractère local (pas de continuité avec les apprentissages passés et à venir) et réduit, notamment à travers l'énumération d'actions (faire attention, expliquer, justifier, dire pourquoi, faire des phrases) non explicitement reliées à un objectif d'apprentissage. Les deux enseignants ne poursuivent vraisemblablement pas les mêmes buts.
Ainsi, les élèves ne seront pas engagés dans l'activité pour les mêmes raisons : raisons d'apprentissage et sociales *versus* raisons scolaires et énigme.

Le problème mathématique posé

La tâche proposée initialement aux élèves, avec son degré d'ouverture, a aussi une incidence sur la nature de l'activité mathématique potentielle induite chez les élèves. Dans les deux classes, le problème proposé nécessite une certaine disponibilité des connaissances des élèves, mais le degré d'ouverture du problème varie. En effet, Béatrice ne précise pas que certains nombres vérifient P et d'autres non : elle propose d'écrire « *des* » nombres comme la somme de trois nombres consécutifs. Cette formulation peut induire, de notre point de vue, des activités mathématiques potentielles radicalement différentes chez les élèves.

En parlant « *de* » nombres, Béatrice donne un caractère restreint au travail et peut laisser penser qu'il s'agit de travailler sur des nombres pris au hasard, sans s'intéresser au cas général, voire que la décomposition est possible pour tout entier.
Mais, Béatrice laisse aussi le problème très ouvert puisqu'elle n'indique pas qu'il y a une partition entre les nombres qui vérifient la propriété et ceux qui ne la vérifient pas. Il est donc possible que cela permette finalement de mieux poser le problème pour les élèves qui « découvriront » par eux-mêmes que tous les nombres ne vérifient pas la propriété.
La suite du déroulement montre que les élèves de la classe B pensent que certains nombres ne peuvent pas se décomposer comme la somme de trois nombres consécutifs. Pour eux, ce n'est pas une donnée, mais un construit. En effet, cette idée émane alors des élèves confrontés à l'impossibilité de trouver une décomposition pour 46.
En revanche, André indique clairement que seulement certains nombres vérifient P et précise que l'objet de la séance est de les trouver. Il donne ainsi un caractère plus général au problème (trouver « ces » nombres). Mais, ce faisant, il ferme aussi le problème en limitant le doute chez les élèves : puisque certains nombres sont réputés ne pas respecter P, on peut penser que, dès le début, les élèves s'attendent à en rencontrer au cours de la séance.

Le traitement des différents cas

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons plus spécifiquement à l'activité mathématique des élèves dans chacune des classes, au fil de la séance.
Nous inférons cette activité à partir de l'articulation de plusieurs éléments issus de l'observation et des transcriptions. L'organisation de travail dans la classe et l'attitude des élèves nous permettent de reconstruire la répartition des responsabilités dans la classe, donc l'intensité de l'activité mathématique des élèves et en partie sa nature. La tâche proposée aux élèves nous permet de compléter la nature de l'activité mathématique potentielle des élèves, tandis que les interactions observées et les productions écrites, le cas échéant, reflètent une partie de leur activité effective.
Dans l'analyse de la répartition des responsabilités au sein de la classe, nous nous attachons particulièrement à ce qui relève de la validation car, pour nous, les *« problèmes pour chercher »* sont des lieux privilégiés pour laisser cette responsabilité aux élèves, du moins tant qu'ils disposent des connaissances qui permettent de traiter les propositions de leurs camarades.

Le cas de 15

Dans les deux classes, le travail n'est pas organisé de la même façon. André propose directement un travail oral. Avec cette répartition des responsabilités, chacun des élèves de la classe ne se sent pas forcément concerné par la résolution du problème : l'activité mathématique réelle de certains élèves peut se réduire à l'écoute, éventuellement la critique, des propositions des autres élèves. Dans ce cas, l'entrée dans la situation mathématique ne se fait pas par la recherche du problème. Béatrice donne les feuilles aux élèves et leur demande un travail individuel rapide. Ce travail est suivi d'un échange collectif et oral plus long. La recherche individuelle devrait permettre à chacun des élèves de « rentrer » dans le problème, mais ce moment est si court que ce n'est pas sûr.

Par ailleurs, la tâche proposée dans les deux classes et ses enjeux sont différents. André annonce clairement que 15 se décompose comme la somme de trois nombres qui se suivent : les élèves n'ont donc pas à établir de conjecture, leur activité potentielle consiste à exhiber une décomposition de 15 et à montrer qu'elle convient. Les propositions des élèves vont être du type : « *15 se décompose en la somme de 4, 5 et 6 qui sont des nombres qui se suivent.* » Ces propositions devront être acceptées ou rejetées par les autres élèves de la classe avec des arguments du type : « *Je suis d'accord / J'accepte la proposition, car les trois nombres se suivent et leur somme est 15.* » Les connaissances en jeu ici sont donc d'abord de nature numérique, même si la vérification des deux critères s'apparente à de l'argumentation. Béatrice laisse la question ouverte (« *on essaie de l'écrire comme une somme …* ») Le problème correspond alors au traitement d'un premier cas, simple, qui sera l'occasion de s'intéresser particulièrement au respect des contraintes. Sa résolution requiert potentiellement, en plus des connaissances précédentes, de se positionner par rapport à la possibilité de décomposition de 15. Au cours de cette phase, les élèves de chacune des classes n'ont donc pas, potentiellement, une activité mathématique de même nature.

Intéressons-nous à l'activité effective de certains élèves et à la façon dont elle est modulée par les enseignants. Les propositions d'élèves pour 15 et leur traitement au sein de la classe pour l'ensemble de la phase sont résumés dans les tableaux suivants, dans leur ordre d'apparition.

Classe A

Propositions		**Traitement** (dans l'ordre où il est effectué)
1	Guillaume 5 10 15	André interroge la classe à propos du respect de la contrainte « somme », les élèves indiquent que la somme ne fait pas 15 et la proposition est rejetée. Rien n'est dit à propos de la contrainte « suite ».
2	Cidonie 1 3×5	André demande à Cidonie d'écrire sous la forme d'une somme.
	Cidonie 2 5 5 5	André évalue la contrainte « somme » puis renvoie à la classe l'évaluation du respect de la contrainte « suite ».
3	Salah 5 8 2	André indique que la contrainte « suite » n'est pas respectée et rejette la proposition. Rien n'est dit à propos de la contrainte « somme ».
4	Coralie 4 5 6	Coralie indique spontanément que la contrainte « somme » est respectée, les autres élèves approuvent. André pose la question du respect de la contrainte « suite » et ce sont les autres élèves qui valident le respect de cette contrainte.

Classe B

Propositions		**Traitement** (dans l'ordre où il est effectué)
1	Mallaury 5 5 5	Des élèves évaluent spontanément le respect de la contrainte « suite », mais Béatrice n'en tient pas compte et interroge sur la contrainte « somme » qui est évaluée par les élèves. La contrainte « suite » est reprise ensuite par les élèves à la demande de Béatrice.
2	Un élève 5 6 7	Cette proposition entendue lors du temps de travail personnel ne fait pas l'objet d'un traitement.
3	Un élève 4 5 6	Cette proposition entendue lors du temps de travail personnel ne fait pas l'objet d'un traitement.
4	Naïm 4 5 6	Béatrice pose la question du respect de la contrainte « suite », plusieurs élèves valident. Dans la foulée, plusieurs élèves valident, sans être interrogés, la contrainte « somme ».

L'analyse des interactions, en particulier pour les contraintes « somme » et « suite » qui sont difficiles à respecter pour les élèves, nous conduit aux conclusions suivantes.

Lorsqu'une proposition d'élève est erronée, André va :

- soit demander directement aux élèves d'évaluer la contrainte non respectée et ne pas traiter la seconde contrainte (cas 1) ;
- soit évaluer la contrainte respectée et demander aux autres élèves de la classe de se prononcer sur le respect de la seconde contrainte (cas 2) ;
- soit évaluer lui-même la contrainte non respectée et rejeter la proposition (cas 3).

Au cours de cette phase, André ne laisse pas toujours aux élèves de la classe la possibilité de réagir à une proposition et dans certains cas, les élèves n'ont pas la charge de l'évaluation des propositions. Leur activité mathématique est apparemment réduite à une portion congrue qui en particulier ne permet pas pleinement le travail sur l'argumentation.
Béatrice s'attache à faire vérifier systématiquement le respect des contraintes « suite » et « somme » ; la contrainte respectée est toujours sollicitée en premier, ce qui permet de ne pas tuer l'intérêt de regarder le respect de l'autre contrainte. Elle sollicite le plus possible

les validations auprès de l'ensemble des élèves, quelquefois même quand cela est très simple (pour la somme par exemple) ; l'activité mathématique des élèves a donc à voir avec l'argumentation, même si elle reste très guidée par l'enseignante.

Le cas de 96

Dans les deux classes, le travail individuel écrit pour 96 est suivi d'une mise en commun. La tâche initialement proposée par les deux enseignants est identique (« *96 peut-il se décomposer en la somme de trois nombres qui se suivent ? Oui ? Non ? Pourquoi ?* »). Cependant, les interventions successives des enseignants modifient différemment la tâche, le contrat didactique et l'activité des élèves.

Lors du travail individuel, dans la classe A, les interventions de l'enseignant concernent des aspects d'organisation liés à :
- l'utilisation de la feuille distribuée (au début du travail surtout) ;
- la poursuite de la dévolution du problème qui est soit individuelle, soit collective (renvoi à la classe de la question d'un élève) ;
- l'évaluation des réponses des élèves (1/3 des interventions de l'enseignant à ce moment) ; cette évaluation concerne aussi bien la valeur de vérité mathématique de la réponse que la justification.

Ces interventions participent à la dévolution du problème, mais risquent aussi, à notre avis, de restreindre l'activité de l'élève à la recherche d'une réponse de type oui / non sans justification. De plus, elles n'incitent pas les élèves à travailler sur le contrôle de leur résultat et diminuent le suspens sur la valeur de vérité des réponses, donc la source du débat.

Dans la classe B, les interventions de l'enseignante destinées à la classe entière à ce moment concernent la gestion du bruit dans la classe, l'organisation du travail sur feuille, la dévolution du problème à l'ensemble de la classe, qui s'effectue notamment avec :
- un rappel à l'initiative de Béatrice sur la façon de répondre à un problème et sur ses exigences à cet égard ;
- une précision sur la façon d'organiser le travail (Béatrice conseille de faire des essais).

Les interventions de Béatrice auprès d'élèves n'ont pas pour fonction d'évaluer leurs réponses, mais de poursuivre la dévolution ou d'inciter à la validation par des questions ; elle indique aux élèves s'ils peuvent passer au travail sur le nombre 46 mais n'évalue pas pour autant la validité de leur réponse pour 96. Elle regarde plutôt s'ils ont produit une réponse conforme à ce qu'elle leur a indiqué au début. Ainsi, Béatrice permet aux élèves d'avoir une activité mathématique de résolution de problème dans le sens où il leur incombe de produire une solution et de se poser la question de sa validité. Par ailleurs, elle met aussi en place les éléments nécessaires au débat futur.

Dans les deux classes, pour une même tâche initiale, le contrat didactique établi n'est donc pas le même : les élèves de la classe A ont la responsabilité d'une première production et sont peu impliqués dans la validation tandis que ceux de la classe B ont la responsabilité de la première production et celle de la validation au travers du contrôle de leur proposition. Pour nous, ces deux contrats conduisent à une activité mathématique de nature et d'intensité différentes chez les élèves lors de la recherche individuelle. Par ailleurs, ces contrats n'offrent pas les mêmes perspectives d'interactions et d'argumentation entre les élèves au moment de la mise en commun. Enfin, nous pensons qu'ils véhiculent chez les élèves des idées différentes des règles du débat mathématique à venir. En particulier, dans la classe A, certains élèves peuvent penser que la responsabilité de la validation ne leur incombe pas, que la production d'une réponse au « *pourquoi ?* » de l'enseignant est un jeu strictement formel entre les élèves et l'enseignant et non un jeu d'argumentation entre les élèves.

En fait, cela se précise de la façon suivante. Dans la classe A, dans la continuité du contrat installé, la mise en commun consiste essentiellement en une interaction duale entre l'enseignant et Jonathan, interrogé par l'enseignant qui a constaté au cours de la phase de travail individuel la validité de sa réponse.

Mise en commun pour 96. Classe A

André : chut chut ! Tu peux y aller Jonathan ou pas ? Oui ?
J : oui. J'ai fait 31 + 32 + 33 égal 96, ben je fais 3 + 3 + 3 ça fait (inaudible) *mais pas 9, 3 + 2 non… trois plus… 3 + 3 + 3 ça fait 9…*
André : tu n'as pas répondu à la question. Là, tu nous as fait une opération.
Un élève : il faut dire si…
André : alors dis-nous : est-ce que 96 peut se décomposer en une somme de 3 nombres qui se suivent ? Pourquoi ?
J : bah, oui.
André : alors oui ou non ?
J : oui.
André : oui. Pourquoi ?
J : ……
Un élève : parce qu'il l'a fait.
J : parce que j'ai réussi.
André : pourquoi tu as réussi ?
J : ben, parce que j'ai fait le calcul.
André: comment ?
J : parce que j'ai fait le calcul.
André : quel calcul ?
Un élève : facile.
J : ben, 31 + 32…
André : pourquoi tu fais ce calcul 31 + 32 + 33 et tu ne m'en as pas fait un autre ?
Mohamed : parce que ça fait 6.
André : chut !
Un élève : parce que c'est la réponse.
André : tu vas l'aider. Tu (inaudible) *pourquoi c'est la réponse, hein ? Tu as juste, tu as raison. Nous, on veut comprendre vraiment, on veut que tu démontres que tu… que c'est juste hein. Ça marche, c'est clair, oui, mais pourquoi ? Tu as presque trouvé, hein. Tu as juste à nous dire heu… pourquoi tu as pris 31, 32 et 33.*
Un élève : parce que ça se suit.
André : chut ! On lève le doigt. On aide Jonathan. Mohamed ?
Mo : parce que ça se suit.
André : 31, 32, 33… se suivent.
Mo : ouais.
André : tu es d'accord et comme tu l'as expliqué la somme fait 96.

La proposition de Jonathan est correcte, mais l'argument « suite » n'est pas explicité. Lors de l'interaction, André évalue la justesse de la proposition (par répétition, puis en précisant

« *tu as juste, tu as raison* », « *ça marche, c'est clair* ») puis demande à l'élève d'expliciter ses arguments (« *pourquoi ?* »). Comme il n'y parvient pas, c'est un autre élève qui explicite l'argument « suite » qui sera validé par répétition de l'enseignant.

Mise en commun pour 96. Classe B

Béatrice : Alors, Jordy nous donne sa réponse. Il écrit 31 + 32 + 32 au tableau. *Un élève : eh, ouais, c'est bien ça.* *Un élève : ouais, 31 32 33* (Réactions de plusieurs élèves). *Béatrice : alors … apparemment …. Il y a quelque chose qui ne va pas.* *Un élève : tu es bête, tout à l'heure il t'a dit Steven.* *Un élève : 31 32 33* (Jordy modifie au tableau). *Béatrice : (…) Alors est-ce que ce sont bien des nombres qui se suivent ?* *Plusieurs élèves : oui (…)* *Jordy : oui.* *Béatrice: oui. Est-ce que la somme fait bien 96 ?* *Plusieurs élèves : oui.* *Béatrice : bon, on va le faire ensemble. D'accord ?* *Plusieurs élèves : ouais... j'ai trouvé la réponse.* *Béatrice : alors tu peux nous expliquer comment tu as fait pour trouver 96 ?* *Jordy : 30 plus 30 plus 30 ça fait 90.* *Béatrice : d'accord. Donc on additionne les dizaines, là. Oui. … donc…* (…) *et ensuite… qui a une idée … 1 + 2 ça fait ?* *E : 3.* *Béatrice : 3 + 3. On peut l'écrire dans le coin des solutions qui fonctionnent, d'accord ?*

Parmi les élèves qui lèvent le doigt, Béatrice choisit d'interroger Jordy. Sa proposition est erronée (31 + 32 + 32) mais elle ne l'évalue pas, ce sont les autres élèves de la classe qui le font. Une fois l'erreur corrigée, Béatrice dirige les interactions en demandant explicitement aux élèves de se prononcer sur le respect des contraintes « suite » et « somme » (« *est-ce que ces nombres se suivent ?* », « *est-ce que la somme fait 96 ?* »). De cette façon, elle ramène à des sous-tâches simples la tâche d'argumentation. Cependant, elle laisse à l'ensemble des élèves une part de responsabilité dans une validation guidée de la proposition. Dans l'autre classe, André propose une tâche moins technique (« *pourquoi ?* ») mais laisse à certains élèves seulement une responsabilité dans la validation de la proposition de Jonathan. Les contrats didactiques établis sont donc très différents. L'attitude des élèves dans la classe B montre une adhésion de leur part et révèle l'intensité de l'activité mathématique qui en résulte : dans cette classe, les élèves réagissent en choeur aux propositions de Jordy et aux questions de l'enseignante.

Le cas de 46

Dans les deux classes, plusieurs élèves ont réfléchi individuellement au cas de 46 avant la mise en commun pour 96. Un début de résolution orale du cas 46 débute naturellement dans la continuité de la mise en commun sur 96.

Dans la classe B, plusieurs élèves prennent la parole pour faire des propositions ou donner des arguments. Béatrice ne prend pas position. Elle s'affère à permettre la circulation des idées entres les élèves (en leur rappelant par exemple d'écouter ce que dit un autre élève), à relancer le problème (par exemple : « *on a trouvé pour 15, pour 96 … mais pour 46 on a un problème* ») ou à rapprocher des propositions d'élèves (par exemple : « *regarde, on l'a* *déjà fait* »). Elle tient le rôle de répartiteur de la parole dans la classe et de mémoire des échanges entre les élèves. Au moment où Béatrice interrompt le débat pour lancer le travail en groupes, deux types d'arguments ont été émis dans la classe : « *14 + 15 + 16 = 45 et 15 + 16 + 17 = 48, donc on ne peut pas* » et « *on ne peut pas, car 46 est un nombre impair.* »[6] Lors de la mise en commun, les élèves qui justifient l'impossibilité de décomposer 46 en la somme de trois nombres consécutifs par le fait que 46 est impair prennent une place importante. Béatrice donne d'abord à la classe la possibilité de poser des questions à propos de cet argument, puis précise ce qu'est un nombre impair mais, dans le feu de l'action, se trompe. Cela ne facilite pas la suite du débat. Pour autant, il faut noter qu'elle évalue rarement les propositions des élèves mais privilégie l'échange entre eux. Les élèves critiquent alors les propositions des différents groupes, notamment en utilisant des contre-exemples.

Le recours au contre-exemple a notamment lieu lorsque certains élèves prétendent que 46 ne se décompose pas en la somme de trois nombres consécutifs, car il est impair. Les élèves ont alors déjà établi que 36 vérifie la propriété. Une élève contre-argumente une première fois en utilisant 36 comme contre-exemple, mais ne convainc pas l'ensemble des élèves de la classe.
L'argument invalide réapparaît donc un peu plus tard, ce qui donne lieu à l'échange ci-dessous, où l'enseignante sollicite les élèves pour rappeler le contre-exemple.

Reprise d'un contre-exemple dans la classe B

Siam : Non parce que 46 est un nombre impair. *Béatrice : alors, non parce que… alors Siam nous propose…. 46 un nombre impair. Qu'est-ce qu'on a dit tout à l'heure ?* *Hassan : eh, ça marche pas Siam…* *Béatrice : lève la main, lève la main, lève la main.* *Hassan : ben je lève la main.* *Béatrice: Hassan ?* *Hassan : heu ça ne marche pas parce que heu on l'avait déjà fait mais ... hé .... 36 déjà c'est un nombre impair et il marche.* *Béatrice : Voilà. Est-ce que tu as entendu, Siam ? D'accord. Alors ce n'est pas un nombre impair, hein. On a vu que c'était pair, 36 c'est pair. Ça se finit par 6, oui ? ... et comme c'est pair, 46 est pareil, d'accord ? 36 et 46. Alors que 36, il marche.*

Dans la classe A, la première phase de travail collectif sur le nombre 46 ne permet pas d'aller aussi loin que dans la classe B. Les arguments avancés sont moins bien explicités et sont tous du type « *on peut faire 45, on peut faire 48, mais on ne peut pas faire 46* ». Lors de la mise en commun, les élèves réagissent peu aux différentes propositions et André évalue les réponses. Il n'y a pas vraiment de débat. L'attitude moins réactive des élèves dans cette classe, qui reflète leur activité mathématique tant dans sa nature que dans son intensité, peut être liée au contrat didactique instauré au début de la séance. Toutefois les habitudes de classe - les élèves sont peu habitués à débattre - ne sont certainement pas négligeables.

[6] Les élèves n'ont pas appris précédemment ce qu'est un nombre impair, mais c'est un argument qui a été donné par Victor et qui est repris par les autres élèves.

Faire vivre de « *vrais problèmes pour chercher* » dans les classes : l'expérience comme atout ?

Le problème proposé initialement dans la classe B est relativement ouvert ; les élèves, dans leur majorité, s'impliquent et se sentent responsables de sa résolution, y compris pour ce qui concerne la validation des propositions des autres élèves de la classe. Béatrice a tendance à découper la tâche mathématique en sous-tâches simples, mais les interventions des élèves dans la classe montrent que, malgré cela, ils se sont appropriés la tâche de justification. Par ailleurs, Béatrice intervient peu dans la validation des propositions des élèves. Cette pratique permet une implication de nombreux élèves dans la résolution du problème et la mise en œuvre d'argumentations et contre-argumentations qui impliquent de nombreux élèves. La gestion de la séance réalisée par Béatrice permet donc la mise en place d'un contrat didactique de type « recherche » qui constitue pour les élèves un cadre de travail propice à une activité mathématique telle que celle visée par les « PPC ».
Dans la classe A, les tâches proposées sont moins techniques (l'enseignant revient régulièrement à la question « *pourquoi ?* ») mais les conditions d'un vrai débat ne semblent pas réunies : un nombre restreint d'élèves sont engagés, le travail de validation concerne quelques élèves et l'enseignant. On assiste ainsi à une forme de cours dialogué avec appui sur un nombre très restreint d'élèves qui permet à l'enseignant de faire avancer rapidement les élèves vers les réponses aux questions posées, mais écarte aussi une part non négligeable des élèves du jeu d'argumentation / contre-argumentation.

Ainsi, cette étude de cas nous amène à revenir sur les hypothèses formulées. Dans la gestion de ces situations, l'expérience que l'enseignant a dans le domaine mathématique nous semble être non négligeable par rapport à son expérience d'enseignement. C'est probablement ce qui explique que Béatrice instaure un contrat didactique très différent de celui d'André. Les conditions de l'observation peuvent mettre en difficulté le maître expérimenté. Toutefois, ici certaines pratiques installées et intéressantes pour l'apprentissage de savoirs curriculaires semblent se constituer en un frein au déploiement de l'activité mathématique attendue des élèves lors de la recherche d'un « PPC ». En effet, lorsque l'apprentissage visé est une connaissance curriculaire bien délimitée, on peut penser que le fonctionnement d'André est intéressant à plusieurs titres. D'abord, il donne à l'enseignant une certaine maîtrise de l'avancée du temps didactique. Ensuite, les élèves qui n'ont pas participé à la production du savoir nouveau pourront être laissés en responsabilité de l'utiliser plus tard dans une situation nouvelle. C'est un contrat didactique d'ostension déguisée classique, répandu, économique pour l'enseignant et qui conduit à des apprentissages. Cependant, concernant les « PPC » où finalement l'objectif est de faire pratiquer des savoirs mathématiques, on peut penser que ce contrat n'est pas le mieux adapté car, dans ces situations réalisées de façon très ponctuelles dans les classes, l'important est de s'engager dans le problème et d'exercer son esprit critique sur les propositions des autres élèves. En d'autres termes, il ne s'agit pas d'organiser ici une première rencontre avec un savoir curriculaire, mais une rencontre avec un savoir « transversal » (au sens de Grenier et Payan, 2003), avec des caractéristiques de l'activité mathématique. Dans ces circonstances, on peut penser qu'il est essentiel de donner l'occasion à un maximum d'élèves de la classe d'exercer pleinement cette activité et de ne pas chercher à aller trop vite.

Ces résultats nous conduisent à une réflexion sur la formation à la gestion de ces situations singulières. Si l'on souhaite permettre à des élèves de chercher des problèmes et de débattre à leur sujet, peut-être faut-il d'abord chercher à installer dans la classe un contrat didactique, c'est-à-dire un partage des rôles entre le professeur et les élèves, assez différent du contrat habituel de la classe. Pour cela, ne serait-il pas opportun de proposer des situations d'homologie[7] (Houdement, 1995 ; Kuzniak, 1994) aux enseignants, en particulier aux plus expérimentés ? Leur proposer de résoudre en groupe des problèmes mathématiques dont la résolution n'est pas immédiate leur permettrait peut-être d'identifier les spécificités de ces problèmes et de leur gestion pour ensuite adapter leur pratique habituelle à ces spécificités.

[7] En formation d'enseignants, les stratégies d'homologie consistent à faire vivre aux personnes en formation des situations proches de celles que l'on souhaite voir dans leurs classes et à opérer à une mise à distance théorique. Dans notre cas, une stratégie d'homologie consisterait à demander aux enseignants en formation de résoudre des « PPC », comme on le ferait avec des élèves de cycle 3, puis à analyser avec eux la situation vécue (le rôle de l'enseignant, le rôle des stagiaires dans l'avancée de la résolution du problème, la conclusion du problème…).

Références bibliographiques

AUBERTIN J.C. *et al.* (2005) Réflexion sur la conduite en classe d'une situation de recherche. *Repères IREM,* n°59, pp. 43-53.

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques.* La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHARNAY R. (1993) Problème ouvert, problème pour chercher. *Grand N,* n°51, pp. 77-83.

DOUAIRE J. et *al*. (2003) Gestion des mises en commun par les maîtres débutants. In J. Colomb *et al*. *Faire des maths en classe ? : Didactique et analyse de pratiques enseignantes.* INRP. Lyon, pp. 53-69.

ERMEL (1999) *Vrai ? Faux ? ... On en débat ! De l'argumentation vers la preuve au cycle 3*. INRP, Paris.

GRENIER D. et PAYAN C. (2003) Situations de recherche en « classe », essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Les cahiers du laboratoire Leibniz n° 92,* *http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers/2003/Cahier92/ResumCahier92.html*

HOUDEMENT C. (1995) *Projets de formation des maîtres du premier degré en mathématiques : programmation et stratégies*. Thèse Université de Paris VII.

KUZNIAK A. (1994) *Étude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré*. Thèse Université Paris VII.

MARGOLINAS C. (1989) *Le point de vue de la validation : essai de synthèse et d'analyse en didactique des mathématiques*. Thèse de l'Université de Bordeaux 1.

PERRIN-GLORIAN M.J. et HERSANT M. (2003) Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en didactique des mathématiques,* vol 23, n°2, pp. 217-276.

ROBERT A. (2003) Tâches mathématiques et activités des élèves, une discussion sur le jeu des adaptations introduites au démarrage des exercices cherchés en classe de collège. *Petit x, n° 62,* pp. 61-71.

THOMAS Y. (2007) Gommettes et étiquettes, des problèmes pour chercher. *Grand N, n°80,* pp. 29-41.

MEN (2005) *Les problèmes pour chercher*. Documents d'application des programmes, Mathématiques, cycle 3, Scéren CNDP. Disponible sur Internet : *http://eduscol.education.fr/D0048/primacc.htm*