

MESURER ? POUR QUOI FAIRE ?

DEUX EXEMPLES DE SITUATIONS

POUR DES ÉLÈVES DE CM2 ET DE 6^{ÈME}

Claude MAURIN
Professeur de mathématiques
IUFM d'Avignon

L'objet de cet article n'est évidemment pas de remettre en cause l'intérêt d'enseigner la mesure de certaines grandeurs à l'école primaire : la mesure entretient des liens trop essentiels avec les nombres pour contester son enseignement dès l'école primaire. On peut même regretter que celui-ci soit souvent proposé aux élèves de façon trop précoce et rapide au détriment de l'indispensable phase de construction de la grandeur elle-même.

L'article analyse et décrit deux situations de classe de fin de cycle 3, qui peuvent aussi être adaptées et proposées aux élèves de sixième de collège. Le support est ici le très ancien problème de la duplication du carré. Le compte-rendu ci-dessous comporte deux volets bien distincts, chacun pouvant, au choix du maître, faire l'objet d'une séance différente. Le premier oriente les élèves vers la construction du carré obtenu par découpage et recombinaison de deux carrés identiques : son objectif est de faire entrer les élèves dans un raisonnement déductif de nature géométrique, permettant de dépasser le recours aux instruments géométriques. Le second s'intéresse à la mesure de la longueur du côté du carré ainsi construit et a pour objectif principal de faire découvrir aux élèves, grâce aux calculatrices, une nouvelle facette de leur univers numérique avec l'approche de la densité des nombres décimaux. Conçue au départ pour exemplifier l'un des usages possibles des calculatrices à l'école, la partie numérique de cette situation a été expérimentée avec succès dans diverses classes de CM2, puis a été enrichie de la partie géométrique expérimentée et observée en juin 2007 sur deux groupes d'élèves d'une classe de CM2¹.

¹ Cette expérimentation a été possible grâce à l'aimable accueil de Thierry Schrooten, professeur des écoles à l'école Camus de Chateauneuf-du-pape (84).

Analyse des contenus mathématiques et didactiques mis en jeu dans les deux parties de la situation

Première partie géométrie

Dans cette partie, les élèves sont amenés à construire un carré à partir de quatre triangles rectangles isocèles superposables obtenus par découpage de deux carrés cartonnés identiques, dont le côté mesure 6 cm, suivant une de leur diagonale, comme l'indique la figure n°1 ci-dessous. La question posée est : « *Le nouveau quadrilatère ainsi formé est-il bien un carré ?* »

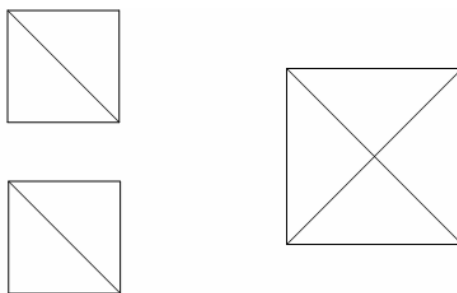


Figure n°1 : Passage des deux carrés initiaux au grand carré

Les réponses des élèves s'orientent naturellement vers l'utilisation des instruments de contrôle et de mesure que sont l'équerre et le double-décimètre, ce qui renvoie à la démarche préconisée par les programmes².

Or, le maître va les orienter vers une autre démarche prenant appui sur les propriétés pouvant être déduites des différentes positions occupées par les rectangles cartonnés. Cette démarche n'est pas encore une démonstration géométrique, mais elle dirige délibérément la géométrie naturelle vers son pôle déductif.

Pour clarifier le propos, il n'est pas inutile de rappeler les grandes lignes de l'article de Catherine Houdement et Alain Kuzniak (1995 ou 1998-99).

Ces derniers proposent un cadre conceptuel pour analyser l'enseignement de la géométrie en prenant appui sur les travaux du mathématicien Ferdinand Gonseth (1890-1974). Ils considèrent que l'apprentissage de la géométrie s'inscrit dans une évolution des rapports entre géométrie et réalité et que cette évolution peut être organisée en trois niveaux distincts de conceptions de la géométrie :

- la géométrie naturelle (ou géométrie 1), dont la validation a pour source la réalité, le sensible ;
- la géométrie axiomatique naturelle (géométrie 2) dont l'ambition est d'être un schéma de la réalité et dont la validation s'appuie sur des démonstrations ;
- la géométrie axiomatique formaliste (géométrie 3) qui prend ses distances avec la réalité, qu'elle ne prétend plus représenter et dont la validation est aussi fondée sur le raisonnement et les démonstrations.

À chacun de ces trois niveaux interviennent trois modes de connaissance de l'espace : la déduction, l'intuition et l'expérience.

² MEN (2002) Documents d'accompagnement des programmes - Articulation école-collège.

À l'école primaire et au début du collège, les élèves évoluent dans la géométrie 1. Les preuves aux affirmations qui peuvent être avancées sont souvent apportées par le mesurage, le pliage ou le recours aux instruments de géométrie.

Au cours du collège, le passage de la géométrie 1 à la géométrie 2 nécessite de ne plus travailler sur les mêmes objets : ceux de la géométrie 2 sont des objets idéaux dont le dessin géométrique n'est plus qu'une représentation. La vérification par les instruments doit alors céder la place à la justification par un raisonnement prenant appui sur des définitions et des théorèmes, forme de raisonnement que l'on appelle « démonstration géométrique ». Ce passage restera pour beaucoup d'entre eux un obstacle difficilement surmontable³.

Quant à la géométrie 3, elle ne sera abordée que par ceux qui entreprendront des études supérieures de mathématiques.

L'activité qui est proposée ici s'inscrit délibérément dans le cadre de la géométrie 1. Les objets sur lesquels travaillent les élèves sont des objets matériels (rectangles cartonnés). De plus, la validation des propositions est apportée soit par l'utilisation d'instruments géométriques, soit par une argumentation prenant appui sur les positions qu'occupent ces triangles dans leur disposition initiale, même si certaines propriétés géométriques du carré sont mises en œuvre à travers la référence faite à sa définition.

Cette activité est conforme aux programmes de géométrie du cycle 3 de 2007. Elle permet aux élèves de découvrir que le raisonnement proposé possède un double intérêt : d'une part, faire l'économie d'une manipulation d'instruments souvent délicate et, d'autre part, atteindre un degré total de certitude qui s'oppose aux inévitables approximations liées à la vérification par les instruments. En ce sens, elle permet d'imaginer une géométrie dans laquelle les objets mis en jeu seraient des idéalités géométriques seulement représentées de façon matérielle par les dessins ou les triangles cartonnés sur lesquels l'approximation n'a plus cours. Cela peut aider les élèves à entrer, un peu plus tard, dans la géométrie 2.

Concernant la justification du fait que la figure obtenue par assemblage des quatre triangles rectangles isocèles est bien un carré, la démarche la plus aisée d'un point de vue géométrique serait celle qui prend appui sur les propriétés caractéristiques des diagonales d'un carré. En effet, il est facile de montrer ici qu'elles se coupent en leur milieu, sont de même longueur et sont perpendiculaires, mais cette propriété n'est pas au programme de géométrie de l'école primaire. Il faudra donc s'orienter vers les propriétés caractéristiques du carré pour un élève de l'école primaire : un carré est un quadrilatère dont les quatre côtés sont de même longueur et dont les quatre angles sont droits.

Deuxième partie numérique

Au cours du cycle 3, les élèves découvrent qu'il existe d'autres nombres que les nombres entiers. Ce sont les nombres rationnels qui apparaissent sous la forme de fractions. Les premières fractions rencontrées par les élèves apparaissent dans la plupart des manuels comme des mesures de grandeurs géométriques (longueur, aire) et leur dénominateur est égal à une puissance de deux, cela permet un partage commode des unités de mesure par

³ Les conceptions de certains étudiants préparant le CERPE montrent de façon assez claire que pour eux, cet obstacle n'a pas encore été franchi (voir par exemple Jore, 2006 et Parzysz, 2007). Le fait de clarifier le cadre conceptuel de l'enseignement de la géométrie peut, à ce stade, les aider à mieux se situer et à mieux comprendre les attentes de la partie théorique de l'épreuve de mathématiques du concours qui fait implicitement référence à la géométrie 2.

pliages successifs. Puis, d'autres fractions sont introduites et notamment les fractions décimales ayant pour dénominateur une puissance de dix, ces fractions vont être associées aux nombres décimaux pour lesquels une autre forme d'écriture va être utilisée : l'écriture décimale à virgule.

Conformément aux demandes des programmes de 2002 et de 2007, de nombreux exercices sont proposés aux élèves au cours des deux dernières années du cycle 3 pour les entraîner à passer de l'écriture fractionnaire d'un nombre décimal à son écriture décimale à virgule et réciproquement. Malgré ces exercices, de nombreux élèves restent attachés à la structure discrète des nombres entiers. Ils développent des automatismes de conversion entre les deux écritures, mais peinent à imaginer qu'entre deux décimaux comme 1,23 et 1,24 qu'ils considèrent comme successifs, il est possible d'insérer de nombreux autres décimaux (une infinité en fait !). À cet égard, la prononciation coutumière « un virgule vingt-quatre » déconseillée par les programmes, mais bien installée dans les pratiques des adultes, renforce l'idée que le nombre décimal est constitué de deux nombres entiers séparés par une virgule, ce qui accrédite l'idée qu'entre « virgule vingt-trois » et « virgule vingt-quatre » on ne puisse pas insérer un autre nombre décimal.

À ces obstacles, identifiés depuis longtemps par les didacticiens, s'ajoute le fait que les élèves, comme les adultes, ont très rarement l'occasion de manipuler des nombres décimaux dont la partie décimale comporte plus de deux ou trois chiffres. En effet, quand cela se produit dans un contexte de mesure, nous préférons changer l'unité de mesure afin que la partie décimale du nombre décimal ne soit pas trop longue à lire ou à prononcer et cela nous ramène à des valeurs plus familières.

Il semble donc difficile d'espérer que la plus grande partie des élèves quitte le cycle 3 en concevant qu'entre deux décimaux différents, même très proches l'un de l'autre, on puisse toujours insérer d'autres nombres décimaux. Pour les élèves, il s'agit d'une remise en cause profonde de leur connaissance des nombres, jusque-là calquée sur la connaissance des nombres entiers.

C'est pourtant cette propriété (que l'on désigne sous le nom de « densité »), qui, associée à la commodité de l'écriture à virgule, fait de l'ensemble des nombres décimaux un matériau de choix pour procéder à des approximations toujours plus précises de nombres non décimaux. Or il existe de nombreux nombres non décimaux : certains rationnels comme un tiers ou un septième, les nombres irrationnels et les nombres appelés « transcendants » comme π . Tous ces nombres possèdent des écritures décimales approchées auxquelles on les identifie souvent à tort !

Dans l'activité proposée, où il s'agit de chercher la longueur du côté du grand carré étudié précédemment, le nombre que les élèves vont chercher à approcher à l'aide des calculatrices est le nombre irrationnel $\sqrt{72}$ que l'on peut aussi écrire $6\sqrt{2}$. Ce nombre positif se caractérise par le fait d'avoir un carré égal à 72, mais il n'est pas décimal ; les élèves ne peuvent donc qu'en trouver des écritures décimales approchées.

Cependant, certaines calculatrices utilisées par les élèves affichent $(8,4852814)^2 = 72$. Ceux d'entre eux qui en seront arrivés là penseront donc avoir trouvé « le » décimal dont le carré est égal à 72. Pourtant, aucun nombre décimal non entier ne possède un carré entier. Il s'agit donc d'un résultat mathématiquement faux ! Que faut-il faire ? Le passer sous silence ou le dénoncer ?

La réponse à cette question dépend en grande partie du niveau des élèves et des choix du maître.

En début de collège, les élèves apprennent à multiplier un décimal par un décimal : ils peuvent ainsi comprendre, en se référant à la technique opératoire de la multiplication d'un

décimal par un décimal, que lors de la multiplication d'un décimal non entier par lui-même, le dernier chiffre de la partie décimale du produit est le chiffre des unités du carré du dernier chiffre de la partie décimale du nombre dont on calcule le carré. Or, le carré d'un entier non nul inférieur à dix n'est jamais égal à un multiple de dix comme en atteste l'examen des carrés des nombres entiers compris entre 1 et 9 : cela interdit donc au dernier chiffre de la partie décimale du produit d'être égal à zéro et au carré d'un nombre décimal non entier d'avoir une partie décimale nulle donc d'être égal à un entier.

Cette démonstration permet d'invalider l'égalité $(8,4852814)^2 = 72$ affichée par la calculatrice et permet d'attirer l'attention sur la distinction entre valeur exacte et valeur approchée, ainsi que sur la pratique automatique des arrondis opérés par les calculatrices quand la place manque à l'écran pour écrire toutes les décimales d'un résultat. Cela pourrait même constituer une excellente introduction à l'étude des valeurs décimales approchées. Le professeur de sixième pourra donc faire le choix s'il le souhaite de dissiper le malentendu mathématique que pourrait créer l'égalité précédente, il en a les moyens théoriques.

En fin de cycle 3, le choix doit être différent car il nous semble qu'il serait maladroit de tempérer l'enthousiasme que déclenche l'affichage « 72 » par des considérations d'ordre théorique (comparables à celles développées précédemment) que l'on n'a pas encore les moyens de justifier. Il ne nous paraît pas préjudiciable de laisser penser aux élèves qui sont arrivés à un décimal ayant une partie décimale comportant sept chiffres et dont le carré est égal à 72, qu'ils ont trouvé la « bonne mesure ». Cette « vérité provisoire » sera comme d'autres, vraisemblablement balayée par les réorganisations que nécessiteront les apprentissages numériques ultérieurs, sans que cela ne s'érige en obstacle à ces apprentissages. Mais, ici encore, la décision n'appartient qu'au maître, qui doit être averti de cette difficulté conceptuelle et choisir en connaissance de cause la réponse qu'il décide d'apporter à la question précédente : « *Que faire devant un résultat qui est mathématiquement faux ?* »

Un exemple de mise en œuvre dans une classe de fin de cycle 3

Première partie géométrique

En introduction de l'activité, le maître peut demander en collectif aux élèves de rappeler oralement ce qu'ils savent sur le carré. Il note alors au tableau les principales propriétés que les élèves énoncent.

Phase préparatoire

Les élèves sont ensuite répartis par groupes de deux. Les élèves reçoivent chacun une feuille bristol quadrillée de petits carreaux de 0,5 cm de côté et le maître leur demande de tracer sur leur fiche deux carrés de 6 cm de côté.

Quand chacun a tracé deux carrés de 6 cm de côté sur sa feuille, le maître demande de tracer une diagonale sur chacun des deux carrés en utilisant un feutre d'une autre couleur que celle ayant servi à tracer les côtés des carrés.

Puis, dans chaque doublette, le maître demande à l'un des deux élèves de découper ses deux carrés et enfin chaque carré en deux triangles, en suivant la diagonale qui a été tracée, alors que l'autre élève conserve sa fiche comme témoin sans découper les carrés.

Le maître sollicite ensuite les remarques des élèves sur les quatre triangles qu'ils ont en main. S'il n'y en a pas, il peut attirer leur attention sur le fait que ces quatre triangles sont

superposables et qu'à ce titre, les longueurs des côtés qui se superposent sont égales ainsi que les angles qui se superposent. Il est également possible de colorier tous les angles égaux d'une même couleur.

Remarque : il est pertinent pour le maître de prévoir des carrés cartonnés grand format à découper devant les élèves suivant l'une des diagonales avant de les afficher au tableau.

Premier problème

Le problème qui est alors posé à l'ensemble des doublettes est de tenter de former un nouveau carré en assemblant les quatre triangles obtenus par découpage. L'assemblage peut être rendu stable par des bandes de papier adhésif.

Les observations faites en dernière année de cycle 3 montrent que les groupes réussissent cette tâche en moins de trois minutes, la solution diffusant rapidement de proche en proche. Ceci a rendu inutiles les aides prévues (comme le schéma d'assemblage de deux des quatre triangles).

Le maître demande ensuite à l'un des élèves de venir au tableau disposer à l'aide d'aimants de tableau les quatre triangles grand format qu'il a préparés, en procédant de la même manière que sur sa propre table ; la classe approuve la disposition proposée.

Deuxième problème

Le maître demande à la classe comment être certain que cette nouvelle figure est bien un carré. Les propositions des élèves s'orientent spontanément vers l'utilisation de la règle pour contrôler l'égalité des longueurs des quatre côtés et de l'équerre pour contrôler que les quatre angles sont droits. Le maître approuve ces propositions mais demande aux élèves s'ils n'auraient pas une idée qui permettrait de contrôler qu'on a bien un carré sans utiliser aucun instrument.

Nos observations confirment que cette question prend sens pour la classe et que plusieurs élèves sont capables de faire des propositions et de les argumenter.

La première propriété que les élèves parviennent à justifier est l'égalité des longueurs des quatre côtés, en s'appuyant d'une part sur la couleur utilisée pour tracer les diagonales que l'on retrouve sur les quatre côtés du nouveau carré et d'autre part sur la disposition des quatre triangles sur les figures témoins. Les élèves qui interviennent dans le débat parviennent à persuader la classe que les longueurs des quatre côtés sont nécessairement égales.

La deuxième propriété concernant les angles droits demande plus d'efforts ! Mais certains élèves réussissent à montrer, en s'appuyant sur les déplacements des triangles grand format affichés au tableau, que tous les angles aigus des triangles étant égaux (propriété rappelée par la coloration identique), si deux d'entre eux forment un angle droit sur les deux premiers carrés, il en est forcément de même dans la disposition associée au grand carré. Le maître reformule ces propositions, les clarifie et conclut qu'on peut effectivement acquérir la certitude que la nouvelle figure obtenue est bien un carré sans avoir à le vérifier avec les instruments de géométrie. Il souligne que le raisonnement qui a été suivi a permis de prévoir quelque chose que l'on peut aussi constater grâce aux instruments de géométrie⁴. Cette conclusion du maître clôturait la première partie du travail sans autre

⁴ En 6^{ème}, le professeur peut poser la même question aux élèves sous la forme d'un défi : « *La nouvelle figure semble être un carré. Chacun d'entre vous pourrait le vérifier avec ses instruments. Mais est-ce qu'on ne pourrait pas en être sûr en « raisonnant », sans utiliser d'instrument ?* » L'intérêt du raisonnement serait encore plus démonstratif si les carrés initiaux étaient de tailles différentes.

forme d'institutionnalisation, car ce type d'activités ne constitue qu'une approche, pour des élèves de CM2, de ce qui sera abordé en classe de 6^{ème}.

Deuxième partie numérique

Phase préparatoire

En prenant appui sur le travail précédent, le maître va orienter les élèves vers les aires des carrés. Il demande tout d'abord à la classe quelle est l'aire de chacun des deux carrés de départ. La réponse est obtenue très rapidement : chaque aire est égale à 36 cm^2 . Un élève vient indiquer au tableau par quel calcul il a obtenu ce résultat.

Le maître demande ensuite à la classe quelle est l'aire du grand carré. Les élèves parviennent à affirmer que cette aire est égale à 72 cm^2 et à le justifier par le fait que le grand carré étant formé avec les morceaux des deux petits carrés son aire est la somme des aires des deux carrés initiaux. Ce travail de décomposition/recomposition de figures est conforme à l'approche de la notion d'aire préconisée par les programmes. Les élèves semblent avoir bien intégré ce type de raisonnement.

Premier problème

Le maître demande quelle est la mesure en centimètres du côté du grand carré.

Les élèves s'emparent de leur double décimètre et mesurent.

Le maître recueille leurs propositions qui se répartissent souvent entre 8,3 cm et 8,7 cm. Le problème qui est alors posé est de savoir quelle est la meilleure de toutes ces mesures. Comment faire ?

Le maître rappelle que la bonne mesure doit permettre de trouver une aire égale à 72 cm^2 . Il ne reste donc qu'à calculer les aires correspondant à chacune des mesures proposées, oui mais voilà, nous ne savons pas multiplier 8,3 par 8,3. Si nous ne savons pas faire ce calcul, que nous apprendrons à faire en sixième, la calculatrice sait le faire !

Le maître propose donc d'utiliser les calculatrices qui entrent en scène pour déterminer quelle est la meilleure des mesures proposées.

Remarque : il est préférable que tous les élèves disposent du même modèle de calculatrice, cela facilite la gestion des résultats et de la recherche de la classe par le maître.

Ce dernier enregistre les différents résultats fournis par les calculatrices :

$8,3^2 = 68,89$	$8,4^2 = 70,56$	$8,5^2 = 72,25$	et	$8,6^2 = 73,96$	$8,7^2 = 75,69$
-----------------	-----------------	-----------------	----	-----------------	-----------------

Les élèves s'accordent à reconnaître que le résultat qui se rapproche le plus de 72 est le carré de 8,5, qui est tout de même un peu trop grand. Donc 8,5 est la meilleure des mesures proposées mais ce n'est pas encore la bonne mesure !

Deuxième problème : tenter de trouver la bonne mesure en centimètres du côté du grand carré

Les élèves s'accordent pour admettre que la règle graduée ne leur est plus d'aucune utilité pour améliorer la précision de leur mesure. Il leur faut donc se lancer dans une suite d'essais pour tenter d'approcher de plus près « la bonne mesure », cela ne peut être fait que grâce à la calculatrice, qui est capable de vérifier que l'aire du carré correspondant est égale ou non à 72.

Le maître peut d'ailleurs, à cette occasion, institutionnaliser le fonctionnement de la touche « x^2 » si celle-ci figure sur le clavier des calculatrices utilisées par les élèves. Cela leur permettra de ne pas avoir à retaper deux fois de suite tous les chiffres composant l'écriture

du décimal dont ils souhaitent calculer le carré et évitera les erreurs de frappe faisant apparaître des résultats qui ne sont pas des carrés.

Les élèves sont remis par groupes de deux et la recherche démarre dans chaque doublette. De nombreux échanges verbaux ont lieu entre les élèves et assez vite chaque groupe se persuade qu'il faut essayer de trouver une mesure comprise entre 8,4 et 8,5...

Au bout de dix minutes de recherche, le maître procède à un premier bilan. Le but est de savoir qui est le plus proche de « la bonne mesure ».

Le maître propose de tracer un tableau dans lequel figure une colonne pour la mesure en cm de la longueur du côté, une autre pour l'aire du carré correspondant à cette mesure de côté et enfin une dernière pour évaluer l'écart entre l'aire précédente et l'aire du grand carré de 72 cm². Il recense dans ce tableau toutes les propositions qui lui sont faites par les élèves.

Longueur du côté en cm	Aire du carré en cm ²	Écart à 72 cm ²
8,42	70,8964	1,1036
8,43	71,0649	0,9351
8,44	71,2336	0,7664
8,45	71,4025	0,5975
8,46	71,5716	0,4284
8,47	71,7409	0,2591
8,48	71,9104	0,0896
8,49	72,0801	0,0801
8,50	72,25	0,25

Le débat s'engage alors sur la comparaison des écarts. Cela nécessite généralement de rappeler la règle à suivre pour comparer deux décimaux écrits sous forme d'écriture décimale à virgule ; un appui sur un axe gradué peut même être utile en adaptant la graduation aux fractions d'unités intervenant dans la comparaison. La conclusion qui apparaît ici est que les deux mesures les plus proches sont 8,48 et 8,49 ; la première étant trop petite et la seconde trop grande.

La recherche est alors relancée : dans chaque doublette, il s'agit maintenant de trouver un nombre décimal compris entre 8,48 et 8,49 dont le carré soit le plus proche possible de 72. Nous constatons généralement qu'à ce stade tous les groupes éprouvent le besoin d'écrire leurs tentatives successives afin de mieux les organiser. Le tableau du maître est souvent repris en modèle.

Selon le temps dont dispose le maître, plusieurs bilans successifs peuvent être établis. Pour que chaque doublette puisse proposer sa « meilleure mesure », il faut que la comparaison entre les différents écarts entre les carrés obtenus et le nombre 72 aient été correctement faits au sein de la doublette. De plus, pour désigner le ou les groupes qui ont obtenu la meilleure mesure, il faut aussi comparer les différents écarts obtenus dans la classe. Cela oblige à comparer des listes importantes de nombres décimaux dont les parties décimales comportent de plus en plus de chiffres et de plus en plus de zéros. Ce travail favorise donc la maîtrise de la règle de comparaison des décimaux.

Au terme de chaque bilan, la recherche est relancée sur de nouvelles bases avec des encadrements de plus en plus précis de « la bonne mesure ».

Le maître peut interrompre la recherche quand il le souhaite, mais il ne pourra pas éviter⁵ que de nombreux élèves la prolongent chez eux et arrivent le lendemain en ayant trouvé

⁵ Comme nous l'avons constaté dans la plupart des classes.

« la bonne mesure » à savoir 8,4852814 qui est l'arrondi à 10^{-7} près de $\sqrt{72}$. Comme nous l'avons signalé précédemment, le maître doit savoir se positionner devant ce résultat.

La dynamique de cette situation est assez surprenante, car même les élèves peu enclins à se livrer à ce type de recherche se passionnent pour ce travail.

La présence physique du carré d'aire 72 cm^2 fait qu'aucun élève ne doute de l'existence d'un nombre décimal mesurant en centimètres la longueur de son côté. C'est sans doute, avec l'utilisation des calculatrices, l'un des éléments qui dynamise la recherche. C'est pourquoi il semble délicat de déclarer au terme de la recherche que ce nombre décimal n'existe pas quand on ne dispose pas des moyens de justifier cette affirmation.

D'autre part, on peut penser qu'en réitérant plusieurs fois de suite la recherche de décimaux s'intercalant entre deux décimaux de plus en plus proches l'un de l'autre dans une situation ayant du sens, les élèves commencent à concevoir la propriété de densité qui différencie de façon fondamentale les nombres décimaux des nombres entiers.

Variables de cette situation

Cette situation comporte plusieurs variables, aussi bien au niveau de la définition des supports de l'activité qu'au niveau des paramètres de gestion de la classe. Cette variabilité permet de nombreuses adaptations, prenant en compte la pratique du maître ainsi que le niveau des élèves.

1) Au niveau des supports de l'activité de la partie géométrique, on peut faire le choix de la bissection d'un carré et non celui de sa duplication. Cela impose de partir du grand carré pour le découper en deux carrés superposables, l'aire de chacun de ces carrés étant alors égale à la moitié de l'aire du grand carré. Pour ce travail, le pliage est sans doute un meilleur outil que le découpage, surtout si l'on a travaillé au préalable sur les différents axes de symétrie d'un carré par pliage.

Si l'on choisit de rester dans le cas de la duplication, faut-il demander aux élèves de tracer une ou deux diagonales sur les carrés de départ ou bien leur en laisser l'initiative ?

Les réponses apportées à ces questions peuvent rendre le problème plus ouvert et modifier le nombre de solutions possibles. Voir par exemple la figure n°2 ci-dessous.

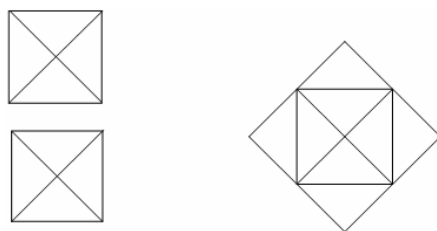


Figure n°2 : Carrés initiaux avec leurs deux diagonales

La partie « recherche de l'assemblage » prend dans ce cas une importance plus grande, et la recherche de la justification géométrique de la nature carrée de l'assemblage obtenu peut nécessiter de faire intervenir les propriétés des diagonales du carré : elle concerne donc davantage le collège que l'école primaire, sauf si l'on fait le choix de rester dans le cadre du contrôle des propriétés du carré par l'utilisation des instruments de géométrie.

2) Le choix de la mesure des longueurs des côtés des carrés de départ n'a pas une incidence fondamentale sur la partie géométrique, mais il modifie les décimales des approximations de la mesure de la longueur du côté du grand carré, ce qui peut engendrer des difficultés particulières dans la partie numérique quand des zéros apparaissent dans la partie décimale.

Mesure en cm des côtés des carrés de départ	Longueur exacte du côté du grand carré	Approximation décimale à 10^{-7} près de la longueur précédente
6 cm	$\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$	8,4852814
5 cm	$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$	7,0710678
4 cm	$\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$	5,6568542

On voit que si l'on choisit des carrés de 5 cm de côté, la recherche de l'approximation décimale sera plus délicate dès le départ car il faudra chercher un décimal compris entre 7 et 7,1 ce qui nécessite de concevoir 7 comme 7,0 afin de pouvoir tester d'autres chiffres après le zéro. Lors de la quatrième décimale, on rencontre un nouveau zéro qui va encore poser problème. Cela ne signifie pas que cette situation doit être écartée, mais elle demande un degré de compétence plus élaboré et pourra plus facilement être proposée en sixième qu'en CM2, ou du moins comme situation de réinvestissement après que les élèves aient eu l'occasion de travailler sur des cas plus simples.

Par contre, le choix du nombre 4 s'apparente davantage au choix du nombre 6, mis à part que la taille des carrés est nettement plus petite. Ce choix peut donc être proposé comme réinvestissement à des élèves qui ne sont pas encore très assurés dans leur démarche alors que le choix du nombre 5 sera réservé à des élèves ayant bien maîtrisé la première situation.

3) Les paramètres de gestion de classe sont eux aussi l'objet de nombreuses variables. Pour ne citer que quelques exemples :

- Faut-il faire travailler les élèves par groupe de deux, de trois ou individuellement ? Pour notre part nous avons choisi de favoriser les échanges verbaux entre élèves en les faisant travailler par deux, mais vaut-il mieux opter pour des doublettes homogènes ou hétérogènes ? Ce deuxième choix est aussi essentiel et demande d'avoir une bonne connaissance de la classe.

Par contre, si l'on choisit de faire vivre aux élèves une nouvelle situation analogue de réinvestissement pour la partie numérique, il sera plus judicieux de proposer ce travail de façon individuelle.

- Dans la partie numérique, faut-il faire des bilans intermédiaires nombreux ou laisser la recherche se dérouler jusqu'à son terme sans l'interrompre ?

Quand cette situation est étudiée en formation initiale ou continue dans une démarche d'homologie⁶, nous laissons la recherche se dérouler entièrement sans procéder à aucun bilan intermédiaire afin de laisser le plaisir aux stagiaires d'aboutir à leur rythme à l'affichage « 72 » qui provoque de véritables cris de joie... avant de l'analyser de façon plus approfondie.

Par contre, quand cette situation est proposée à des élèves de cycle 3, un premier bilan rapide paraît pertinent pour mettre tous les groupes sur la voie et encourager les élèves à continuer leurs recherches. Le nombre de bilans intermédiaires est évidemment dans les mains du maître, il dépend du temps qu'il a choisi de consacrer à cette activité qui peut très bien ne durer que trente minutes, mais aussi

⁶ C'est-à-dire que les formés « vivent » la situation comme des élèves, avant de l'analyser de différents points de vue (mathématique, didactique, etc.).

du niveau de la classe qui peut avoir plus ou moins besoin d'être réorientée et encouragée.

Conclusion

Comme nous avons pu le voir, cette activité présente deux aspects complémentaires, l'un géométrique, l'autre numérique, chacun poursuivant des objectifs qui lui sont propres. Elle permet aux élèves de s'engager dans une recherche finalisée.

Il peut être pertinent de la proposer dans une classe de fin de cycle 3 mais aussi dans une classe de début de collège. La variabilité qu'elle offre permet de l'adapter au niveau de la classe mais aussi de procéder à un travail différencié au sein d'une même classe.

Enfin, elle peut avantageusement être utilisée en formation initiale ou continue de Professeurs des Écoles ou de Collège-Lycée en situation d'homologie, suivie d'une analyse des conditions à prendre en compte pour l'adapter à une classe.

Références bibliographiques

HOUEMENT C., KUZNIAK A. (1995) Épistémologie et didactique : un exemple de cadre conceptuel pour analyser l'enseignement de la géométrie. *Carnets de route de la COPIRELEM CONCERTUM*, tome 2.

HOUEMENT C., KUZNIAK A. (1998-99) Réflexions sur l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Grand N*, n°64, pp. 65-68.

JOYE F. (2006) *Paradigmes géométriques et formation initiale des professeurs des écoles, en environnements papier-crayon et informatique*. Thèse, Université Paris 7.

MEN (2002) Documents d'accompagnement des programmes, Mathématiques École primaire. Scéren CNDP.

PARZYSZ B. (2007) La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles : de quoi s'agit-il ? *Quaderni di Ricerca in Didattica* 17, pp. 121-144. Dipartimento di Matematica, Università di Palermo. Disponible en ligne : http://math.unipa.it/~grim/quad17_BParzysz_06.pdf