CARACTÉRISTIQUES DES PRATIQUES ALGÉBRIQUES DANS LES MANUELS SCOLAIRES QUÉBÉCOIS

Gustavo BARALLOBRES
UQAM (Université du Québec à Montréal)

Résumé. Cet article constitue le point de départ d'un travail portant sur l'analyse des pratiques algébriques scolaires au Québec. Tant au Québec qu'en Amérique et en Europe, c'est le manuel scolaire qui détermine en grande partie le savoir enseigné dans les classes. Cette étude analyse les propositions d'enseignement d'introduction à l'algèbre que l'on retrouve dans les manuels scolaires les plus utilisés au Québec, afin de mettre en évidence des options didactiques explicites ou implicites, la conception des pratiques algébriques et leur impact sur les savoirs algébriques à enseigner.

Mots clés. algèbre, analyse de manuels, calcul algébrique, domaine d'expérience.

1. Introduction

L'analyse des manuels scolaires — en tant qu'éléments intermédiaires entre les prescriptions ministérielles et les pratiques d'enseignement — est un outil important pour la compréhension des phénomènes qui sont à l'œuvre dans la détermination des savoirs enseignés (Assude et Margolinas, 2005). Les recherches au Québec (Lebrun, 2006 ; Lenoir, Roy et Lebrun, 2001 ; Spallanzani et al., 2001) rejoignent les résultats de quelques recherches américaines et européennes (Douzant-Rosenfeld, 1991 ; Hummel, 1988 ; Zahorik, 1991) : le manuel scolaire détermine pour une large part les activités réalisées en classe, puis, les savoirs à enseigner et les stratégies pédagogiques et didactiques employées.

Dans cette étude, nous analysons les propositions d'enseignement d'introduction à l'algèbre que l'on retrouve dans certains manuels scolaires québécois, en essayant de mettre en évidence des options didactiques explicites ou implicites et leur impact potentiel sur les savoirs algébriques à enseigner.

Le développement des recherches sur l'enseignement et l'apprentissage de contenus scolaires a eu une influence remarquable sur la transformation des pratiques d'enseignement. On assiste aujourd'hui à des changements constants de programmes et de manuels scolaires. Ces derniers rendent compte de certaines pratiques d'enseignement en reflétant l'évolution de la pensée didactique (Conne, 2001).

Dernièrement, une réflexion sur la notion de « sens » a occupé une place importante dans les didactiques des disciplines. La didactique des mathématiques s'est constituée à la suite de l'échec des mathématiques modernes. Selon Conne (1993) :

La critique principale qu'on peut lui faire (aux mathématiques modernes) consiste à relever qu'elle a sacrifié le sens à l'autel des formes et du langage. La didactique des mathématiques participe de ce mouvement critique et a été motivée par la question du sens. Pourtant, sa rupture n'aura pas été le rejet pur et simple de l'outil formel, mais une recherche pour le maîtriser.

La Théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) s'est développée, au moins dans ses débuts, autour de la création de situations permettant de fournir un sens aux objets mathématiques enseignés, en opposition à ce qui serait une simple manipulation formelle de symboles mathématiques.

Quelles traces de ce mouvement — au cœur du développement de la didactique des mathématiques — peut-on retrouver dans les manuels scolaires d'aujourd'hui ? Nous aborderons cette question dans le contexte spécifique de l'enseignement introductif de l'algèbre. Nous essaierons de montrer qu'on retrouve des traces de la notion de « sens » dans le choix des « domaines d'expérience » à partir desquels on élabore les savoirs algébriques et leurs représentation[1]. Dans un premier temps, précisons que nous entendons par « domaines d'expérience » ces « environnements » créés par l'enseignement, en interaction avec lesquels les élèves vont élaborer des connaissances algébriques.

Le choix de ces domaines d'expérience est commandé plus spécifiquement par :
- des modes de présentation des objets algébriques qui rendent compte d'un réel extérieur prédéfini, à l'image du fonctionnement des objets que l'on veut introduire (Chevallard, 1989) et non d'un univers d'expérience [2] ;
- un découpage ou morcellement des objets de savoir (Giroux, 2001), ce qui conduit à une multiplication des « significations » dont l'articulation n'a rien d'évident.

1 Nous faisons référence ici autant aux instruments sémiotiques du travail mathématique (par exemple l'objet mathématique « droite » possède plusieurs représentations sémiotiques : représentations graphiques, équations, etc.) qui sont manipulés au cours de l'activité mathématique, qu'aux représentations mentales élaborées par les élèves.

2 Par exemple, les tuiles algébriques ou les jetons de couleurs différentes pour le calcul des expressions algébriques : le système de règles qu'on associe à ces objets est calqué sur celui des règles algébriques déjà connues, et c'est bien pour cela que ces modes de représentation sont conçus et introduits. Mais alors, on n'est pas dans la situation où le système des règles de l'algèbre émergerait et se construirait en interaction avec l'environnement, on a plutôt affaire à un système de règles mathématiquement « prédigéré », qui est imposé de l'extérieur aux objets (tuiles ou jetons) et par suite, aux élèves.

2. Sens, expérience et objets mathématiques

Selon Conne (1993, p. 22), le modèle initial de la Théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) tentait de certifier, dès le début du processus didactique, un sens donné *a priori* :

> *D'une analyse épistémologique correcte, on construisait une situation adidactique fondamentale ou une suite de telles situations ; ceci donnait le sens des notions à enseigner dès l'amorce du processus. On mettait alors en place des moyens de contrôle qui permettaient d'interagir avec le jeu de l'élève dans la situation. Ce contrôle revenait à s'assurer que la situation ne soit pas altérée. Les lois psychologiques garantissaient dès lors la préservation du sens de ce que l'on voulait enseigner. Non seulement on s'assurait que ce qui avait été appris avait du sens pour l'élève, mais encore que ce sens était bien celui du savoir visé*.

Conne remarque qu'à l'intérieur même de la théorie des situations, Rouchier (1996) propose un schéma plus flexible : le sens n'est plus défini *a priori*, mais sera continuellement remis en jeu lors de conversions savoirs/connaissances, par les mécanismes de décontextualisation et d'institutionnalisation.

Les questionnements faits par Conne ainsi que l'apport de Rouchier ne remettent pas en question l'importance des analyses épistémologiques mais la garantie, *a priori*, de la production du sens. Du point de vue didactique, l'articulation entre les situations d'enseignement, les expériences que ces situations suggèrent et les savoirs objets d'enseignement, est fondamentale pour la compréhension des processus d'appropriation des savoirs scolaires. Les représentations élaborées dans le contexte de l'activité mathématique convoquée par les situations d'enseignement rendent compte d'un univers d'expérience, c'est-à-dire de l'ensemble des interactions des élèves avec le « domaine d'expérience », ensemble qui contient toujours une partie « privée » du travail de l'élève, mais aussi et surtout une partie publique, partagée par la classe ; tel que nous le comprenons des propos de Conne (1993), le savoir doit être et rester dans le prolongement de cet univers, sinon il y a perte de pertinence.

En analysant le travail de F. Gonseth, Conne (2001) montre comment l'auteur s'appuie sur la notion d'espace pour s'interroger sur la géométrie et son évolution en faisant des horizons intuitifs, théoriques, expérimentaux et axiomatiques, les constituants de la géométrie en tant que solution au problème de l'espace, conçu comme étant une solution toujours provisoire à un problème susceptible d'être rouvert à tout moment. L'interaction dialectique entre ces horizons, en tant que constitutive d'un champ de savoirs, n'est pas exclusive à la géométrie.

Dans le contexte de la théorisation didactique, cette problématique prend une autre dimension :

> *Dès lors que vous réintroduisez la dimension didactique, la géométrie ne se pose plus en tant que solution au problème de l'espace mais en tant que discipline et pratique à laquelle l'élève est initié, et les constituants de la géométrie deviennent référents de et pour son apprentissage. Le texte théorique dont il dispose, tout comme les expérimentations — didactiques — qu'on lui fera faire, tout comme les évocations intuitives qu'on lui suggérera et les petits systèmes de règles — ou modèles formels, automates ou non — qu'il apprendra à faire fonctionner, tout cela lui servira de référence à l'étude.* (Conne, 2001, pp. 16-17).

Des expérimentations didactiques, des évocations intuitives et des systèmes de règles sont aussi utilisés dans l'enseignement, en tant que références pour l'étude des autres notions mathématiques. Cependant, dès que la pratique mathématique se complexifie, les domaines de référence deviennent rapidement limités :

> *Par contre, lorsqu'on enseigne l'analyse, les formes quadratiques, les espaces vectoriels, ou encore les probabilités, à quel réel va-t-on pouvoir faire référence ? Qu'est-ce donc qui pourrait jouer le rôle de l'espace vis-à-vis de la géométrie ? En d'autres mots, pour un élève de 15-16 ans, de quoi donc l'analyse, etc., seraient-ils la connaissance ? Et surtout comment le lui indiquer ?* (op. cit., p. 17).

Dès que les objets mathématiques à enseigner sont plus abstraits, il semblerait que la « pauvreté » de référence et de répertoire pour l'introduction de ces objets soit plus prononcée. Tel que Conne (2001) l'indique, on est directement installé dans un horizon théorique sans que l'on sache par ailleurs quel est l'objet de la théorie. Cette pauvreté ne se rapporte pas qu'à l'absence d'une référence matérielle. En effet, en mathématiques, les domaines d'expérience ne sont pas nécessairement matériels. Les objets qui permettent l'expérimentation ne sont pas forcément des objets matériels. La difficulté d'associer un domaine d'expérience — matériel ou pas — à l'élaboration de représentations à partir desquelles prolonger les savoirs mathématiques plus abstraits semblerait être au cœur de cette pauvreté.

Un des impacts du développement de la didactique des mathématiques sur les pratiques d'enseignement a été l'établissement d'un certain consensus (implicite ou explicite) sur l'impossibilité d'introduire les mathématiques à l'école en tant que système formel. La notion de domaine d'expérience dont nous avons déjà parlé rend compte de ce fait. Cependant, des différences apparaissent lorsqu'il s'agit des caractéristiques de ces domaines, de leurs rapports avec la nature des objets mathématiques concernés. Dans la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), c'est la *fonction* du savoir mathématique dans la situation didactique qui commande le choix du domaine d'expérience associé à la situation. Au moins deux contraintes fondamentales pèsent sur les caractéristiques de ces domaines d'expérience : la possibilité de générer des questions pour lesquelles le savoir à enseigner est un moyen efficace de réponse ; ces questions doivent pouvoir être « comprises » et « traitées » avec les connaissances disponibles chez les élèves. Que les objets de ce domaine soient « matériels » ou pas — par exemple, des objets déjà mathématisés — n'est pas du tout une condition pour son choix. En fait, ce qui y est fondamental, c'est que l'interaction didactique que ce domaine favorise permet l'émergence des objets mathématiques en tant qu'outils nécessaires à la résolution des problèmes posés. Cependant, pour Brousseau, « faire des mathématiques » signifie plus que résoudre des problèmes : trouver des bonnes questions, formuler des propositions mathématiques à partir du travail sur les objets du domaine d'expérience, prouver la validité des dites propositions, construire des modèles, des concepts, des théories conformes à la culture mathématique, etc., sont aussi des éléments fondamentaux. Le savoir construit nous renseigne sur le domaine d'expérience et, en même temps, permet l'émergence de nouvelles questions, de nouveaux usages.

L'analyse épistémologique du contenu mathématique chez Brousseau fonctionne, à notre avis, davantage comme un « contrôle » dans la genèse artificielle de la reproduction des conditions de fonctionnement des savoirs mathématiques, dans la communauté disciplinaire de référence, que comme une garantie de production de sens. Ce contrôle assure la cohérence entre les positions ontologiques et épistémologiques issues des mathématiques elles-mêmes d'une part, et les positions qui sont à la base de la genèse artificielle d'autre part. Mais c'est aussi lui qui veille à la possibilité de placer le savoir en prolongement de l'univers d'expérience recréé. Chevallard (2006) formule ceci en termes de « raisons d'être » des savoirs à enseigner, qui sont à la fois authentiques au plan épistémologique, cohérentes au plan du programme scolaire et susceptibles d'être rencontrées, reçues, vécues, intégrées par les élèves du niveau d'études visé, à travers des situations didactiques appropriées. On pourrait dire que certains des processus propres à l'activité mathématique (et non pas seulement les « résultats » de ces processus) sont recréés dans une genèse artificielle. Selon Chevallard (2006), le monde bâti par les humains est un monde d'intentions où l'intention vise la satisfaction d'un besoin. Les savoirs mathématiques font partie de ce monde, ils répondent alors à des « raisons d'être ».

Il ne faut pas confondre « raisons d'être » et « utilité dans la vie quotidienne » ; il s'agit d'une dérive de la notion de « sens », impliquant de façon implicite ou explicite un postulat très enraciné dans la culture, en particulier dans la culture scolaire, à savoir que *pour enseigner des mathématiques il faut « partir du concret »* — en faisant de ce postulat *la* condition fondamentale à l'introduction des savoirs mathématiques.

Nous partageons l'idée que certains savoirs mathématiques puissent émerger comme réponse à l'étude d'une réalité extra-mathématique ; dans ce cas, le rapport réalité-mathématique est dialectique : les mathématiques nous renseignent sur la « réalité » en question en même temps que la réalité nous force à perfectionner les outils de connaissances, puis à produire de nouveaux savoirs. Pourtant, les « besoins » auxquels Chevallard fait référence sont aussi associés à des questions intra-mathématiques, culturellement reconnues par la communauté de référence.

Derrière le postulat qui fait du « concret » la condition fondamentale pour accéder aux savoirs mathématiques, on retrouve en général au moins une des suppositions suivantes :

− Les mathématiques « se situent » dans la réalité et l'on y accède en manipulant cette réalité par des processus d'abstraction. Les actions du sujet ne sont pas orientées en vue de comprendre la « réalité » ou d'apprendre « quelque chose » de celle-ci, mais plutôt d'en « extraire » les mathématiques qui s'y trouvent et que l'école prétend transmettre.

− Les objets mathématiques sont des entités abstraites, difficiles à saisir. Pour cela, il faut les rendre « visibles », « tangibles », etc. La réalité matérielle, didactiquement élaborée — ce qu'on appelle habituellement « le matériel concret » — fonctionne comme un moyen de matérialisation des objets mathématiques. En regardant, en touchant ce « matériel concret », on aura accès, par des processus d'abstraction, aux mathématiques visées.

Par l'analyse des propositions d'introduction à l'algèbre dans les manuels scolaires, nous essayerons de montrer comment ce postulat s'infiltre de façon implicite au sein d'une transposition didactique qui prétend en principe être de nature fonctionnelle [3], tout en entraînant une dénaturalisation des objets de savoirs. Si l'on accepte, avec Chevallard (2006), que « connaître un savoir » est connaître l'utilité, les usages (dans le sens dialectique dont nous en parlons) ainsi qu'au moins quelques-unes de ses raisons d'être, notre analyse nous permettra de constituer un portrait sur les « possibilités de connaissances » ouvertes par les propositions

3. Domaines d'expérience et pratique algébrique

L'analyse des grandes étapes de l'évolution historique de l'algèbre (Squalli, 2003) nous permet d'identifier deux domaine d'expérience en interaction avec lesquels l'algèbre s'est initiée : les nombres et la géométrie métrique. C'est le souci d'élaboration de méthodes générales pour la résolution de « types de problèmes » — possible prolongement du projet réussi d'élaboration d'une arithmétique utilisant un langage uniformisé et offrant des méthodes de calcul sûrs et facilement applicables — qui sembleraient être à la base de l'émergence de cette nouvelle discipline.

Le rapport dialectique entre le domaine d'expérience (la « réalité ») et le savoir émergent est remarqué par Chevallard (1989) : d'une part, les systèmes de nombres fournissent les domaines de calcul sur la base desquels s'élèvera l'algèbre mais d'autre part, le calcul algébrique constituera l'outil fondamental de la construction des nombres successifs. La création du langage algébrique avec Viète permet de dégager plus nettement la problématique de l'étude du numérique et de mieux maîtriser la dialectique du numérique avec l'algébrique.

C'est dans le contexte de cette dialectique que le caractère opératoire de l'outil algébrique prend du sens et permet de révéler d'autres aspects de « l'état des choses » initial :

3 C'est-à-dire qui prétend montrer l'utilité des mathématiques.

> *... le passage, en simplification, de l'expression (2p – 1) + (2p + 1) à l'expression 4p, fait apparaître que (2p – 1) + (2p + 1) désigne un nombre multiple de 4; le passage en complexification de 4p à $(p + 1)^2 – (p – 1)^2$, fait apparaître que (2p – 1) + (2p + 1) est une différence de deux carrés…* (op. cit., p. 75).

Otte (2006) remarque d'une autre façon le caractère « révélateur » de l'algèbre. En s'appuyant sur Peirce, il interprète l'algèbre comme étant une sorte de diagramme qui aide à mieux comprendre l'état des choses expérimentées ou imaginées. L'algèbre permet de montrer quelque chose de différent du fait en soi. L'algèbre montre une relation puisqu'elle rend compte de l'activité elle-même. L'algèbre implique un déplacement d'une pensée centrée sur des objets en une pensée centrée sur des relations. Le diagramme algébrique (formule) n'a pas de ressemblance avec l'objet (auquel il fait référence), mais comprend une analogie entre les relations des parties de chacun : il permet l'accès à des vérités sur son objet, autres que celles qui suffisent à déterminer sa construction. L'utilité des formules algébriques consiste précisément en sa capacité à révéler des vérités inattendues (Otte, 2006).

La création du langage algébrique renforce le caractère dialectique des rapports entre l'algèbre, en tant que discipline en émergence et les domaines d'expérience sur lesquels elle se constitue : l'autonomie du registre combinatoire (syntaxique, dans le sens des langages formels) par rapport à celui des significations est à chaque fois plus marquée. Selon Serfati (2005), ni Descartes ni Cardan ne considéraient pouvoir recevoir des suggestions provenant du texte symbolique. C'est Leibniz qui a donné ce pas fondamental.

D'un point de vue didactique, peut-être en raison de la place que le langage algébrique prend dans l'enseignement, des auteurs comme Arzarello et coll. (2001) ou Drouhard (1995) étudient les composantes de ce langage, empruntant des outils théoriques à la philosophie et à linguistique. En se basant sur les travaux de Frege, Arzarello, Bazzini et Chiappini (2001) distinguent sens et dénotation d'une expression algébrique. La dénotation est l'objet auquel l'expression réfère, le sens est la façon dont l'objet est perçu, c'est-à-dire la pensée exprimée par l'expression (aspects intentionnels). Par exemple, $(n + 1) + n$ et $(n + n) + 1$ ont des sens différents, mais dénotent la même fonction. La potentialité de l'algèbre consiste, d'une part dans les multiples sens qui sont incorporés par la même formule et/ou qui peuvent être obtenus par des manipulations syntaxiques et, d'autre part, dans la possibilité d'opérer dans un espace de calcul dans lequel les « sens » des expressions algébriques sont suspendus et dans lequel ce sont des théorèmes qui contrôlent le passage d'une relation à une autre et non l'adéquation au milieu (Broin 2002). Le contrôle syntaxique remplace alors le contrôle sémantique provenant du domaine d'expérience.

Cependant, dans l'enseignement, ce contrôle syntaxique ne vient pas nécessairement d'une axiomatique de référence explicite : il est plutôt le produit d'une interaction avec les domaines d'expériences rencontrés par les élèves. Panizza et Drouhard (2003) affirment que de nombreux mathématiciens pourraient accepter qu'en algèbre, la relation entre les énoncés résulte de l'application de règles d'inférence, elles-mêmes renvoyant à un nombre restreint d'énoncés de base sur les propriétés des structures. Par contre, à l'école, les propriétés qui justifient les équivalences syntaxiques sont celles qui sont « héritées » de l'ensemble auquel les expressions algébriques engagées renvoient. Une certaine dialectique avec le numérique semblerait ne pas pouvoir être absente, si l'on veut justifier les calculs algébriques. Dans cette dialectique, comme l'explique Broin (2002), les propriétés des opérations **servant au contrôle des calculs en arithmétique** devront maintenant fonctionner comme savoirs formels, **pour réaliser des calculs et pour les valider**.

Qu'en est-il de cette dialectique dans les manuels scolaires ? Quelles sont les caractéristiques des domaines d'expérience qu'on retrouve dans les manuels d'introduction à l'algèbre ? Quel rapport peut-on établir entre ces domaines et les objets de savoir à introduire ? Quelles sont les fonctions des objets algébriques? Quelle place et quelle fonction y occupe le langage algébrique ? Comment le travail syntaxique est-il introduit et comment est-il validé ?

4. Analyse des manuels scolaires québécois

Nous analyserons deux des manuels les plus utilisés : *Panoram@th*, Cadieux, Richard et al. Anjou, 2005 et *À vos maths !*, Michel Coupal, Graficor, 2006.

Ces deux ouvrages sont de nouveaux manuels qui ont récemment été approuvés par le Ministère de l'Éducation. Ils ont été élaborés en vue de répondre aux besoins de la réforme de l'éducation qui est en cours présentement au Québec. Dans un premier temps, nous décrirons de manière synthétique les conceptions qui sous-tendent l'élaboration des manuels et qui sont explicitées dans les guides d'enseignement. Ensuite, nous analyserons les chapitres concernant l'algèbre, à la lumière des positions des auteurs et du cadre théorique préalablement développé.

4.1. Les conceptions et les objectifs explicités par les auteurs

Dans le guide d'enseignement, les auteurs du manuel *Panoram@th* affirment que les situations mettent de l'avant des contextes réalistes misant sur l'approche de la mathématique centrée sur la réalité quotidienne :

> *Observer, interpréter, voire interagir avec le monde à l'aide de la mathématique, telle est l'idée principale retenue pour sensibiliser les élèves à l'omniprésence de la mathématique dans leur environnement* (Introduction, p. 3).

L'objet, toujours selon les auteurs, est de proposer une approche basée sur la réalité permettant aux élèves de découvrir où, quand et comment la mathématique intervient dans le mode actuel. Cela permet aux élèves de mieux comprendre leur environnement et d'établir des liens avec leur quotidien. L'approche réaliste les motive dans le développement de leurs compétences et l'acquisition des nouvelles connaissances, car ces contextes les interpellent directement. Elle permet de montrer aux élèves « à qui et à quoi sert le domaine de la mathématique ». Les apprentissages se font à l'aide de mises en situation réalistes tirées de leur quotidien et prenant davantage de sens (Introduction, page 4). La démarche d'apprentissage est centrée, en mathématiques, sur la résolution de situations-problèmes :

> *La situation-problème est un élément déclencheur qui met les élèves en action et leur permet de réaliser de nouveaux apprentissages.* [...] *La résolution de situations-problèmes offre donc un contexte privilégié pour le développement des concepts et des processus mathématiques, et de la communication mathématique. Elle rend les apprentissages significatifs et permet d'établir un lien entre les savoirs* (Introduction, p. 13).

Les auteurs explicitent aussi les critères qui ont guidé l'élaboration des situations problèmes : situations non présentées antérieurement; elles comportent un obstacle à franchir à la portée des élèves; elles amènent les élèves à acquérir de nouvelles connaissances; elles peuvent être résolues à l'aide de différentes stratégies, etc. Ces situations-problèmes, qui sont présentées au début de chaque chapitre, sont suivies d'activités dont le but est de permettre aux élèves de consolider les notions mathématiques à l'étude. C'est dans ce contexte que le manuel prétend répondre aux trois compétences disciplinaires exigées par le Ministère de l'Éducation, à savoir : résoudre des situations-problèmes développer un raisonnement mathématique et communiquer à l'aide du langage mathématique.

Dans le cas du manuel *À vos maths!*, certaines des conceptions à la base de sa construction sont explicitées par l'auteur, tout au long de la description de la structure de chaque chapitre. Il y a toujours une « phase de préparation » comprenant une « exploration » (en général, une situation problème) inspirée de la vie courante (Guide général, page 1), dont le but est de susciter l'intérêt des élèves et de solliciter leurs connaissances antérieures. Dans la phase de réalisation, on retrouve des « questionnements », des situations d'application et des informations théoriques. Un des buts des questionnements, selon l'auteur, est de construire le sens des concepts et des processus à l'étude. Les situations d'application ont pour but de permettre aux élèves de valider par la pratique leurs conceptions. Une phase d'intégration et de réinvestissement est proposée à la fin de chaque chapitre, ayant pour objectif « d'ancrer les apprentissages des élèves, ainsi que de les situer par rapport aux apprentissages futurs et à la réalité dans laquelle ils vivent » (Guide général, page 2).

La nature de ces « questionnements » et des situations proposées n'est pas explicitée dans le guide général, elle l'est plutôt dans le guide pédagogique correspondant à chaque thème particulier. Par exemple, dans le chapitre destiné aux modèles mathématiques et aux suites numériques, l'auteur affirme que :

> *La mathématique, présentée comme outil privilégié de modélisation du réel, est à l'honneur dans la première section de ce chapitre. L'élève y trouvera matière à enrichir sa conception du rôle et de l'utilité des mathématiques.* [...] *la mathématique sert autant à décrire et à expliquer des phénomènes qu'à compter et à calculer. L'algèbre est en quelque sorte le langage que la mathématique utilise pour décrire et expliquer, à l'aide de modèles, divers phénomènes.* [...] *L'algèbre est un langage mathématique qui sert à résoudre*

> *des problèmes… c'est en connaissant d'abord le rôle d'outil qu'on réussit à se l'approprier de façon à optimiser son utilisation* (p. 151).

On voit clairement que pour les auteurs des deux manuels, même s'ils comportent des nuances, le domaine de « la réalité », « de la vie quotidienne », est leur choix fondamental, autant pour « la motivation » des élèves que pour leur montrer la puissance et l'utilité des mathématiques. La nature des rapports entre « la réalité » et les objets de savoir n'est pas explicitée, elle sera inférée par l'analyse des chapitres spécifiques qui suivront.

4.2.Un premier domaine de référence pour l'introduction à l'algèbre : les suites numériques

Les deux manuels proposent des activités ayant comme objectif d'amener les élèves à recourir à une écriture algébrique, en les plaçant dans des situations où ils doivent repérer des régularités numériques, puis exprimer en langage symbolique la règle reliant un nombre et son rang dans une suite numérique (*pattern*).

L'auteur du manuel *À vos maths !* affirme que les suites permettent une introduction « naturelle » à l'algèbre, puisqu'elles viennent solliciter les connaissances intuitives des élèves sur l'écriture symbolique (guide pédagogique C, page 239). Voici les objectifs explicités par l'auteur : « faire travailler la généralisation algébrique »; « permettre d'introduire le concept de relation linéaire » (parce que le chapitre est centré sur les suites arithmétiques); « initier les élèves à la manipulation d'objets algébriques, que ce soit en calculant la valeur d'un terme ou même en isolant une variable » (guide pédagogique C page 240).

Dans le chapitre d'introduction aux suites numériques (manuel de l'élève), on présente l'objectif général : « Le travail sur les suites t'aidera à te familiariser avec une écriture qui deviendra bientôt pour toi un outil très important en mathématique : l'écriture algébrique ». On voit déjà dans cet énoncé une relation particulière entre le domaine de référence choisi par l'auteur (les suites numériques) et l'objet qu'on veut introduire (l'écriture algébrique) : les suites sont un « moyen » permettant d'introduire l'écriture algébrique, cette écriture n'émergera pas comme un outil pour « apprendre » des choses sur les suites. D'autant plus que l'utilité de cette écriture est reléguée explicitement à un moment postérieur (« … une écriture qui deviendra *bientôt* pour toi un outil très important en mathématique… »). Ce « domaine de référence » n'est pas alors un « domaine d'expérience », comme nous l'avons présenté auparavant. Voici le type d'activités caractéristiques de ce chapitre, dans les deux manuels analysés :

- repérer les régularités et trouver les termes de la suite en utilisant des données différentes (le premier terme et la régularité ; un terme et la raison pour les suites numériques ; deux termes pour les suites numériques ; une règle, etc.) ;
- trouver une règle pour calculer n'importe quel terme de la suite d'après son rang ;
- calculer le rang d'un terme dont on connaît la valeur.

Le langage algébrique prend fondamentalement ici un caractère désignatif : il s'agit de représenter le terme général de la suite, de l'exprimer à travers une formule. L'usage qu'on fait de la formule produite se rapporte au calcul des termes de la suite. Il est important de remarquer, que pour cet usage, la représentation symbolique de la formule de calcul n'est pas nécessaire : il suffit de pouvoir décrire « la règle » permettant de calculer n'importe quel terme de la suite en fonction de son rang. Dans le manuel *Panoram@th*, on explicite que l'expression algébrique représentant « la règle » d'une suite permet de « décrire une suite de façon abrégée »; l'écriture symbolique « facilite » la représentation de la règle.

Lorsqu'il s'agit de calculer le rang d'un terme, la formule qui représente la règle générale de la suite n'acquiert pas nécessairement un caractère opératoire : cela peut se faire en utilisant des raisonnements arithmétiques. L'auteur du manuel *À vos maths !* affirme (guide pédagogique C, page 289) que dans des contextes familiers, les élèves n'ont pas besoin d'avoir recours aux procédures permettant d'isoler une variable, puisque il est possible de trouver les réponses (du calcul d'un rang à partir d'un terme) grâce à des manipulations arithmétiques. C'est à partir d'une abstraction de ces contextes et de la « perception » des opérations réalisées, ainsi que de l'ordre dans lequel elles ont été effectuées dans plusieurs problèmes particuliers que les élèves pourront *induire* une procédure générale de calcul. Cette procédure devient alors une « règle d'action » dont la justification reste au niveau empirique. Les propriétés des opérations ne sont pas des moyens explicites permettant de réaliser ou de valider des calculs à partir d'expressions algébriques.

Le travail sur les suites permet de mobiliser, du moins implicitement, des processus associés à la pensée algébrique (recherche de régularités, analyse du comportement de deux variables qui sont en relation, etc.); pourtant, ce qui semblerait être le plus important pour les auteurs c'est l'écriture symbolique de la formule. Cependant, comme nous l'avons déjà mentionné, pour les problèmes proposés (calculer des valeurs de la suite, calculer le rang), l'écriture symbolique n'est pas nécessaire.

L'importance donnée à cette écriture s'explique, selon nous, par le fait que « les suites » sont là plutôt pour répondre à une nécessité didactique d'introduire un nouveau objet mathématique (le langage algébrique, les expressions algébriques) que pour fonctionner comme un domaine d'expérience sur lequel l'algèbre (et pas seulement le « langage algébrique ») pourrait s'ériger en tant qu'outil de modélisation. En fait, le chapitre suivant porte sur le langage algébrique en tant qu'objet d'étude et, du coup, les suites disparaîtront. Dans ce chapitre, l'étude de ce langage ne permet pas d'en apprendre « davantage » sur les suites et son développement n'est pas non plus rendu nécessaire par les problèmes émergeant de l'étude des suites ; il devient un outil pour résoudre d'autres types de problèmes. Les suites sont complètement mises à part, ce qui renforce notre hypothèse de n'avoir le rôle que d'un domaine de référence et non pas d'un domaine d'expérience.

4.3. Expressions algébriques et opérations

Le manuel *Panoram@th* poursuit le développement du langage algébrique dans son caractère désignatif : les expressions symboliques sont utilisées pour représenter les formules d'aire de figures planes de même que pour réaliser certains calculs, en remplaçant les variables par les mesures des côtés de différentes figures. Dès que les formules sont introduites, on définit la notion de *terme, coefficient, termes semblables*, ainsi que certaines opérations permettant de « réduire » les expressions algébriques. Les opérations sont traitées dans le contexte de la réduction de ces expressions. Après les avoir introduits comme moyen de représentation des relations entre deux variables, on dit simplement :

> **Réduction d'une expression algébrique : addition et soustraction**
>
> On exprime généralement une somme ou une différence sous sa forme réduite, c'est-à-dire à l'aide d'une expression algébrique dans laquelle toutes les opérations possibles ont été effectuées.
>
> On peut réduire une expression algébrique composée de plusieurs termes en additionnant ou en soustrayant les termes semblables.
>
> Ex. : 1) $3x + 9 + 4x - 7 = 7x + 2$ On peut réduire cette expression, car $3x$ et $4x$ sont des termes semblables, et 9 et -7 sont des termes semblables.
>
> 2) $3x + 4a$ On ne peut pas réduire cette expression, car $3x$ et $4a$ ne sont pas des termes semblables.

Extrait du manuel *Panoram@th*, page 11, Manuel B, volume 1

Aucune question (intra ou extra-mathématique) n'implique la nécessité d'une telle réduction. Les propriétés relatives aux opérations ne sont pas utilisées pour justifier les calculs réalisés. Des transformations du type $a - (b + c - d) = a - b - c + d$ apparaissent en tant que règles d'action, sans justification. Même si dans ce chapitre, les expressions algébriques apparaissent en tant qu'outil pour représenter une relation fonctionnelle, dès qu'on arrive aux calculs sur ces expressions, « les variables » se transforment en « objets physiques » qu'on manipule, tel qu'on le faisait en arithmétique : $2x + 3x = 5x$ parce que 2 pommes + 3 pommes ça fait 5 pommes. On ne trouve aucune référence ni à la notion d'équivalence algébrique ($2x + 3x = 5x$ parce que pour n'importe quelle valeur de x, les deux expressions donnent toujours le même résultat), ni à la propriété distributive ($2x + 3x = (2 + 3)\,x = 5x$).

En faisant appel à des représentations géométriques utilisées par Al-Khawârizmî, on introduit d'autres types de réductions qui font appel aux multiplications de monômes et de binômes par des valeurs constantes. Néanmoins, dans le calepin des savoirs qui suit immédiatement, la représentation géométrique disparaît et la réduction de l'expression algébrique est basée sur les propriétés de la multiplication :

Réduction d'une expression algébrique : multiplication et division

On exprime généralement un produit ou un quotient sous sa forme réduite, c'est-à-dire à l'aide d'une expression algébrique dans laquelle toutes les opérations possibles ont été effectuées.

En utilisant les propriétés de la multiplication, on peut réduire l'expression algébrique correspondant à un produit.

Ex. :

1) $5a \times 6 = 5 \times 6 \times a = 30a$ (commutativité)
2) $2a \times 10a = 2 \times 10 \times a \times a = 20a^2$ (commutativité)
3) $-7a \times 3{,}5b = -7 \times 3{,}5 \times a \times b = -24{,}5ab$ (commutativité)
4) $3(4n + 25) = 3 \times 4n + 3 \times 25 = 12n + 75$ (distributivité de la multiplication sur l'addition)
5) $1{,}5(n - 40) = 1{,}5 \times n - 1{,}5 \times 40 = 1{,}5n - 60$ (distributivité de la multiplication sur la soustraction)

Pour exprimer le produit d'un facteur par une expression algébrique comprise entre parenthèses, on convient d'éliminer le symbole de multiplication. Ex. : $4 \times (3n - 1)$ s'écrit $4(3n - 1)$.

Extrait du manuel *Panoram@th*, page 86, Manuel B, volume 1

La propriété des produits des puissances de la même base n'est pas nommée pour justifier $a \times a = a^2$. D'autres propriétés, par exemple l'associativité, sont implicitement utilisées mais pas mentionnées. D'autre part, la question de la « syntaxe » du langage algébrique (Drouhard, 1992) n'est nullement traitée : le signe « × » de multiplication est utilisé pour indiquer la multiplication de « $5a$ » et « 6 », mais non pour la multiplication de « 5 » et « a ». Dans le deuxième membre de la première égalité, on retrouve soudainement le signe « × » affectant le facteur « a ». Le fait qu'en algèbre, l'expression « $5 \times a$ » ou « $a \times 5$ » s'exprime habituellement par l'expression $5a$ doit faire partie de l'enseignement en tant que « convention » d'écriture [4].

En ce qui concerne la division d'un monôme par une constante ou d'un binôme par une constante, l'auteur fait appel « aux propriétés des fractions » et non pas aux propriétés de la division. Ces propriétés ne sont pas explicitées :

En utilisant les propriétés des fractions, on peut réduire l'expression algébrique correspondant à un quotient.

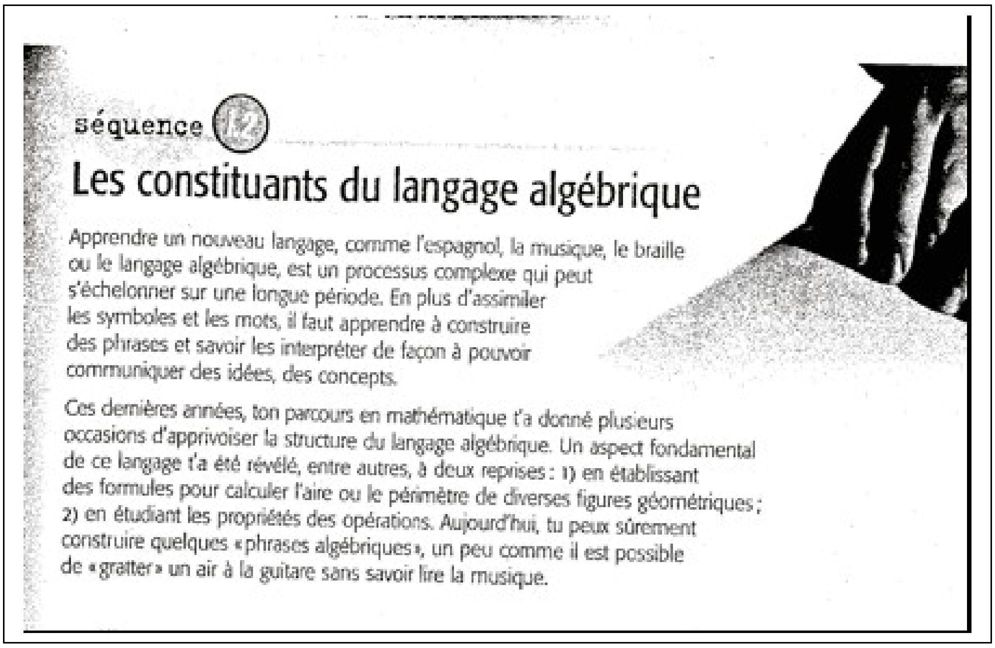
Ex. :

1) $20a \div 5 = \frac{20a}{5} = 4a$
2) $-45b \div 3 = \frac{-45b}{3} = -15b$
3) $56a^2 \div 7 = \frac{56a^2}{7} = 8a^2$
4) $13ab \div 4 = \frac{13ab}{4} = 3{,}25ab$
5) $(8n + 12) \div 4 = \frac{8n + 12}{4} = \frac{8n}{4} + \frac{12}{4} = 2n + 3$
6) $(20s - 50) \div 8 = \frac{20s - 50}{8} = \frac{20s}{8} - \frac{50}{8} = 2{,}5s - 6{,}25$

4 En fait, dans le système scolaire québécois, au primaire et en Secondaires 1 et 2, on travaille avec ce qu'on appelle des « nombres fractionnaires », comme 4⅓ ou 5⅛, dans lesquels la juxtaposition correspond à une **addition** et non à une multiplication comme en algèbre.

Encore une fois, le domaine de référence choisi — conduisant à l'établissement de relations entre variables — ne fonctionne pas comme un domaine d'expérience pour les expressions algébriques qui, une fois introduites, deviennent rapidement un objet d'étude en lui-même : le contenu mathématique introduit n'est plus en lien avec les problèmes du domaine de référence, il n'émerge pas en tant qu'outil pour l'analyse des relations fonctionnelles ; ce contenu ne se développe pas en fonction des problèmes et difficultés que l'étude des relations fonctionnelles pose. L'idée de relation fonctionnelle est rapidement perdue et l'opératoire proposé n'est qu'au service de la réduction d'expressions algébriques ; cette réduction est un objectif en soi-même, c'est-à-dire qu'elle ne répond pas à des questions qui émergeraient des problèmes à résoudre. Il s'agit toujours d'un travail syntaxique dont le but semble être la préparation à la résolution d'équations.

Dans le manuel *À vos maths !*, après le travail sur les suites numériques, on retrouve un chapitre destiné au « langage algébrique en tant qu'outil pour la résolution de problèmes ». L'auteur illustre à quoi va servir l'algèbre, en donnant un exemple d'un problème qui conduit à la formulation d'une équation, même si le problème peut être facilement résolu par l'arithmétique : « Quelle quantité doit-on additionner au quart d'elle-même si on veut que le résultat soit 15 ». Tout de suite, on présente le langage algébrique comme un objet en soi-même. Ainsi que dans l'autre manuel, l'étude du langage est préalable à la résolution des problèmes pour lesquels ce langage est, supposément, un outil de résolution. Cette étude est mise en parallèle avec celle d'une langue naturelle : l'auteur affirme qu'il faut construire des « phrases algébriques » et savoir les interpréter de façon à pouvoir communiquer des idées, des concepts.



séquence 12

Les constituants du langage algébrique

Apprendre un nouveau langage, comme l'espagnol, la musique, le braille ou le langage algébrique, est un processus complexe qui peut s'échelonner sur une longue période. En plus d'assimiler les symboles et les mots, il faut apprendre à construire des phrases et savoir les interpréter de façon à pouvoir communiquer des idées, des concepts.

Ces dernières années, ton parcours en mathématique t'a donné plusieurs occasions d'apprivoiser la structure du langage algébrique. Un aspect fondamental de ce langage t'a été révélé, entre autres, à deux reprises : 1) en établissant des formules pour calculer l'aire ou le périmètre de diverses figures géométriques ; 2) en étudiant les propriétés des opérations. Aujourd'hui, tu peux sûrement construire quelques «phrases algébriques», un peu comme il est possible de «gratter» un air à la guitare sans savoir lire la musique.

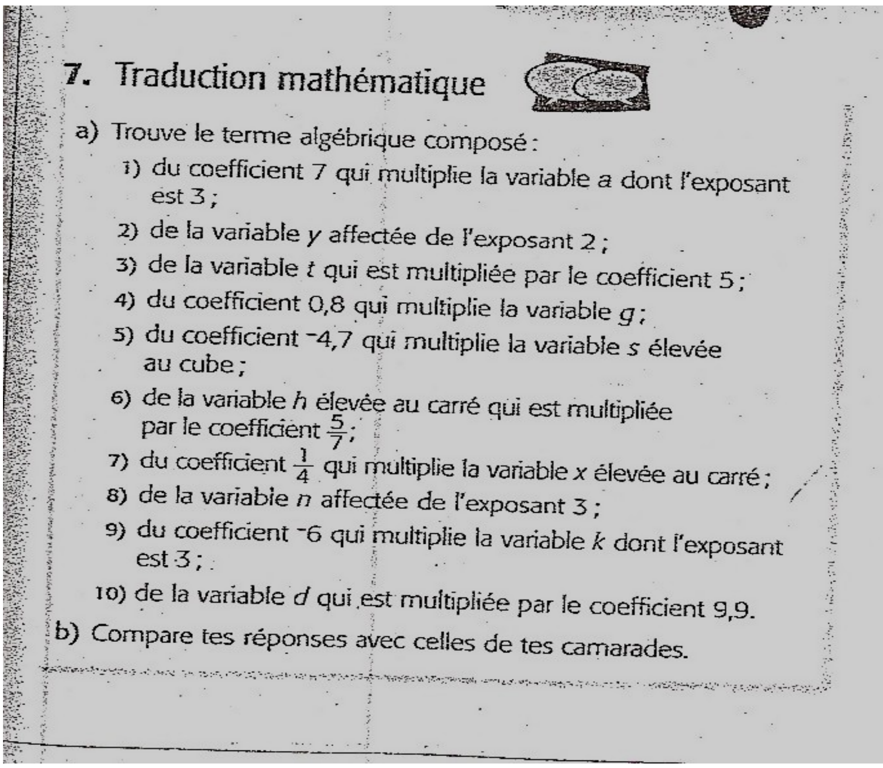
À vos maths !, Manuel C, page 205

Toujours selon l'auteur, les termes et les monômes constituent les mots du langage algébrique et les expressions algébriques, les phrases de ce langage. L'algèbre y est carrément réduite à un langage. Cependant, de la communication de quelles idées et de quels concepts s'agit-il? Dans quel but réalise-t-on cette communication? Ces questions ne guident pas l'enseignement proposé, elles ne constituent pas le motif (les raisons d'être) de construction de ce langage.

De plus, dans le chapitre suivant du manuel (section 2), le rôle central de l'algèbre est la résolution d'équations; la fonction fondamentale du langage algébrique est alors opératoire et non pas de communication.

L'étude du langage en soi-même fait en sorte que les expressions algébriques ne réfèrent pas à un domaine d'expérience intra ou extra-mathématique, il s'agit plutôt d'un travail décontextualisé portant sur ces nouveaux objets, de l'entrée au monde syntaxique, en ayant comme référence le « langage parlé ». On définit d'abord les termes algébriques, les termes semblables et certaines opérations sur ces termes. Par exemple, un monôme n'est que la représentation, dans le langage algébrique, d'une phrase écrite dans le langage parlé, sa fonction n'est que désignative.

Voici des activités représentatives de cette fonction :



7. Traduction mathématique

a) Trouve le terme algébrique composé :

1) du coefficient 7 qui multiplie la variable a dont l'exposant est 3 ;
2) de la variable y affectée de l'exposant 2 ;
3) de la variable t qui est multipliée par le coefficient 5 ;
4) du coefficient 0,8 qui multiplie la variable g ;
5) du coefficient $^{-}4{,}7$ qui multiplie la variable s élevée au cube ;
6) de la variable h élevée au carré qui est multipliée par le coefficient $\frac{5}{7}$;
7) du coefficient $\frac{1}{4}$ qui multiplie la variable x élevée au carré ;
8) de la variable n affectée de l'exposant 3 ;
9) du coefficient $^{-}6$ qui multiplie la variable k dont l'exposant est 3 ;
10) de la variable d qui est multipliée par le coefficient 9,9.

b) Compare tes réponses avec celles de tes camarades.

À vos maths !, Manuel C, page 222

activités

1. Co-efficient

Détermine le coefficient des monômes suivants.

a) $2 \cdot \frac{3x}{4}$

b) $5(2y)$

c) $\frac{1}{2} \cdot 6(2z)$

d) $(2{,}7) \cdot (3{,}2)d$

e) $2 \cdot p \cdot \frac{1}{2} \cdot 5$

f) $(2{,}7 \cdot 4{,}3)x$

g) $^{-}7 \cdot 3 \cdot z \cdot 2$

h) $y \cdot 1{,}1 \cdot \frac{5}{10}$

i) $(\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{3})\ 3x$

j) $3(^{-}4x + x) \cdot 2$

2. Équivalence

Trouve un monôme équivalent :

a) au triple de $8y$;

b) à huit fois plus que $6x$;

c) à 4 fois $3w$;

d) au tiers de $18n$;

e) à la moitié de $3z$;

f) à trois fois moins que $15b$;

g) au double de la demie de $7x$;

h) au tiers de $10y$;

i) au septième du quart de $28y$;

j) à six fois la demie de $8z$;

k) au quadruple du triple de $5a$;

l) à une demie fois le quart de $12d$;

m) au double du double du double de $3x$;

n) à cinq fois le huitième de z ;

o) au quinzième de $4{,}5b$;

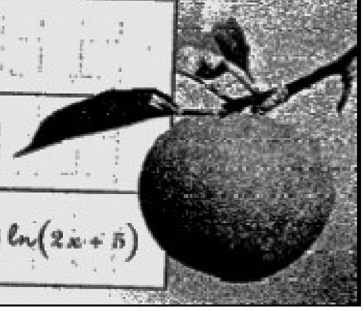
p) à trois fois le sixième de $2x$;

q) à sept fois plus que deux fois moins que x.

À vos maths !, Manuel C, page 222

Le rôle de l'arithmétique (un domaine d'expérience possible) dans l'élaboration de l'algébrique est marqué par la conception de l'algèbre en tant que langage : l'auteur explicite que le langage algébrique sert à *symboliser* les propriétés connues de l'arithmétique. Ces propriétés ne sont pas *des savoirs sur lesquels on s'appuie pour réaliser des calculs sur les expressions algébriques et pour les valider*. Les variables dans les expressions algébriques sont alors traitées comme des objets physiques :

Premier cycle du primaire	4 pommes + 2 pommes = 6 pommes
Troisième cycle du primaire	$\frac{4}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$
Premier cycle du secondaire	$4x + 2x = 6x$
Deuxième cycle du secondaire	$4\ln(2x+5) + 2\ln(2x+5) = 6\ln(2x+5)$



À vos maths !, Manuel C, page 215

La représentation des variables par des objets physiques amène l'auteur à postuler certaines règles d'action, sources d'obstacles didactiques. En fait, l'auteur affirme que dans l'addition ou dans la soustraction de termes semblables, les quantités doivent être de « la même nature ». Dans ce contexte, le seul calcul possible à l'activité suivante (proposée dans le manuel) est celui de l'item a :

Lorsque c'est possible, effectue les opérations suivantes :
a) $5a + 3a$
b) $6p + 7b$
÷
r) $2r^3 - r^2$

L'équivalence (ou le calcul) $2r^3 - r^2 = r^2(2 - r)$ n'est alors pas possible dans un contexte où les variables représentent « des objets » et où les opérations ne sont pas fondées sur des propriétés mathématiques (r^3 n'est pas de la « même nature » que r^2). Pourtant, ces équivalences sont nécessaires au développement postérieur de l'algèbre.

L'auteur remarque tout de suite que le sens « addition répétée » de la multiplication est utile pour additionner des termes semblables.

Exemple :

5x + 3x
x+x+x+x+x+x+x+x
8x

À partir de « l'observation » de plusieurs exemples, on affirme que seuls les coefficients influencent le résultat d'une addition ou soustraction de termes semblables et qu'ils n'ont pas à être des nombres naturels : *2,3 y – 6,4 y = –4,1 y*. On voit clairement que le dernier calcul s'appuie sur la généralisation inductive d'une « règle » construite dans le contexte particulier des termes à coefficients naturels, en considérant les variables comme des objets physiques. En effet, la multiplication en tant qu'addition répétée ne permet que de justifier l'addition de termes semblables à coefficients naturels. Pour les termes à coefficients décimaux, on impose l'extension de la règle d'action en maintenant « la structure » du calcul : pour additionner ou soustraire des termes semblables, il suffit d'additionner ou de soustraire leurs coefficients. Certaines questions syntaxiques (par exemple l'opération entre le « *11* » et le « *n* » dans l'expression *11n*) sont traitées une fois introduite l'écriture algébrique pour représenter le terme général d'une suite, mais elles sont présentées « naturellement » [5], et non pas comme conventions spécifiques

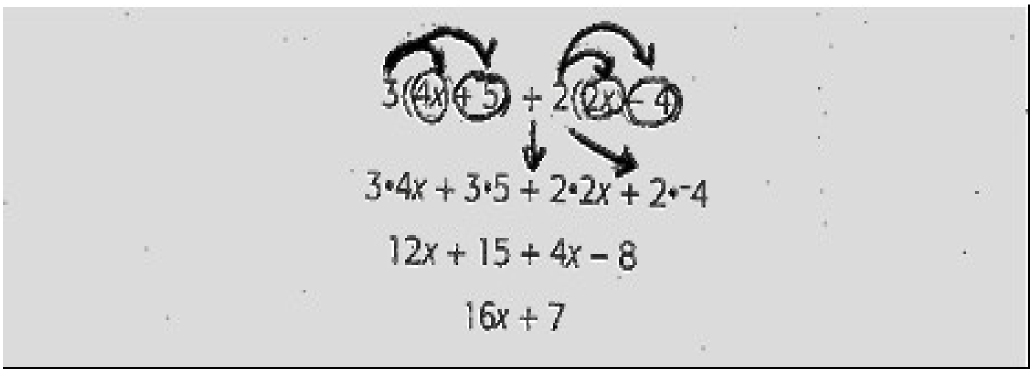
5 On propose aux élèves la question suivante : « Selon toi, quelle est l'opération mathématique entre le 11 et le *n* dans 11*n* » (page 173). Il y a déjà l'implicite qu'il y a une opération entre 11 et *n* et les élèves doivent la «découvrir».

de ce nouveau langage.
La représentation des variables par des objets physiques — dans le but de faciliter les opérations sur les expressions algébriques — conduit aussi à l'arithmétisation des opérations algébriques : en particulier, le signe « = » ne représente pas une équivalence mais « le résultat de ». C'est justement dans ce contexte que l'équivalence $2r^3 + r^2 = r^2(2r + 1)$ ne peut pas avoir de sens. La propriété distributive de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction, à la base de ces calculs (et de la possibilité de donner un sens à l'équivalence citée), n'est même pas mentionnée.

L'arithmétique fonctionne ici comme « la réalité » d'où l'on tire, par abstraction, la théorie algébrique (l'auteur s'appuie sur les calculs faits sur les fractions pour « illustrer » ce qu'on peut faire avec les monômes). Selon cette conception empiriste-sensualiste de la connaissance, au lieu de fournir une sémantique aux énoncés algébriques, le numérique légitime ces énoncés (Chevallard, 1989).

En ce qui concerne la multiplication d'une constante par un monôme, l'auteur fait appel à la propriété associative de la multiplication : $5(2x) = (5 \cdot 2)x = 10x$. On définit ensuite une règle d'action pour la multiplication d'une constante par un monôme et l'on étend la règle pour la division. Il semblerait que l'utilisation ou pas des propriétés des opérations servant à justifier les calculs algébriques, dépend du jugement que l'auteur se fait de la facilité de compréhension chez les élèves. On voit clairement une « adaptation » de l'objet mathématique aux nécessités didactiques, ce qui ne le met pas à l'abri des contradictions et des glissements épistémologiques.

Soudain, par exemple, les propriétés des opérations apparaissent explicitement, lorsqu'il s'agit de réduire d'autres expressions algébriques (plus complexes que les termes semblables). Une combinaison de l'usage des propriétés et des règles préalablement formulées est à la base de ces nouveaux calculs :



La propriété distributive est utilisée pour transformer l'expression $3(4x + 5)$, mais elle ne l'est pas lorsqu'on doit calculer, au dernier pas, $12x + 4x$ afin de réduire l'expression $12x + 15 + 4x - 6$: nulle part n'est-il écrit $12x + 4x = (12 + 4)\,x$. Il semblerait s'agir encore d'un « usage arithmétique » de la propriété distributive : $12\,x + 15$ est « le résultat de la multiplication de 3 avec $4x + 5$ ».

On voit là une combinaison des procédures à l'intérieur d'un même développement : on commence un travail syntaxique réglé par les propriétés des opérations mais finalement, les lettres sont soumises aux règles des termes semblables, déjà introduites [6]. Les termes semblables ont un statut particulier à l'intérieur de l'ensemble des expressions algébriques : ils ne sont pas soumis aux mêmes exigences que les expressions algébriques plus complexes, principalement en ce qui concerne les opérations.

Conclusions

Dans les deux manuels analysés, l'absence d'un domaine d'expérience permettant de faire fonctionner l'opératoire algébrique entraîne la prolifération de toutes sortes de règles d'action dont le contrôle ne peut être qu'externe et arbitraire. Cela empêche de faire la distinction entre les usages arbitraires des règles (appeler x l'inconnue, par exemple) de ceux qui ne le sont pas.

Les décisions didactiques prises par les auteurs ne sont pas sans conséquence, entre autres :
- Le travail d'ordre syntaxique, sans référence au numérique en tant que domaine d'expérience, conduit à l'imposition d'un ensemble de règles à suivre. Les lettres représentent parfois des nombres, parfois des objets, parfois des segments, selon l'intérêt d'introduire les différents types de calculs : les représentations des expressions algébriques changent non pas en fonction des problèmes à résoudre, mais en fonction des nécessités didactiques d'introduction de nouveaux objets ou concepts.
- Les égalités du genre $2x + 3x = 5x$ ne sont pas considérées comme des équivalences : $5x$ est « le résultat » du calcul $2x + 3x$. L'équivalence exige, entre autres, de faire intervenir la quantification de l'expression (« quantification » au sens logique de « pour tout x », OU « il existe un x ») ce qui n'a pas de sens lorsque la variable est représentée par un objet physique. Cela conduit à des contradictions rapidement identifiées par les élèves : lorsqu'on propose la résolution de l'équation $2x + 3x = 8x$, plusieurs d'entre eux répondent immédiatement « c'est impossible, $2x + 3x$ ne peut pas être égal à $8x$, ça donne $5x$! ». En effet, la notion d'équation suppose, même de manière implicite, la notion de fonction propositionnelle, absente si la variable est transformée en objet matériel.

Par ailleurs, le savoir est « découpé » dans les unités suivantes : introduction des expressions algébriques (des termes d'un nouveau langage), calculs sur des expressions algébriques (en tant que préalables à la résolution d'équations), les équations.

Chaque « fragment » de savoir est introduit dans un contexte différent, à l'intérieur duquel la signification change (ou en modifie la signification) : les lettres sont des

6 De plus, on peut voir que le schéma utilisé par l'auteur conduit à une règle de calcul qui va au-delà de l'utilisation de la distributivité : le signe à l'intérieur de la parenthèse, représentant une opération, est associé au deuxième terme de l'opération, de sorte qu'à l'intérieur de la parenthèse, l'opération disparaît.

variables dans le contexte des suites, elles deviennent des « objets physiques » (des pommes) lorsqu'il s'agit de faire des calculs et, enfin, elles prennent le caractère d'inconnue dans le contexte des équations.

Dans le passage d'un contexte à l'autre, le savoir ne reste pas nécessairement dans le prolongement de ce qui a été construit auparavant, au contraire, il est soumis à des ruptures : les expressions algébriques, introduites en lien avec les suites numériques, sont reprises dans le contexte du calcul sans aucune référence à ladite introduction : il s'agit d'un ensemble de nombres et d'objets physiques à manipuler (jetons, pommes, etc.). Le développement du calcul algébrique n'a pas pour but de mieux comprendre les suites numériques, de mieux exprimer ou formuler quelque chose — l'expression algébrique en tant que moyen d'expression ou de communication — ce calcul devient un objet d'étude en soi dont le sens ne se trouve pas dans une dialectique avec le domaine d'expérience, mais dans son utilité future pour la résolution d'équations. Les domaines de référence, dans chaque fragment, fonctionnent davantage comme un moyen didactique pour introduire de nouveaux « objets » que comme des domaines d'expérience à partir desquels on doit élaborer des significations.

La conception dominante de l'algèbre en tant que « langage » et le découpage qu'on fait pour introduire « les composants » de ce langage conduisent à une arithmétisation de l'algèbre :

- le signe égal ne représente pas une équivalence et les lettres ont, en général, le statut d'inconnues. Il ne s'agit pas de représenter algébriquement des relations, mais d'écrire avec des lettres le résultat d'un calcul. On le voit clairement dans l'utilisation (dans un « sens unique ») de la propriété distributive : on l'explicite pour des calculs du type $3(x–2)$, mais pas pour justifier que $3x + ½x = (3 + ½)x$.
- les formules ne sont pas des modèles, mais la représentation de règles pour réaliser des calculs (absence de paramètres; manque d'étude de la formule pour obtenir des informations sur le problème modélisé, etc.).
- les problèmes utilisés pour introduire les équations sont résolubles par des moyens arithmétiques.
- les calculs sont organisés de manière à ce que les opérations sur les expressions algébriques soient un prolongement des opérations arithmétiques : par exemple, des coefficients naturels pour interpréter la multiplication 3x comme une « addition répétée » de trois objets (les x).

Les nouveaux objets algébriques et les pratiques (qui y sont) associées ne rendent pas compte d'un univers d'expérience à partir duquel les nouveaux savoirs se constituent. Ces objets sont introduits à travers des artefacts didactiques qui remplacent la dialectique arithmétique-algèbre (domaine d'expérience-modèle) par un système extérieur dont le fonctionnement n'est qu'une image de fonctionnement algébrique. De cette manière, les règles du fonctionnement algébrique n'émergent pas d'un processus dialectique avec le système étudié. Les mécanismes régulateurs des connaissances algébriques ne sont pas des connaissances mathématiques : dans certains cas, il s'agit de connaissances sorties du contexte de référence (le principe d'équilibre, pour la balance dans le cas des équations); dans d'autres, de « conventions » imposées sur des systèmes d'objets concrets construits à l'image du fonctionnement du savoir qu'on veut enseigner. Le caractère opératoire du calcul algébrique ne surgit pas pour la résolution de problèmes (pour révéler des « vérités inattendues » des objets étudiés, dans le sens d'Otte) : il est imposé dans le contexte de la création d'un nouveau langage mathématique.

Le processus de construction du sens des objets et des pratiques algébriques est associé, dans les manuels analysés, à un processus de « concrétisation » ou de « matérialisation » des objets mathématiques. L'élaboration d'une genèse artificielle pour la reconstruction scolaire des savoirs ne peut négliger les processus de contextualisation liés à la production du sens (Brousseau 1998). Cependant, « contextualisation » et « concrétisation » des savoirs ne sont pas synonymes. De plus, ces processus de contextualisation ne devraient pas être des obstacles à certaines ruptures nécessaires à l'évolution de la pensée mathématique; la construction de « sens locaux » ne devrait pas obstruer celle de sens « plus globaux » associés à des processus de construction internes aux mathématiques.

Bibliographie

ASSUDE T. et MARGOLINAS C. (2005). Aperçu sur les rôles des manuels dans les recherches en didactique des mathématiques, *Manuels scolaires, regards croisés*, pp. 213-241, Bruillard, Caen, Scérén, CRDP Basse-Normandie.

BROIN D. (2002). *Arithmétique et Algèbre élémentaires scolaires*. Thèse en Didactique des Mathématiques, Université Bordeaux 2.

BROUSSEAU G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La pensée sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège, *Petit x*, n° 5, pp. 51-94.

CONNE F. (1993). Du sens comme enjeu à la formalisation comme stratégie : une démarche caractéristique en didactique des mathématiques. In *Sens des didactiques et didactique du sens*, pp. 205-261, Jonnaert, P. et Lenoir, Y., éds. Éditions du CRP, Faculté d'éducation, Université de Sherbrooke.

CONNE F. (2001). Évolution de la référence à la réalité dans les manuels suisses romands au cours du XXe siècle. *Actes de la 11e école d'été en didactiques des mathématiques*.

DROUHARD J.-P. (1992). *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.

GIROUX J. (2001). La formation professionnelle à l'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire : quel rôle peut jouer la didactique? In *Les recherches enseignées dans les espaces francophones* [Numéro thématique], A. Jeannel, J.-P. Martinez et G. Boutin (rédacteurs invités), pp. 159-183, Science en construction et enseignement universitaire.

HUMMEL C. (1988). *School textbooks and lifelong education : An analysis of schoolbooks from three countries*, Hambourg, UNESCO Institute for Education.

LEBRUN M. (2006). Les mutations du manuel de lecture du secondaire de 1960 à 2004. In *Le manuel scolaire : Un outil à multiples facettes*. M. Lebrun, éd. pp. 113-136, Presses de l'Université du Québec.

LEYMONE G. (1993). La quête du sens dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. In *Sens des didactiques et didactique du sens*, P. Jonnaert, Y. Lenoir, éds., pp. 263-287, Éditions du CRP, Faculté des sciences de l'éducation, Université de Sherbrooke.

LENOIR Y., ROY G.-R. et LEBRUN J. (2001). Enjeux des rapports entre manuels scolaires et intervention éducative. In *Le manuel scolaire et l'intervention éducative : regards critiques sur ses apports et ses limites*. Y. Lenoir, B. Rey, G.-R. Roy et J. Lebrun, éds., pp. 5-21, Sherbrooke, Éditions du CRP.

MORF A. (1994). Une épistémologie pour la didactique : spéculations autour d'un aménagement conceptuel. *Revue des Sciences de* l'Éducation, vol. 22, n° 1, pp. 45-68.

OTTE M. (2006). Mathematical Epistemology from a Peircean Semiotic Point of View. *Educational studies in Mathematics*, vol. 61, n° 1-2, pp. 23-47.

RASHED R. (1995). *Entre arithmétique et algèbre*, Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes, Les belles lettres.

ROUCHIER A. (1996). Connaissance et savoirs dans le système didactique. *Recherche en didactique des mathématiques*, vol. 16, n° 2, pp. 28-45.

SERFATI M. (2005). *La révolution symbolique*, La constitution de l'écriture symbolique mathématique, Éditions PETRA.

SPALLANZANI C., BIRON D., LAROSE F., LEBRUN J., LENOIR Y., MASSELTER G., et ROY G.-R. (2001). *Le rôle du manuel scolaire dans les pratiques enseignantes au primaire*. Sherbrooke, CRP.

SQUALI H. (2003). *Tout, tout, tout, vous saurez tout sur l'algèbre*, Éditions Bande Didactique, Québec.

ZAHORIK J. A. (1991). Teaching style and textbooks. *Teaching and Teacher Education*, vol. 7, n° 2, pp. 185-196.