ACTIVITE … LA MESURE DES ANGLES EN RADIANS AU LYCEE

Isabelle BLOCH
IUFM d'Aquitaine

Comment aborder la mesure des angles en radians, sujet toujours épineux au lycée ? Si nous consultons les manuels, la plupart d'entre eux affirment avec une brièveté sans égale : la mesure des angles en radians est proportionnelle à la mesure en degrés et 180° correspondent à π radians…
Alors pourquoi introduire une nouvelle mesure ? Quel est son intérêt ? Pourquoi la mesure en degrés ne suffit-elle pas ?
Pour répondre à ces questions, comprendre le sens de cette nouvelle mesure, savoir à quoi elle sert, commençons par rappeler quelques éléments de savoirs sur les angles de vecteurs unitaires, le cercle unité et l'ensemble **U** des nombres complexes de module 1, puis voyons quelles activités sont nécessaires pour que les élèves saisissent quelques uns des enjeux de cette introduction du radian.

1. Les savoirs

Isomorphisme entre le cercle unité et l'ensemble des angles de vecteurs unitaires du plan orienté

Quel rapport entre le cercle et les angles ? Pourquoi le fait de mesurer une *longueur* – un arc de cercle – donne-t-il accès à la mesure d'un angle ?
Pour obtenir ce résultat, il faut considérer le cercle unité comme la représentation, dans le plan d'Argand-Cauchy, des nombres complexes de module 1 ; le cercle unité est alors assimilé au groupe $(\mathbf{U}, \mathrm{x})$. Et l'ensemble des angles de vecteurs unitaires dans le plan orienté sera identifié comme le sous groupe unitaire du groupe orthogonal direct des rotations, muni de la loi de composition o : ce qui correspond aux matrices orthogonales directes de déterminant 1 (munies du produit matriciel), soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos(a) & \sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$$

Il est équivalent de dire qu'un angle de vecteurs unitaires est une classe d'équivalence de couples de vecteurs unitaires (*u, v*) où la relation d'équivalence est bien entendu : (*u, v*) est équivalent à (*u', v'*) si et seulement si la rotation qui transforme *u* en *v* est la même que celle qui transforme *u'* en *v'*. On peut alors démontrer que la rotation qui transforme *u* en *u'* est la même que celle qui transforme *v* en *v'* (Faites le dessin !).
Si l'on fixe le premier vecteur *u*, toute classe comprend donc exactement un

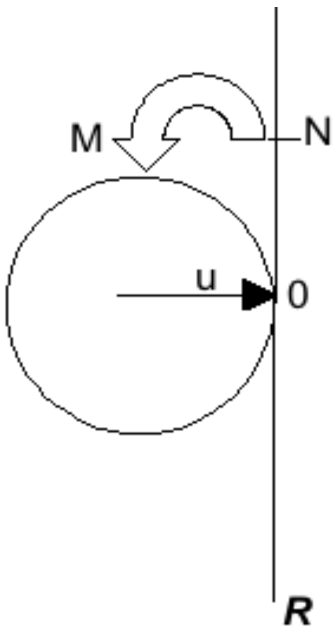
représentant de premier vecteur u car les rotations sont des applications.

Isomorphisme entre le cercle unité et le groupe additif R/**2π**Z

À tout nombre complexe z de module 1 on associe un nombre α tel que $z = e^{i\alpha}$.
Ceci définit un isomorphisme entre **U** et les classes d'équivalence des nombres réels à 2 π près, $\{\alpha + k\, 2\pi\}$, k Z. Par composée d'isomorphismes, il est alors clair qu'il y a isomorphisme entre les angles et les dites classes d'équivalence.

2. Les étapes de l'apprentissage et les connaissances

Première étape
A tout angle de vecteurs unitaires correspond exactement un point sur le cercle unité U, et réciproquement ; ceci en fixant pour un angle de vecteurs unitaires, le premier vecteur en u, premier vecteur unitaire de la base du plan. (Le plan est orienté par le choix d'une classe d'équivalence de bases orthonormées).



Deuxième étape
Mesurer les angles revient donc à mesurer le cercle unité (comme courbe), c'est-à-dire que mesurer un angle, c'est mesurer la longueur de l'arc qu'il intercepte sur le cercle unité.

On identifie alors quatre difficultés (au moins!) :

1. La longueur d'un cercle dépend de son rayon (voir 3 ci-dessous) alors que la mesure des angles ne doit pas dépendre de la longueur de leurs côtés, ce qui est une difficulté bien connue en primaire et au collège ; c'est pourquoi on prend le cercle unité. Mais que se passe-t-il pour les autres cercles?

2. Il y a donc en fait deux situations de proportionnalité sous-jacentes (voir 3 ci-dessous).
3. Transférer l'additivité de la mesure et voir que l'on va substituer à la somme de deux angles la somme de deux longueurs d'arcs, cela n'a rien d'évident. La linéarité est plutôt plus évidente, du moins pour les fractions du cercle (demi tour, etc...)
4. Les mesures des angles remarquables en radians sont irrationnelles (voir ci-dessous), pourquoi ? On remplace des mesures entières sympathiques (30°, 45°…) par des mesures barbares en $\pi/6$ …

Et donc les activités proposées aux élèves doivent mettre au clair ces difficultés.

Troisième étape
Enrouler la droite R sur le cercle trigonométrique. Il faut que les élèves voient qu'un tour complet « fait » 2π, donc qu'un demi tour est de mesure π, un quart de tour $\pi/2$, etc, et que la mesure d'un angle quelconque se réalise par la bijection (l'application au sens de l'action d'enrouler la droite) d'un nombre de R (un point de la droite numérique) sur un point du cercle (voir figure).

Quatrième étape
Lorsqu'on a fait un tour complet, on continue d'enrouler puisque la droite est infinie. A ce moment-là, on retrouve les mêmes points du cercle (donc les mêmes angles) associés à des nombres différents, mais qui ont tous augmenté de 2π.
Et que se passe-t-il si on enroule dans le sens contraire ?
Un point déjà atteint avec un nombre x est atteint de nouveau ; pour voir avec quel nombre négatif, il faut aller jusqu'à un tour complet négatif et revenir, alors il est clair que le nombre négatif qui lui correspond est : $-2\pi + x$ et ensuite que des tours négatifs supplémentaires ne font que rajouter des -2π.

Le radian
Il y a dans cette démarche une connaissance qui n'apparaît pas directement, qui est occultée par la complexité de ce processus, qui est pourtant un savoir essentiel et qui est visé par l'apprentissage : que représente UN radian ?
Et question subsidiaire : pourquoi n'a t-on pas besoin de tout ce cirque pour mesurer les angles en degrés ?

3. Les obstacles et les situations

3.1 Premier obstacle : la double proportionnalité

En effet la longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à la fois à l'angle intercepté et au rayon du cercle. Cette double proportionnalité n'apparaît pas lorsqu'on mesure les angles en degrés au collège, car la mesure en degrés consiste à découper un secteur correspondant à un tour complet en petits secteurs égaux, donc on occulte le problème de la relation entre mesure des angles et des arcs.

Exercice
1. Tracer 2 cercles C et C' de même centre O, de rayons R et R' (on prendra R' > R)
2. Soient M et N deux points du cercle C, tels que mes (MON) = β ($0 < \beta < 90$). M' est le point d'intersection du cercle C' et le la droite (OM) (resp. N' et (ON)).
Montrer que les droites (MN) et (M'N') sont parallèles. En déduire la valeur du rapport
k = M'N'/ MN , en fonction de R et R'.
3. Quelle est la longueur du cercle C ? Du cercle C' ? De l'arc de cercle MN ?
4. En déduire la longueur de l'arc de cercle M'N'.
5. Déterminer une relation entre la longueur d'un arc de cercle et le rayon de ce cercle.

Sur un tableau de proportionnalité cela apparaît de la façon suivante :

longueur arc	$2\pi R$	πR	π	R	?
mesure en radians	2π	π	$\pi/2$	?	x

Le rayon R joue en fait le rôle d'un paramètre ; dans le cas du cercle unité, ce paramètre est fixé à 1, donc longueur de l'arc et mesure de l'angle en radians sont dénotés avec le même nombre… ce qui s'avèrera bien pratique !
On va aussi retrouver cette proportionnalité avec le problème ultra rebattu de la mesure du périmètre du cercle, mais, pour désorienter un peu, je propose de poser aux élèves la situation suivante :

La boite de fromage

Exercice
Prenez le couvercle d'une boîte de camembert (de Bougon pour les irréductibles du chèvre, dont je suis) et agrafez une ficelle sur le côté de la boîte. Par une méthode adéquate repérez le centre du disque ; l'unité de longueur est le diamètre de ce disque. Construisez une bande unité égale à ce diamètre.
Avec la ficelle faites le tour de la boîte, et repérez avec un feutre le point de la ficelle où vous repassez une première fois sur l'agrafe. Déroulez la ficelle ; quelle est la mesure de la longueur de ficelle déroulée, entre l'agrafe et le point marqué au feutre ?

Les élèves sont invités à parier sur cette mesure. Dans les classes de Seconde ou Première, peu d'élèves parient sur π ; mieux même, des étudiants ayant la licence, voire scientifique, ne savent pas tous parier. On vérifie, et le résultat de la vérification évoque quelque chose : bon sang, mais c'est bien sûr ! Dans la classe d'une stagiaire, il y a deux ans, un élève distrait trouve que le diamètre tient deux fois dans la circonférence… mais dans l'autre groupe, un élève dit dès le début : « Arrêtez ! Arrêtez ! C'est π, voyons, c'est π ! » La professeur a cependant demandé de continuer l'expérience… rien ne vaut une connaissance découverte dans les mains, notre cerveau droit est capable d'apprendre beaucoup de choses à notre cerveau gauche !

3.2 Deuxième obstacle : les tours du cercle et la droite réelle

Lorsqu'on demande à un élève de Seconde ou de Première d'enrouler R sur le cercle, en général il voit bien ce qui se passe ; mais lorsqu'on déroule, ça devient parfaitement obscur. Ceci conduit les élèves à dire fréquemment que $\pi/6 = 7\pi/6$ par exemple. C'est-à-dire que les élèves ne distinguent plus le cercle de la droite, et interprètent les mesures uniquement comme les mesures « du cercle ». C'est souvent renforcé d'ailleurs par le fait que les professeurs dessinent le cercle avec, marquées tout autour, les mesures des angles. De même les élèves s'avèrent incapables de résoudre des exercices comme : « $\pi/6$ est une mesure d'un angle A. Quelle est la mesure de A qui appartient à l'intervalle $\{18\pi, 20\pi\}$? » En effet pour comprendre la question, il faut avoir dans la tête les deux référents : le cercle, et la droite réelle. Or les élèves ne peuvent convoquer qu'un référent à la fois, le cercle si la question est posée en termes d'angles, le droite réelle si l'on parle de nombres. Il faut donc les faire *dérouler* après avoir enroulé et leur faire construire…

3.3 Le dépliant touristique des mesures d'angles

Collez ensemble plusieurs feuilles de papier millimétré, prises dans le sens de la longueur ; au milieu de la bande ainsi obtenue, tracez une droite ; placer un point origine. Orientez et graduez l'axe. Placez sur cet axe les mesures des angles remarquables que vous connaissez, entre -4π et $+6\pi$ [1].

3.4 Mais… on rencontre alors le troisième obstacle (didactique, ou tout au moins renforcé par les pratiques didactiques)

Les angles dont on parle dans les exercices sont les angles « remarquables », c'est-à-dire ceux qui correspondent aux fractions de cercle, ceux qui ont été mesurés en degrés par 30, 60 , 90, 120 etc... Une raison en est que dans les manuels, l'un des objectifs du travail sur les angles est d'aboutir à faire reconnaître les dits angles remarquables, et trouver leur mesure en radians (c'est d'ailleurs l'exemple d'un apprentissage qui tourne complètement en rond…). On ne demande quasiment jamais à un élève de répondre à des questions concernant un angle de 1,4 radian, ou de 12 radians ... Il en résulte que les élèves ont deux catégories dans la tête, les nombres d'une part (ceux qu'on connaît, ou avec lesquels on a fini par être plus ou moins familier, comme les rationnels, les décimaux et $\sqrt{2}$ et les « écritures » comme

1 Une partie de ce travail peut être faite à la maison par les élèves.

$\pi/6$, qui ne sont à l'évidence pas des nombres (!) puisque ça concerne les angles. (Les mesures des angles en degrés sont bien des nombres pour les élèves, mais ce sont des *entiers*, ça change tout).
Le dépliant des mesures d'angles ne peut pas servir à faire surmonter cet obstacle si on ne fait reporter sur ce dépliant que des mesures d'angles « remarquables ».

Dans une classe de Première, les élèves ont eu à reporter les mesures d'angles connus ; le professeur, pensant leur simplifier la tâche, leur dit : « On va prendre 6 cm pour reporter π, comme ça on aura moins de mal à reporter toutes les mesures ». Acquiescement des élèves, et report sans problème de toutes les mesures entre 0 et 2π. Les difficultés commencent avec les autres intervalles, d'abord les positifs, par exemple 2π, 4π ; puis les négatifs, et là, malgré l'enroulement de la ficelle R dans le sens négatif, les élèves ont beaucoup de difficulté à faire le rapport entre la symétrie dans R, qui leur est familière, et les mesures comme $- 2\pi + x$.

Dans un premier temps le professeur peut en rester là, avec le dépliant ; enfin, jusqu'à ce qu'il traite les fonctions trigonométriques, et demande aux élèves de reprendre le dépliant pour tracer les représentations graphiques des fonctions sinus et cosinus, **dans un repère orthonormé**. Alors là, problème ! On a pris 6 cm pour représenter π, donc comment trouver 1 ? Quelle peut bien être l'unité ? Le professeur surpris : pour lui toutes les unités se valent ! Mais les élèves sont déboussolés. Après recherche, on finit par trouver l'unité, et un élève exprime, sur le ton d'une immense découverte : « alors **c'est le même UN** ! ». Et donc on peut aussi, sur l'axe des abscisses du dépliant, placer 1 radian, 2 radians, 3,8 radians…
Le professeur devrait-il laisser les élèves prendre 1 cm comme unité (ce qu'ils font avec une belle constance), et placer π à 3,1 cm ? Cela n'aurait pas le même effet. Les élèves feraient laborieusement les calculs pour placer leurs mesures comme $\pi/6$, $2\pi/3$ ... Au moment de mettre l'unité sur l'axe des ordonnées, ils l'auraient mise à 1 cm tout naturellement, et la question n'aurait pas émergé. Il se vérifie une fois de plus que l'un des principes de la théorie des situations est bien valide : si l'on veut qu'une connaissance soit l'enjeu d'une situation, il faut présenter la situation sans la connaissance et l'exiger comme une nécessité pour faire autre chose ; et non pas présenter la connaissance et en demander les conséquences. Ainsi qu'il était énoncé dans Bloch (2005) [2]:

> *Le jeu retourné est assez simple à imaginer : il consiste à imposer des contraintes sur l'état final, et à demander les déterminations sur les objets du milieu pour que [l'objet mathématique final visé] vérifie les conditions demandées. Ceci rend alors **nécessaires** les connaissances en jeu, puisqu'on ne peut pas répondre sans passer par les spécifications de propriétés conditionnant le résultat.*

---

2 Bloch I. (2005) 'Dimension a-didactique et connaissance nécessaire : un exemple de 'retournement' d'une situation' *Sur la théorie des situations didactiques* : *Questions, réponses, hommage à Guy Brousseau*, p. 143-152, M.H.Salin, P.Clanché et B.Sarrazy Eds., Grenoble : La Pensée Sauvage.

La connaissance fondamentale, c'est bien sûr ce qu'exprime l'élève : **c'est le même UN** ! Lorsqu'on mesure les angles en radians, on mesure les arcs de cercles et les segments du plan **avec la même unité**. Suite de la boîte de fromage (au goût de chacun le fromage) : prenons maintenant une longueur de ficelle égale au rayon du disque, ce qui est facile puisqu'on connaît le diamètre, et entourons cette ficelle sur le pourtour de la boîte : quelle est la mesure, en radians, de l'angle ainsi défini ? Et les élèves sont maintenant d'accord pour dire que la mesure est 1 radian. Alors quelle est la mesure, en radians, de l'angle qu'on obtient en reportant une ***corde*** de même longueur que le rayon ? Et bien PAS un radian, mais $\pi/3$ et là les élèves savent que cela ne fait pas 1.

Et les degrés ? On peut maintenant comprendre qu'un degré n'est qu'une fraction arbitraire du tour complet, et donc ne mesure pas les cercles avec la même métrique que les celle utilisée pour les droites. Or – mais la démonstration est hors de portée d'un élève de Première, elle peut être tentée en Terminale - π est irrationnel [3], donc la mesure du cercle aussi ; et donc, UN degré est… une mesure irrationnelle, alors que les angles ont pourtant des mesures sympathiques, 30°, 45°… Quelle déception ! Et par contre, UN radian est une unité "normale", bref, le UN que l'on connaît, ouf !

Les élèves sont maintenant prêts à travailler dans un avenir radian…

3 La transcendance de π, c'est une autre affaire, hors de portée de l'enseignement secondaire !