GOMMETTES ET ETIQUETTES,
DES PROBLEMES POUR CHERCHER ?

Yves Thomas
IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes

Dans les documents d'accompagnement des programmes de mathématiques de 2002 pour le cycle 3, le texte intitulé « Des problèmes pour chercher »[1] incite à consacrer des temps à des situations de recherche dont le but n'est pas l'introduction d'une notion ou d'un concept nouveau. Dans ces situations, la recherche constitue la propre finalité, l'objectif est de développer les capacités à chercher. On peut aussi penser que la pratique de problèmes de recherche peut contribuer à modifier la conception des mathématiques chez les élèves. Ce document d'accompagnement donne les caractéristiques suivantes du problème pour chercher :

- *[…] Les élèves doivent pouvoir s'approprier facilement la situation et se représenter la tâche pour s'y engager avec leurs connaissances antérieures. La difficulté doit se situer non dans la compréhension de la situation, mais dans les moyens de répondre à la question posée. […]*
- *Le problème doit être « consistant », c'est-à-dire présenter une certaine « résistance ». Il ne doit pas donner lieu à une réponse qui résulte d'un traitement immédiatement reconnu. […]*
- *Donner un problème de recherche, c'est lancer un défi. Il est important que les élèves s'approprient le problème et qu'ils aient envie de relever le défi. […]*
- *La validation de la solution doit être le plus possible à la charge des élèves. Ils doivent pouvoir se rendre compte par eux-mêmes du bien-fondé ou non de leur réponse, par l'échange d'arguments destinés à défendre ou contredire une proposition, par des contrôles tout au long de leur recherche et, si possible, par une vérification, à la fin, sur la situation elle-même.*

Aussi intéressant que soit le texte d'accompagnement des programmes, et malgré l'effort d'illustration par des exemples, la diffusion de ce type de pratique se heurte, entre autres, à la difficulté de trouver des problèmes correspondant aux critères rappelés ci-dessus.
En effet, si l'idée de problème pour chercher ne correspond pas à une catégorie de problèmes, mais plutôt à une fonction qui leur est assignée, les manuels et autres

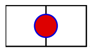
[1] *Les problèmes pour chercher*, Documents d'accompagnement des programmes de mathématiques, pp 7–14, Scéren (2002).

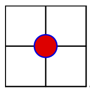
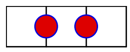
documents facilement accessibles aux enseignants ne contiennent pas ou peu de problèmes pouvant convenir à une situation de recherche.

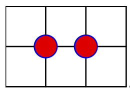
Un groupe de l'IREM des Pays de la Loire, piloté par Magali Hersant, est consacré aux problèmes pour chercher. Il s'est donné entre autres tâches celle de proposer et d'analyser quelques problèmes originaux.
Ces problèmes ont été testés dans les classes de CM1 ou CM2 de Catherine Argant (St Hilaire de Rietz, 85) Bertrand Artignan (Nantes) Geneviève Dron (Nantes) Hervé Petiteau (St Herblain, 44) et Mireille Petiteau (Tréllières, 44).
Nous vous présentons ici deux des problèmes proposés dans ces classes. Le lecteur pourra aussi se référer à Bessot et al (1985) et Godot (2006) afin d'appréhender d'autres situations mettant en place une problématique de recherche chez les élèves.

Présentation des problèmes

Les gommettes

On assemble des carrés de carton tous identiques à l'aide de gommettes.
Avec une gommette, on peut assembler deux carrés comme ceci : .

On peut aussi en assembler quatre comme ceci : .
Avec deux gommettes, on peut assembler trois carrés comme ceci : 

On peut aussi en assembler six de la façon suivante : .

Essayez d'assembler le plus possible de carrés avec 6 gommettes.

Les étiquettes

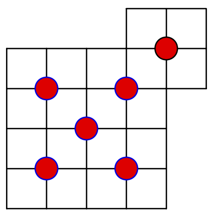
On dispose d'un rectangle dessiné sur papier quadrillé.
Sa longueur est de 24 carreaux, sa largeur de 17 carreaux.
On veut découper dans ce rectangle des étiquettes rectangulaires de 7 carreaux sur 5.
Essayez de découper le plus possible d'étiquettes.

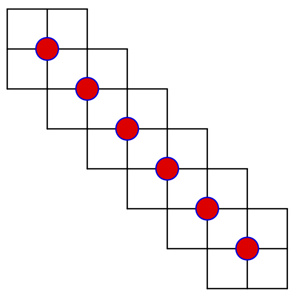
Nous vous engageons vivement à prendre le temps de chercher vous-mêmes ces problèmes avant de poursuivre.

Solution des problèmes

Gommettes

Après quelques essais, on s'aperçoit qu'il est possible d'assembler 19 carrés avec 6 gommettes par exemple, comme indiqué ci-contre.





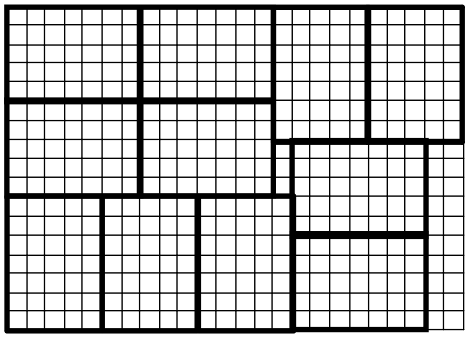
Se pose alors la question de savoir s'il est possible d'assembler plus de 19 carrés.

La réponse est non : montrons-le.
Il est clair qu'avec la première gommette on peut assembler quatre carrés au plus.
La deuxième gommette peut également assembler quatre carrés, mais pour que tous les carrés soient assemblés en un seul bloc, l'un des quatre au moins doit faire partie du bloc déjà en place.
La deuxième gommette permet donc d'ajouter au maximum trois carrés à l'ensemble.
Il en est de même pour chacune des gommettes suivantes.
Le nombre maximum de carrés que l'on peut assembler avec 6 gommettes est donc :
$4 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 19$.
Cette preuve n'est pas entièrement satisfaisante. En effet, on ne se pose pas la question, pourtant fondamentale, de savoir si tous les assemblages de carrés peuvent se construire ainsi de façon progressive gommette par gommette. Elle nous paraît cependant largement suffisante et acceptable à l'école élémentaire.

Étiquettes

La grille rectangulaire à découper contient $17 \times 24 = 408$ carreaux
Chaque étiquette contient $5 \times 7 = 35$ carreaux.
$12 \times 35 = 420$, on ne peut donc pas découper 12 étiquettes.
$11 \times 35 = 385$, l'aire du papier disponible est donc supérieure à celle nécessaire pour découper 11 étiquettes, ce qui ne prouve pas qu'il est possible de les découper effectivement.
Imaginons par exemple une bande longue de 102 carreaux et large de 4 carreaux. Son aire est la même que celle du rectangle 24×17, on ne peut pourtant découper aucune étiquette dans cette bande.

Un dessin des étiquettes serait une manière de conclure.
Après quelques essais, on obtient une disposition comportant 11 étiquettes, par exemple celle-ci.
On a réussi à découper 11 étiquettes et on sait qu'il est impossible d'en découper 12, le plus grand nombre d'étiquettes que l'on peut découper est donc 11.



Analyse des problèmes

Caractéristiques communes aux deux problèmes

Il s'agit de problèmes d'**optimisation**. Pour être résolus entièrement, ils demandent de combiner deux approches :

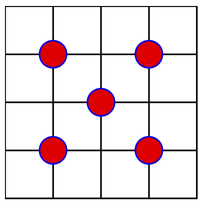
- une approche empirique, expérimentale, consistant à assembler effectivement (ou à représenter) les gommettes ou à placer les étiquettes ;
- une approche que nous appellerons ici « déductive » consistant à montrer qu'il est impossible de faire mieux que telle valeur. La recherche d'un optimum requiert un raisonnement spécifique : il s'agit de rechercher une preuve de l'impossibilité de faire mieux. Nous ne développerons pas ici tous les aspects de ce type de raisonnement, mais nous l'illustrerons sur des exemples.

Il s’agit pour les élèves de se dégager des exemples et de raisonner en faisant appel à des connaissances de portée générale.
C’est le cas dans le problème « Étiquettes » quand un élève a constaté qu’après avoir placé 11 étiquettes, il reste 23 carreaux inutilisés et affirme qu'il n'est donc pas possible de réaliser une étiquette supplémentaire qui nécessiterait 35 carreaux.
C’est aussi le cas quand un élève affirme d’emblée qu’on ne peut pas assembler plus de 24 carrés avec 6 gommettes, puis qu’on ne peut en assembler que 4 avec une gommette.

Ces deux approches n’ont pas lieu dans un ordre déterminé : dans les solutions que nous avons présentées, l’approche « déductive » vient en premier pour « Étiquettes », l’approche empirique vient en premier pour « gommettes ».
Les deux approches ne sont pas nécessairement successives, la recherche peut osciller de l'une à l'autre. Dans le problème « Gommettes », c’est parfois la découverte de la disposition en escalier (figure de droite) qui met sur la voie de la preuve.
Pour « étiquettes », le fait que le nombre de carreaux disponibles soit supérieur à celui de 11 étiquettes ne prouve nullement qu'il soit possible de les placer effectivement, mais cela constitue une incitation à tenter de les placer.

Le choix des valeurs numériques

Le problème « Gommettes » n’est pas très sensible à la valeur numérique choisie, cependant 6 nous semble une bonne valeur. En effet, les dessins peuvent être réalisés rapidement sur papier quadrillé. Par ailleurs, avec 5 gommettes, une des façons possibles d’atteindre le maximum de 16 est représentée ci-contre. Indiquons que les enfants peuvent faire des liens peu pertinents avec l’aire ou le périmètre de la figure, ce qui rend plus difficile l’accès à la preuve que 16 est bien le maximum.



Le problème « Étiquettes » est beaucoup plus instable si l’on modifie les valeurs numériques.
Voyons par exemple ce qui se passe si, en conservant des étiquettes de 5×7, on modifie les dimensions du rectangle à découper.

Si l’une des dimensions du rectangle est multiple de 7 et l’autre multiple de 5, il sera facile de remplir entièrement le rectangle. Par exemple, un rectangle de 21×20 se découpe aisément en 12 étiquettes de 5×7.

Pour d’autres valeurs, le nombre d’étiquettes que l’on peut découper n’est pas égal au quotient euclidien du nombre total de carreaux par 35.
Pour un rectangle de 24×18, qui contient 432 carreaux on a $432 = 12 \times 35 + 12$, mais bien que le nombre de carreaux disponibles soit suffisant pour 12 étiquettes, on ne peut en placer que 11.

On peut évidemment utiliser en classe un problème analogue à celui que nous proposons ici avec des valeurs différentes, mais il faut savoir que le problème risque d’en être modifié de façon considérable. Ce qui est dit ici du problème « Étiquettes » risque fort de ne plus être pertinent.

Passation en classe

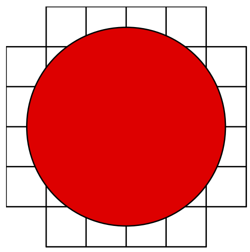
Des choix décisifs pour la présentation des problèmes aux élèves

Des consignes brèves mais imprécises

Dans les classes où ces problèmes ont été testés, les consignes ont été fournies oralement, de façon très proche des encadrés du début de cet article.
Pour « Étiquettes » le maître montre les grilles 24×17 qu'il va distribuer et dessine au tableau une étiquette de 7 carreaux sur 5.
Pour « Gommettes », les exemples ont été dessinés au tableau.
Seul l'aspect empirique est évoqué : il s'agit de produire des dessins représentant des dispositions d'étiquettes ou de carrés assemblés par des gommettes. La tâche est facile à se représenter : cela permet une mise en action immédiate pour la plupart des élèves.
Que se passerait-il si la consigne de départ était « quel est le plus grand nombre de carrés que l'on peut assembler avec 6 gommettes ? » et non « essayez d'assembler le plus possible de carrés avec 6 gommettes » ?
Nous faisons l'hypothèse suivante : les élèves qui comprendraient toute la portée de la question (probablement peu nombreux) pourraient avoir du mal à se mettre en action, et les autres se contenteraient sans doute d'une recherche d'exemples sans mesurer que cette tâche ne correspond qu'à une partie de la consigne. C'est pourquoi la détermination du maximum n'est pas évoquée dans la consigne de départ et n'est introduite que quand la recherche d'exemples a atteint un certain palier.

Les consignes que nous proposons sont assez imprécises. C'est contraire à une certaine représentation des mathématiques où l'on recherche des énoncés dénués de toute ambiguïté.
Dans la présentation que nous proposons, les enseignants sont amenés à apporter très rapidement, après les premiers essais, des précisions qu'il nous semble vain de fournir dès le départ. Des informations simultanées trop nombreuses pourraient en effet rendre la mise en recherche immédiate plus difficile, sans pour autant être assuré que toutes les ambiguïtés sont levées.
Par ailleurs, les échanges nécessaires pour clarifier ce qui est accepté et ce qui ne l'est pas sont grandement facilités en prenant comme exemples les premières productions des élèves.

Quelle est la taille des gommettes ?



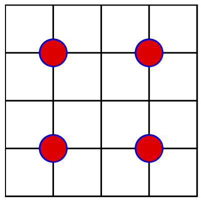
Il semble a priori qu'elle n'ait pas d'importance… jusqu'à ce qu'un élève propose d'assembler un grand nombre de carrés avec une seule gommette comme le montre le dessin ci-contre.
Félicitons le très inventif auteur de cette proposition !

On conviendra d'utiliser uniquement des petites gommettes (sensiblement plus petites que les carrés) car le problème perd son intérêt avec des gommettes de taille trop importante. Il serait dommage de prétendre devant les élèves que la limitation de la taille des gommettes était implicitement contenue dans la consigne de départ. D'une part, parce qu'elle n'y était pas, et si nous voulons développer l'honnêteté intellectuelle chez nos élèves, nous devons en donner l'exemple. D'autre part, l'exercice d'une pensée divergente, la recherche de cas limites est souvent fructueuse en mathématiques et il serait regrettable de les décourager.

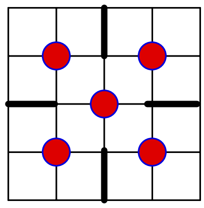
C'est une situation fréquente en mathématiques : la rencontre de cas difficiles, de contre-exemples à une conjecture que l'on croyait vraie est l'occasion de préciser les définitions des concepts en jeu.
Cette attitude de mise en valeur de tout ce qui contribue à affiner la règle reste de mise pour les questions suivantes.

Comment faut-il assembler les carrés ?

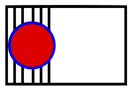
Certains élèves considèrent qu'il suffit qu'aucun petit carré ne soit isolé.
Dans cette interprétation, l'assemblage ci-contre est correct, et il est clair qu'avec 6 gommettes on peut assembler 24 carrés. Le problème perd alors tout intérêt. C'est l'occasion de préciser que l'on veut que tous les carrés soient assemblés en un seul bloc.



D'autres ont une interprétation beaucoup plus restrictive et considèrent que l'assemblage ci-contre n'est pas correct, parce que chaque trait gras correspond à une limite entre deux carrés qui se touchent sans être assemblés l'un à l'autre par une gommette.
Cette interprétation restrictive ne change pas la réponse au problème puisque la disposition « en escalier » est acceptable même dans cette vision. Il nous semble cependant préférable de se contenter de l'interprétation suivante :
« Les carrés doivent être réunis en un seul bloc. Si on en tire un, ils doivent tous venir. »

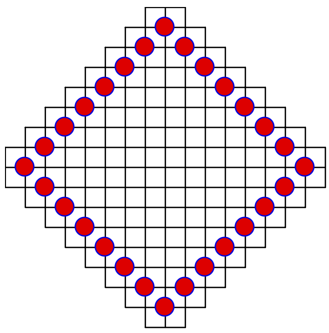


Certains demanderont s'il est possible de superposer les carrés, ce que l'on refusera. On pourrait assembler autant de carrés que l'on veut avec une seule gommette en négligeant l'épaisseur du papier, et le problème changerait de nature en tenant compte de l'épaisseur.



On acceptera en revanche que les carrés soient assemblés « en quinconces ». On constatera ensuite que cela n'apporte rien de bien intéressant (mais encore fallait-il se poser la question).

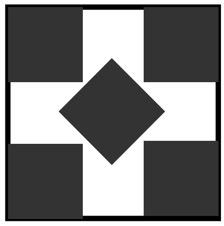
Pour montrer à quel point l'idée naïve d'assembler plusieurs carrés en un seul bloc mérite d'être précisée, voyons un dernier exemple (qui ne peut pas se rencontrer avec seulement 6 gommettes).
Sur le dessin ci-contre, les carrés de la zone centrale ne sont pas collés par des gommettes. Cependant, si l'on glisse sur le plan de la table un des carrés, l'ensemble suit. Ce n'est que si l'on soulève un des carrés (en passant du plan à l'espace) que l'ensemble se dissocie.
Doit-on alors considérer que tous les carrés de l'illustration sont assemblés en un seul bloc ?



Si l'on répond oui à cette question, le problème n'est plus du tout le même que celui proposé aux élèves, mais n'en est pas moins intéressant. La disposition dessinée permet-elle d'assembler le plus possible de carrés dans cette optique ?

Pour « Étiquettes », les interprétations possibles sont moins nombreuses

Nous avons toujours posé le problème en distribuant des grilles quadrillées de 24×17, aussi il n'est pas apparu de questions sur la taille des carreaux.



Peu d'élèves demandent si les étiquettes sont obligatoirement tracées en suivant les lignes du quadrillage, et ceux qui l'envisagent renoncent rapidement, probablement parce qu'il est plus simple de suivre les lignes.
Pourtant, l'idée de ne pas les suivre est pertinente avec d'autres dimensions. Cela permet par exemple, comme le montre le schéma, de découper 5 étiquettes carrées de côté 5 dans une feuille carrée de côté 14, ce qui est impossible si les côtés des étiquettes sont tous parallèles à ceux de la feuille.
Bien entendu, l'inclinaison des étiquettes ne permet pas de placer une douzième étiquette dans le problème proposé ici. Le raisonnement sur les aires suffit à le montrer, mais les élèves ne peuvent pas le savoir a priori.

Certains élèves s'imposent d'orienter toutes les étiquettes de la même façon. Là encore, cela n'a rien d'absurde (cela conduit à la meilleure solution quand l'une des dimensions du rectangle est multiple de 7 et l'autre de 5), mais cela appauvrit considérablement le problème. Il importe donc, lors d'une première mise en commun ou par des interventions individuelles, de leur faire remarquer rapidement que cela n'est pas imposé par la consigne.
D'autres élèves, moins nombreux, s'imposent de laisser un espace entre les étiquettes. Il importe là aussi de leur signaler rapidement qu'ils n'y sont pas obligés.

Un déroulement en trois temps

Nous avons dit précédemment que, dans la recherche d'un problème d'optimisation, l'aspect empirique de recherche d'exemples et l'aspect déductif (prouver que l'on ne peut pas faire mieux) ne sont pas obligatoirement successifs, ni même clairement séparés.
Nous avons cependant choisi, dans les classes, de découper le travail en deux temps distincts.
Comme nous l'avons signalé plus haut, cela facilite la mise en action immédiate des élèves, mais il nous semble aussi que la séparation dans le temps aide à mettre en évidence la différence de nature entre les deux approches expérimentale et « déductive ».

Premier temps : recherche d'exemples

Les élèves doivent proposer des exemples avec le plus possible de gommettes ou d'étiquettes, sans que l'idée d'un maximum soit évoquée.
Comme cela a déjà été souligné, choisir comme consigne initiale « placer le plus possible de… » et non « combien peut-on placer de… » nous paraît fondamental pour aider les élèves à s'approprier le problème.
Les premières mises en commun ne portent que sur la comparaison des différentes figures produites. Sont-elles conformes à la consigne (c'est l'occasion comme on l'a vu plus haut de préciser la consigne) ? Peut-on les modifier pour les améliorer ?

Le travail n'est pas présenté comme une compétition mais comme une recherche collective où il est non seulement autorisé, mais conseillé de s'inspirer des idées des autres. Le but est de trouver ensemble le meilleur résultat possible, ce qui n'empêche pas une certaine émulation. La constitution de petits groupes de travail ne semble pas indispensable à ce stade, les interactions avec les voisins suffisent à entretenir la recherche.

Certains enfants, bien que la consigne n'y incite pas, s'engagent d'emblée dans un calcul :

- on peut assembler quatre carrés avec une gommette, donc 24 avec 6 gommettes ;
- le grand rectangle contient 408 carreaux, chaque étiquette en contient 35, $35 \times 11 = 385$ donc on peut découper 11 étiquettes.

Le maître ne réfute ni ne valide ces réponses. Il demande aux élèves concernés d'illustrer leurs conclusions par des exemples : *« Ah bon ? Fais un dessin avec 24 carrés »* (ou 11 étiquettes).

Deuxième temps : recherche d'une preuve

Quand la classe ne progresse plus dans sa recherche d'exemples (les meilleures solutions ont alors probablement été trouvées), le maître provoque une interruption et pose la question suivante : *« Faut-il continuer à chercher ? »*. Il précise qu'il y a trois possibilités :

- il est possible de faire mieux, il faut simplement un peu de patience et d'astuce, et dans ce cas, il est intéressant de poursuivre ;
- il est impossible de faire mieux, et alors autant arrêter tout de suite ;
- on ne sait pas s'il est possible de faire mieux.

Les élèves sont invités à ne plus dessiner pour chercher des exemples, mais à réfléchir par petits groupes à cette question pendant quelques minutes. On procède ensuite à une nouvelle mise en commun. Au cours de celle-ci, le maître demande à ceux qui pensent qu'il est impossible de faire mieux que 19 carrés (ou que 11 étiquettes) de s'exprimer en premier. Il reformule si nécessaire les explications des élèves, mais sans les reprendre à son compte : *« Je vais essayer de redire tes explications avec mes mots pour être certain de bien comprendre, tu me diras si j'ai bien compris »*. Les élèves qui ne sont pas d'accord s'expriment à leur tour, le maître étant seulement garant des règles du débat.

Dans toutes les classes de CM où nous avons expérimenté ces problèmes, des argumentations proches de celles fournies au début de ce texte ont été produites par quelques élèves. Cela ne permet évidemment pas de juger du degré de compréhension de ces preuves par les autres élèves.

Troisième temps : conclusion

La situation typique à la fin d'une recherche sur « Gommettes » ou « Étiquettes » est la suivante :

- des dispositions avec 19 carrés ou 11 étiquettes ont été trouvées, certains élèves ont formulé de façon plus ou moins adroite une preuve qu'il est impossible de faire mieux, preuve éventuellement reformulée par le maître ;
- quelques élèves ne se déclarent pas convaincus et pensent qu'il faut continuer à chercher.

Faut-il s'en tenir là ? Faut-il au contraire clore la séance en formulant une conclusion claire reprise par le maître ?

Dans cette situation, le questionnement nous paraît plus important que la réponse. Nous considérons le fait que certains élèves très minoritaires s'autorisent à dire qu'ils ne sont pas convaincus comme un indice d'un véritable débat scientifique (et cela même s'il se trompent en pensant par exemple qu'avec une autre disposition des 11 étiquettes, il pourrait rester plus de carreaux pour en loger une douzième).

Il nous semble intéressant de profiter de problèmes dont la réponse a peu d'importance

dans l'apprentissage de notions ou de techniques spécifiques pour cultiver le doute.
Quand un maître enseigne la technique de la multiplication, il cherche évidemment à ce que ses élèves comprennent ce qu'ils font (pourquoi par exemple décaler vers la gauche les sommes partielles ?). Lorsqu'un élève ne comprend pas, le maître doit parfois se résigner à user d'un argument d'autorité. Compris ou non, il « faut » utiliser la technique correcte.
Dans le cas des problèmes pour chercher, l'absence d'enjeu d'apprentissage en termes de connaissances notionnelles est donc un atout si l'on veut privilégier le raisonnement.

Cependant, les enfants ne sont pas très satisfaits d'une situation d'incertitude et exercent une forte pression (*« alors, dis-nous qui a raison ! »*) face à laquelle nous avons adopté l'attitude suivante. Le maître ne donne pas son point de vue immédiatement et il ne valide pas les preuves fournies. Mais quelques jours plus tard, par exemple à l'occasion d'une autre séance de recherche, il rappelle le problème et la preuve fournie et exprime son accord avec celle-ci (si elle était correcte).

Éléments de bilan et pistes de réflexion

Des éléments positifs

Tous les enseignants des classes où ces problèmes et quelques autres ont été testés soulignent que les élèves se sont investis très fortement, allant jusqu'à poursuivre à la récréation ou chez eux quand le problème n'était pas clos. Outre les effets habituels de toute innovation, une des raisons nous semble être que dans la phase recherche d'exemples, tous les élèves, même les plus « modestes », sont en mesure de produire un résultat juste. Si je ne place que 8 étiquettes, je « n'ai pas faux » pour autant, ce qui renforce notre choix d'entrer dans les problèmes par la recherche d'exemples.

Par ailleurs, dans l'unique classe où nous avons travaillé avec 7 problèmes d'optimisation différents à environ deux semaines d'intervalle, beaucoup d'élèves avaient fort bien repéré l'articulation chronologique entre la phase de recherche d'exemples et celle de recherche d'une preuve et savaient expliciter cela : *« maintenant, on va se demander si c'est impossible de faire mieux »*. Peut-être certains s'appuyaient-ils plus sur des repères chronologiques que sur l'articulation logique mais, leurs reformulations de la question nous laissent penser que l'articulation logique des deux phases était reconnue par une part importante des élèves.

Travailler l'idée de preuve à l'école élémentaire, est-ce bien utile ?

Le travail sur l'argumentation est central au collège, et on sait à quel point il est difficile pour beaucoup d'élèves.
Il nous semble que les difficultés rencontrées au collège sont accentuées par le fait que les élèves, qui n'ont rarement (ou jamais) été confrontés auparavant à l'idée de preuve, sont presque immédiatement mis en demeure de rédiger eux-mêmes des preuves très formalisées que sont les démonstrations de géométrie. C'est un peu comme si l'on demandait à des élèves de l'école élémentaire de rédiger un conte sans leur avoir jamais raconté d'histoires auparavant.

Des problèmes tels que « Gommettes » et « Étiquettes » permettent de se confronter à la preuve sans exigence prématurée de rédaction individuelle ou de formalisation.
En ce sens, ils peuvent être une approche intéressante, et contribuer à faire découvrir aux élèves les points suivants :

- C'est l'argument qui compte, pas la personnalité ou le degré de conviction de celui qui l'énonce, ni le nombre de personnes qui se déclarent d'accord.
- Ne pas réussir à faire quelque chose ne prouve pas que cela est impossible.
- Pour prouver que c'est impossible, une argumentation à caractère général est nécessaire.
- Pour prouver que quelque chose est possible, il suffit de le faire.
- Tous les problèmes de mathématiques ne se résolvent pas en posant des opérations.
- Une opération n'est pas en soit une preuve, il faut expliciter clairement ce que l'on calcule (par exemple : ce n'est pas parce qu'il y a plus de carreaux que ce qui est nécessaire pour placer 11 étiquettes que l'on peut effectivement les placer).

Clore ou ne pas clore ?

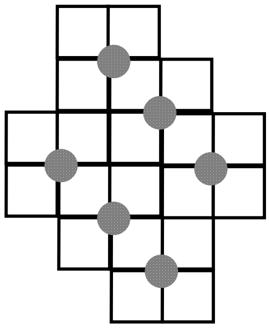
Dans certaines classes, nous avons posé le problème des étiquettes dans une version légèrement différente, la grille proposée ayant une largeur de 18 carreaux et non 17.
Dans cette version, il est possible de placer 11 étiquettes, par exemple en reprenant la disposition utilisée sur la grille plus petite. Le décompte du nombre de carreaux montre qu'il est impossible de placer 13 étiquettes. On peut donc seulement conclure que 11 est possible, que 13 est impossible, mais que pour 12 on ne sait pas. Cette variante a pour avantage de mieux marquer la nécessité des deux approches (par les exemples et par le raisonnement). En effet, dans la version décrite dans ce texte, quelques élèves restent persuadés que leur calcul initial sur le nombre de carreaux répondait entièrement au problème.
D'autre part, comme le problème n'est pas clos, le maître peut engager les élèves volontaires à poursuivre leurs recherches sur leur temps personnel, ce que certains font volontiers.
En revanche, certains élèves sont très fortement perturbés par un problème mathématique que l'on conclut sans en avoir une solution complète, mais n'est-ce pas là une occasion de leur donner une idée plus juste de ce que sont les mathématiques ?
Notre groupe réfléchit actuellement à une articulation de plusieurs problèmes dont certains pourraient être entièrement résolus par les élèves et d'autres resteraient partiellement ouverts.

Prudence

Répétons qu'il ne s'agit surtout pas d'anticiper les objectifs du collège, encore moins ses exigences, mais de confronter les élèves à de véritables questions mathématiques.
En ce sens, l'attitude du maître est au moins aussi importante que le choix du problème et il peut manquer totalement l'objectif à vouloir trop bien faire.
Ainsi, si le maître veut obtenir l'adhésion de tous aux solutions trouvées par certains élèves, il y parviendra (au moins en surface), mais probablement en renonçant à ce qui est véritablement visé.
À titre d'exemples, pour mettre en évidence la difficulté des questions posées aux élèves et les limites de ce que l'on peut attendre, voici des éléments de deux questionnaires posés à une classe de CM1-CM2 et à une classe de CM2 ayant respectivement travaillé sur « Gommettes » et sur « Étiquettes ».

Gommettes

Quatre jours après la séance, le maître lit aux élèves la lettre dans laquelle figure ce qui suit.



> *J'ai retrouvé dans mes papiers un dessin fait par un élève de 6ème, qui disait avoir assemblé 20 cartons avec 6 gommettes.*
> *J'aimerais que vous disiez <u>avant de le regarder</u> ce que vous en pensez.*

Il pose aux élèves, sans leur montrer le dessin, la question : « *est-il possible que l'élève de 6ème ait pu coller 20 cartons avec 6 gommettes ?* »

Réponses : 6 oui 17 non 1 ne sait pas

À ce stade, rien d'étonnant : le jour de la séance « gommettes », trois élèves avaient déclaré ne pas être convaincus par la preuve selon laquelle on ne pouvait pas assembler plus de 19 carrés. Il semble y avoir un peu de déperdition mais un taux encore assez fort de conviction.

Le maître projette alors au tableau la production de l'élève de 6ème fictif et pose la question : « *en regardant le dessin, dites s'il a réussi à assembler 20 cartons avec 6 gommettes* ».

Réponses : 13 oui, il a réussi 9 non 2 ne sait pas.

Étiquettes

Une semaine après avoir travaillé « Étiquettes », les élèves ont à répondre au questionnaire qui suit.

21 élèves ont répondu qu'il est impossible de placer 12 étiquettes, aucun que c'est certainement possible, et 3 qu'on ne sait pas.

La semaine dernière, nous avons réussi à placer 11 rectangles de 5 x 7 dans la grille de 17 x 24.
Personne n'a réussi à en placer 12.

Je mets une croix devant la phrase que je trouve vraie :

	Si on continuait à chercher plus longtemps, ou si on demandait à des mathématiciens professionnels, quelqu'un réussirait certainement à placer 12 rectangles dans la grille de 17 x 24
X	Même des mathématiciens professionnels ne peuvent pas placer 12 rectangles dans cette grille, c'est impossible.
	On ne sait pas si c'est possible de placer 12 rectangles dans cette grille.

J'explique ma réponse :

Je pense que ce n'est pas possible parce que il y a 408 carré et quand on multiplie :
11x 35 = 385 il y en a assez pour rentrer dedan. et
12x35 = 420 c'est trop on ne peut pas tous les rentrer.

J'explique ma réponse : Parce que la grille contient 408 carreaux et qu'en multipliant les rectangles qui font 35 carreaux et 11 x 35 = 385 donc c'est possible de mettre 11 rectangles mais il est impossible de mettre 12 rectangle car 12 x 35 = 420.

nse : Quand on a placés 11 rectangles, il nous reste 26 carreaux
Mais comme un rectangle se composent de 35 carreaux,
c'est impossible

Parce qu'il n'y a pas assez de carreaux

J'explique ma réponse : 35+35+35+35+35+35+35+35+35+35+35+35= 420 or nous avons 408 carreaux ce n'est pas possible

Je pense que c'est impossible de faire plus de 11 rectangles car 5 ou 7 n'est pas multiple de 108

Un élève de la classe a fait un calcul pour le prouvé.

Parceque 11 déja c'est très dur à faire et 12 impossible!

J'explique ma réponse : Toute la classe a trouvé 11 et aucun(e)s élèves a trouvées 12!!!

Si l'on observe les explications fournies (donner une explication n'était pas obligatoire), on trouve des explications qui montrent que la preuve a été bien comprise puisqu'elle est reformulée de façon personnelle, mais aussi une argumentation sur les multiples sans rapport avec la question, un argument d'autorité, et quelques formulations montrant que leurs auteurs ne différencient pas l'aspect empirique (on n'y arrive pas) de l'aspect logique (c'est impossible).

« Gommettes » et « Étiquettes » sont-ils des problèmes pour chercher au sens du document d'accompagnement des programmes ?

« Gommettes » et « Étiquettes », et surtout la façon dont nous proposons de les utiliser, satisfont clairement aux trois premiers critères donnés par le document d'accompagnement et rappelés au début de cet article. Le quatrième critère est plus délicat à réaliser. En effet, si les élèves peuvent valider par eux mêmes la conformité de leurs productions aux règles données, il n'en est pas de même pour la preuve d'ordre général indispensable pour clore un problème d'optimisation.

Pour autant, nous pensons que le travail proposé ici est totalement dans l'esprit du document officiel dans la mesure où nous faisons appel aux capacités de raisonnement et d'argumentation des élèves, en évitant autant que faire se peut qu'une question soit close par la seule parole du maître. C'est la nature même de la question posée qui empêche une validation empirique de la réponse fournie puisqu'elle vise à la généralité. C'est là toute sa difficulté, mais aussi tout son intérêt.

Nous ne pensons pas que les difficultés mises en évidence par ces productions doivent nous conduire à renoncer à travailler l'idée de preuve.

Il serait d'ailleurs bien naïf d'espérer qu'après une ou deux occasions de travail sur la preuve, chaque élève en ait perçu tout l'intérêt. Insistons encore une fois sur le fait que l'objectif n'est pas que les élèves sachent rédiger individuellement une preuve, encore moins une démonstration répondant aux règles du genre. Familiariser avec une problématique ne doit pas conduire à sous-estimer les difficultés, moins encore à avoir des exigences prématurées.

Références bibliographiques

BESSOT A., CHEVROT C., EBERHARD M. (1985) Arithmétique en CE1 à partir d'une situation-problème : "Les aimants". *Grand N* n°37, pp 29-50, IREM de Grenoble.

ERMEL (1999) *Vrai ? Faux ? On en débat ! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3*. INRP Didactique des disciplines.

GODOT K. (2006) La roue aux couleurs : une situation recherche pour apprendre à chercher dès le cycle 3. *Grand N* n°78, pp 31-52, IREM de Grenoble.

HOUDEMENT C. (2003) La résolution de problème en question. *Grand N* n°71, pp 7-23, IREM de Grenoble.

LEPINE L. (1996) Tout problème ouvert n'engage pas nécessairement une bonne recherche. *Grand N* n°60, pp43-56, IREM de Grenoble.

IUFM des Pays de la Loire et IREM de Nantes (2006) *Des problèmes pour chercher à l'école primaire*.

Numéro spécial « Points de départ » de *Grand N*.