Le musée de « petit x »

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE,

PAR M. CHASLES,

Membre de l'Institut, professeur de Géométrie supérieure à la Faculté des Sciences de Paris; membre de la Société royale de Londres; membre honoraire de la Société royale d'Irlande, de la Société philosophique de Cambridge, de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg; associé de l'Académie royale des Sciences de Bruxelles; correspondant de l'Académie pontificale des *Nuovi Lincei* de Rome; membre de l'Académie royale de Berlin, de l'Académie royale des Sciences de Turin, de l'Académie royale des Sciences de Naples, de l'Académie royale des Lincei de Rome, de la Société royale danoise des Sciences de Copenhague, de l'Académie royale des Sciences de Stockholm, de l'Académie des Sciences de l'Institut de Bologne, de l'Institut royal lombard de Milan, de la Société italienne des Sciences de Modène; correspondant de l'Académie royale des Sciences de Madrid, de l'Institut vénitien des Sciences, Lettres et Arts; membre honoraire de l'Académie royale des Sciences, Lettres et Arts de Modène, de l'Athénée vénitien des Sciences et Lettres, de l'Université d'Odessa, de l'Académie américaine des Sciences et Arts de Boston, de l'Académie nationale des Sciences d'Amérique.

DEUXIÈME ÉDITION.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1880

Coll. part., N.B.

Le nom de Michel Chasles est resté attaché à une relation, bien connue des élèves de 4ème, semble-t-il indûment. C'est du moins ce qui se dégage des notices rencontrées ici ou là. En fait si cela est plausible pour le calcul vectoriel, il en va autrement pour les mesures algébriques sur la droite.

Dans la préface à son «Traité de Géométrie Supérieure» (1856) Chasles souligne que «jusqu'à présent on n'a point introduit, d'une manière générale et systématique, en Géométrie, le principe des signes pour marquer la direction des segments ou des angles, excepté dans la Géométrie analytique et dans quelques questions particulières...» **(ibid., p. vi, c'est Chasles qui souligne). Il se désigne ainsi comme l'inventeur d'une approche de la géométrie qui devrait permettre des progrès importants. Voici ce qu'il écrit dans sa préface à ce propos (ibid., p. xi-xii) :**

«Mais ce principe a divers autres avantages. Il apporte dans les démonstrations une facilité qui rapproche les conceptions de la Géométrie de celles de l'Analyse, car on sait qu'une démonstration est d'ordinaire plus pénible quand on est obligé de subordonner le raisonnement à l'état d'une figure particulière que quand on peut raisonner d'une manière générale, comme en Analyse, sans tenir compte des positions relatives, accidentelles, des diverses parties de la figure. Dans le premier cas on cherche péniblement dans les détails de la figure les éléments de la démonstration, et dans le second on combine logiquement des propositions abstraites, sans aucune entrave.
Le principe des signes étend même son influence sur l'énoncé des propositions ; car, lorsqu'elles ne se compliquent pas de conditions de situation, elles prennent une forme à la fois plus générale et plus concise, qui présente à l'esprit une idée plus nette et se prête mieux au raisonnement.
On a donc beaucoup perdu à ne pas introduire systématiquement dans la Géométrie pure le principe des signes ; les progrès de la science en ont été nécessairement retardés».

Nous reproduisons ci-dessous le premier chapitre de son «Traité de Géométrie Supérieure» où le lecteur reconnaitra sous le nom de «théorème fondamental» la célèbre relation.

Ajoutons que Michel Chasles né en 1793 à Epernon, est mort en 1880 à Paris. Il a été élève puis professeur à l'Ecole Polytechnique. A partir de 1846, Chasles occupa la chaire de Géométrie Supérieure à la Faculté des Sciences de Paris (Sorbonne). Son enseignement, d'où est issu le traité de géométrie dont nous reproduisons des extraits, est marqué par la volonté de coordonner les travaux de géométrie publiés «dans quelques Ouvrages modernes, dans des Mémoires épars dans les Recueils scientifiques (discours du 22 décembre 1846, ou «la première leçon»). **L'essentiel de ses recherches est dans le domaine de la géométrie projective.**

Chasles s'est aussi beaucoup intéressé à l'histoire des mathématiques, notamment celle de la géométrie.

Georges MATHESIS
Institut IMAG

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

PREMIÈRE SECTION.

PRINCIPES FONDAMENTAUX. — THÉORIE DU RAPPORT ANHARMONIQUE, DE LA DIVISION HOMOGRAPHIQUE ET DE L'INVOLUTION.

CHAPITRE PREMIER.

AVERTISSEMENT RELATIF A L'USAGE DES SIGNES + ET — POUR DÉTERMINER LA DIRECTION DES SEGMENTS RECTILIGNES OU DES ANGLES.

1. Définition. — Quand le segment compris entre deux points a, b sera représenté par ab, nous dirons que le point a est son *origine*. S'il est représenté par ba, ce sera le point b qui sera regardé comme étant son origine.

Manière d'indiquer la direction des segments. — Quand nous aurons à considérer sur une même droite plusieurs segments, nous indiquerons leur direction en regardant comme *positifs* tous ceux qui seront dirigés dans un même sens convenu, à partir de leurs *origines*, et comme *négatifs* tous ceux qui seront dirigés dans le sens contraire, c'est-à-dire que nous donnerons, dans le calcul, le signe + aux premiers et le signe — aux autres.

D'après cela, si le segment compris entre deux points a, b, étant représenté par ab, est *positif*, représenté par ba il sera *négatif*; de sorte que l'on dira que $ab = -ba$.

Dans la pratique de ce principe de convention, nous ferons continuellement usage de la proposition suivante, relative à trois points en ligne droite.

2. Théorème fondamental. — *Étant pris trois points* a, b, c, *dans un ordre quelconque, sur une même droite, la somme des trois segments consécutifs* ab, bc, ca *est toujours nulle.*

C'est-à-dire que l'on a toujours

$$ab + bc + ca = 0,$$

en donnant aux segments les signes qui leur conviennent.

En effet, les trois points ne donnent lieu, quant à leur ordre respectif, qu'à trois cas différents; car, les deux a, b étant placés, l'ordre respectif des trois dépendra de la position qu'on donnera au troisième c, lequel ne peut prendre que trois positions différentes, savoir au delà du segment ab, à droite ou à gauche, ou bien sur le segment lui-même, ce qui donne lieu aux trois séries a, b, c; c, a, b et a, c, b. Or on passe d'une série à une autre par la permutation de deux lettres, et l'équation

$$ab + bc + ca = 0$$

ne change pas par cette permutation; il s'ensuit donc que le théorème sera vrai dans les trois cas s'il l'est dans un. Prenons les trois points dans l'ordre a, b, c de la première série; les trois segments ab, bc et ac sont de même signe, et la somme des deux premiers est égale au troisième, savoir :

$$ab + bc = ac.$$

Mais $ac = -ca$; donc

$$ab + bc + ca = 0.$$

Ce qu'il fallait démontrer. Donc, etc.

Corollaire I. — *Quand la position d'un point* a *est déterminée par sa distance à une origine* O, *si l'on veut le rapporter à une autre origine* O′, *on fait toujours, quel que soit l'ordre relatif des deux origines et du point* a,

$$Oa = O'a - O'O.$$

En effet, comme $O'a = -aO'$, cette relation dérive de celle-ci

$$Oa + aO' + O'O = 0,$$

qui a lieu entre les trois points O, O' et a, quelle que soit leur position respective.

Substituer ainsi une origine O' à une autre s'appelle *changer l'origine des segments*.

COROLLAIRE II. — *La différence de deux segments* Oa, Ob *qui ont une origine commune, savoir* (Oa — Ob), *est toujours égale à* ba, *quelles que soient les grandeurs et les directions des deux segments.*

Car l'équation

$$Oa - Ob = ba$$

donne

$$Oa + ab + bO = 0,$$

ce qui est la relation entre les trois points O, a, b.

On peut encore dire que *la distance de deux points* a, b *s'exprime, en fonction des distances de ces points à une origine commune* O, *par la relation*

$$ab = Ob - Oa.$$

3. GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME PRÉCÉDENT. — La relation entre trois points a, b, c s'applique à un nombre quelconque de points a, b, c, d, ..., f; *quel que soit l'ordre respectif de ces points, on a toujours*

$$ab + bc + cd + \ldots + fa = 0.$$

Nous allons prouver que, si la proposition est vraie pour n points elle le sera pour $(n+1)$. En effet, supposons que l'on ait pour n points a, b, c, ..., e la relation

$$ab + bc + \ldots + de + ea = 0,$$

et considérons un point de plus f; on aura entre les trois points a, e, f la relation

$$ae + ef + fa = 0.$$

Ajoutant ces deux équations membre à membre et observant que *ea* et *ae* se détruisent, on a

$$ab + bc + \ldots + de + ef + fa = 0.$$

Ainsi, si la proposition est vraie pour n points, il s'ensuit qu'elle l'est pour $(n+1)$ points ; mais nous l'avons démontrée pour trois points, elle a donc lieu pour quatre, puis pour cinq, etc.

4. Propriétés relatives a un ou deux segments et a leurs points milieux. — Les deux propositions suivantes, qui résultent immédiatement de la relation entre trois points, nous seront souvent utiles.

Étant donnés deux points a, a′ *et leur point milieu* α, *et étant pris sur la même droite un point quelconque* m, *on a toujours*

$$m\alpha = \frac{ma + ma'}{2} \quad \text{et} \quad ma.ma' = \overline{m\alpha}^2 - \overline{\alpha a}^2.$$

Car on a, entre les trois points m, α, a,

$$m\alpha + \alpha a + am = 0$$

ou

$$ma = m\alpha + \alpha a,$$

et pareillement, entre les trois points m, α, a',

$$ma' = m\alpha + \alpha a'.$$

Ajoutant ces deux équations membre à membre et observant que $\alpha a = -\alpha a'$, puisque le point α est le milieu entre les deux a, a', on a

$$m\alpha = \frac{ma + ma'}{2}.$$

Puis, en multipliant les deux équations membre à membre et remplaçant $\alpha a'$ par $-\alpha a$, on a

$$ma.ma' = \overline{m\alpha}^2 - \overline{\alpha a}^2.$$

C. Q. F. D.

5. *Étant donnés deux segments* aa′ *et* bb′, *dont les points mi-*

lieux sont α, β, on a toujours

$$\alpha\beta = \frac{ab + a'b'}{2} = \frac{ab' + a'b}{2}.$$

En effet, prenant un point m quelconque sur la même droite, on a

$$m\alpha = \frac{ma + ma'}{2} \quad \text{et} \quad m\beta = \frac{mb + mb'}{2},$$

d'où

$$m\beta - m\alpha = \alpha\beta = \frac{mb + mb' - ma - ma'}{2}.$$

Or

$$mb - ma = ab \quad \text{et} \quad mb' - ma' = a'b';$$

donc

$$\alpha\beta = \frac{ab + a'b'}{2},$$

et changeant b en b' et b' en b,

$$\alpha\beta = \frac{ab' + a'b}{2}.$$

C. Q. F. D.

6. Des signes + et — pour exprimer le sens de rotation dans lequel les angles sont formés a partir de leurs origines. — Quand un angle est formé par deux droites A, B, nous lui supposerons une *origine* qui sera l'un de ses côtés; si l'angle est désigné par angle (A, B), le côté A sera regardé comme étant son *origine*, et, si l'on écrit angle (B, A), ce sera le côté B qui sera l'*origine* de l'angle.

Un angle construit sur un côté pris pour *origine* peut être formé à droite ou à gauche de ce côté, la droite et la gauche étant estimées par un spectateur qui, ayant son œil au sommet de l'angle, dirigerait sa vue sur le côté pris pour origine.

Tous les angles qui s'étendront, à partir de leurs origines respectives, dans un même sens de rotation déterminé (par exemple, de la gauche vers la droite) seront regardés comme *positifs*, et ceux qui s'étendront dans le sens de rotation contraire seront regardés comme *négatifs*. Les lignes trigonométriques des uns et des autres (très-généralement leurs sinus, et parfois leurs tangentes) auront les signes + et —, comme il est d'usage dans la Trigonométrie.

Quand une droite tournera autour d'un point fixe, si l'on a à considérer des segments sur cette droite, leurs signes ne dépendront pas précisément de la direction de la droite; ils dépendront soit des relations existantes entre les segments, soit des expressions analytiques de ceux-ci, expressions dans lesquelles pourra entrer implicitement la direction de la droite.

Par exemple, si sur un rayon tournant autour d'un point fixe O on doit prendre un segment Om dont la longueur est une fonction de l'angle α que ce rayon fait avec un axe fixe, on portera sur le rayon lui-même les segments dont les expressions auront le signe +, et sur le prolongement du rayon au delà du pôle fixe les segments dont les expressions auront le signe —.