QUELQUES ASPECTS DE LA SYMETRIE ORTHOGONALE POUR DES ELEVES DE CLASSES DE 4ème ET 3ème

Denise GRENIER
Equipe de recherche
en didactique des mathématiques et de l'informatique
Université de Grenoble 1

I – INTRODUCTION.

L'objectif de cette étude est une meilleure connaissance des conceptions qu'ont les élèves de la symétrie orthogonale avant et après un apprentissage en classe, connaissance nécessaire à la mise en place de situations d'enseignement de cette notion.

Nous prenons en effet pour hypothèse que l'élève en situation d'apprentissage élabore des conceptions des contenus d'enseignement. L'élève peut avoir plusieurs représentations d'une notion mathématique et utiliser l'une ou l'autre de ces représentations selon le problème posé. Ces conceptions peuvent être incomplètes ou parfois erronées, ou encore être localement ou globalement vraies, avec pour chacune un domaine de validité. Une conception peut fonctionner pour un type de problèmes et ne plus fonctionner pour un autre type de problèmes, c'est là que souvent apparaît l'erreur. L'erreur est alors pour nous un indice des conceptions de l'élève que nous chercherons à exploiter.

En observant les élèves en situation de résolution de problèmes nous pouvons dégager leurs procédures de résolution. Ces procédures nous permettent de faire des hypothèses sur leurs conceptions des notions mathématiques en jeu et les limites de validité de ces conceptions lorsqu'elles sont erronées.

Les travaux déjà existants sur la notion de symétrie orthogonale ne nous ont pas permis d'avoir une idée assez précise des diverses conceptions des élèves à propos de cette notion, leur objectif étant autre.

«petit x» n° 7 pp. 57 à 69. 1985

Par exemple :

— En Angleterre, Hart (1981) qui décrit dans les résultats des tests proposés à des élèves de 13 à 15 ans sur la notion de symétrie orthogonale, avait pour objectif de déterminer des niveaux de compréhension de cette notion. Elle s'est surtout attachée à décrire une classification des items en fonction de leur complexité, qu'elle a ensuite mise en relation avec une étude statistique des réussites à ces tests. Mais elle ne donne aucune description des procédures de résolution des élèves, ce qui rend difficile l'interprétation des résultats.

— En France, Gras (1979 et 1983) présente une séquence d'enseignement en classe de 4ème, autour de la notion de transformation et en particulier autour de la notion de symétrie orthogonale. Bien qu'il donne quelques résultats sur les procédures des élèves en référence à des hypothèses sur l'évolution de leurs conceptions, Gras s'est surtout attaché à décrire et comparer différents types de classification des items proposés lors de la séquence d'enseignement.

II – PRESENTATION DE L'EXPERIENCE.

Les activités que nous avons proposées sont des activités de construction : il s'agit pour les élèves de tracer le symétrique d'une figure par rapport à une droite.

Nous avons choisi une activité de construction, plutôt qu'une activité de description de la figure pour plusieurs raisons :

— Il est plus facile pour un élève de tracer une figure que d'expliciter par des mots cette figure de manière à ce qu'elle puisse être reconstituée. Cette activité de rédaction pose des problèmes d'expression écrite qui ne sont pas particuliers à la symétrie orthogonale.

— D'autre part, l'activité de construction facilite l'observation des différentes stratégies des élèves (par exemple, gestes indiquant, sans tracer, des solutions envisagées autres que la solution choisie).

Nous avons choisi de prendre les élèves par binômes (groupe de deux élèves) et nous leur avons demandé de résoudre **ensemble** les problèmes. Cette situation permet aux élèves d'extérioriser leurs démarches et leurs procédures de résolution. Lors de leur discussion un conflit peut apparaître, provenant des différentes conceptions qu'ils ont de l'objet mathématique en question. Pour résoudre ce conflit les élèves vont mettre en œuvre des argumentations défendant leurs projets respectifs. Ce conflit est donc un élément moteur de l'évolution du système de connaissances, parce qu'il peut aboutir à la construction d'une procédure de résolution commune, par échange d'argumentations sur les procédures particulières de chaque élève. Dans un tel cadre, on retrouve la situation de validation au sens de Brousseau (1978) lorsque chacun des élèves essaie de convaincre l'autre ou de comprendre ses conceptions, pour arriver à une décision puisqu'il leur faut tracer une figure et une seule répondant à la question.

Nous avons choisi des élèves dans une classe de 4ème et une classe de 3ème d'un collège. La notion de symétrie orthogonale est enseignée en classe de 4ème, plutôt vers la fin de l'année scolaire et les élèves de 4ème que nous avons choisi n'avaient pas encore eu cet enseignement. Nous leur avons défini la symétrie orthogonale en liaison avec l'idée de «pliage le long d'une droite», en leur demandant d'imaginer ce pliage sans le réaliser. Nous voulions observer les réactions des élèves devant cette notion avant son enseignement en classe. D'autre part, nous pensions voir apparaître chez les binômes d'élèves de 3ème des références à la notion de symétrie non seulement comme objet familier (le mot «symétrie» pouvant évoquer le pliage ou l'idée du miroir) mais aussi comme objet d'enseignement ; et nous pensions qu'il pouvait y avoir contradiction entre ces deux références à la notion de symétrie.

L'observation a eu lieu avec six binômes, dont trois étaient formés d'élèves de 4ème et les trois autres d'élèves de 3ème. Elle a duré une heure environ pour chacun et s'est déroulée en dehors des heures de classe.

Les huit figures proposées formaient huit items qui étaient réunis dans un livret et l'activité consistait pour les élèves à construire à main levée les symétriques des figures par rapport à une droite : l'axe de la symétrie.

Chaque binôme a reçu un livret avec la consigne et des feuilles de brouillon que nous avons reprises.

III – ANALYSE DE LA TACHE : CONSTRUCTION DU SYMETRIQUE D'UNE FIGURE DONNEE PAR RAPPORT A UN AXE DONNE.

Pour analyser le problème à résoudre, il nous faut prendre en compte les objets mathématiques et les relations entre ces objets qui interviennent dans le problème.

Pour cette tâche précise, les objets mathématiques qui interviennent sont :

– l'objet dont il faut rechercher l'image ;
– la transformation : ici, la symétrie orthogonale ;
– l'axe de la symétrie.

Lors de l'élaboration des items, nous avons pris en compte trois choses :

– la nature de l'objet : nous avons choisi des segments et un point pour une des figures : le segment est une figure simple, mais nous pensions qu'il ne suffit pas pour l'élève de savoir tracer le symétrique d'un point pour pouvoir a fortiori, tracer le symétrique de n'importe quelle figure, même très simple ;

— les relations entre les différents éléments de l'objet (longueur, extrémités du segment) ;

— les relations objet-axe : en effet, le problème posé par exemple par un axe «vertical» et un segment «incliné» n'est pas le même que celui posé par un axe «incliné» et un objet «vertical». De même pour l'élève, le problème est différent selon que l'objet est dans un seul demi-plan par rapport à l'axe, ou a un point commun avec l'axe, ou bien encore coupe l'axe de symétrie.

La place de l'objet et de l'axe dans le cadre de travail ont aussi une grande importance comme nous le verrons dans l'analyse des figures proposées.

D'autres contraintes interviennent dans la tâche, que nous appelons contraintes extérieures, telles que :

— la *rigidité du matériau* qui peut autoriser ou non le pliage, le retournement, par exemple : en effet, la consigne interdisait de plier le livret ;

— la *taille de la feuille* (le symétrique cherché peut se situer en dehors de la feuille) ;

— le *type de papier utilisé.* Quelques items étaient sur papier quadrillé, ce qui pouvait induire certaines procédures telles que le comptage des carreaux sur les lignes verticales ou horizontales ;

— les *instruments* : les élèves n'avaient ni règle, ni compas : nous pensions qu'ainsi, ils ne fixeraient pas leur attention sur les instruments et leur utilisation pour tracer des figures précises en relégant le problème de la symétrie au second plan.

Par ailleurs, les élèves disposaient d'un stylo unique par binôme. Pour présenter un résultat correct, ils devaient donc anticiper ce qu'ils allaient dessiner, ce qui les obligeaient à expliciter leurs idées et provoquait la discussion. Un autre intérêt de ce stylo unique était de ralentir le processus de réalisation, d'où une observation plus facile pour nous.

IV – ANALYSE DES FIGURES.

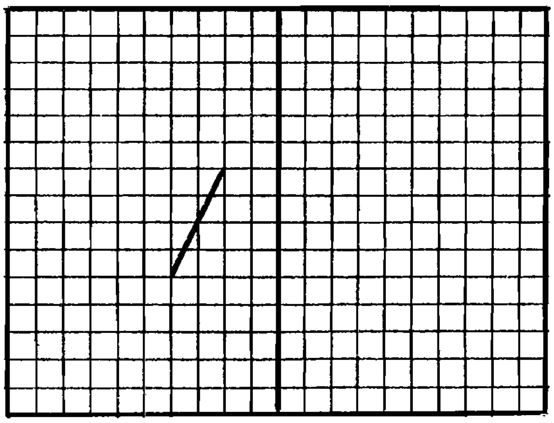


figure 1

La figure 1 est sur du papier quadrillé l'axe de symétrie est vertical, l'objet est un segment.

Cette figure ne comporte pas de difficultés a priori : l'axe a une «bonne» orientation et le papier quadrillé permet la procédure de comptage des carreaux pour trouver les symétriques des extrémités du segment.

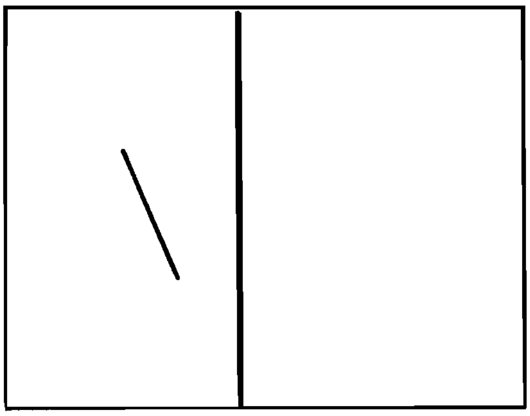


figure 3

La figure 3 est analogue à la figure 1 par la position de l'axe et la position de l'objet par rapport à cet axe, mais le papier n'est pas quadrillé : la détermination de la distance à l'axe des extrémités du segment est plus difficile. Nous voulions voir si les procédures utilisées dans cet item étaient différentes des précédentes, le papier n'étant pas quadrillé.

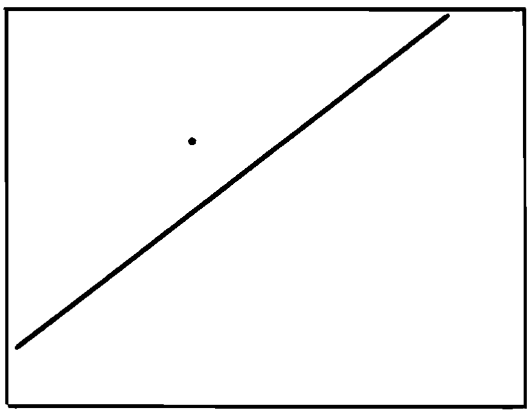


figure 2

La figure 2 a été placée entre les deux figures précédentes pour éviter un transfert automatique de la procédure de résolution de la figure 1 à la figure 3.

Elle présente deux éléments différents par rapport à ces figures :

– l'axe est incliné : ceci présente une difficulté par rapport à un axe vertical car la symétrie vue par pliage est moins facile à imaginer ;

– l'objet est un point.

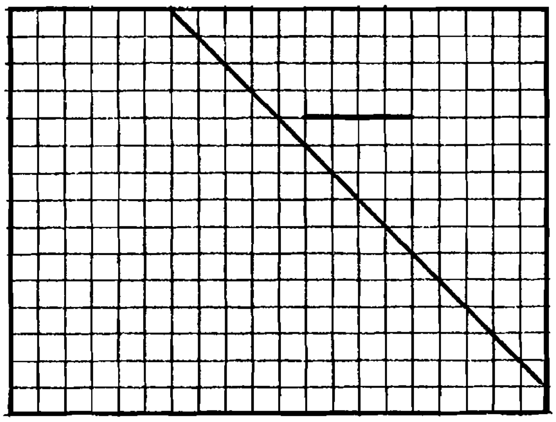
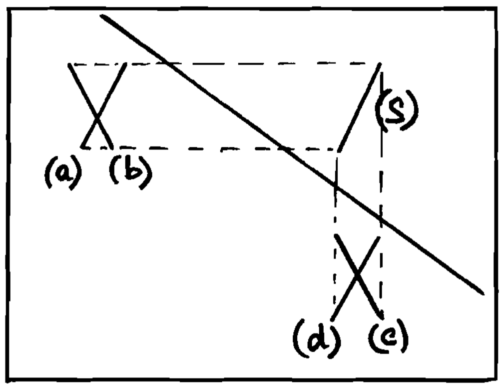


figure 4

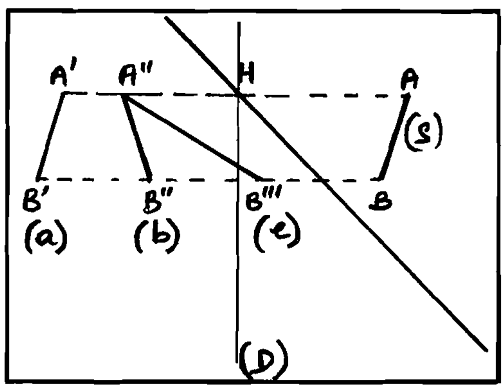
Dans la figure 4, l'axe est à 45 degrés, passant donc par les diagonales des carreaux du papier, ce qui va donner priorité aux procédures de comptage des carreaux.

D'autre part, l'orientation de l'objet va favoriser les procédures que nous appelons procédures de «rappel horizontal» ou «rappel vertical», procédures qui avaient été observées par Hart en Angleterre.

Nous entendons par «procédure de rappel horizontal» une procédure qui, à une figure donnée, fait correspondre une figure dont les points extrêmes sont déterminés par translation horizontale des points extrêmes de la figure donnée. De même, une «procédure de rappel vertical» donne une figure-image dont les points extrêmes sont translatés verticalement des points extrêmes de la figure initiale.



Ainsi (a) et (b) sont obtenus «par rappel horizontal» des extrémités du segment (S), (c) et (d), sont obtenus par «rappel vertical» des extrémités de (S). Ces procédures peuvent être «liées à l'axe» dans le sens où il y a report, pour une des extrémités (ou les deux) de la distance à l'axe sur la ligne de rappel choisie.



Par exemple : (a), (b) et (e) sont obtenus par «rappel horizontal», avec

pour (a) : A'H = HA et (a) parallèle à (S)

pour (b) : B''K = HA et A'' tel que (b) soit symétrique de (S) par rapport à (D)

pour (e) : A''H = HA et B''K = KB.

Dans le cas de la figure 4 proposée, les positions respectives de l'objet et de l'axe permettent ces procédures de rappel, au sens où les images liées à l'axe déterminées par ces procédures sont situées dans les limites du cadre tracé.

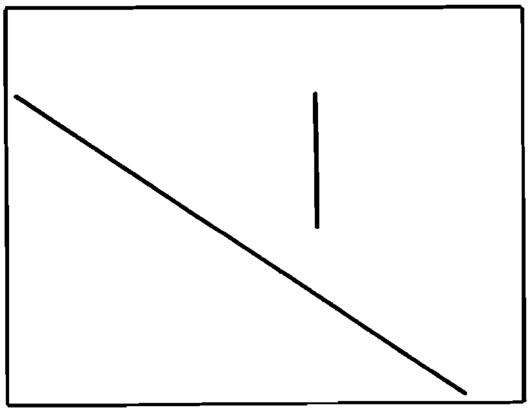


figure 5

La figure 5 comporte des éléments analogues à ceux de la figure 4 :

— l'axe a une orientation quelconque
— le segment a une orientation particulière : les orientations verticale et horizontale ont un statut particulier pour l'élève, par rapport aux autres orientations.

Mais elle présente aussi deux aspects différents :

— le papier n'est pas quadrillé ;
— et, surtout, une disposition de l'axe et du segment telle que les procédures de «rappel horizontal» ou «rappel vertical» donnent des images hors des limites du cadre.

Nous pensions donc voir émerger d'autres procédures pouvant provoquer des retours en arrière sur la figure 4 pour comparaison et remise en question éventuelle de la solution proposée.

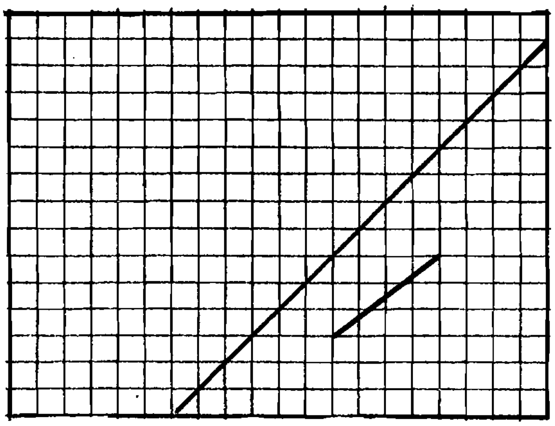


figure 6

Dans la figure 6, les procédures de rappels horizontal ou vertical sont de nouveau permises : en effet, nous voulons voir si les procédures construites par les élèves lors de la résolution de la figure 5 vont être reprises pour la figure 6 et entrer en conflit avec les procédures de rappels horizontal ou vertical.

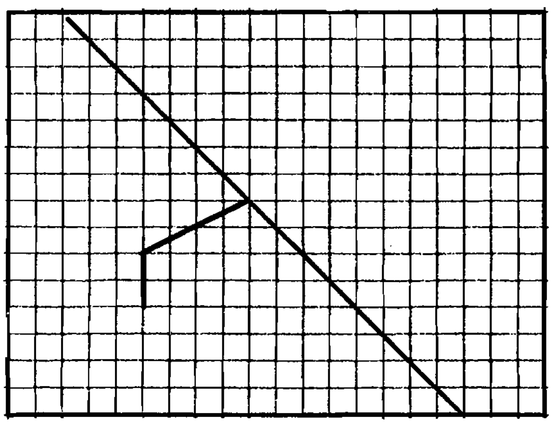


figure 7

La figure 7 présente en commun avec les figures 4 et 6 un axe à 45° sur papier quadrillé. Mais l'objet est plus complexe, il est composé de deux segments et a une extrémité située sur l'axe : nous voulons observer si la notion d'invariance des points de l'axe est utilisée par les élèves ou non.

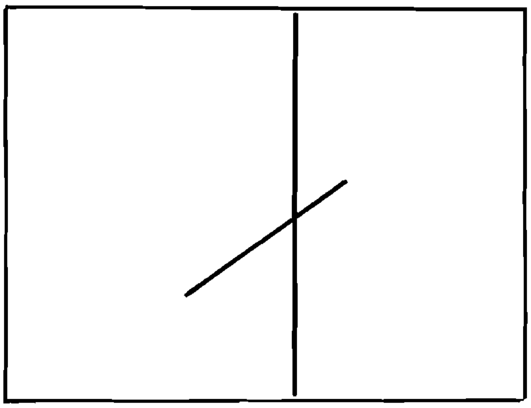


figure 8

La figure 8 présente une autre complexité par rapport aux sept figures précédentes : le segment coupe l'axe et occupe donc les deux demi-plans déterminés par cet axe ; dans un tel cas, le pliage superposant les deux demi-plans peut se révéler être un outil inefficace pour l'élève.
Nous verrons dans l'analyse des résultats comment, pour un binôme de 4ème le problème posé par le pliage pour cette figure va amener la recherche d'autres procédures et provoquer un retour en arrière sur toutes les figures précédentes.

Dans ce livret, l'ordre des figures peut provoquer éventuellement chez l'élève à chaque étape des retours sur les figures précédentes. Ainsi, par exemple, l'élève qui utiliserait une procédure de «rappel horizontal» dans le cas de la figure 4 peut se poser la question de la justesse de cette procédure s'il tente de l'utiliser pour la figure 5. Cette hypothèse suppose qu'il y ait un apprentissage de l'élève d'une figure à une autre, bien que chaque figure représente pour lui un nouveau problème. Malgré tout, les conceptions mobilisées pour résoudre les huit items ne sont pas très diverses : les figures sont principalement des segments, et dans chacune d'elle, sauf la dernière, les segments ou point sont situés dans un seul demi-plan par rapport à l'axe de symétrie.

V – DESCRIPTION ET ANALYSE DES RESULTATS.

Pour les trois premières figures, nous obtenons globalement les résultats suivants :

– les trois binômes de la classe de 3ème donnent des réponses justes,

– les trois binômes de la classe de 4ème marquent des hésitations et pour l'un des binômes, cela aboutit, dans le cas des figures 1 et 3 au tracé d'un segment parallèle au segment donné (réponses 1b et 3b).

A partir de la quatrième figure, les difficultés commencent et on ne remarque plus de différences marquantes entre les réponses des binômes de la classe de 3ème et celles des binômes de la classe de 4ème.

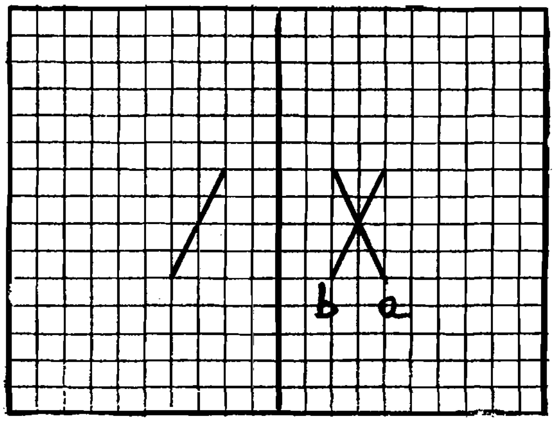


figure 1

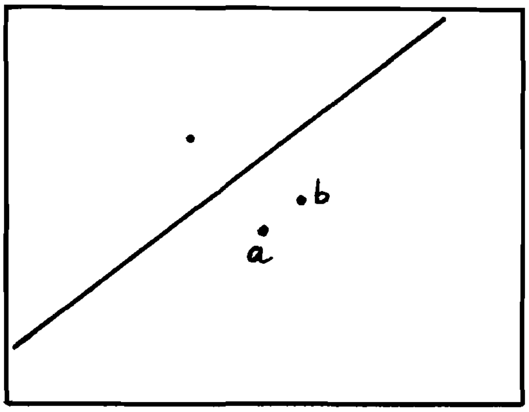


figure 2

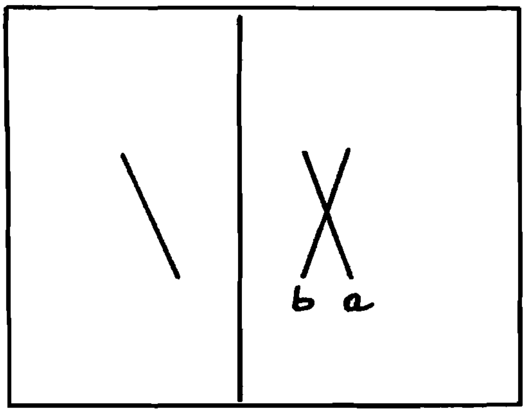


figure 3

Pour la figure 4, on trouve, dans chacune des deux classes, les trois types de réponses «attendues» :

— la bonne réponse (4a),

— un segment obtenu par une procédure de rappel horizontal (4b),

— un segment obtenu par une procédure de rappel vertical (4c).

Les deux binômes qui ont donné la bonne réponse ont utilisé ou imaginé le pliage ; et celui qui a utilisé le pliage a été surpris du résultat ainsi obtenu.

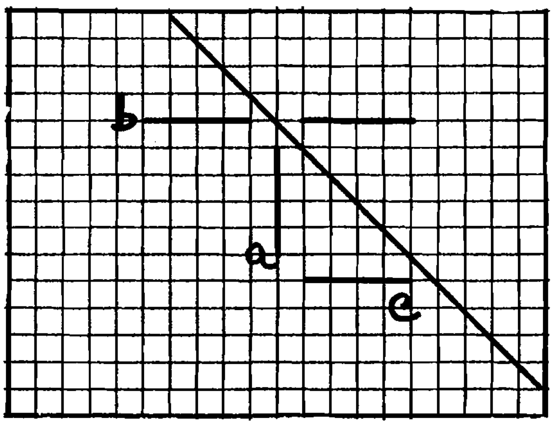


figure 4

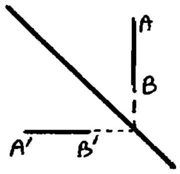
La figure 5 ne donne qu'une seule bonne réponse, obtenue par pliage (5a).

Quatre binômes donnent comme symétrique du segment vertical un segment lui aussi vertical et de même longueur. Les procédures observées chez ces binômes sont toutes différentes :

– l'un prend le symétrique orthogonal de l'extrémité A du segment et trace, à partir de ce point, un segment vertical de même longueur (5b) ;

– un autre obtient ce même segment (5b), mais en plaçant d'abord l'autre extrémité, obtenue, à partir de B par une procédure de rappel horizontal ;

– un troisième place un point de l'autre côté de l'axe, par une procédure de rappel horizontal de l'extrémité B, proche de l'axe et trace un segment vertical de même longueur (5c). Un autre binôme donne cette même réponse (5c), mais en plaçant d'abord l'extrémité la plus basse du segment ;



le sixième binôme donne la réponse (5d), en plaçant d'abord l'extrémité B′ comme il est expliqué ci-contre et traçant ensuite un segment horizontal de même longueur que le segment proposé.

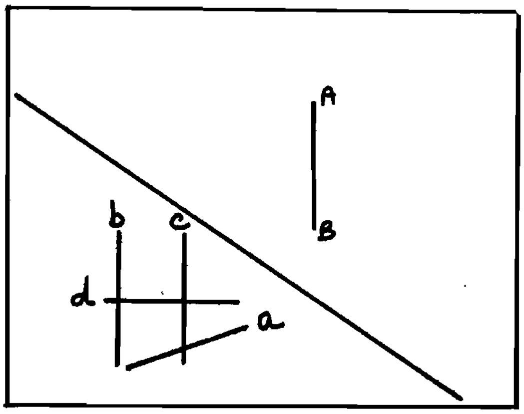


figure 5

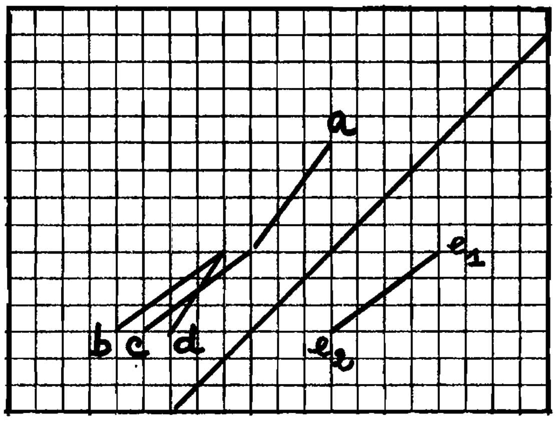


figure 6

La figure 6 est mieux réussie que les deux précédentes, fournissant trois réponses exactes (6a) obtenues par des procédures de résolution différentes : pliage imaginé pour l'un, pliage effectif pour un autre et détermination des symétriques orthogonaux des deux extrémités du segment, pour le troisième.

Examinons les trois réponses fausses.

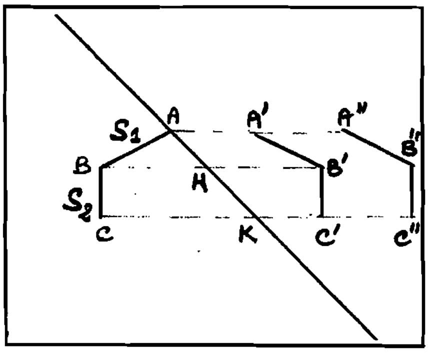
Deux des binômes ont construit leur solution en plaçant d'abord un point obtenu par rappel horizontal de l'extrémité A et comptage des carreaux de chaque côté de l'axe, mais l'un a tracé ensuite un segment parallèle au segment donné (6b), tandis que l'autre hésitait entre tracer un segment parallèle ou déterminer l'autre extrémité de la même façon que la première : le parallélisme l'a emporté et la réponse donnée est (6b).

Le dernier binôme n'a pu résoudre le «conflit» entre les deux élèves et donne deux réponses (6c) et (6d), toutes deux obtenues par une procédure de rappel horizontal. (6c) donne un segment parallèle au segment donné. Les extrémités de (6d) sont obtenues par conservation des distances par rapport à l'axe des lignes de rappel.

Figure 7. Cette figure est composée de deux segments S_1 et S_2.

— Une seule bonne réponse obtenue par le pliage (7a).

— Dans trois réponses, il y a prolongement du segment S_1 d'une même longueur (donc invariance du point de jonction avec l'axe). Puis le tracé du symétrique de S_2 est, pour deux de ces binômes, un segment «vers le haut» (donc conservation de l'angle d'articulation de S_1 et S_2) (7b), et pour le troisième un segment tracé «vers le bas» (7c).



Dans les deux dernières réponses, il n'y a pas invariance du point de jonction de S_1 avec l'axe. Les deux réponses (7d) et (7e) se présentent comme des symétriques de la figure initiale par rapport à des axes verticaux (les points extrêmes sont obtenus par des procédures de rappel horizontal). Pour (7d), correspondant à (A'B'C'), dans la figure ci-contre on a BH = HB'. Pour (7e), correspondant à (A"B"C"), on a CK = KC".

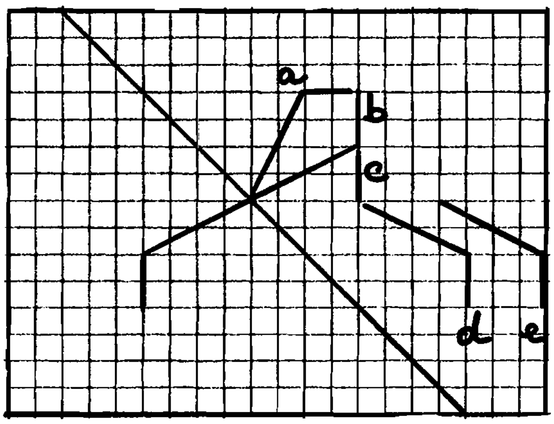


figure 7

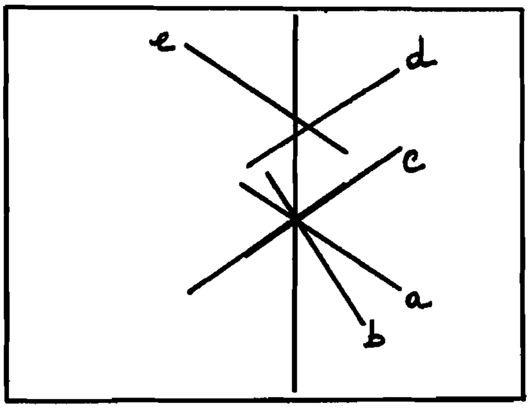


figure 8

Figure 8. Pour cette dernière figure, on obtient trois bonnes réponses (8a). Les trois autres réponses sont :

(8b) tracé d'un segment perpendiculaire au segment donné avec report de longueurs égales de chaque côté de l'axe.

(8c) tracé d'un segment de longueur égale au segment donné, symétrique de celui-ci par rapport à un axe horizontal «fictif», choisi tel que le segment se trouve alors dans un seul demi-plan par rapport à ce nouvel axe.

(8d) cette réponse est donnée par deux élèves après avoir utilisé le pliage qui ne les a pas convaincu. En effet, le pliage superpose les deux demi-plans mais «casse» le segment en deux segments non-superposables. La réponse donnée par le pliage n'a pas convaincu les élèves qui ont mis en doute, ici, l'outil «pliage» comme outil de contrôle de la symétrie orthogonale.

VI – CONCLUSION.

Les procédures employées par les élèves de la classe de 4ème qui n'ont pas eu d'enseignement en classe sur cette notion font apparaître des conceptions telles que :

1. Le transformé d'un point est un point, le transformé d'un segment est un segment de même longueur.

2. L'axe de symétrie matérialise sur la feuille deux demi-plans et le symétrique d'une figure se trouve dans l'autre demi-plan par rapport à cet axe : la symétrie orthogonale est donc une transformation qui fait passer d'un demi-plan à l'autre demi-plan. D'où la difficulté qu'ont les élèves à tracer le symétrique d'un segment qui coupe l'axe, difficulté que l'on retrouve chez les élèves de la classe de 3ème.

3. La conservation des angles d'une figure par cette transformation ou plus généralement la conservation globale de la figure n'a pu être observée ici que sur la figure 7 composée de deux segments adjacents. Tous les binômes, sauf un, ont donné une figure où l'angle entre les deux segments est conservé. Le binôme restant a longtemps hésité entre deux réponses (7b) et (7c) avant de choisir (7c).

Plus généralement, les élèves des deux classes ont des comportements de réponses analogues :

— Les directions «verticale» et «horizontale» sont privilégiées. Les procédures par «rappel horizontal» ou «rappel vertical» sont durables : on les retrouve aussi bien chez les élèves de la classe de 3ème que chez ceux de la classe de 4ème. L'utilisation du papier quadrillé semble d'une part renforcer ces procédures car il matérialise les directions verticale et horizontale, et d'autre part donner priorité aux procédures de comptage : par exemple, pour tracer le symétrique d'un point, l'élève va compter la distance à l'axe en suivant une ligne horizontale et reporter cette distance (selon la ligne choisie) de l'autre côté de l'axe. En ce sens, la contrainte d'orthogonalité à l'axe du segment MM', déterminé par un point M et son image M', ne joue pas un grand rôle : les observations faites montrent qu'elle intervient très peu chez les élèves de 4ème et que pour les élèves de 3ème, elle apparaît mais de façon très incorrecte parfois. (Elle devient, par exemple, orthogonalité du segment-image par rapport au segment -objet pour un des binômes observés).

— Le parallélisme de l'objet et de son symétrique est aussi une conception forte chez les élèves, puisqu'elle a plus d'une fois été choisie dans des cas de conflits de procédures entre les élèves d'un binôme.

— Enfin, nous avons constaté qu'il n'est pas du tout naturel pour un élève de construire les symétriques des deux extrémités du segment pour trouver le symétrique de ce segment. On pourrait dire que l'élève prend le symétrique du segment «au sens propre du terme» : il privilégie l'objet «segment» dans sa globalité et va donc plutôt prendre d'abord le symétrique d'une des extrémités, puis tracer, en choisissant un «cap» qui lui semble convenir, un segment de même longueur que celui donné. La deuxième extrémité se déduit donc de la construction faite au lieu d'en être un support. Cela semble confirmer l'hypothèse qu'*il ne suffit pas pour l'élève, de savoir construire le symétrique d'un point pour pouvoir trouver le symétrique d'une figure quelconque.*

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.

G. BROUSSEAU 1978 : L'observation des activités didactiques, Revue Française de pédagogie n°45

R. GRAS 1979 : Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certains objectifs didactiques en mathématiques, Thèse Université de Rennes.

R. GRAS 1983 : Instrumentation de notions mathématiques. Un exemple : la symétrie. Petit x, n°1, IREM de Grenoble.

K.M. HART 1981 : Children's understanding of mathematics 11-16 (in ch. 10 reflections and rotation), John Murray Publishers.