# Balade autour de trois points remarquables du triangle

Denise GRENIER
Institut Fourier, université de Grenoble

**Résumé.** Le texte traite de la définition de trois points remarquables du triangle — le point « proximal » et les points dits de Fermat et de Toriccelli — comme solutions à des problèmes de lieu de points. Il apparaît que les définitions de ces trois points diffèrent selon les ouvrages et qu'elles ne sont pas toujours équivalentes. Cette étude est régulièrement proposée à des étudiants de Licence 3 de maths ou à de futurs enseignants.

**Mots clés.** géométrie du triangle, point remarquable, définition, figure générique.

## I. Trois problèmes et quatre définitions

### I.1. Trois problèmes

P1. Etant donné un triangle ABC, déterminer le point M du plan qui minimise la somme des distances MA + MB + MC.
P2. Etant donné un triangle ABC, déterminer un point intérieur au triangle d'où l'on voit les trois côtés sous le même angle.
P3. On construit à l'extérieur d'un triangle ABC trois triangles équilatéraux A'BC, B'CA et C'AB. Démontrer que les trois droites AA', BB' et CC' sont concourantes.

Nous appellerons et noterons **P (point proximal), F (point de Fermat) et T (point de Torricelli),** les points respectivement solutions respectivement (lorsqu'elles existent) des problèmes P1, P2 et P3.

***Quels liens existent-ils entre ces trois points ?***
***Ces problèmes ont-ils toujours une solution quelle que soit la nature du triangle ?***

### I.2. Quatre définitions de points remarquables d'un triangle

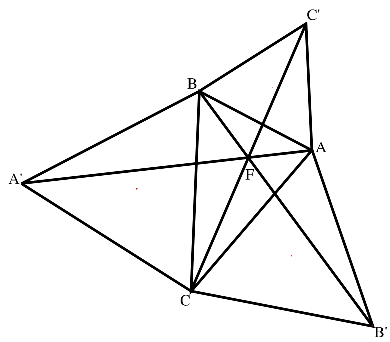
Voici quatre définitions tirées d'ouvrages différents, présentées dans ces textes comme solutions des problèmes précédents.

**Définition 1.**[1] Point de Fermat d'un triangle ABC.- Soient ABC', ACB' et BCA' les trois triangles équilatéraux construits extérieurement au triangle ABC. Les droites AA', BB' et CC' sont concourantes en un point F appelé point de Fermat.

Cette définition est accompagnée d'une figure (ci-contre).

Elle est suivie de :

« Problème de Fermat - Etant donné un triangle ABC, trouver un point M du plan rendant minimum la longueur AM+BM+CM. Ce problème admet pour solution le point de Fermat. »




[1] Extraits du dictionnaire des mathématiques de Bouvier et al. PUF., 2001.

**Définition 2.**[2] Le point de Torricelli – ou de Fermat - de ABC est le point de concours des droites (AA'), (BB'), (CC') ou encore celui des cercles circonscrits à ABC', BCA', CAB'. Ce point est intérieur au triangle si et seulement si ses 3 angles sont inférieurs à $2\pi/3$ et, dans ce cas, c'est celui d'où l'on voit les 3 côtés du triangle sous le même angle ($2\pi/3$).

**Définition 3.**[3] On appelle *proximal* d'un triangle le point dont la somme des distances aux sommets est minimale et *point de Fermat* le point (s'il existe) qui voit les trois côtés sous le même angle.

**Définition-théorème 4.**[4] Le point de Torricelli.
ABC est un triangle quelconque. Démontrer qu'il existe un point T (appelé point de Torricelli du triangle ABC) tel que les trois angles (TA, TB), (TB, TC) et (TC, TA) aient même mesure.

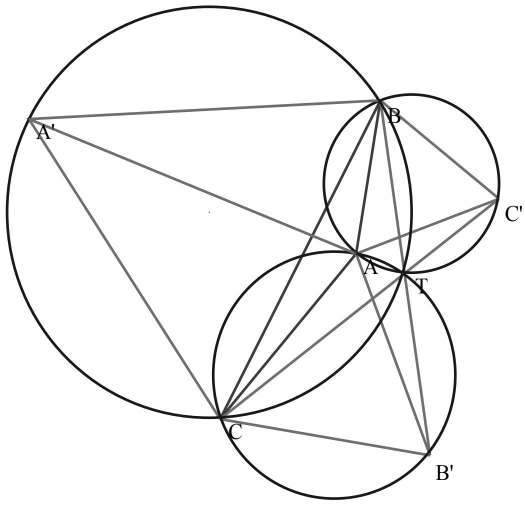
### I.3. Premières remarques

Avec nos notations, la définition 1 donne le point F comme solution à la fois de P1 et P3, la définition 2 confond les points F et T et donne ce point comme solution à la fois de P3 et P2, et la définition 4 donne le point T comme solution de P2. La double définition 3 donne P comme solution de P1 et F comme solution de P2, c'est le choix que nous avons fait. Finalement, en recoupant tout cela, on a l'impression que ces points sont un même et unique point qui résout les trois problèmes de départ. Mais est-ce bien le cas ? La définition D2 induit que la réponse est non.

## II. Deux exemples où ces définitions posent question

### Exemple 1

Dans le triangle ABC ci-dessous, les segments [AA'], [BB'] et [CC'] ne se coupent pas tous deux à deux (ici [AA'] ne coupe ni [BB'], ni [CC']), alors que les droites (AA'), (BB'), (CC') semblent concourantes.

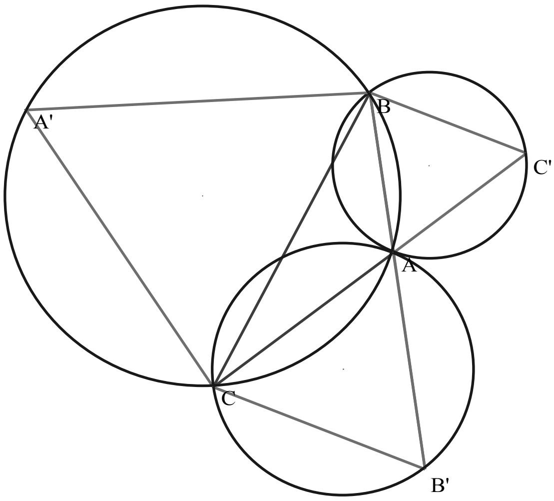



2 In « Le point de Torricelli d'un triangle », B. Bettinelli, *Repères* n°29, oct.97.
3 Extraits du bulletin APMEP n°381 déc. 91, pp. 618-619, Article : « Distances aux sommets d'un triangle »
4 Extraits du bulletin APMEP n°372 fév. 90, p. 109 et.. (« D'une pierre deux coups », Jacques Lubczanski)

On peut démontrer que le point T, solution de P3, existe. Le point proximal P qui réalise le minimum de la somme des distances aux sommets n'est visiblement pas T, car A est un meilleur candidat. En fait, on peut démontrer que P=A. Quant au point F, il est facile de se convaincre qu'il n'est ni en T, ni en P.

**Exemple 2**

Dans l'exemple ci-dessous, l'angle en A dans le triangle ABC est égal à $2\pi/3$. Où sont les points solutions des trois problèmes ? Par exemple, le point F sous lequel on voit les trois côtés sous un même angle peut-il être à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle ? Le lecteur peut chercher un peu avant de lire les réponses.




# III. Éléments de résolution des trois problèmes

## III.1. Une solution pour P2

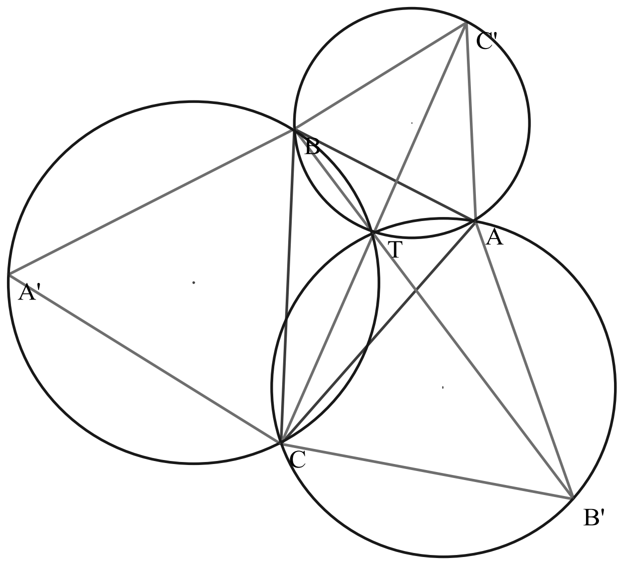
L'ensemble des points à partir desquels on voit un segment donné [AB] sous un angle donné $\alpha$ est un arc de cercle, appelé « *arc capable* relatif à $\alpha$ et à [AB] ». Pour construire cet arc, on peut construire un triangle isocèle AMB de sommet M et d'angle au sommet $\alpha$, puis le cercle circonscrit au triangle AMB. L'arc contenant M est l'arc cherché et l'autre arc est le lieu des points sous lequel on voit le segment [AB] sous l'angle $\pi$-$\alpha$ (propriété des angles opposés dans un quadrilatère convexe inscriptible dans un cercle). Les points A et B sont exclus de l'arc capable (points limites).

Le problème P2 revient donc à la question suivante : « Existe-t-il un point M qui soit le point de concours de trois arcs capables correspondant à un même angle et aux trois côtés d'un triangle ? ». Si un tel point existe, il ne peut être qu'à l'intérieur du triangle ou sur un bord. En effet, un point extérieur au triangle est nécessairement situé dans l'autre demi-plan du triangle par rapport à l'une (au moins) des droites supportant les côtés, soit par exemple (AB). Alors, l'angle sous lequel on voit [AB] à partir de M est la somme algébrique des angles sous lesquels on voit [AC] et [BC] à partir de ce même point, on ne peut donc avoir l'égalité. Ainsi, si ce point existe, il est à l'intérieur du triangle et nécessairement l'angle commun cherché vaut $2\pi/3$. Ceci n'est possible que si tous les angles du triangle ABC sont strictement inférieurs à $2\pi/3$ (sinon, F n'existe pas).

Soit donc un triangle ayant tous ses angles inférieurs strictement à 2π/3. On construit les deux arcs capables sous lesquels on voit respectivement [AB] et [BC] sous l'angle 2π/3, à l'intérieur du triangle. Ces arcs de cercles se coupent en B et ne sont pas tangents, puisque l'angle en B dans le triangle ABC est strictement inférieur à 2π/3. Soit F l'autre point d'intersection des deux arcs de cercle. Alors (FA, FB)=(FB, FC) = 2π/3.
D'où (FA, FC) = 2π -2.2π/3 = 2π/3, donc F appartient à l'arc capable relatif à [AC] et à 2π/3.

**III.2. Une solution pour P3**

La rotation[5] de centre A et d'angle π/3 déplace B' en C et B en C', donc [B'B] en [CC'] ; de même, pour les rotations de centre B et C et de même angle. Donc les trois segments ont même longueur et forment deux à deux un angle de π/3 (modulo π). Si T est le point commun à (BB') et (CC'), alors (TC', TB) = (TC, TB') = π/3 (modulo π). D'autre part, (TC', TB)= (AC', AB) (modulo π) et (TC, TB')=(AC, AB') (modulo π). Ceci implique que T est un des points d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABC' et AB'C (l'autre point est A).




On a donc (TB, TC) = (TB, TA) + (TA, TC) = π/3 (modulo π) = (A'B, A'C) (modulo π), ceci prouve que T est aussi sur le cercle circonscrit à A'BC.
Le fait que les 3 cercles sont concourants entraîne que les 3 droites (AA'), (BB') et (CC') le sont aussi (par permutation de A, B, C).
Les 3 segments [AA'], [BB'], [CC'] sont alors concourants lorsqu'ils passent tous les trois à l'intérieur du triangle ABC, c'est-à-dire lorsque les 3 quadrilatères ABA'C, BCB'A et CAC'B sont convexes ; ceci est réalisé si et seulement si les 3 angles du triangle ABC sont inférieurs strictement à 2π/3. T est alors confondu avec le point F, solution du problème P2.

**III.3. Une solution pour P1**

On reprend les constructions du problème P3. Il s'agit ici de déterminer un point M tel que f(M)=MA+MB+MC soit minimum.

5 On suppose qu'on a orienté le plan dans le sens contraire de l'orientation du triangle.

Soit M un point quelconque du plan et M' l'image de M par la rotation de centre B et d'angle $\pi/3$ qui fait passer de A à C'. On a donc d'une part, AM=C'M' et BM=BM'=MM'. D'où f(M)= MA+MB+MC=C'M'+M'M+MC. F(M) représente donc la longueur de la ligne brisée C'M'MC. Cette longueur est au moins égale à la longueur C'C et elle sera minimum si M' et M sont sur le segment [C'C] dans l'ordre C', M', M, C.

Par analogie et à cause de la « symétrie » des points A, B et C, le point M doit également être cherché sur [AA'] et [BB']. La question devient alors : est-il possible de trouver un point M situé à la fois sur les trois segments [AA'], [BB'] et [CC'] ? La réponse est donnée par la réponse au problème P3, mais aussi celle du problème P2 : un tel point existe lorsque les 3 angles du triangle ABC sont strictement inférieurs à $2\pi/3$, c'est le point T de P3 qui est confondu alors avec le point F de P2.

Lorsque l'un des sommets du triangle vaut exactement $2\pi/3$, on a vu que F n'existe pas, mais que T existe (il est le point de concours des droites (AA'), (BB'), (CC'). Le point P est lui confondu avec le sommet d'angle $2\pi/3$.

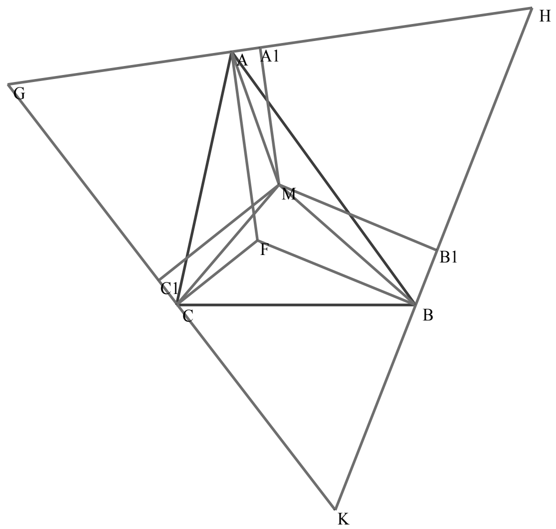
### III.4. Une autre solution pour P1

Considérons un triangle ABC n'ayant aucun angle supérieur ou égal à $2\pi/3$. Soit F le point solution de P2. Prouvons que F réalise le minimum de f(M)=MA+MB+MC, autrement dit F=P. On construit un triangle GHK tel que GH perpendiculaire à FA en A, HK perpendiculaire à FB en B et GK perpendiculaire à FC en C. La caractérisation de F implique que GHK est un triangle équilatéral. Dans le triangle GHK, FA, FB et FC représentent la projection de F sur chacun des côtés. D'autre part, une propriété remarquable des triangles équilatéraux est la suivante : quel que soit le point M intérieur à un triangle équilatéral, la somme des distances aux trois côtés est constante.

Soit M un autre point de GHK, et A1, B1 et C1 les projections orthogonales sur les côtés de ce triangle . Alors :

- d'une part, la somme des projections sur les trois côtés de GHK est égale à FA+FB+FC : MA1+MB1+MC1= FA+FB+FC
- d'autre part, d'après une propriété de la projection orthogonale sur une droite,

MA+MB+MC > MA1+MB1+MC1, F est donc bien le point qui réalise le minimum.



## En conclusion

Nous avons vu que les points P, F et T ne sont confondus que si le triangle ABC a tous ses angles strictement inférieurs à $2\pi/3$, et il est à l'intérieur du triangle.
Le point de Torricelli (solution de P3) existe quel que soit le triangle, et c'est le point de concours des cercles circonscrits aux triangles ABC', BCA' et CAB'.
Si l'un des angles du triangle est égal ou supérieur à $2\pi/3$, par exemple en A (les deux autres sont alors nécessairement aigus), le point proximal est A, le point de Fermat n'existe pas, le point de Torricelli est soit en A si l'angle en A est égale à $2\pi/3$, soit le point de concours des droites (AA'), (BB'), (CC') et il est alors situé à l'extérieur du triangle ABC.

Ainsi, c'est plus qu'un simple problème d'échanges de noms que posent les définitions que nous avons vues : celles-ci ne sont pas équivalentes dans l'ensemble des triangles. La « définition-théorème » 4 laisse supposer que le point de Fermat F existe quelque soit le triangle, et que F=T, ce qui est faux.
Ces confusions sont probablement liées à la nécessité de s'appuyer sur des dessins de triangles « quelconques » pour résoudre les problèmes P1, P2 et P3, et qu'il est toujours difficile de savoir si on a bien pris en compte « tous les cas ».

Citons, pour finir, le théorème suivant.

**Théorème 1 (dit de Fermat).** Si un triangle a un angle supérieur ou égal à $2\pi/3$, son sommet est le proximal P. Sinon, il a un point de Fermat, qui est P.

## Complément. Le point de vue du calcul différentiel

Supposons plus généralement qu'on se donne un nombre fini de points $A_1, A_2, \dots, A_n$ du plan et qu'on cherche à trouver un point $M$ qui minimise la la somme des $f(M)=\sum_k MA_k$ distances de $M$ aux points $A_k$. L'inégalité triangulaire montre que

$$f(M)=\sum_k MA_k \geq \sum_k (OM-OA_k) \geq n\,OM-\sum_k OA_k = n\,OM-f(O)$$

donc $f(M)$ tend vers l'infini quand $M$ s'éloigne à l'infini. On voit aussi que $f(M) > f(O)$ pour $OM > (2/n)\,f(O)$, donc le minimum, s'il est atteint, ne peut l'être que sur le disque fermé de centre $O$ et de rayon $(2/n)\,f(O)$. Comme ce disque est compact et que la fonction $M \hookrightarrow f(M)$ est continue, on conclut d'après le théorème classique sur les bornes inférieures de fonction continue que le minimum est bien atteint sur ce disque. On calcule maintenant la différentielle de la fonction $f$.

Comme $d(AM^2)=d(\overrightarrow{AM}^2)=2\,\overrightarrow{AM}.d\overrightarrow{M}$, la différentielle de la fonction distance

$$M \rightarrow AM=\sqrt{AM^2} \quad \text{vaut} \quad d(AM)=\frac{1}{2}\frac{d(AM^2)}{\sqrt{AM^2}}=\frac{\overrightarrow{AM}.d\overrightarrow{M}}{AM}=\overrightarrow{u_{AM}}.d\overrightarrow{M}$$

où $\overrightarrow{u_{AM}}$ désigne le vecteur unitaire $\overrightarrow{AM}/AM$ porté par la demi droite $[AM)$. Ce vecteur n'a pas de limite quand $M$ tend vers $A$ et la fonction $M \hookrightarrow AM$ n'est pas différentiable au point $A$. On voit que la fonction $M \hookrightarrow f(M)$ est partout différentiable dans le plan à l'exception des points $M = A_k$, et en dehors de ces points on a

$$df=\sum \overrightarrow{u_{A_iM}}.d\overrightarrow{M}.$$

Ceci montre que le minimum est atteint en un point $M$ qui est ou bien l'un des points $A_k$ où la fonction n'est pas différentiable (un point anguleux d'une fonction peut très bien être un extremum !), ou bien un point $M$ tel que la différentielle soit nulle, c'est-à-dire tel que

$$\sum_k \overrightarrow{u_{A_k M}} = \vec{0}.$$

Dans le cas de trois points $A_1$, $A_2$, $A_3$ cette condition a lieu si et seulement si les trois vecteurs unitaires forment entre eux des angles de $2\pi/3$ comme vu précédemment. Les cas où cette conclusion ne s'applique pas s'expliquent par la non-différentiabilité de la fonction distance !
Il est clair que le graphe dans $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$ de la fonction distance $M \hookrightarrow AM$ est un cône d'axe vertical et d'angle au sommet $\pi/4$ au dessus du point $A$, les dérivées partielles dans toutes les directions étant égales à 1 en ce point. On peut en déduire assez facilement qu'un point $A_i$ est un minimum local strict de $f$, avec point anguleux conique pour le graphe de $f$ dans $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$ dès que

$$(*) \qquad \|\sum_{k \neq i} \overrightarrow{u_{A_i M}} . d\overrightarrow{M}\| < 1.$$

En effet la somme $f(M) = \sum_{k \neq i} MA_k$ est différentiable au point $A_i$, mais sa différentielle est trop petite pour compenser les dérivées partielles (égales à 1) de $M \hookrightarrow MA_i$ au point $A_i$. Au contraire, lorsque la norme figurant dans (*) est >1, le point $A_i$ n'est pas un minimum local.
On notera que dans le cas de 3 points, la condition (*) exprime précisément que l'angle sous lequel on voit les deux points $A_k$, $k \neq i$, depuis le point $M$ est > $2\pi/3$.