

PARCOURS D'ÉTUDE ET DE RECHERCHE EN GÉOMÉTRIE POUR LA CLASSE DE SECONDE

« Former des esprits libres et éclairés », Condorcet, 1792

Dominique GAUD
Nicolas MINET
Équipe « lycée », IREM de Poitiers *

Résumé. Cet article expose une façon d'enseigner qui vise à redonner du sens et du dynamisme à l'étude d'objets mathématiques et de leurs propriétés. Inspirés par la notion de parcours d'étude et de recherche (PER), emprunté à la théorie anthropologique du didactique, nous proposons un enseignement fondé sur la recherche de réponses à de grandes questions génératrices d'études. Nous exemplifions notre démarche en montrant un traitement du programme de géométrie plane en seconde.

Mots-clés. enseignement « sensé », question génératrice d'études et de recherches, parcours d'études et de recherches, construction, géométrie.

Introduction

L'enseignement actuel des mathématiques au collège et lycée donne peu satisfaction et ne semble plus répondre aux finalités de l'école. C'est ce que nous essaierons d'argumenter dans la première partie de cet article. En conséquence, une remise en cause des méthodes d'enseignement (voire des contenus¹) nous semble nécessaire et les théorisations didactiques peuvent nous aider à le faire.

Nous proposons, dans cet article, d'illustrer une démarche possible pour tenter d'améliorer l'enseignement des mathématiques, fondée sur une utilisation de l'approche anthropologique du didactique et en particulier de la notion de parcours d'études et recherches due à Yves Chevallard. Nous exemplifierons notre démarche en montrant ce que nous avons fait pour traiter une partie du programme de seconde relatif à la géométrie plane.

La recherche que nous avons menée (et que nous poursuivons) a été possible dans le cadre du projet AMPERES², piloté par l'INRP et la commission Inter IREM de didactique. D'autres équipes (à Bordeaux, Clermont-Ferrand, Marseille, Montpellier, Toulouse) collaborent aussi à cette recherche avec cependant des nuances quant aux orientations de travail choisies. Des liens existent aussi à l'échelle internationale avec des équipes espagnoles et belges. En perspective, le collectif de recherche envisage une mise en ligne, sur le site Educmath de l'INRP, de ressources fondées sur leurs travaux à destination des enseignants.

* Projet mené pour le lycée par D.Gaud, N.Minet, avec la participation de Maryse Cheymol, Nathalie Chevalarias, Caroline Ducos, Cyrille Kirch, Loïc Jussiaume, Roger Terrochaire, Jean Marie Parnaudeau et les enseignants du LP2I de Jaunay Clan (86). Les formateurs de l'équipe collège sont aussi impliqués dans un projet identique au niveau du collège.

¹ Mais ce n'est pas notre propos même si la question est d'actualité.

² <http://educmath.inrp.fr/Educmath/partenerariat/partenerariat-inrp-07-08/amperes>

I. Nos motivations

Lors du travail dont nous esquissons une description dans cet article, il nous a semblé important de relire nombre de textes décrivant les buts et finalités de l'école et, en conséquence, de tenter de faire **en sorte** que nos pratiques professionnelles d'enseignants de mathématiques soient en conformité, autant que faire se peut, avec les grands principes qui y sont décrits. À ce titre, les textes que l'on pourrait citer ici sont nombreux ! Les textes les plus récents insistent sur la nécessaire formation du citoyen : « La formation scolaire favorise l'épanouissement de l'enfant, lui permet d'acquérir une culture, le prépare à la vie professionnelle et à l'exercice de ses responsabilités d'homme et de citoyen »³. Cette demande de formation à la citoyenneté apparaît de plus en plus revendiquée, et des sociologues, comme Jean François Vincent, président de l'OCCE⁴, en souhaitent clairement une prise en compte, non pas dans un moment scolaire spécifique mais dans l'enseignement des disciplines :

L'éducation active à la citoyenneté n'est pas une affaire de recettes miracles mais de stratégies pédagogiques sous-tendues par la volonté de :

- *donner sens aux connaissances et aux concepts enseignés*⁵.
- *mettre les valeurs et les principes que l'Ecole souhaite construire au cœur de son fonctionnement comme au cœur des classes et de la construction des apprentissages.*

Les programmes de mathématiques eux-mêmes, du moins dans les parties introductives, ne sont pas muets sur ces questions. On peut lire dans le programme de Troisième applicable **depuis** la rentrée 2008 :

Comme dans les classes antérieures, la démarche suivie en mathématiques renforce la formation intellectuelle des élèves, et concourt à celle du citoyen [...].

Suite à la lecture de ces textes, qu'il ne s'agit pas de citer tous ici, il est apparu que, pour nous, « former, instruire le citoyen » consiste à contribuer à l'atteinte des objectifs suivants :

- fournir aux élèves les moyens pour vivre en société,
- leur fournir les outils intellectuels pour comprendre le monde dans lequel ils vivent.

Or, force est de constater que les « sujets » abordés en classe sont beaucoup trop souvent coupés de tout enjeu d'instruction du futur citoyen. Les savoirs enseignés sont purement scolaires et ne servent bien souvent qu'à réussir scolairement ! Pourquoi enseigne-t-on des propriétés multiples du triangle ? Pourquoi enseigne-t-on la valeur absolue ? Les réponses toutes faites que l'on donne aux élèves comme « cela forme l'esprit ! » ou « cela te servira plus tard ! » ou « c'est là-dessus que tu seras interrogé au bac ! », « c'est au programme ! » ne contribuent pas vraiment à leur dire en quoi on les éclaire sur le monde dans lequel ils vivent. Ces réponses, données par des enseignants démunis, ne peuvent que contribuer à la démotivation de nombreux élèves pour l'étude de notre discipline.

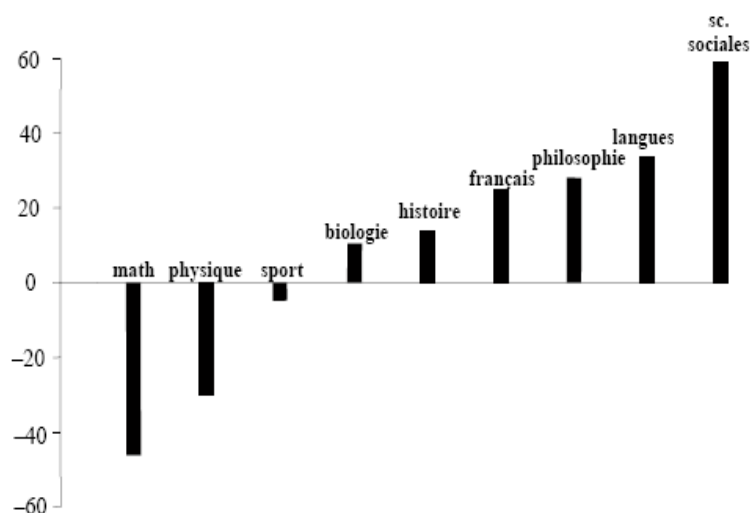
Cette appréciation relève-t-elle seulement d'un sentiment qu'on pourrait croire nourri d'idéologie, et donc sujet à discussion et polémique ? La démotivation des lycéens français

³ Extrait du code de l'éducation : on peut inviter le lecteur à consulter le site : <http://www.legifrance.gouv.fr/WAspad/UnCode?code=CECUCATL.rev>

⁴ L'**Office Central de la Coopération à l'Ecole** (OCCE) est l'organisme national - créé en 1928 - qui fédère la vie et l'action pédagogique d'environ 50 000 coopératives scolaires et foyers coopératifs.

⁵ Soulignés par les auteurs.

pour l'étude des mathématiques (élèves de 15 à 18 ans) apparaît de façon nette à partir de la consultation de 1998. A cette époque, et afin d'instruire une réforme du Lycée, près de deux millions de lycéens remplissent un questionnaire dont des synthèses partielles sont produites au niveau national. En 2005, un échantillon représentatif de 10 000 de ces questionnaires est constitué et analysé par une équipe de sociologues dirigée par Roger Establet [3]. On peut retenir de ce dernier travail quelques traits saillants. Il apparaît tout d'abord que pour les lycéens, les sciences ont avant tout un intérêt scolaire, et non culturel. Les sciences ne parleraient-elles plus du monde, ou bien la partie du monde qu'elles décrivent ne relèverait-elle plus que d'un faible intérêt ? Le graphique suivant fournit des indices pour apprécier quelques éléments du rapport aux disciplines établi par ces élèves.



Il représente, pour chacune des disciplines enseignées, la différence entre citations positives et négatives. On peut noter qu'il est cruel pour les mathématiques et leur enseignement (op. cit p.65). Elles arrivent bonnes dernières, avec - 46 %, suivies en négatif par la physique et le sport ; les sciences sociales obtenant quant à elles le meilleur score : + 56 %. L'analyse de l'échantillon a aussi permis d'établir la valeur que les lycéens attribuent aux mathématiques. Ennui et inutilité prédominant, et l'importance de leur étude est trouvée dans leur nécessité pour réussir dans la vie... professionnelle, et non dans l'éclairage qu'elles fourniraient sur le monde. Le contraste est saisissant avec les proclamations des auteurs des programmes scientifiques du Collège :

Elles [les mathématiques] se nourrissent des problèmes posés par la recherche d'une meilleure compréhension du monde.

Or, malgré cela, nous continuons à penser que les mathématiques sont un formidable instrument pour penser et comprendre le monde. Peut-on sortir de l'ornière dans laquelle nous sommes et redonner dynamisme et vie à notre enseignement, le rendre plus conforme aux buts et finalités affichés dans de grands textes fondateurs mais aussi dans nos programmes ? Nous pensons que cela est possible, et l'objet de cet article est de montrer ce que les formateurs de lycée de l'IREM de Poitiers ont tenté de réaliser.

II. Des parcours d'études et de recherches déterminés par des grandes questions génératrices

II.1. Un double objectif

Nous nous sommes imposé un double objectif :

- envisager un « enseignement sensé » de mathématique
- dégager une méthode de travail accessible à *tout enseignant* de mathématique.

Par « enseignement sensé », nous entendons un enseignement fondé sur la recherche de réponses à des questions problématiques. Cet enseignement diffère de l'enseignement bien souvent pratiqué où on « visite » une notion -comme on visite une salle de musée- et certaines de ses propriétés sans connaître le but de cette visite ni pourquoi on visite certaines propriétés et pas d'autres. Un « enseignement sensé » doit être initié par un questionnement visant à instruire le citoyen, et qui l'aide à répondre à des questions de société, à comprendre le monde dans lequel il vit (ce qui n'exclut pas de comprendre le monde tel qu'il a pu être à certains moments de son histoire). Nous nous imposons aussi que le questionnement proposé structure les savoirs et les techniques rencontrées en respectant les programmes, tout en étant attentif à l'entraînement requis pour la maîtrise de certaines techniques.

Nous sommes également conscients que le problème que nous posons est un problème de l'ensemble de notre profession. Nous n'avons donc fait qu'une amorce d'un chantier important, ce qui nous a conduits notamment à rechercher une méthode de travail accessible à tout enseignant de mathématiques.

II.2. Une piste de travail : les parcours d'étude et de recherche (PER) et les activités d'études et de recherches (AER)

Pour construire un enseignement sensé, nous nous sommes servi des développements récents de la théorie anthropologique du didactique et en particulier de ce que Yves Chevallard désigne par les termes de Parcours d'Etudes et de Recherches (PER) et Activités d'Etudes et de Recherches (AER). Nous avons pris le parti, non pas de présenter linéairement aux élèves des listes de contenus en suivant la présentation des contenus des programmes (ce que font la plupart des manuels, mais qui n'est nullement stipulé par les programmes), mais plutôt de l'organiser autour de Parcours d'Etudes et de Recherche. Ces derniers forment une organisation de l'étude motivée par la recherche de réponses à de grandes questions⁶. De fait, un parcours d'étude et de recherche est motivé par la recherche de réponses même partielles à *une ou plusieurs grandes questions*.

Les notions de PER et de AER n'étant pas complètement théorisées⁷, il importe de préciser ces notions telles que nous les avons comprises.⁸

II.3. Qu'est-ce qu'une grande question?

C'est une question visant à résoudre une classe générale de problèmes mathématiques qui se posent ou se sont posés aux hommes suite à des influences externes ou internes aux mathématiques. Cette question doit :

- être susceptible de générer de nombreuses sous-questions ou réponses,

⁶ Théoriquement dénommées : "questions à fort pouvoir générateur"

⁷ Selon Yves Chevallard lui-même.

⁸ Ces notions évolueront certainement au cours de la recherche.

- permettre la rencontre avec de nouveaux savoirs,
- susciter si possible la mise en œuvre de nombreuses connaissances antérieures,
- amener à la construction d'un PER qui permette de répondre entièrement ou partiellement (selon le niveau scolaire concerné) à la question posée.

Une **grande question** peut être :

- soit reliée à des faits de société tels qu'ils se posent actuellement ou tels qu'ils se sont posés dans le passé et qui aident à comprendre le monde dans lequel nous vivons. Les réponses possibles à ces questions font souvent intervenir différents domaines des mathématiques voire différentes disciplines.
- soit interne aux mathématiques : elle est alors à relier à des grandes questions qui ont fait avancer la science en général et les mathématiques en particulier à une certaine époque.

II.4. Un exemple de grande question

Considérons la question suivante :

Comment construire une figure géométrique astreinte à certaines conditions ?

La classe générale des problèmes posés est celle des constructions géométriques⁹. Les problèmes dits de construction géométrique en cachent plusieurs que l'on peut détailler ainsi :

- Existe-t-il un objet géométrique répondant aux contraintes spécifiées dans la construction ? (Ce que l'on désigne par *contraintes* sont des propriétés géométriques devant être vérifiées par l'objet à construire).
- S'il en existe, combien répondent à la question ?
- S'il en existe, peut-on les construire avec les outils géométriques dont on dispose ?

La réponse peut dépendre fortement des outils et des conditions initiales, savoir de la configuration initiale à partir de laquelle on opère la construction. Le plus souvent, et cela correspond à une tradition historique héritée de la géométrie grecque, les outils sont le compas et la règle non graduée ; dans le secondaire, ce sont souvent implicitement eux qui sont autorisés. On peut néanmoins aujourd'hui se poser la question de la construction d'une figure sur l'écran graphique d'une calculatrice (sur certains logiciels, on peut bloquer l'usage de certaines fonctionnalités, des macro constructions pré-programmées, ce qui revient à enlever de la boîte à outils quelques-uns d'entre eux). Si la construction est possible avec les outils dont on dispose alors il convient d'en donner un programme de construction.

- Une construction étant donnée, est-elle exacte ou approchée ?

Il convient de préciser ce que nous entendons par construction exacte ou approchée¹⁰: suivre un programme de construction d'un objet mathématique (triangle équilatéral, par exemple) peut conduire à une figure qui semble convenir, mais cette figure est-elle pour autant l'objet mathématique cherché ? Si tel est le cas — ce qui doit être démontré — alors la méthode de construction sera dite exacte, sinon elle sera considérée comme approchée. Pour alléger le vocabulaire utilisé, nous parlerons de « constructions exactes » ou « approchées ».

⁹ Voir le document ressource sur la géométrie donnée par le ministère : http://eduscol.education.fr/D0015/doc_acc_clg_geometrie.pdf

¹⁰ *Note du rédacteur de la revue* : une construction approchée peut être le résultat d'une procédure dont on sait qu'elle ne fournit pas une construction exacte de l'objet mathématique cherché, mais qui, dans une certaine limite, conduit à des représentations assez proches de ce qui est attendu.

II.5. Comment déterminer les grandes questions donnant naissance à un PER ?

Il n'y a certainement pas de méthode unique pour déterminer des grandes questions telle celle que nous venons de citer. Après divers essais, nous avons abouti à une méthode qui nous a paru plus féconde que les autres et que nous allons maintenant détailler.

II.5.1. Un manque de questionnement dans les programmes

Le programme fait état de notions à enseigner. Envisager un enseignement sensé passe par une questionnement de la part du professeur : pourquoi ces notions sont-elles à enseigner ?... Elles ne sont pas le fruit d'un hasard mais d'une nécessité elle-même liée à certains types de tâches que les concepteurs d'une certaine époque souhaitaient que les élèves réussissent, notamment à travers les mathématiques « mixtes »¹¹. La succession des programmes a fait que les types de tâches donnant sens aux notions ont quasiment disparu des programmes et il ne reste dans ceux-ci que des contenus, des techniques justifiées ou non, bien souvent vides de tout sens et ainsi perçues comme purement scolaires, faute de motivation explicite de leur fonctionnalité. On peut citer des factorisations sophistiquées ou des développements algébriques virtuoses n'aidant en rien à la résolution de problèmes donnant sens à l'algèbre. Redonner du sens aux mathématiques enseignées nécessite une étude approfondie des programmes afin d'organiser l'enseignement des notions autrement que ce que laisse suggérer leur écriture en terme de contenus et capacités exigibles ponctuelles, et souvent immotivées. Cette écriture qui pourtant ne préjuge pas a priori de l'organisation mathématique à mettre en œuvre, a conduit les manuels à une présentation de contenus morcelés, ce qui détruit toute organisation mathématique digne d'intérêt.

II.5.2. Notre démarche pour choisir des grandes questions

a) Revenir aux sources dans l'histoire et dans l'histoire des programmes

Il nous semble que nous devons trouver ou retrouver les raisons d'être des notions mathématiques enseignées via des questions fondamentales avant de pouvoir justifier pourquoi il peut être utile que nous les enseignions. Ces questions concernent tous les domaines des mathématiques : *Pourquoi étudie-t-on la géométrie ? Pourquoi étudie-t-on les statistiques ? Pourquoi étudie-t-on les fonctions ?* A chacune de ces questions, nous nous proposons de répondre en recherchant l'intérêt de la notion à la fois dans la vie du citoyen, dans les mathématiques et dans les autres disciplines. Cela constitue ce que nous appellerons l'écologie de la notion : *où vit-elle, où la rencontre-t-on ?*

Mais nous devons également réfléchir à la fonctionnalité de la notion. *Quelles questions permet-elle de résoudre ? À quels types de problèmes permet-elle de construire des réponses ?* A cette fin, on peut se demander :

- À quelle époque la notion a-t-elle été créée ? Et pour résoudre quelles questions ?
- Dans quel contexte et à quelle époque la notion a-t-elle été introduite pour la première fois dans les programmes et pourquoi elle l'a été ?

Ce dernier point, que nous n'illustrerons pas ici, est un versant de la recherche qui nécessite des études spécifiques, dont certaines existent déjà grâce aux travaux d'historiens et de didacticiens des mathématiques. Tout cela étaye ce que nous évoquions plus haut : la profession tout entière est concernée.

¹¹ Le découpage disciplinaire aux XVII^{ème} et XVIII^{ème} englobait sous ce terme de "mathématiques mixtes" des champs tels que la mécanique, la cinématique, l'astronomie,...

Un exemple : Les problèmes de constructions géométriques

En regardant dans l'histoire, les constructions de figures géométriques jalonnent l'histoire des arts (architecture, peinture) et celles des ouvrages d'art comme la construction du tunnel d'Eupalinos dans l'île de Samos au Ve siècle avant J.C.. Les constructions géométriques ont fait partie des préoccupations humaines car liées à des besoins évidents. En témoignent les ouvrages suivants :

- Livre sur ce qui est nécessaire à l'artisan en science de la géométrie *d'Abul Wafa (Xe siècle) dans lequel les constructions portent essentiellement sur les polygones réguliers, sur des inscriptions et circoncriptions, sur des partages de figures en aires égales et en quadratures diverses.*
- La géométrie (1525), *écrit par Dürer, ouvrage à l'usage des artisans et des artistes n'est ni un recueil de recettes ni un traité érudit.*
- Le Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan, *dans lequel Desargues fonde en 1639 la géométrie des transformations. Les préoccupations de Desargues ne sont pas purement spéculatives car il est aussi architecte et a des nécessités très pratiques concernant en particulier la taille des pierres.*
- La géométrie descriptive *de Monge, dessinateur qui s'est fait remarquer par le tracé d'un plan de sa ville natale, Beaune. Entré comme dessinateur à l'école royale du génie de Mézières, il réalise des plans de fortifications pour lesquels il avait à résoudre des problèmes de défilement (établir le relief de différentes parties des fortifications). Pour cela il jette les bases d'une nouvelle technique : la géométrie descriptive.*

Plus près de nous, on peut voir que cela reste un problème de recherche actuelle dès lors que l'on se demande comment représenter une figure du plan ou un objet de l'espace sur l'écran graphique d'une calculatrice ou sur l'écran d'un ordinateur. Au passage, notons que le libellé des programmes actuels, au moins sur cette question des constructions géométriques nous conduit plus à regarder vers le monde des hommes passé que vers le monde à venir. Dans notre monde, on peut voir vivre les constructions géométriques dans le domaine de l'architecture, dans la réalisation de jardins, les arts, l'élaboration d'objets de la vie quotidienne, dans les sciences comme l'optique, la mécanique, l'astronomie, la cristallographie, la biologie...

b) Recherche de types de tâches

La recherche de réponses aux questions générales sur l'intérêt d'étudier les domaines des mathématiques met en avant des tâches ou bien des types de tâches. Par exemple :

- À la question *Pourquoi étudier la géométrie dans l'espace ?*, une réponse peut être : *Pour représenter dans le plan un objet spatial* ; une autre peut être : *Pour calculer des volumes.*
- À la question *Pourquoi étudier la géométrie ?*, une réponse peut être : *Pour comparer des aires* ; une autre peut être *Pour construire des figures.*

Ainsi voit-on apparaître des types de tâches *significatifs* qui donnent sens aux notions. Même s'il mériterait d'être étayé - il vaut toujours mieux que les absences de motivations de certains contenus scolaires - le survol précédent sur l'histoire et l'actualité des constructions peut justifier en première approche qu'ait été retenue comme significatif le type de tâches « construire une figure géométrique (astreinte à des conditions) ».

Nous avons pu constater que trouver des types de tâches n'est pas si immédiat, et qu'elles ne viennent pas toujours rapidement à l'esprit des professeurs de mathématiques (y compris nous-mêmes!) : notre culture professorale ne nous invite guère à ce genre de démarche.

c) Formulation des grandes questions

Ayant retenu le type de tâches *Construire des figures géométriques astreinte à des conditions* comme significatif dans l'étude de la géométrie, on peut se demander maintenant quelles sont les techniques associées à ce type de tâches. La formulation correspondant à ce questionnement est justement ce que nous appelons une **grande question**, car les réponses à apporter seront nombreuses, ce qui en fait une question a priori digne d'intérêt pour l'étude de la géométrie. Mais cela suffit-il à en faire une question utilisable pour organiser l'enseignement d'une partie des contenus d'un niveau scolaire donné ?

III. Organiser (une partie de) son enseignement d'une année scolaire dans un PER

Pour organiser à partir d'une grande question, l'étude de certains contenus d'une année donnée dans un PER, nous allons repartir des types de tâches et rechercher quelles sont les techniques pour pouvoir les réaliser.

III.1. Recherche de techniques pour résoudre les types de tâches

Les techniques pour résoudre un type de tâches sont variées. Elles dépendent du type de réponse attendue, du contexte dans lequel la question est posée, du niveau mathématique de celui qui répond mais aussi du niveau auquel on se place dans notre enseignement. Ainsi pour répondre à la question : *Comment comparer des aires ?*, on peut utiliser le découpage, les quadrillages, la superposition par calque, les formules, le calcul intégral, etc.

III.2. Choix de grandes questions

Résumons : pour un domaine des mathématiques (par exemple la géométrie plane) une liste de types de tâches significatifs est retenue, liste étayée notamment par la connaissance de problèmes dignes d'intérêt, d'applications actuelles ou historiques de la science, et éventuellement la connaissance des évolutions des programmes scolaires. Reste au professeur à choisir un compromis entre les types de tâches listés et le programme qu'il doit, en bon fonctionnaire, enseigner. C'est la **recherche précédente de techniques** qui peut lui permettre de trancher ; en effet, les techniques citées peuvent laisser penser au premier abord que les programmes de sixième (découpages, quadrillages, formules, ...) et de Terminale (calcul intégral) contiennent des contenus aptes à être présentés comme réponse à la question "comment comparer des aires ?". Certes, nous n'avons pas encore tout à fait précisé comment on peut organiser son enseignement une fois la grande question choisie (quels énoncés, quelles synthèses, quelles organisations didactiques locales, ...) - cela fera l'objet du § III.3 et de l'exemplification du §IV - mais nous avons ici dégagé la partie la plus coûteuse en temps de la méthodologie que nous souhaitons détailler.

On voit que le chantier est considérable s'il doit être mené par un professeur pour chacun de ses niveaux d'enseignement. Même s'il est possible de ne commencer en organisant une partie de son enseignement, on constate une fois de plus la nécessité de la mutualisation des efforts de la profession.

III.3. Vers les AER

Les réponses à une grande question - une fois celle-ci présentée aux élèves - ne peuvent pas être produites spontanément par les élèves. L'enseignant doit en organiser et diriger l'étude sous forme de parcours. Celui-ci est **balisé** par des activités d'étude et de recherche (AER) que nous nommons, avec les élèves, encore *Activités* bien que, de notre point de vue, cela n'ait plus grand chose à voir avec les activités que l'on trouve usuellement dans les manuels. Il ne s'agit pas de résoudre un problème particulier mais bien de contribuer à la recherche de solutions à une grande question, laquelle est connue des élèves. Ces AER peuvent permettre :

- d'introduire en situation les notions nouvelles,
- de motiver connaissances et savoir-faire anciens (calculer avec des lettres par exemple),
- d'étudier des réponses diverses à une question donnée.
- de situer l'état des réponses à la grande question.

Chaque AER, après correction, fait l'objet d'une synthèse portant sur :

- les savoirs nouveaux et anciens à utiliser
- les savoir-faire à maîtriser pour résoudre le type de tâches proposé.
- l'état de la question traitée, ce que nous appelons l'historique de la question.

Le professeur doit choisir à la fois les connaissances qu'il faut institutionnaliser et les savoir-faire qu'il choisit de faire travailler spécifiquement par des exercices appropriés, ce qu'on nommera « travail de la technique ». Notons que les AER diffèrent des précédentes « activités » : d'une part les exercices qui suivent une AER sont "de même importance que l'AER" puisqu'on y rencontre le même type de tâche, l'AER n'étant donc pas un prétexte pour faire un cours mais un moment décisif pour la suite de la vie des contenus étudiés en classe ; d'autre part, les AER sont connectées entre elles, car leur raison d'être est de répondre à une même grande question ; cela évite l'émiettement des savoirs et fait vivre, quand ils sont utiles, les connaissances et ces savoir-faire. Et c'est sur ces connaissances et ces savoir-faire que les élèves seront évalués.

Il nous est apparu que les grandes questions que nous pouvons retenir par notre démarche peuvent être « hiérarchisées » ; aussi les questions dévolues aux élèves peuvent-elles parfois être qualifiées de "sous-questions" dont le choix est lié à l'analyse de la grande question. Ainsi, si nous choisissons en Seconde, la question : *Comment construire une figure astreinte à respecter des conditions ?*, nous pouvons alors choisir de nous poser la sous-question : *Comment savoir si la construction réalisée est exacte ou approchée ?* (conduit-elle à l'objet mathématique annoncé)? Cette sous-question sera introduite elle-même par une AER qui nous amènera à outiller les élèves, par exemple, avec les triangles isométriques. Le travail de la technique portera sur la maîtrise des triangles isométriques pour faire des démonstrations. Baliser le parcours par des sous questions permet de dynamiser globalement l'étude. La richesse des AER, la confrontation des idées de résolution et les relances de l'enseignant permettent de dynamiser localement le parcours.

IV. Organiser l'enseignement autour de PER en classe de Seconde. L'exemple de la géométrie plane

Pour fonder une organisation mathématique globale de l'année de Seconde qui tente de présenter aux élèves de véritables raisons d'être des savoirs au programme, par l'étude au long cours de réponses à des questions dignes d'intérêt, comme cela est indiqué dans l'intitulé

du projet de la recherche, nous avons choisi de partir des questions suivantes, très générales, sur les trois domaines étudiés en Seconde : « Pourquoi étudier les fonctions ? », « Pourquoi étudier la géométrie ? », « Pourquoi étudier les statistiques ? ».

On pourra trouver en annexe un tableau montrant comment nous avons structuré tout le programme de la classe de seconde.

IV.1. Choix de grandes questions pour la géométrie plane pure

Notre méthodologie nous a amenés à choisir trois questions (d'autres questions auraient pu être choisies !) pour traiter le domaine de la géométrie plane en classe de Seconde :

Question 1 : Comment construire une figure astreinte à des conditions ? (nous traitons en particulier la question de savoir comment inscrire ou circonscrire une figure à une autre)

Question 2 : Comment savoir si une méthode de construction est exacte ou approchée ?

Question 3 : Comment construire des segments de longueur donnée par des relations entre d'autres longueurs ?

Nous ne pourrions que répondre partiellement à ces questions car les méthodes de résolution sont diverses et dépassent parfois le cadre de l'année de Seconde :

méthode d'analyse-synthèse

abandon de contraintes,

méthodes des deux lieux

algébrisation du problème

utilisation d'outils « euclidiens » (propriétés sur les angles, triangles isométriques,...)

Nous avons notamment choisi d'aborder des constructions possibles avec un usage de l'algèbre. Ce choix est guidé par notre volonté de redonner du sens à l'apprentissage de l'algèbre, ce qui nous conduit à travailler en classe un autre genre de tâches : « Comment calculer une grandeur en fonction d'une autre ? ». Nous abordons ainsi des types de tâches qui se retrouveront dans les parcours sur les fonctions. La deuxième partie de l'article illustrera notre méthode en décrivant l'introduction et le début du traitement des Questions 1 et 2 (partie gauche du schéma suivant).

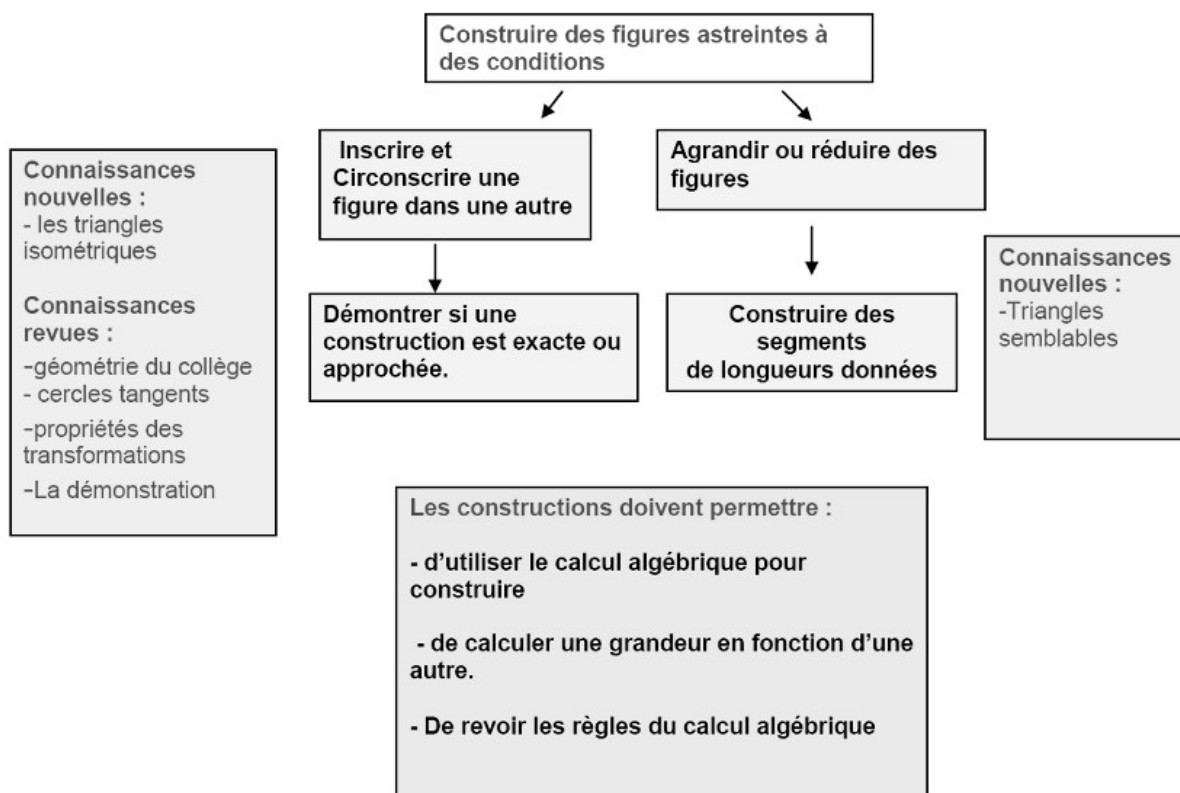
IV.2. Un schéma de parcours pour traiter des constructions géométriques

Parmi les problèmes de constructions, nous avons choisi de nous intéresser à ceux qui relèvent (dans un sens très large) des inscriptions et circoncriptions, et ce pour deux raisons :

- ils permettent d'aborder les contenus du programme de seconde que nous souhaitons aborder,
- ils sont susceptibles d'être reliés facilement à des « situations du monde » que les hommes ont eu à résoudre comme le montre un diaporama d'introduction ¹².

¹² Voir le site Educmath http://educmath.inrp.fr/Educmath/insuffisant_privileges?came_from=http%3A//educmath.inrp.fr/Educmath/parteneriat/parteneriat-inrp-08-09/Cdamperes/geometrie-en-seconde/view%3Fset_language%3Den&retry=&disable_cookie_login__=1

Voici le schéma conçu en début d'année.



Comme le montre ce schéma,

- les anciennes connaissances de géométrie côtoient les nouvelles ;
- l'enseignement de l'algèbre est intimement lié à celui de la géométrie ;
- le calcul algébrique est motivé par un de ses usages historiques : les problèmes de constructions ;
- la démonstration se place dans un cadre purement intellectuel et interne aux mathématiques : il s'agit de savoir si des constructions proposées, qui peuvent sembler satisfaisantes à l'œil nu, sont exactes ou bien approchées, ou encore fausses ;
- contrairement à ce qu'exposent de nombreux manuels suite au libellé du programme, les triangles semblables sont dissociés des triangles isométriques. A ce niveau les triangles isométriques sont avant tout un outil démonstratif alors que les triangles semblables sont surtout un outil de calcul.

Ce schéma montre aussi la difficulté de la gestion en classe de savoirs enseignés nouveaux et d'autres revus. Il importe que l'élève ne se perde pas dans un ensemble enchevêtré de connaissances. Les questions génératrices aident à organiser la structuration de l'activité et des traces écrites de l'élève en lui en rappelant les buts du travail mené.

IV.3. Présentation du parcours aux élèves

Les élèves doivent connaître la ou les questions que nous proposons de leur faire étudier. Autrement dit, il doit y avoir dévolution de la ou des questions dès le début du parcours, et des problèmes de la vie des hommes qu'elles permettent de traiter, faute de quoi il ne nous semble pas qu'on aura réellement répondu aux buts de notre recherche.

a) Premier temps (20 mn)

Le professeur initie le travail du parcours en posant la question suivante :

Dans quel domaine de la vie a-t-on besoin de la géométrie ? (On peut regarder autour de nous ou regarder les professions qui utilisent la géométrie). Pourquoi a-t-on besoin de la géométrie et pour quoi faire ?

Par ce jeu de questions, il s'agit de montrer aux élèves que l'étude de la géométrie a d'autres buts que l'acquisition de connaissances purement scolaires et que le véritable enjeu est bien d'apporter un éclairage sur des éléments extérieurs à l'école.

b) Deuxième temps (30 mn)

La liste des domaines dans lesquels la géométrie est utile est longue. Remarquons que de nombreux domaines de la vie sont cités par les élèves : construction d'une maison, calculs de volumes ou d'aires, réalisation des images 3D, design, ... Le professeur présente un diaporama (évoqué au début de 4.2) pour illustrer cela qui leur ouvre d'autres perspectives¹³ mais aussi pour pointer ce qui va être objets d'études en classe. Le diaporama est ainsi important dans notre dispositif – nous y précisons d'ailleurs pourquoi les constructions seront demandées la plupart du temps « à la règle et au compas » - car il sert de « conférence inaugurale », laquelle montre les orientations à venir du travail proposé aux élèves, en l'occurrence, l'étude des questions suivantes :

- Comment construire ou reproduire une figure devant respecter des conditions ? (en particulier une figure inscrite ou circonscrite à une autre)

- Comment savoir si une construction est exacte ou approchée ?

La synthèse résultant de ces deux premiers temps est importante car c'est elle qui conditionne la dévolution des questions auxquelles nous proposons d'apporter des réponses. Les élèves la prennent en notes comme un premier élément du cours.

IV.4. Première étape du parcours : comment analyser une figure et la reproduire ?

a) Dynamique de l'étude (50 mn)

Le professeur présente ce qui va faire objet d'études.

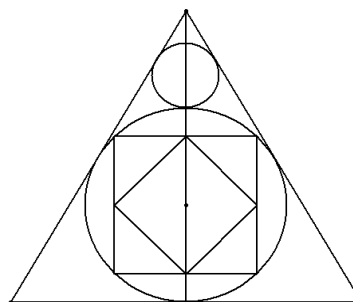
On trouve dans les tablettes de bois japonaises de nombreuses figures mathématiques. Elles sont accompagnées d'écrits qui sont en fait des calculs de grandeurs (longueurs de segments, aires etc.). En revanche, les constructions parfois très difficiles ne sont pas explicitées. On se propose de reproduire une telle construction. Notre travail va nous conduire à nous interroger sur ce qu'il faut faire pour pouvoir reproduire une figure.

¹³ notamment pour des élèves ayant choisi une option telle « arts plastiques », pour informer du contenu de géométrie dans l'espace de l'option Mathématiques en filière L,...

Activité 1 : reproduire¹⁴ une figure

Reproduire ce sangaku¹⁵ à l'aide d'un logiciel de géométrie ou bien sur papier et en utilisant les instruments de géométrie (règle, équerre et compas).

On partira du grand triangle.



L'analyse de la figure peut débiter en commun sous la direction du professeur. Rien n'indique que le triangle est équilatéral, le cercle tangent aux côtés, etc. Le professeur doit préciser avec les élèves les propriétés attendues. Ensuite, le travail de l'élève peut commencer, de préférence en petits groupes afin que s'opèrent des échanges. Le professeur peut relancer l'étude par l'intermédiaire de questions cruciales :

- Comment construire le cercle inscrit dans un triangle ? Pourquoi la construction convient-elle ? Si les élèves travaillent sur logiciel, on peut déplacer un point pour voir si la figure « suit ».
- Comment construire dans un cercle un carré ayant un côté parallèle à une droite donnée ?
- Comment construire un cercle tangent à deux droites et un cercle ?

b) Bilan de l'étude (30 mn)

Une mise en commun du travail des élèves est faite, avec le cas échéant un débat sur certaines productions et des propositions de corrections. L'institutionnalisation porte à la fois sur quelques constructions élémentaires (constructions des bissectrices et du cercle inscrit,...), sur des propriétés géométriques (droites remarquables du triangle et leurs points de concours,...) mais aussi sur la contribution de l'étude à la résolution de la question de construction de figures (nécessité de l'analyse de la figure, i.e de la recherche de propriétés nécessairement vérifiées, usages de théorèmes et définitions pour justifier la construction,...). Les constructions élémentaires, les propriétés géométriques à connaître sont l'objet de fiches distribuées aux élèves. Ce qui concerne la partie construction est noté dans une partie qu'on pourra appeler « historique de la question » du classeur de l'élève.

Suite à l'activité 1, voici ce qui peut par exemple être noté :

- Les questions du parcours :
Comment construire une figure ?
Comment savoir si une méthode de construction est exacte ou approchée ?
- Bilan de l'activité 1.
Un premier type de construction est la reproduction. Pour reproduire une figure, on doit savoir
 - analyser la figure pour déterminer un ordre de construction.
 - justifier que les constructions faites donnent bien la figure espérée, par recours à des théorèmes et des définitions.

¹⁴ Par reproduire, nous entendons refaire une figure qui respecte les contraintes visualisées par **un exemple générique fourni** : ainsi, l'exemple générique donné spécifie **un** triangle équilatéral, son cercle inscrit etc..

¹⁵ source : <http://www.wasan.jp/english/>

Les connaissances à maîtriser sont les suivantes :

- le triangle et les droites remarquables (ainsi que les points de concours). Ceci est rappelé dans la fiche connaissance 1.
- les cercles tangents (le rappel est fait dans la fiche connaissance). (Cette fiche est commentée par le professeur à l'aide d'une animation geogebra).

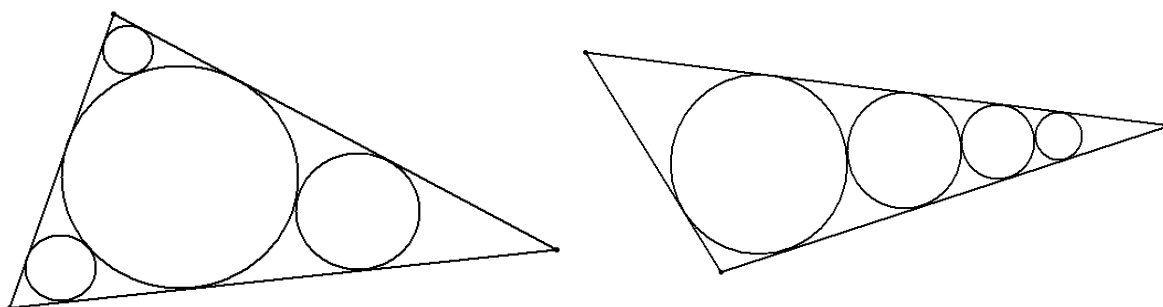
Cette partie « historique de la question traitée » est essentielle pour la compréhension de l'organisation par l'élève. Elle est complétée au fur et à mesure des AER. Elle est indépendante des connaissances revues (en général sous forme de fiches connaissances ou fiches méthodes) et des connaissances nouvelles qui sont notées dans le cours.

c) Le travail de la technique

Les exercices d'application doivent être des tâches « équivalentes » à la tâche précédente c'est-à-dire dans ce cas des reproductions. Des choix sont nécessaires, car de nombreuses connaissances ont été institutionnalisées lors de la première étude. Nous nous centrons sur ce qui est le plus nouveau : les cercles tangents et les propriétés des bissectrices.

Exemple d'exercice.

Reproduire à la règle non graduée et au compas les deux Sangakus suivants en partant des triangles qui sont quelconques :



IV.5. Deuxième étape du parcours : constructions exactes ou approchées ?

a) Dynamique de l'étude

Nous dynamisons l'étude par la dévolution du problème de l'exactitude de la construction. En tant qu'apprenti mathématicien, il convient de savoir si les constructions effectuées sont exactes ou approchées (conduisent-elles aux objets mathématiques annoncés ?). Nous proposons des constructions qui sont tirées d'un livre d'Abul-Wafa mathématicien arabe du Xème siècle. On se place **en tant que mathématicien** qui cherche à savoir si les méthodes proposées par Abul-Wafa sont des méthodes exactes ou approchées, en sachant que les constructions effectives ne peuvent être qu'approchées.

b) Activité 2 : exact ou approché ?

Parmi les problèmes de géométrie rencontrés par les artisans et artistes depuis l'Antiquité, figurent en particulier des problèmes « d'inscription » et « de circonscription ». On les retrouve chez les **géomètres grecs de l'Antiquité** (voir lien avec le cours d'histoire) ou les **mathématiciens chinois** bien avant notre ère. On les trouve aussi chez les artisans Arabes pour construire des fresques (comme dans l'Alhambra de Grenade) ce qui a conduit Abul

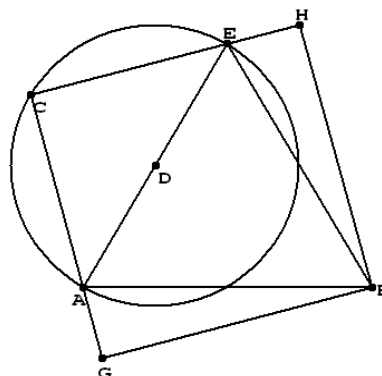
Wafa à écrire un ouvrage intitulé « Livre sur ce qui est nécessaire à l'artisan en science de la géométrie », dans lequel il donne des moyens de construire des figures en particulier inscrites ou circonscrites à d'autres figures¹⁶. Certaines constructions sont mathématiquement exactes, d'autres sont des constructions approchées.

Construction 1. Circonscrire un carré à un triangle équilatéral.

Soit ABE un triangle équilatéral. On trace la médiatrice de $[AE]$ et on place D le milieu de $[AE]$. On place C sur $[BD]$ extérieur au triangle ABE tel que $DC = DE$. La perpendiculaire à (CE) passant par B coupe (CE) en H et la perpendiculaire à (CA) passant par B coupe (CA) en G .

Alors $CHBG$ est un carré circonscrit à ABE .

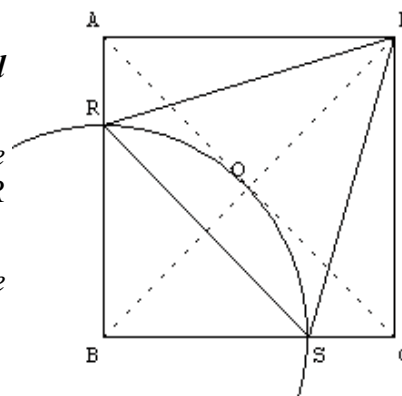
La construction proposée par Abul Wafa est-elle exacte ?



Construction 2. Inscire un triangle équilatéral dans un carré.

Soit $ABCD$ un carré de centre O et C le cercle de centre B passant par O . Le cercle C coupe $[AB]$ en R et $[BC]$ en S .

Abul Wafa¹⁷ affirme que DRS est équilatéral. Est-ce vrai ?



L'une de ces constructions est exacte, l'autre approchée. Pour l'établir, il convient de procéder à des démonstrations. Le professeur peut organiser l'étude en posant aux moments opportuns des questions cruciales. Ainsi, pour la première construction, après une recherche individuelle, il peut faire lister un certain nombre de techniques qui pourront être répertoriées dans des fiches méthodes :

- comment démontrer qu'un quadrilatère est un carré ?
- comment démontrer qu'un quadrilatère est un rectangle ?
- comment démontrer que deux segments ont la même longueur ?
- comment démontrer qu'un triangle est rectangle, rectangle isocèle ?

Ces techniques doivent être justifiées par des théorèmes ou des définitions vues au collège.

Pour la seconde construction, il s'agit de comprendre à l'aide d'une démonstration que la figure proposée par Abul Wafa n'est pas un triangle équilatéral. Cette fonction de la démonstration est peu fréquentée par les élèves : on leur demande rarement de démontrer qu'une assertion est fautive (sinon par contre-exemple) ; plus généralement, le doute a rarement voix au chapitre en classe, et l'injonction « démontrer que », omniprésente dans les énoncés d'exercices classiques, trop « fermés », masque la fonction sociale de la démonstration, à savoir convaincre de la validité d'un résultat, qui est l'une des raisons de

¹⁶ F. Woepcke, février -mars 1855: /Analyse et extrait d'un recueil de constructions géométriques/ d'Abul Wafa, journal asiatique, 5 de la série 5.

l'enseignement des mathématiques.

Enfin, ce travail est aussi l'occasion de rappeler les règles du calcul littéral car la seconde démonstration fait appel à des calculs.

c) Le bilan de l'étude et le travail de la technique sont organisés selon des principes identiques à ce que nous avons présenté pour la première étude. Ainsi la suite de « l'historique » comprend-elle ceci : savoir si une méthode est exacte ou approchée ou savoir si telle figure qui semble être exacte l'est vraiment, nécessite des arguments qui ne peuvent pas être issus de nos sens (vue, mesure, ordinateur) mais d'une argumentation qui, en mathématiques, a une certaine forme : c'est un discours logique utilisant des données, des théorèmes et des définitions. Le discours doit être logiquement imparable. Un rappel est fait concernant la manière de rechercher et rédiger une démonstration. On rappelle qu'une possibilité pour démontrer est de calculer - ce qui donne l'occasion de rappeler les règles du calcul littéral. Là aussi ces règles sont énoncées à un moment où le besoin s'en fait sentir et sont notées dans une fiche « connaissances ».

d) travail de la technique

Cette étude est suivie d'un travail de la technique centrée sur la démonstration et sa rédaction. Voici deux exemples d'exercices possibles.

Exercice 1.

Dans un cercle de rayon R et de centre O , on trace un diamètre $[AB]$. Soit I le milieu de $[OB]$.

La perpendiculaire à (AB) passant par I coupe le cercle en D et E .

Le triangle ADE est-il équilatéral ?

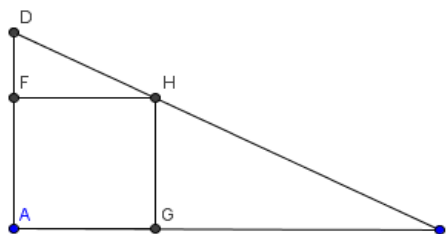
Exercice 2.

ABD est un triangle rectangle. $AD=a$ et $AB=2a$.

On place F sur $[AD]$ tel que $AF = \frac{2}{3}a$

La perpendiculaire à (AD) passant par F coupe (BD) en H . La perpendiculaire à (AB) passant par H coupe (AB) en G .

$FHGA$ est-il un carré ?



IV.6. Troisième étape du parcours : de nouvelles techniques pour savoir si des constructions sont exactes ou approchées

a) Dynamique de l'étude

Dans la deuxième étape du parcours, on a pu voir que savoir si une construction est exacte ou approchée suppose des théorèmes afin de faire des démonstrations. Les théorèmes utilisés étaient déjà connus des élèves. Dans cette étape on propose un problème qui ne pourra être résolu par les élèves avec leurs connaissances antérieures : ce sera l'occasion d'introduire les triangles isométriques.

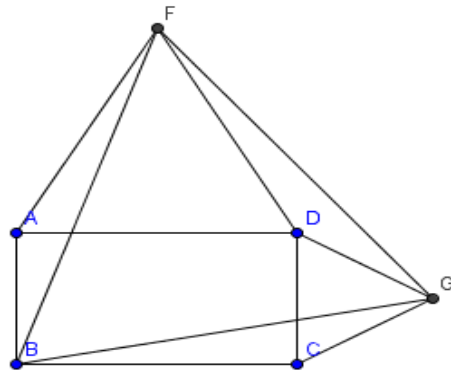
¹⁷ L'affirmation selon laquelle DRS est équilatéral est formulée à destination des artisans pour lesquels Abul Wafa a rédigé l'ouvrage cité précédemment, ouvrage qui n'est pas une oeuvre mathématique mais un livre ayant pour finalité la réalisation, par ces mêmes artisans, de tracés *satisfaisants*.

b) L'activité 3

On souhaite résoudre le problème suivant :

$ABCD$ est un rectangle. On construit les triangles équilatéraux CDG et ADF .

BFG est-il équilatéral ?



Le professeur organise la recherche du problème par l'intermédiaire de questions cruciales :

- comment démontrer qu'un triangle est équilatéral ?
- comment savoir que deux segments ont la même longueur ?

On peut s'attendre à ce que les élèves disent que les triangles sont superposables. Ceux-ci n'ont pas a priori les connaissances requises : ils possèdent depuis la cinquième la technique qui ne peut être qu'empirique, car ils savent par habitude que le triangle dont on connaît deux côtés adjacents à un angle est unique (nous dirions à une isométrie près) et donc que deux triangles qui ont deux côtés respectifs égaux adjacents à deux angles égaux ont leurs autres éléments (côtés et angles) de même mesure. Ils ont alors à disposition un élément technique sans la technologie associée (c'est-à-dire qu'ils ne peuvent pas justifier).

c) De nouvelles connaissances

Nous introduisons alors les triangles isométriques en en proposant une définition puis lançons l'étude de la question « Quand peut-on dire de deux triangles qu'ils sont isométriques ? » L'étude que nous ne détaillerons pas ici conduit à examiner les différents cas où l'on connaît trois données (angles et côtés). Un cours classique institutionnalise les connaissances et détaille quels types de tâches cette notion est susceptible de résoudre.

Un temps de bilan et de travail de la technique est proposé selon les mêmes modalités que ci-dessus : nous complétons l'historique par une deuxième méthode de démonstration qui consiste à utiliser, après les configurations clés de collège (activité 1) et l'algèbre (activité 2) de nouveaux outils : les triangles isométriques (« nouveaux » au programme, bien que les élèves les aient fréquentés depuis la classe de 5ème !!!), les exercices proposés lors du travail de la technique sont classiques.

Exercice 1

Les polygones réguliers ont été étudiés dès l'antiquité par les mathématiciens grecs et on les retrouve dans de nombreux motifs architecturaux comme les vitraux (rosaces) mais aussi en peinture (Vasarely).

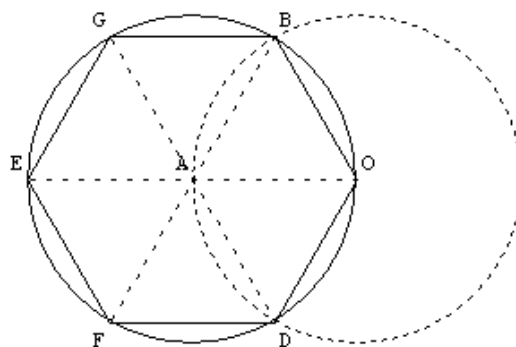
On rappelle qu'un polygone régulier est un polygone inscrit dans un cercle dont tous les côtés ont la même longueur.

Voici une construction donnée par Euclide au III^{ème} avant notre ère

On veut inscrire un hexagone régulier dans un cercle (C) de centre A. On choisit O sur ce cercle puis on trace le cercle de centre O passant par A qui coupe le cercle en B et D.

On trace les points E, F et G diamétralement opposés respectivement à O, B et D sur le cercle de centre A.

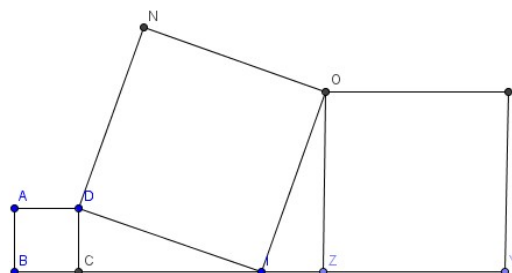
Justifier que la figure obtenue est un hexagone régulier (un hexagone régulier est un hexagone qui a ses côtés de même longueur et ses angles au sommet égaux).

**Exercice 2**

Sur la figure ci-dessus ABCD, ZOKY et DION sont des carrés.

1. Démontrer que les triangles CID et IZO sont isométriques.

2. En déduire que l'aire du carré DION est égale à la somme des aires des deux autres carrés ABCD et ZOKY.

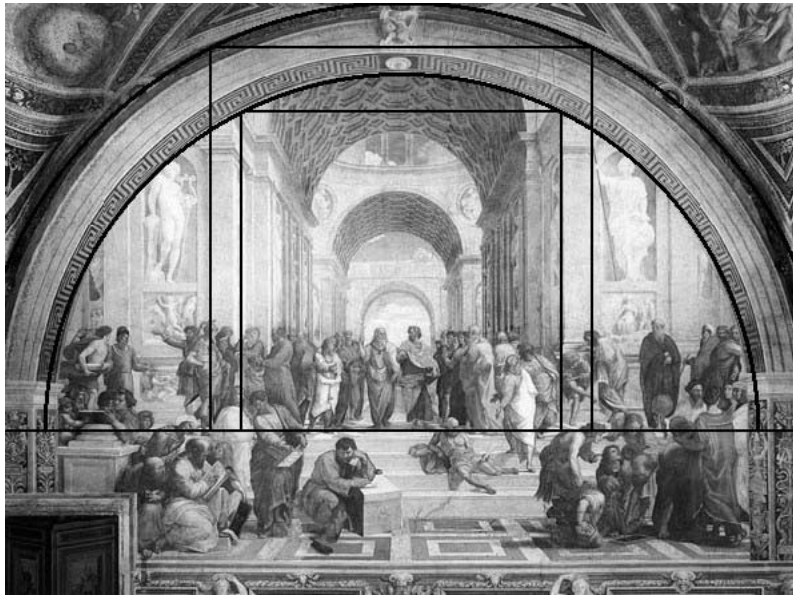
**IV.7. Quatrième étape du parcours : l'algèbre pour construire****a) Dynamique de l'étude**

Après les études portant sur la question des constructions exactes et approchées, le professeur propose de revenir à la question initiale des constructions. Afin de se centrer avec les élèves sur le travail de l'outil algébrique, les constructions se feront non pas à la règle et au compas mais sur un logiciel de géométrie.

b) L'activité 4

Raphaël dans sa fresque célèbre « L'école d'Athènes » a utilisé la construction d'un carré dans un demi cercle. Pouvez vous retrouver ce tableau dans votre manuel d'histoire ? (Un diaporama bref montre le tableau et situe historiquement le tableau)¹⁸

¹⁸ Voir par exemple <http://pagesperso-orange.fr/nvogel/Dossiers/FichiersPersp/Galerie/Athenes1.html>



Dans cette œuvre symbolisant la recherche rationnelle de la vérité, l'artiste a réuni les sages d'époques variées.

L'analyse du tableau fait apparaître un carré inscrit dans un cercle.

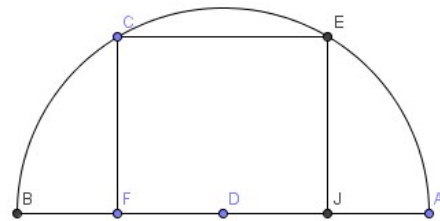
On se propose, tout comme Raphaël, de construire un carré dans un demi-cercle, un des côtés du carré étant porté par le diamètre.

Soit (C) un demi-cercle quelconque de centre O et de rayon r .

1. On suppose que la figure est construite pour l'analyser (Faire un dessin à main levée).

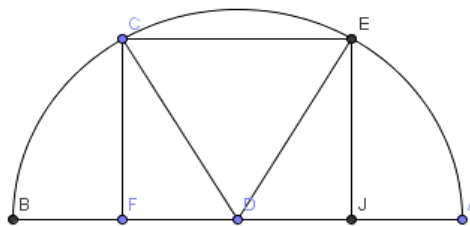
- Expliquer pourquoi la figure possède un axe de symétrie.
- Calculer le côté a du carré en fonction de r .

2. Utiliser ce résultat pour construire le carré à l'aide d'un logiciel de géométrie. Justifier.



c) Une solution possible

Soit D le centre du demi-cercle. On a : $DC = ED$. Le triangle CDE étant isocèle les angles FCD et DEJ sont égaux et les triangles CFD et DJE sont isométriques. Donc D est le milieu de $[FJ]$. On peut aussi dire que l'axe médian du carré est axe de symétrie de la figure.



Analysons la figure. Posons $x = JF$, on a $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + x^2 = r^2$ donc $\frac{5x^2}{4} = r^2$ soit $x = \frac{2r}{\sqrt{5}}$.

On peut s'inspirer de ce calcul de x en fonction de r pour construire le carré.

Cela conduit par exemple à la méthode de construction suivante, mise en œuvre comme demandé sur logiciel : partant du demi-cercle de diamètre $[AB]$ et de rayon r , on construit F et

J tels que $DF = DJ = \frac{r}{\sqrt{5}}$ puis construire enfin C et E . Reste à démontrer que, par cette

méthode de construction, $FJEC$ est bien un carré. Cela peut se faire en vérifiant que $FJEC$ est un rectangle ayant deux côtés consécutifs égaux.

On voit ainsi une utilisation de l'algèbre pour résoudre un problème de construction (ce problème classique est habituellement vu en 1ère S et résolu purement géométriquement avec des homothéties). Ici, le calcul est un élément essentiel de la résolution.

d) Bilan de l'étude

Le bilan fait apparaître la contribution de l'algèbre dans les problèmes de construction et la nécessité de savoir manipuler les règles du calcul algébrique pour savoir calculer des grandeurs en fonction d'autres grandeurs. Le travail de la technique se fait avec des problèmes de même type.

Dans *l'historique*, nous notons que pour construire une figure astreinte à respecter des conditions, on peut supposer la figure construite pour calculer des éléments de cette figure qui permettront d'effectuer la construction effective. Ce qu'on va travailler désormais, c'est l'usage de l'algèbre pour « construire » des figures.

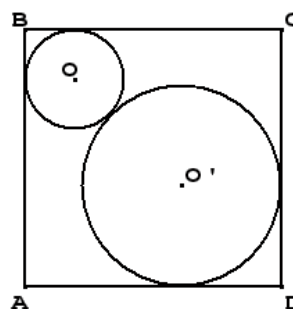
e) Exercices possibles de travail de la technique

Voici à titre d'exemple des exercices de travail de la technique donnés aux élèves.

Les constructions se feront avec un logiciel.

Exercice 1

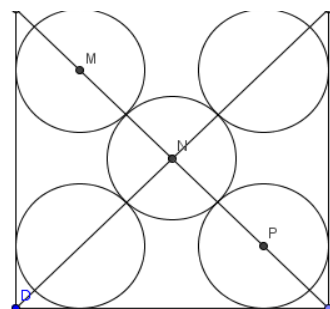
Dans un carré de côté 4, inscrire deux cercles comme ci-contre, le rayon de l'un étant le double de l'autre.



Exercice 2

Reproduire la figure suivante :

Cinq cercles de même rayon dans un carré sont centrés sur les diagonales. Quatre sont tangents au cercle central et chacun est tangent à deux côtés du carré.



IV.8. Cinquième étape du parcours : les identités remarquables pour construire

Voici un résumé de cette étape, résumé qui clôt l'historique du parcours : Qui dit « règles du calcul algébrique », dit aussi « identités remarquables ». Nous avons pu en justifier l'usage avec des problèmes de constructions.

Activité 5. Utiliser les identités remarquables pour construire

Inscrire dans un cercle de diamètre 5, un rectangle d'aire 8.

L'objet de cette activité est de faire travailler l'ostension de certaines expressions. Ainsi, on fait analyser les écritures : $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ et $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$. Si on connaît $x^2 + y^2$ et xy , on connaît $x+y$ et $x-y$ (x et y sont supposés positifs) etc. Cela permet de résoudre d'autres problèmes de constructions, ce qui est noté dans l'historique.

Le travail de la technique porte sur des tâches similaires.

- Inscrire dans un cercle de diamètre 5 un rectangle de périmètre 24.
- Inscrire dans un demi-cercle de rayon 5 un triangle rectangle dont la différence des côtés de l'angle droit est 2.

Conclusion

La partie consacrée à la mise en place dans les classes est volontairement schématique afin de ne pas masquer l'essentiel à savoir notre méthode de travail. Cependant, le lecteur intéressé pourra consulter le détail de notre travail bientôt en ligne sur le site de l'IREM de Poitiers ou sur le site *educmath*.

Comme nous l'avons montré, la résolution de questions significatives (les problèmes de construction par exemple) n'est pas mentionnée dans le programme de seconde mais n'est pas non plus interdite dans la mesure où l'évaluation porte sur des items du programme. Agir de cette manière suppose une bonne organisation de la classe mais aussi une bonne organisation de la part des élèves (bien distinguer cours, historique, activités, exercices, etc.). Notre ambition n'était pas de décrire une pratique lors d'une ou quelques séances, mais bien une pratique professorale déployée pour le traitement d'un programme sur l'ensemble d'une année entière.

Nous ne pouvions bien sûr développer dans cet article l'ensemble du programme, aussi avons nous fait le choix de montrer comment nous nous sommes servi d'une question génératrice d'étude pour traiter une grande part du programme consacré à la géométrie plane (pure) de seconde. Même avec cette limitation, nous avons dû renoncer à présenter la totalité de ce qui a été fait avec les élèves : les diaporamas dont nous évoquons l'existence, l'ensemble des exercices en classe et à la maison, les évaluations, les bilans, les fiches de cours, tout cela forme un tout cohérent et chaque élément contribue à notre projet consistant à redynamiser notre enseignement.

L'action de l'enseignant qui par un jeu de questions cruciales entretient la dynamique, qui à certains moments fait place aux élèves pour les laisser chercher, organise des bilans, à d'autres au contraire leur apporte des éléments de réponses à une question qu'ils ne pouvaient élaborer seuls..., fait aussi partie du dispositif professoral que nous mettons en place. Et c'est là que se situe une autre difficulté pour rendre compte de notre travail : il ne s'agit pas seulement de décrire une pratique mais, en reprenant le terme d'Yves Chevallard, une praxéologie professorale, c'est-à-dire une pratique justifiée par des raisons ! Une pratique

avec une technologie et une théorie professorale en quelque sorte... Là aussi nous avons du restreindre notre propos car cela mériterait bien des développements. Et pourtant, il y a là un essentiel car c'est armé de cette praxéologie que le professeur peut, comme nous avons tenté de le faire, questionner ce qu'il a à enseigner et ensuite diriger de façon dynamique l'étude fondée sur des questions génératrices.

Bibliographie

- [1] CHEVALLARD Yves, *Actes de l'université d'été de La Rochelle*, IREM de Clermont-Ferrand, 1998.
- [2] CHEVALLARD Yves, *La place des mathématiques vivantes dans l'enseignement secondaire*, Université d'été de St-Flour, 2004 :
<http://www.animath.fr/UE/UE04/chevallard.pdf>
- [3] ESTABLET Roger, FAUGUET Jean-Luc, FELOUZIS Georges, FEUILLADIEU Sylviane, VERGÈS Pierre, *Radiographie du peuple lycéen. Pour changer le lycée*, ESF, Paris, 2005

Annexe. Organisation de l'enseignement en seconde à partir de grandes questions

| Grandes questions | Contenus réorganisés |
|---|---|
| 1- Comment construire une figure astreinte à respecter des conditions ? | <ul style="list-style-type: none"> - géométrie du triangle, - triangles isométriques, - triangles semblables, - les propriétés et l'usage des transformations, - les ensembles de nombres, - la graduation de la droite, - le calcul algébrique et littéral, - expression d'une quantité en fonction d'une autre - les systèmes de deux équations, |
| 2- Comment analyser des données ? | <ul style="list-style-type: none"> - résumé d'une statistique (paramètres de position et de dispersion) - comparaison de statistiques, - représentation graphique de statistiques |
| 3- Comment estimer une population à partir d'un échantillon (thème d'étude) ? | <ul style="list-style-type: none"> - sondages : intervalle de confiance et fourchette de sondage |
| 4- Comment optimiser une quantité ? (qui est fonction d'une autre) | <ul style="list-style-type: none"> - vocabulaire lié aux fonctions, - représentation graphique et lecture graphique - expression d'une quantité en fonction d'une autre - calcul littéral - résolution d'équations |
| 5- Comment étudier les variations d'une quantité ? | <ul style="list-style-type: none"> - représentation graphique et lecture graphique - variations d'une fonction - fonctions de référence |
| 6- Comment résoudre un problème d'alignement ou de concours par le calcul ? | <ul style="list-style-type: none"> - géométrie vectorielle et analytique - calcul littéral. - équations de droites - systèmes d'équations |
| 7- Comment représenter un objet de l'espace dans le plan ? | <ul style="list-style-type: none"> - géométrie dans l'espace. |
| 8- Comment déterminer tous les diviseurs d'un nombre entier ? | <ul style="list-style-type: none"> - entiers naturels, - nombres premiers, décomposition en produit de nombres premiers, - calcul littéral |