LE PASSAGE DE L'ARITHMÉTIQUE À L'ALGÈBRE DANS LE CADRE DES FONCTIONS EN SECONDE

Dépendances didactiques des connaissances et de leurs formes.

Eugène COMIN
Lycée Arnaud Daniel et DAESL

Résumé. Pour extraire les relations numériques de l'univers des grandeurs et accéder progressivement à des niveaux d'abstraction qui conduisent vers les modèles algébriques, les élèves doivent appréhender la multidimensionnalité conceptuelle des notions de variables et de fonctions. Pour accéder à ce processus de conceptualisation, les élèves et les professeurs rencontrent des difficultés dans la mise en œuvre d'une dialectique entre l'arithmétique des grandeurs et l'algèbre élémentaire. Cet article propose des outils pour l'élaboration d'un curriculum adapté à une évolution possible des connaissances des élèves.

Mots clés. arithmétique, algèbre, curriculum, variable, fonction , grandeurs, nombres.

I. Introduction et problématique

La classe de seconde est une classe charnière qui est déterminante pour la scolarité future des élèves. Pour faciliter leur choix d'orientation, l'enseignement des mathématiques doit y faire une synthèse des savoirs du collège et donner un aperçu des contenus du lycée.
Le travail sur la notion de fonction permet de concilier ces deux objectifs. En effet, ce concept véhicule des sens mathématiques différents selon les cadres : l'analyse des dépendances entre grandeurs (cadre arithmétique) se fait principalement au collège, l'étude des correspondances entre nombres réels (cadre numérique) est un des objectifs de la classe de seconde et le travail sur les structures (cadre algébrique) occupe une partie des activités du lycée.[1] Or les significations que les élèves attribuent aux savoirs qui leur sont enseignés dépendent des connaissances qu'ils ont développées dans les situations qu'ils ont rencontrées. En particulier, l'émergence de concepts unificateurs de connaissances, propres aux structures algébriques, repose sur la fréquence de ces rencontres. Nous aborderons ici l'étude d'un curriculum qui développe chez les élèves un sens algébrique du concept de fonction qui englobe et reprend les connaissances de l'arithmétique élémentaire.
La construction d'un tel curriculum nécessite des outils pour élaborer une articulation logique et didactique des savoirs à enseigner en mettant en regard l'état des connaissances des élèves avec l'évolution envisagée a priori. Ces outils doivent aussi permettre de contrôler l'efficience des choix opérés par le constructeur, en fournissant des indices sur l'évolution des connaissances des élèves au cours du processus d'enseignement.
Il n'existe pas actuellement de tels instruments : les exercices standard ne permettent pas les décisions adaptées et l'enseignant ne peut souvent que constater des réussites ou des échecs sans pouvoir les relier à des explications éclairantes pour des régulations. Dans cet article, après avoir observé que les connaissances des élèves sont en pleine mutation en classe de seconde, nous présenterons les formes de connaissances qu'ils doivent développer dans le

[1] Le rôle des cadres et le concept de jeux de cadres ont été introduits par Régine Douady (1986).

processus de conceptualisation de la notion de fonction. Nous proposerons ensuite l'usage de matrices pour décrire les dépendances entre ces connaissances et leur évolution.

II. Les objectifs de la classe de seconde

II.1. Les objets d'étude de la notion de fonction

Dans un précédent article « Variables et fonctions, du collège au lycée » (Comin, 2005), nous avions décrit les conditions d'émergence des notions de variable et de fonction puis esquissé une organisation scolaire en conséquence. Rappelons que le concept de fonction trouve historiquement sa source dans l'étude des relations de dépendance entre deux grandeurs : toute variation de l'une entraînant ou accompagnant une variation de l'autre. Cette première étape nous conduit donc à retenir trois éléments essentiels pour notre projet de curriculum en classe de seconde : la variation, la dépendance et la correspondance.
Pour dégager de l'univers des grandeurs le formalisme des fonctions numériques, il faut transformer le statut des différents objets qui constituent l'environnement des fonctions et leur signification : les grandeurs deviennent des variables numériques et la dépendance entre grandeurs devient une correspondance entre nombres abstraits (les réels). Les relations entre grandeurs peuvent être décrites à l'aide des mesures et de leurs unités mais les relations purement numériques nécessitent un vocabulaire et une syntaxe spécifiques (x, y, images, antécédents, intervalles, nombres, tableau numérique, tableau de variation, abscisses, ordonnées, …). Nous envisageons une organisation didactique qui débute par les fonctions modélisables par des formules (que nous nommons « fonctions performatives »), et qui fait évoluer leur statut de l'arithmétique vers l'algèbre. En effet, nous faisons l'hypothèse que la formule est l'outil le plus apte à assurer la transposition de la notion de fonction d'un cadre à l'autre. Dans le paragraphe suivant, nous montrons que les changements sémantiques que suppose cette mutation conceptuelle, ne se font pas naturellement. C'est pourquoi nous considérons comme indispensable de recourir à un curriculum spécifique.

II.2. De la formule arithmétique à la formule algébrique

Puisque nous prévoyons une transformation progressive du sens que les élèves peuvent attribuer à une formule, il nous faut observer l'état de leurs connaissances à l'issue du collège. C'est pourquoi nous analyserons une différence significative de réussite à deux exercices, qui réfèrent pourtant aux mêmes types de fonctions (constantes, linéaires et affines) mais dans lesquels les énoncés sollicitent différemment les connaissances des élèves. L'écart de réussites semble indiquer qu'une mutation est en cours.

II.2.1. Etats des connaissances des élèves

Ces deux exercices avaient pour objectif de tester les connaissances des élèves de seconde avant les leçons sur les fonctions. Les fréquences de réponses données en pourcentages sont calculées sur 34 élèves en 2002-2003 et sur 90 élèves en 2004-2005.

Année 2002-2003 (34 élèves d'une même classe de seconde)

Une personne veut louer une voiture. Elle a le choix entre trois contrats.
Au contrat A : la personne paie un forfait de 80 € et 0,12 € par kilomètre parcouru.
Au contrat B : la personne paie un forfait de 60 € et 0,15 € par kilomètre parcouru.
Au contrat C : la personne paie un forfait de 150 €.
Choisir parmi les fonctions suivantes celle qui modélise chacun des contrats A, B, C.

$f_1(x)=150x$; $f_2(x)= 60 +0,15x$; $f_3(x)= 80x + 0,12$; $f_4(x)= 80,12x$;
$f_5(x)= 80 +0,12x$; $f_6(x)=150$.

Fréquences des réponses en pourcentage

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
Contrat A	0	3	3	3	**97**	0
Contrat B	0	**97**	0	0	3	0
Contrat C	9	0	0	0	0	**94**

Remarquons que presque tous les élèves interrogés donnent la bonne réponse, ce qui laisse penser que les élèves sont familiers avec ce type de questions.

Année 2004-2005 (trois classes de seconde, environ 90 élèves)

Trois voyageurs de commerce : Adrien, Marie, Simon ont élaboré un programme pour calculer leur rémunération : la rémunération d'Adrien est fixe, celle de Marie est proportionnelle au montant des ventes et celle de Simon comporte une partie fixe à laquelle s'ajoute une partie proportionnelle au chiffre d'affaire réalisé. Retrouver parmi les fonctions suivantes celle qui permet de calculer la rémunération de chacun des trois voyageurs :

$f_1(x)=685 + 0,045x$; $f_2(x)= 0,15x^2$; $f_3(x)= 1370$; $f_4(x)= (0,15 / x) + 780$;
$f_5(x)= 0,075x$; $f_6(x)= 0,05x^2+780x$.

Fréquences des réponses en pourcentage

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
Adrien	1	0	**74**	0	2	3
Marie	6	8	1	6	**49**	8
Simon	**57**	0	1	14	0	6

Sur cet exercice, seulement 80% des élèves proposent une formule pour chacune des trois rémunérations. Les trois quarts des élèves interrogés donnent la bonne réponse pour la fonction constante, mais seulement la moitié des élèves interrogés fournissent la bonne formule pour la fonction linéaire et la fonction affine.

Analyse a posteriori et commentaires

1) Résultats statistiques

Dans le second exercice, la réussite est donc plus faible que dans le premier et les réponses sont aussi plus dispersées. Pour chacun des trois voyageurs, au moins 20% des élèves n'ont proposé aucune formule. Peut-être ces élèves n'ont-ils pas compris qu'une formule peut modéliser une situation. Pour la rémunération de Marie, les élèves ont rejeté la fonction constante ; mais les réponses fausses (29%) se répartissent sur les autres formules. Pourquoi 14% des élèves choisissent-ils une fonction inverse (à une constante près) pour Simon ? Peut-être f_1 n'étant pas exprimée sous la forme habituelle $ax+b$, les élèves ont-ils fait le choix de f_4 où x figure dans le premier terme de la somme (comme dans $ax+b$).

Cette différence de réussite est significative (un test avec la variable normale confirme que les écarts de fréquences entre les réponses des deux exercices sont significatifs au seuil de 1%, pour la fonction constante et la fonction affine). Doit-on pour autant se limiter à l'interpréter comme une différence de niveau entre deux classes ? Ne serait-ce pas le milieu de référence qui sollicite des connaissances différentes ? Une analyse des énoncés apporte des éléments qui discriminent les deux exercices.

2) Comparaison des énoncés des deux exercices

Dans le premier exercice, les grandeurs mesurées sont fournies et les programmes de calcul des montants à payer sont suggérés par les prix au kilomètre. L'élève doit reconnaître parmi les formules proposées, celle qui résume chacun de ces programmes. Dans cet exercice, la formule résulte d'une abstraction simple du cadre des grandeurs vers le cadre numérique. Elle renvoie à une action effective possible avec les données de l'énoncé. La lettre x désigne un nombre de kilomètres variable mais supposé connu au moment du calcul.

Dans le second exercice, le texte décrit, dans le cadre des grandeurs, la structure de chacune des trois situations et affirme l'existence d'un programme qui permet le calcul de la rémunération pour chacune d'elles. L'élève est censé reconnaître parmi les formules proposées, non pas le résumé du programme de calcul entre mesures (elles ne sont pas données), mais le représentant d'une situation : soit la fonction constante pour la rémunération d'Adrien, soit la fonction linéaire pour la situation de proportionnalité de Marie, soit la fonction affine pour la rémunération de Simon. Les valeurs numériques, qui figurent dans les formules, apportent des informations supplémentaires, mais qui ne sont d'aucune aide pour la résolution. C'est la structure de la formule (la forme de l'expression littérale) qui doit renvoyer à la bonne situation. La lettre x joue un rôle de « marque-place » au sein d'une syntaxe. L'activité mobilise des connaissances algébriques : chaque formule renvoie à une classe de situations modélisée par une fonction (constante, linéaire, affine, …).

3) Effet de l'enseignement

Durant l'année 2006-07, le deuxième exercice a également été soumis à une classe de seconde (31 élèves) après que les leçons sur les fonctions linéaires et affines aient été dispensées. Les fréquences de réussites ont alors été de 97% pour le contrat d'Adrien, de 90% pour le contrat de Marie et de 100% pour le contrat de Simon.

Ces différences de fréquences, selon que la passation ait lieu avant ou après enseignement, laissent supposer que les élèves se sont familiarisés avec un statut algébrique du concept (les échantillons différents et de faibles effectifs n'entachent pas selon nous ce constat).

4) Conclusion

Ces analyses comparatives montrent qu'une formule ne désigne pas le même objet dans les deux cas. Dans le premier exercice, la formule résume les calculs à faire pour obtenir le montant de la rémunération, dans le second exercice la formule modélise une classe de situations. Pour distinguer les deux significations, nous parlerons de « formule arithmétique » dans le premier cas et de « formule algébrique » dans le second cas (les écarts de fréquences

de réussites témoignent de cette distinction). De plus, les résultats de l'année 2006-2007 semblent indiquer que le sens que les élèves attribuent aux objets mathématiques évolue progressivement et corrélativement à l'enseignement dispensé.
Nous allons maintenant expliquer comment la distinction entre conception arithmétique et algébrique de la notion de fonction se cristallise dans la différence d'interprétation d'une même formule d'un cadre à l'autre.

II.2.2. Analyse des formules

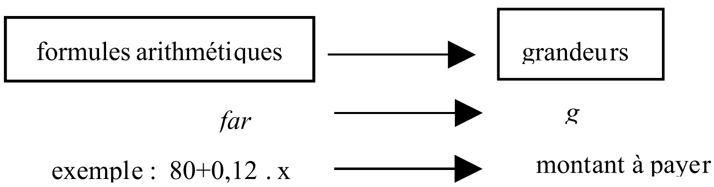
Rappelons quelques caractéristiques des formules arithmétiques (qui résument un programme de calcul entre grandeurs mesurées) et algébriques (qui représentent une classe de situations avant de devenir l'élément d'une structure algébrique).

Reprenons l'exemple de la fonction affine. Dans le premier exercice, pour calculer le montant de la location au contrat A, il faut ajouter, aux 80 euros forfaitaires, autant de fois 12 centimes qu'il y a de kilomètres parcourus. Programme que l'on peut résumer par une égalité de la forme : *montant à payer =80 € + 0,12 € •nombre de kilomètres* ou encore $m=80 + 0{,}12 \cdot v$. Dans cette expression, les signes « = » et « + » ne sont que des sténogrammes de l'arithmétique et la formule $80 + 0{,}12 \cdot v$ résume un raisonnement de type arithmétique[2].

Nous avons caractérisé une *formule arithmétique* de la manière suivante.

> ***Dans les formules arithmétiques***
> *• Les lettres ou les mots désignent des grandeurs mesurées ou des mesures.*
> *• Les variables sont des grandeurs.*
> *• Le sens est porté par la structure des grandeurs ; chaque situation nécessite un raisonnement arithmétique (qui est résumé par la formule) et le résultat attendu est une mesure accompagnée d'une unité.*

Ce qui peut être représenté de manière plus schématique, par



Mais un des objectifs de l'enseignement en seconde est de conduire les élèves à reconnaître la structure du problème précédent, en multipliant les occasions de rencontre avec une telle structure. On peut considérer que cet objectif est atteint lorsque les élèves reconnaissent à coup sûr une modalité de la fonction affine. C'est ce que nous voulions évaluer en 2004-2005 (second exercice). Dans cet exercice, les mesures des grandeurs ne sont pas données et on ne demande pas aux élèves de calculer une mesure, mais de reconnaître une structure ainsi que la formule qui modélise la fonction numérique correspondante.

Dans l'égalité $f_1(x)=685+0{,}045x$, ce ne sont pas les nombres 685 et 0,045 qui importent, mais la forme $ax+b$ qui résume un algorithme qui se réitère indéfiniment.

Nous avons caractérisé une *formule algébrique* de la manière suivante.

---

[2] Pour la comparaison des raisonnements arithmétique et algébrique, on pourra consulter avec profit le travail de recherche de BROIN Dominique, (2002).

Dans les formules algébriques

• Les lettres désignent des nombres réels.

• Les variables décrivent des ensembles numériques (x et y sont des variables muettes).

• Le sens est porté par la structure de ***R*** *et par le programme de calcul itératif qui engendre une correspondance (donc une fonction).*

La formule algébrique peut comporter des paramètres quand elle modélise une classe de situations : par exemple, l'expression $f(x)=ax+b$ regroupe toutes les situations modélisables par une fonction affine. Ce qui peut être représenté schématiquement par

formules algébriques	⟶	fonctions {R -> R}
fal	⟶	*f*
exemple : 685+0,045x	⟶	x —> 685+0,045x

En conclusion, la difficulté de passage d'une formule arithmétique à une formule algébrique est liée au changement de cadre et de registre. Elle résulte principalement de la différence d'interprétation d'une même formule d'un cadre à l'autre : la formule représente une grandeur en arithmétique alors qu'elle représente une fonction (ou un type de fonction et donc une structure) en algèbre.

Cette modélisation permet d'envisager deux types de comportements chez un élève.
- S'il se place dans le cadre arithmétique, la formule représente une procédure de calcul ou son résultat (une grandeur mesurée) donc pour cet élève, la formule désigne un nombre (en tant que mesure), et les lettres qui entrent dans sa constitution désignent des mesures donc des nombres.

S'il se place dans le cadre algébrique, la formule représente une fonction (la correspondance) ou une variable fonction (ensemble des images) et pour cet élève, la formule désigne une fonction ou une variable, et les lettres qui entrent dans sa composition désignent des variables.

Il est difficile, en général, de trouver dans les productions ordinaires des élèves des indices de ces deux conceptions (arithmétique ou algébrique), pourtant nous avons vu que le libellé des exercices (contrats et rémunérations) influence le taux de réussite, car il active de manière privilégiée tel ou tel type de connaissances. Pour conforter les conjectures précédentes et faire apparaître ces deux comportements, nous avons construit un questionnaire spécifique aux notions de variable et de fonction que nous avons soumis à des élèves de seconde pendant trois ans ; nous rapportons les résultats de cette enquête dans le paragraphe suivant.

III. Les conceptions des élèves et des professeurs

III.1. Les notions de *variable* et de *fonction*

Le concept de fonction peut se définir formellement dans le cadre algébrique mais il peut aussi s'élaborer dans le cadre arithmétique avec les notions de dépendance et de correspondance entre grandeurs. La fréquentation de situations spécifiques à ce concept dans les deux cadres conditionne le sens que les élèves peuvent lui attribuer et facilite une dialectique entre arithmétique et algèbre.

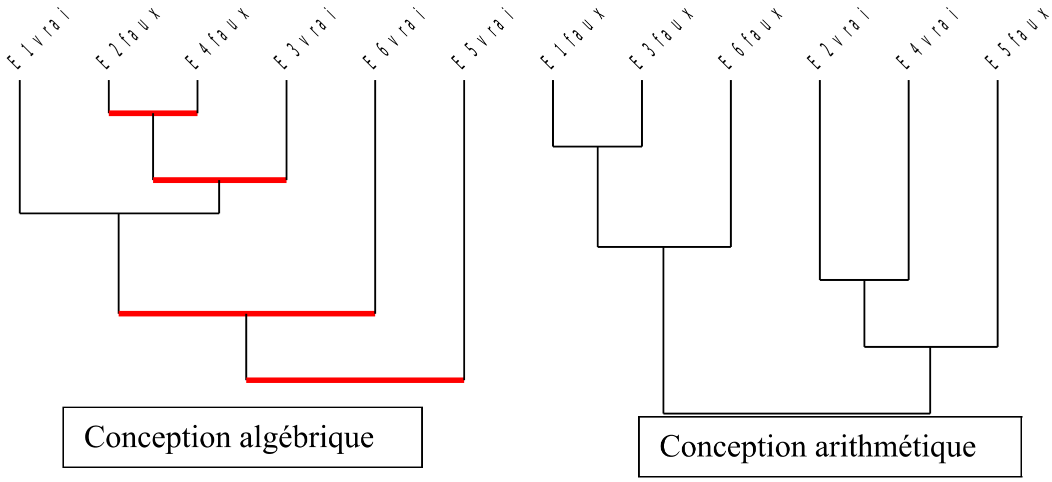
Nous dirons d'un comportement qu'il est caractéristique d'une conception, lorsqu'un groupe d'élèves donne des réponses cohérentes entre elles à un ensemble de questions, alors qu'un autre groupe d'élèves donne des réponses différentes et néanmoins cohérentes entre elles, au même ensemble de questions (Comin, 2002). Mais ces conceptions résultant des apprentissages sont instables (un même élève peut changer de registre d'une situation à l'autre) et fugaces (elles dépendent des milieux d'étude et évoluent au cours d'un processus d'apprentissage). Elles sont donc difficiles à saisir ; les exercices standard ne permettent pas de les identifier facilement. Comment savoir, sous ces conditions, si les connaissances des élèves leur permettent ou non d'adhérer au projet d'une leçon en cours ? En particulier, les connaissances qui résultent d'une double culture arithmétique et algébrique issue du collège, permettent-elles d'envisager une institutionnalisation du concept de fonction, dans le cadre algébrique, à l'entrée en seconde ? Nous avons déjà expliqué (Comin, 2005) que l'institutionnalisation directe en classe de seconde d'aspects généraux du concept de fonction serait une méprise didactique car le processus de conceptualisation n'a pas porté ces notions à leur complète maturité à l'issue du collège.

Les questions qui figurent dans le tableau suivant, avaient pour objet de faire apparaître qu'à l'issue du collège, les élèves attribuent différentes significations aux notions de variable et de fonction. Aucune référence n'est faite aux grandeurs et pourtant la répartition des réponses sur les trois modalités « vrai, faux, ne sait pas» indique que certains élèves mobilisent le registre de l'arithmétique et d'autres celui de l'algèbre conformément aux conjectures du paragraphe précédent. Ces questions ont été soumises à des élèves de seconde pendant trois années scolaires (2002-03, 2003-04, 2006-07). La comparaison des fréquences de réponses, entre ces trois années, fait apparaître une grande régularité dans les manières de répondre. Un test du chi-2 pour chacune des six questions confirme que les écarts de fréquences ne sont pas significatifs au seuil de 10%. Cette régularité dans les réponses manifeste une stabilité dans la culture des élèves à l'issue du collège.

Nous avons regroupé les réponses des trois années scolaires, comme on le ferait de trois échantillons issus d'une même population mère, et nous avons obtenu les fréquences suivantes exprimées en pourcentages calculés sur 98 élèves.

	On considère l'expression suivante : $\frac{1}{3}x^2-4$			
E1	Dans cette expression "x" désigne une variable.	VRAI 46	FAUX 26	NE SAIT PAS 29
E2	Dans cette expression "x" désigne un nombre.	VRAI 78	FAUX 14	NE SAIT PAS 08
E3	$\frac{1}{3}x^2-4$ désigne une variable.	VRAI 38	FAUX 26	NE SAIT PAS 37
E4	$\frac{1}{3}x^2-4$ désigne un nombre.	VRAI 65	FAUX 30	NE SAIT PAS 05
E5	$\frac{1}{3}x^2-4$ définit une fonction.	VRAI 70	FAUX 19	NE SAIT PAS 10
E6	$\frac{1}{3}x^2-4$ est l'image de x par une fonction.	VRAI 36	FAUX 34	NE SAIT PAS 31

Les analyses de données, faites sur les six questions communes aux trois questionnaires et sur l'ensemble des élèves interrogés sur trois ans (98 élèves), fournissent des indices significatifs de leurs connaissances à l'issue du collège. Elles font apparaître des groupements de réponses caractéristiques selon notre étude, de deux conceptions que nous avons dénommées arithmétique et algébrique. Pour chaque question, chacune des modalités VRAI et FAUX a été éclatée en caractères booléens. Le caractère « E_i vrai » prend la valeur 1 si l'élève a répondu VRAI sinon il prend la valeur 0. Le caractère « E_i faux » prend la valeur 1 si l'élève a répondu FAUX sinon il prend la valeur 0. La classification hiérarchique fait alors apparaître les groupements suivants :

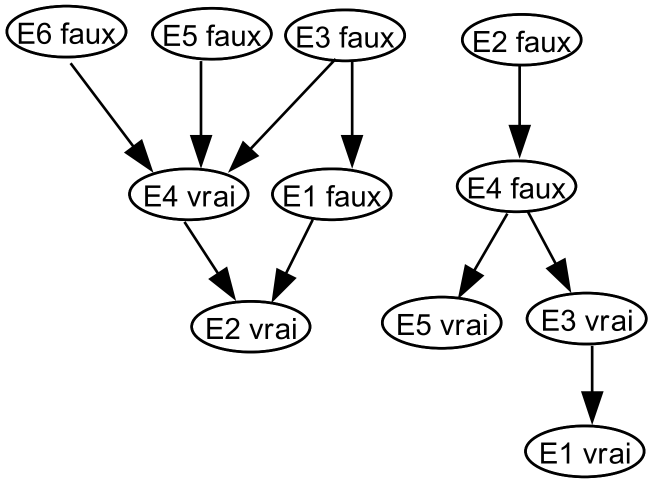


Arbre des similarités : C:\Documents and Settings\xxxx\Mes documents\Cadre E-02-03-06-chic.csv

L'arbre des similarités sépare deux groupes de réponses. Les caractères du premier groupe sont caractéristiques d'une conception algébrique : x et $\frac{1}{3}x^2-4$ désignent des variables (E_1 vrai, E_3 vrai) et non des nombres (E_2 faux, E_4 faux); $\frac{1}{3}x^2-4$ définit une fonction (E_5 vrai) et est l'image de x par une fonction (E_6 vrai). Les caractères du deuxième groupe sont plutôt caractéristiques d'une conception arithmétique : x et $\frac{1}{3}x^2-4$ désignent des nombres (E_2 vrai, E_4 vrai) et non des variables (E_1 faux, E_3 faux) ; une formule ne définit pas une fonction (E_5 faux, E_6 faux).

Ce partage des réponses s'accompagne d'une discrimination des élèves en deux groupes ; la majorité des élèves (59 sur 98) se trouvent dans la conception arithmétique, 11 élèves sur 98 seulement se trouvent dans la conception algébrique. Les réponses des autres élèves semblent moins cohérentes entre elles.

L'analyse implicative conforte cette dichotomie en faisant apparaître des implications au sein de chaque groupe de caractères. Dans le graphe implicatif ci-après, le premier arbre d'implications montre que les élèves qui ne reconnaissent pas une fonction ou une variabilité dans une formule disent que x ou $\frac{1}{3}x^2-4$ désignent des nombres. Ces élèves restent dans le cadre arithmétique. L'autre chaîne implicative est une sorte de contraposée partielle de la chaîne précédente : les élèves qui rejettent l'idée que x ou $\frac{1}{3}x^2-4$ désignent des nombres interprètent la formule comme une « variable-fonction » et pour eux la lettre x désigne une variable. Ces élèves se situent dans le cadre algébrique.



Ces résultats montrent que les conceptions arithmétique et algébrique, des notions de variables et de fonctions, cohabitent encore chez les élèves en début de seconde et que la majorité d'entre eux ne sont pas encore « passés » à l'algèbre. Mais les professeurs de seconde ne disposent pas, en général, de ces outils d'analyse de données. Il serait néanmoins utile de savoir si ces conceptions ont une influence sur la résolution des problèmes standard. En particulier, la fréquence de réussite peut-elle servir de marqueur dans la nécessaire évolution des connaissances pour le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans le cadre des fonctions ?

III.2. Les difficultés didactiques du passage d'un cadre à l'autre

Les élèves ne sont pas les seuls à être confrontés aux difficultés inhérentes au passage du cadre arithmétique au cadre algébrique, les professeurs sont eux aussi concernés. Nous avons relevé des traces de leurs difficultés dans les manuels scolaires. Nous allons comparer deux introductions de la notion de fonction en seconde qui révèlent des choix épistémologiques différents ; les pratiques d'enseignement qui en découlent, peuvent générer chez les élèves des connaissances différentes pour un même objet de savoir.
La première consiste à montrer et nommer les objets mathématiques qui permettent d'institutionnaliser le concept de fonction dans le cadre numérique. Le lien avec les relations entre grandeurs reste à la charge de l'élève ; il pourra le faire a posteriori grâce aux exemples qu'il aura à traiter. Cette approche très classique semble conforme au programme de seconde qui réfère au cadre numérique :

> *Identifier la variable et son ensemble de définition pour une fonction définie par une courbe, un tableau de données ou une formule. Déterminer dans chacun des cas l'image d'un nombre.*

Cette référence est renforcée par l'utilisation d'ostensifs propres à l'algèbre :

> *… Identifier l'enchaînement des fonctions conduisant de x à f(x) quand f est donnée par une formule.*

La deuxième pratique qui consiste à abstraire l'algèbre de l'arithmétique des grandeurs est plus délicate car l'articulation entre les deux cadres présente des difficultés comme nous venons de l'expliquer pour la formule. Elle n'est pas explicitement suggérée par les programmes ; le lien avec les grandeurs est seulement évoqué dans les commentaires

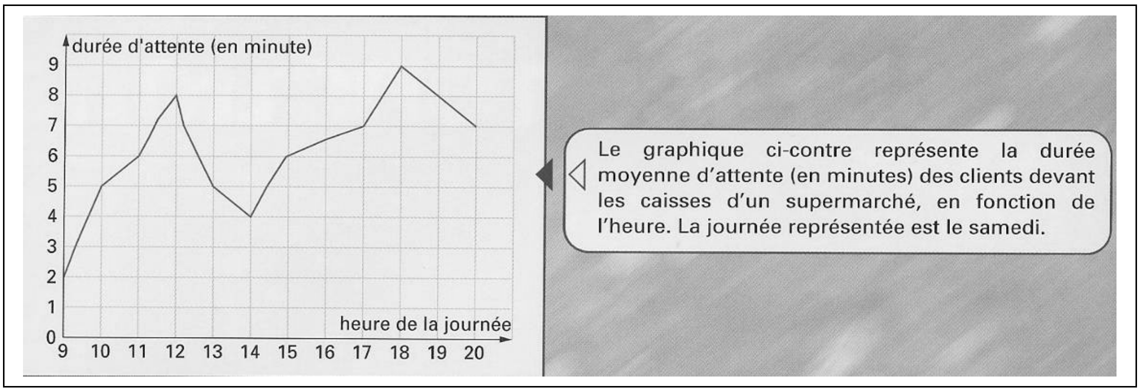
> *On étudiera des situations issues, entre autres, de la géométrie, de la physique, de l'actualité ou de problèmes historiques.*

Cette injonction placée dans les commentaires évoque plus une idée d'illustration qu'un choix épistémologique.

III.2.1. Présentation formelle et institutionnalisation dans le cadre numérique

Le premier exemple est extrait du manuel *Repère, math 2de, Hachette Education, 2004.*
La présentation de deux activités introductives au chapitre « Généralités sur les fonctions » est caractéristique d'une triple classification suivant le cadre (arithmétique ou numérique), la nature des fonctions (hasard ou déterminisme) et leurs représentations (graphique, formule, tableau). Nous n'extrairons ici que quelques parties pour illustrer nos commentaires.

Sur la page de gauche figure une activité intitulée « Etude d'une fonction sans calculatrice ». Il s'agit en fait d'un relevé statistique représenté par une courbe où figurent les unités de grandeurs. Il est accompagné d'un commentaire utilisant le vocabulaire des grandeurs et l'expression « en fonction de » dont l'usage est conseillé par les programmes de collège.



La situation est ensuite retraduite en utilisant les ostensifs propres à l'algèbre : $f, t, f(t)$; puis les questions sont étiquetées avec de nouvelles expressions : ensemble de définition, image, antécédent, etc. Il est probable qu'un élève novice aura des difficultés à les mettre en relation avec les formulations en termes de grandeurs.

Le superviseur d'un supermarché affiche des renseignements à l'entrée de son magasin, notamment le graphique d'une fonction f qui à chaque instant t de la journée, associe le temps d'attente $f(t)$ aux caisses.

1 • Ensemble de définition
Quels sont les horaires d'ouverture du magasin ?

2 • Image par *f*
Quel est le temps d'attente à 14 h 00 ?
Quelle est l'image de 10 par f ?
Indiquer la valeur de $f(19)$.

3 • Antécédents par *f*
À quelle heure attend-on 5 minutes ?
Ces heures sont les antécédents de 5.
Quels sont les antécédents de 7 ? de 1 ? de 9 ?

L'introduction du lexique spécifique de l'algèbre n'est pas nécessitée par cette situation puisque les élèves disposent déjà du vocabulaire des grandeurs pour formuler.
L'activité n'est qu'un alibi pour institutionnaliser les éléments de savoir mentionnés dans le programme : *f*, *f(t)*, *ensemble de définition, image, antécédent, équation, inéquation, sens de variation, tableau de variations, min, max*. Ils ne sont pas utiles à l'élève qui peut répondre aux questions en termes de grandeurs, mais ils vont permettre au professeur de décrire la deuxième activité dans le cadre numérique.

Dans cette deuxième activité, intitulée : « Etude d'une fonction avec calculatrice », les auteurs proposent deux exercices sur des fonctions définies par des formules algébriques : $f(x)=\dfrac{-2x}{(x^2+1)}$ et $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{2}{x}\right)$. Ces formules désignent le type de fonctions (rationnelles) en même temps qu'elles décrivent l'algorithme qui permet la mise en correspondance des nombres. Les auteurs placent ces exercices dans le cadre numérique (x et $f(x)$ sont des variables réelles) en utilisant le vocabulaire introduit dans l'activité précédente. Reprenons le premier exercice.

A. On considère la fonction f définie sur [–3 ; 3] par $f(x) = \dfrac{-2x}{x^2+1}$.

1 • Calculer $f(x)$ pour les valeurs de x suivantes :
0 ; 1 ; –2 et 3.

2 • En déduire si les points suivants sont situés sur la représentation graphique de f :
$O(0\,;0)$; $A\left(1\,;-\frac{1}{6}\right)$; $B\left(-2\,;\frac{-6}{5}\right)$; $C(3\,;-0{,}6)$.

3 • Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$							

4 • Pour quelle(s) valeur(s) de x a-t-on $f(x) = 1$?

La formule $f(x)=\dfrac{-2x}{(x^2+1)}$ établit formellement le graphe de la fonction,

c'est-à-dire l'ensemble des couples $\left(x;-\dfrac{2x}{(x^2+1)}\right)$ lorsque x parcourt **R**. Elle ne résume pas la structure d'une situation ; elle dit à l'élève, qui connaît les règles du calcul algébrique, quelle procédure il doit suivre pour déterminer le correspondant de n'importe quel nombre réel. L'essentiel des tâches consiste à faire ces calculs puis à encadrer et déterminer un minimum. Cette activité de découverte ne diffère pas des exercices d'application qui suivent le cours.

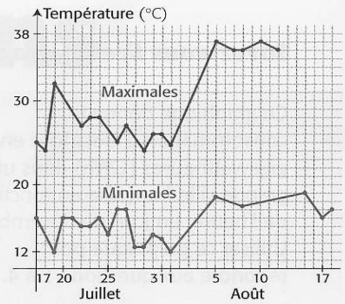
En résumé, dans ce manuel, le passage du cadre arithmétique au cadre numérique, d'une relation entre grandeurs à une relation entre nombres abstraits n'est pas organisé. La première activité institutionnalise d'emblée les objets et le vocabulaire qui vont permettre au professeur de faire fonctionner les algorithmes de la deuxième, mais la signification que l'élève peut donner à cette deuxième activité, qui se limite à un jeu de calcul formel sur les nombres, ne se nourrit pas de la relation entre grandeurs décrite dans la première activité.

III.2.2. Du modèle implicite d'action dans le cadre des grandeurs à l'usage canonique d'une formule algébrique

Le deuxième exemple est extrait du manuel *Maths seconde ; édition 2004 ; collection Indice - ed. Bordas*. Les auteurs présentent quatre activités comme introduction au chapitre « Généralités sur les fonctions ». Nous nous intéressons aux deux premières qui marquent la différence d'approche didactique de ce manuel par rapport au précédent.

L'activité 1 intitulée « Canicule », décrit, dans le cadre des grandeurs (dates et températures), une fonction du hasard (des observations), avec des courbes de températures.

Le graphique fournit l'évolution, en un lieu donné, des températures maximales et minimales en degrés Celsius au cours de la période du 17 juillet au 17 août 2003.



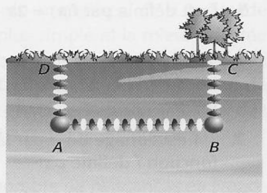
1.a. Quelles sont ces températures et leur écart le 1er août ?
b. Durant quelle période les maximales ont-elles dépassé 30 °C ?
c. Quelle est la température la plus élevée observée ? À quelle date a-t-elle été relevée ? Quelle fut, ce jour-là, la température minimale ?

2. Le 5 août, la température maximale a été de 37 °C et la température minimale de 19 °C. L'écart de température était donc de 18 °C.
a. Calculer l'écart de température le 15 août.
b. Quel jour l'écart de température a-t-il été le plus faible ? Le plus important ?

L'élève doit faire des lectures graphiques de valeurs, d'extrema, d'écarts, etc. Les questions sont formulées avec le vocabulaire des grandeurs et les réponses attendues sont des grandeurs mesurées. Bien que l'idée de variation soit sous-jacente, les auteurs ne cherchent pas à introduire le vocabulaire algébrique des fonctions mais restent dans le cadre des grandeurs.

L'activité 2, intitulée « Aire de la baignade », décrit dans le cadre des grandeurs (longueurs et aires) une fonction déterministe. Les questions introduisent progressivement les quatre représentants d'une fonction : programme, formule, tableau, représentation graphique.

Le responsable d'un parc municipal, situé au bord d'une large rivière, veut aménager une aire de baignade surveillée de forme rectangulaire. Il dispose d'un cordon flottant de 160 m de longueur et de deux bouées A et B. On se propose de déterminer comment placer les bouées A et B pour que l'aire de baignade soit maximale.



1. Si la distance de la bouée A à la rive est de 25 m, quelle est la longueur de la zone de baignade ? Quelle est alors son aire ?

2.a. Montrer que la distance x (en m) de la bouée A à la rive varie entre 0 et 80 m.
b. Expliquer pourquoi la longueur de la zone de baignade est égale à $160 - 2x$.
On désigne par $A(x)$ l'aire, en m², de cette zone. Cette aire est donnée en fonction de x. Vérifier que $A(x) = x(160 - 2x)$.

3. Calculer $A(x)$ pour x variant de 0 à 80, de 10 en 10.

4. Dessiner la représentation graphique correspondante.
On choisira, sur l'axe des abscisses, 1 cm pour représenter 10 m et, sur l'axe des ordonnées, 1 cm pour représenter 400 m².

La première question est formulée en termes de grandeurs. Elle conduit l'élève à construire un programme pour calculer une aire en fonction d'une longueur dont la mesure est donnée et accompagnée de son unité (25*m*).
La deuxième question est une reprise de la première mais ici la distance inconnue est désignée par la lettre x accompagnée de l'unité de grandeur entre parenthèses (*en m*). Les questions intermédiaires conduisent l'élève à résumer le programme de calcul par une formule arithmétique : $A(x)=x(160-x)$. Dans la question 3, cette formule peut aussi être comprise comme une formule algébrique qui résume un algorithme de calcul (on peut oublier les unités de grandeurs) et qui permet de construire un tableau de valeurs numériques indépendamment des grandeurs. La question 4 invite l'élève à récupérer les valeurs numériques de la question précédente pour construire une représentation graphique.
On repère bien, dans cette activité, les quatre représentants d'une fonction : programme, formule, tableau de valeurs, courbe représentative. Le passage des grandeurs aux nombres (d'un cadre à l'autre) se fait via la formule en oubliant les unités. On voit que les auteurs tentent d'abstraire une relation numérique d'une relation entre grandeurs en faisant glisser le vocabulaire du cadre des grandeurs vers le cadre numérique.

Commentaires

Dans le deuxième manuel, les auteurs n'établissent pas de lien entre l'activité 1 et l'activité 2. Dans l'activité 1, ils proposent un recueil de données statistiques représentées par un graphique. Les températures relevées chaque jour sont le fait du hasard ; il n'y a pas de relation de cause à effet entre la date et la température. On ne peut pas prévoir la température qu'il fera tel jour. La représentation d'une telle situation peut se faire après des observations avec un tableau de valeurs où figurent les unités ou avec une représentation graphique de ces valeurs ; mais une telle situation ne peut pas se résumer par une formule. Il n'y a pas de raison de « passer à l'algèbre » ; l'élève ne peut décrire cette correspondance fortuite avec le vocabulaire des fonctions que s'il a préalablement conceptualisé la notion de fonction. Dans le premier manuel, les auteurs souhaitent néanmoins introduire le vocabulaire des fonctions à partir d'un relevé statistique, mais ils sont contraints de le faire de manière arbitraire car, comme nous venons de l'expliquer, une telle situation ne s'y prête pas. Les situations qui résultent du hasard ne sont pas propices à une dialectique entre l'arithmétique et l'algèbre.

Dans les situations déterministes, cette dialectique est facilitée par les différents rôles que peut jouer la formule. Dans le cadre des grandeurs, elle peut résumer le programme de calcul d'une mesure d'une grandeur en fonction d'une autre mesure de grandeur spécifiques à la situation comme dans l'activité intitulée « aire de la baignade ». Elle peut aussi modéliser une classe de situations, et ainsi, d'outil de calcul devenir un objet de savoir institutionnel ; par exemple la formule qui donne l'aire d'un triangle renvoie à plusieurs situations et questions de géométrie élémentaire. Dans le cadre algébrique, la formule peut décrire une relation numérique particulière en résumant l'algorithme de calcul correspondant ou modéliser une classe de situations (par exemple, la relation $y=ax$ regroupe toutes les situations de proportionnalité). Elle peut aussi être considérée comme l'élément d'un ensemble structuré (par exemple ax est un élément de l'anneau des polynômes).

Ainsi la formule est un outil-objet constitutif de l'organisation mathématique dans le cadre des grandeurs et aussi celui de l'algèbre. De plus elle permet d'établir un pont entre ces deux cadres. D'outil de résolution dans le cadre des grandeurs, elle devient un objet de l'algèbre comme dans l'activité précédemment citée. Réciproquement, chaque formule algébrique renvoie à une classe de situations arithmétiques ; par exemple, la fonction linéaire renvoie à toutes les situations de proportionnalité propres au cadre des grandeurs. La formule est donc un maillon réversible dans des chaînes de connaissances qui permettent à l'élève d'entretenir une dialectique entre l'arithmétique et l'algèbre.

Conclusion

Ces deux manuels nous semblent caractériser deux approches didactiques différentes de la notion de fonction. Dans le premier, les auteurs institutionnalisent d'emblée les objets qui permettent de mettre en œuvre le concept de fonction dans le cadre numérique. Dans le deuxième, les auteurs espèrent abstraire l'idée de fonction d'exemples puisés dans le cadre des grandeurs. De plus, une analyse succincte des activités semble confirmer que le passage des grandeurs à l'algèbre est facilité par le recours aux fonctions déterministes, mieux qu'avec des fonctions du hasard. C'est pourquoi nous privilégions dans notre curriculum, les fonctions déterministes modélisables par des formules que nous appelons fonctions performatives.

Dans le paragraphe suivant, après avoir décrit trois formes de connaissances, nous expliquons les difficultés du passage d'un cadre à l'autre en analysant les contraintes logiques puis didactiques qui pèsent sur l'organisation scolaire pour la genèse de la notion de fonction. Nous verrons alors que les dépendances logiques (mathématiques) entre les connaissances en jeu dans le concept de fonction ont prévalu dans le choix de présentation du premier manuel, alors que les dépendances didactiques entre les formes de connaissances et leurs évolutions expliquent le choix du deuxième manuel.

IV. Les contraintes didactiques

IV.1. Les formes de connaissance

Construire un curriculum nécessite d'articuler logiquement les savoirs à enseigner et de concevoir en séquences les leçons avec leurs lots d'activités et d'exercices. Sa mise en œuvre suppose une organisation adaptée à une évolution possible des connaissances des élèves. La théorie des situations didactiques identifie plusieurs formes pour une même connaissance. Ces distinctions ont permis en particulier de structurer une situation didactique en différents moments : moments d'action, de formulation, de validation et d'institutionnalisation. Une modélisation d'une situation d'apprentissage en plusieurs milieux emboîtés affine la description des interactions des moments précédents (Brousseau, 1988).

Pour décrire l'avancement d'un processus d'apprentissage, nous considérons donc une suite de situations, dans lesquelles les connaissances des élèves, lors d'une situation donnée, évoluent grâce à la confrontation entre leurs anciennes connaissances et cette situation nouvelle. Pour que la situation opère le changement espéré, pour qu'elle éveille la pensée du sujet, elle doit être suffisamment proche des situations précédentes ; trop de variabilité entre situations déstabilise la construction de connaissances nouvelles. En effet, l'action du sujet est conditionnée par le sens qu'il peut attribuer à chaque situation, or ce sens résulte de la fréquentation des situations antérieures. Certes, l'articulation des situations entre elles vise à développer les connaissances des élèves, mais elle vise aussi à modifier la forme de leurs connaissances en une autre forme. Cette évolution dans l'usage des connaissances conditionne les comportements des élèves et leurs apprentissages futurs.

Nous avons retenu trois formes de connaissances pour analyser un curriculum. Pour les présenter, nous les illustrerons à l'aide des fonctions linéaires et affines.

Usage implicite (Im) *: concerne les connaissances en cours d'acquisition.*

Face à une situation nouvelle, un élève n'active pas uniquement des connaissances et des savoirs « anciens » (c'est-à-dire qu'il maîtrise relativement bien). En essayant d'adapter ses anciennes connaissances aux nouvelles questions, il construit des « modèles implicites d'action » (schèmes, axiomes et théorèmes en acte), qui lui permettent d'intervenir sur son milieu, sans toutefois contrôler intégralement ses décisions. Une situation ne sollicite qu'une des modalités d'une notion mathématique ; elle participe à sa conceptualisation sans en recouvrir tous les aspects. Par exemple, au cours des premiers apprentissages, à l'école primaire, l'élève réalise la proportionnalité à partir de la connaissance qu'il a des grandeurs et des opérations sur ces grandeurs, il ne réfère pas encore à un savoir correspondant à ce concept. « La proportionnalité » est en réalité une étiquette commode pour rassembler une multitude de savoirs : nombreuses grandeurs possédant chacune leurs particularités (masse, volume, temps, débit, aire, vitesse, …), variabilité de leur nature mathématique (discrète ou continue) ou de celle des rapports numériques (entiers, rationnels, irrationnels), pluralité des raisons d'y recourir (logique, physique, sociale), etc. Les enseignants sont donc conduits à proposer un vaste choix de situations qui modifient l'idée que les élèves se font de la notion. Les situations nouvelles vont infléchir plusieurs fois leurs conceptions, conférer des sens nouveaux et diversifier leurs prises d'initiative à ce sujet. Ces rencontres enrichissent le répertoire des élèves jusqu'à leur permettre de percevoir la structure mathématique sous-jacente à ces situations, de repérer l'invariant qui autorise une institutionnalisation des techniques propres à la proportionnalité.
Pour modéliser une relation affine entre grandeurs, l'élève peut alors s'appuyer sur ses connaissances de la proportionnalité. En particulier, le repérage de la quantité à l'unité permet à l'élève d'inférer un raisonnement arithmétique approprié à cette nouvelle situation, sans savoir ce qu'est une fonction affine.

Usage canonique (Ca) *: usage d'un savoir institutionnalisé.*

Lorsque le professeur estime que le processus de conceptualisation a suffisamment avancé, il institutionnalise les différents objets de savoir et la forme de leurs écritures. Pour la proportionnalité, il peut demander aux élèves d'écrire le raisonnement arithmétique en trois lignes en utilisant la quantité à l'unité (une ligne par calcul : règle de trois), ou de résumer cette procédure par une formule arithmétique où figurent les unités de grandeurs, ou de décrire la situation à l'aide d'un tableau en faisant apparaître les têtes de listes et les différents rapports (la quantité à l'unité devient un opérateur ou un coefficient de proportionnalité). La reconnaissance par les élèves de l'équivalence de ces écritures suppose un entraînement et donc une organisation didactique adaptée en amont de l'institutionnalisation. A ce stade de l'avancement didactique, l'élève est supposé capable, lors d'un nouvel exercice sur la proportionnalité, de présenter correctement la solution attendue sous une de ses formes canoniques, conformément aux règles institutionnalisées dans sa classe.
Pour les situations affines, l'organisation didactique peut s'appuyer sur les savoirs de la proportionnalité pour conduire l'élève à produire des solutions sous des formes institutionnelles : tableau, programme écrit sur plusieurs lignes, formule arithmétique résumant ce programme. L'accès au contrôle de ces nouvelles techniques suppose un assortiment de situations qui conduit l'élève à conceptualiser cette nouvelle structure et autorise alors le professeur à institutionnaliser les objets qui lui sont propres et attendus dans la production des élèves.
Le premier exercice sur les tarifs de location sollicite cet usage canonique.

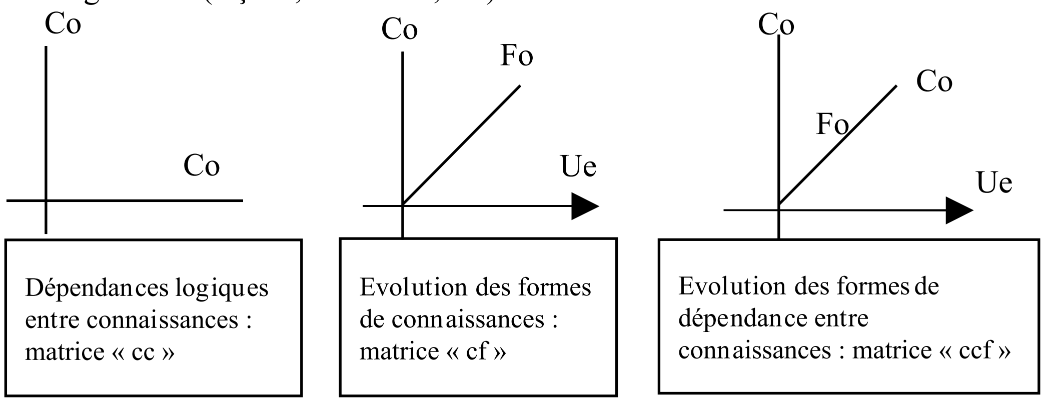
Usage familier (Fa) *: un niveau d'expertise.*

L'institutionnalisation des techniques résolutoires des problèmes de l'arithmétique élémentaire ancre ces outils dans le cadre des grandeurs. Un élève ne peut pas, par lui-même, transformer le coefficient de proportionnalité entre deux grandeurs en coefficient de la fonction linéaire associée. Pour décontextualiser ce savoir et en faire un objet algébrique, le professeur devra multiplier les occasions de rencontrer ce même coefficient dans un cadre puis dans l'autre. C'est à lui de modéliser chaque correspondance entre grandeurs mesurées par une fonction numérique à l'aide des ostensifs propres à l'algèbre. Seule une forte fréquentation de tels problèmes permet de dégager les structures communes à certaines situations et de leur donner un sens proto algébrique en modélisant chacune par une même formule algébrique ($f(x)=ax$ pour les fonctions linéaires ; $f(x)=ax+b$ pour les fonctions affines). Cette familiarisation contribue à une conceptualisation algébrique de la notion de fonction et permet l'institutionnalisation des objets qui lui sont propres.
Le second exercice sur les voyageurs de commerce sollicite cet usage familier.

En conclusion, ces différentes formes de connaissances induisent des réorganisations de répertoires d'élèves qui scandent le temps didactique. Les connaissances et leurs formes sont structurées par des relations de dépendance qu'il faut analyser pour ordonnancer les unités d'enseignement et élaborer les situations qui visent à provoquer leur évolution. Il nous reste encore à déterminer une méthode « simple » pour décrire et traiter toutes les dépendances potentielles entre les connaissances et les comportements des élèves (ceux que l'on peut prévoir a priori). Les représenter par un réseau fléché en dimension 2 sature rapidement l'espace de la feuille de papier et la lecture en est rendue confuse. C'est pourquoi nous avons plutôt inventorié les dépendances à l'aide de trois matrices. Le rôle de ces matrices est d'interroger les possibilités de modification des connaissances des élèves afin d'élaborer une organisation didactique adaptée à ce qui peut se produire effectivement dans une classe.

Stratégie d'analyse a priori d'un curriculum

Pour organiser un curriculum, il ne suffit pas de lister les savoirs visés par le projet. L'organisation de l'enseignement doit s'articuler sur les possibilités des élèves, c'est-à-dire l'état de leurs connaissances. Pour élaborer une organisation didactique adaptée à ces contraintes, nous proposons de décrire les dépendances logiques de ces connaissances, leurs formes supposées avant et après chaque unité d'enseignement ainsi que leur évolution à l'aide des trois types de matrices suivantes où Co désigne les connaissances, Fo leurs formes, Ue les unités d'enseignement (leçons, situations, etc).



Les dépendances logiques entre les objets à enseigner déterminent un pré-ordre sur les unités d'enseignement (situations, leçons, séquences didactiques) ; pour décrire ces dépendances, la première matrice de dimension 2, croise les connaissances entre elles. Leurs formes (Im, Ca, Fa) sont des états didactiques temporaires appelés à évoluer avec les unités d'enseignement ; la deuxième matrice, de dimension 3, croise les connaissances avec leurs formes et les unités d'enseignement. Or les formes de connaissances affectent aussi les différentes dépendances logiques (relations) entre connaissances, qui elles mêmes évoluent avec les différents apprentissages. La troisième matrice, de dimension 4, a pour objet de décrire cette évolution.
Mais il n'existe pas de méthode qui serait indépendante des contenus. Nous illustrerons l'usage de ces instruments à travers quelques analyses d'un dispositif mis en place en classe de seconde et qui s'inscrit dans un long curriculum de l'enseignement des fonctions qui démarre au primaire et se poursuit jusqu'au lycée. Dans notre projet, le concept de fonction est supposé se dégager progressivement de l'étude de dépendances entre grandeurs avant de devenir un objet d'une structure algébrique. (Comin, 2005).

IV.2. Les dépendances logiques

IV.2.1. Analyse a priori des tâches potentielles

Pour accéder progressivement à des niveaux d'abstraction qui conduisent vers les modèles algébriques, les élèves doivent extraire les relations numériques de l'univers des grandeurs. C'est dans l'action que les élèves construisent des connaissances qui étayent les concepts de variable et de fonction. Les contraintes des situations qu'ils rencontrent, les obligent à agir en réalisant des tâches significatives de ces connaissances. Ces principales tâches, décrites en termes d'action pour les élèves, ont été répertoriées suivant trois niveaux de complexité, et ordonnées de T1 à T9 en fonction de nécessités mathématiques (Comin, 2005).

Niveau des connaissances *: milieu des grandeurs et connaissances culturelles, folkloriques.*
T1) Repérer dans une situation : les variables, la dépendance entre ces variables, la correspondance entre les valeurs de ces variables. (Le milieu objectif, en général celui des grandeurs pour les fonctions linéaires et affines, active des connaissances qui produisent des modèles implicites d'action).

Niveau d'abstraction simple : *milieu numérique et explicitation des relations fonctionnelles.*
T2) Décrire cette relation (situation) avec un des quatre outils : programme, tableau, formule, courbe (P, T, F, C).
T3) Isoler (abstraire) une fonction numérique d'une relation entre grandeurs (la fonction linéaire pour la proportionnalité)
T4) Associer deux des objets : programme, tableau, formule, courbe (P, T, F, C).
T5) Etudier les variations relatives des variables avec un des quatre outils : P, T, F, C (élaborer un tableau de variation)
T6) Prévoir avec des fonctions des valeurs, des évolutions, …

Niveau d'abstraction réfléchissante : *milieu algébrique où les modélisations nécessitent une certaine familiarité avec les objets précédemment décrits.*
T7) Reconnaître dans une fonction numérique (une formule algébrique) le représentant d'une classe de situations, un type de fonction (par exemple la fonction linéaire résume l'ensemble des situations de proportionnalité).
T8) Faire des opérations sur les fonctions avec les différents ostensifs P, T, F, C.
T9) Considérer une fonction comme l'élément d'un ensemble structuré (la formule est une variable qui entre dans des calculs algébriques).

Pour exemplifier l'usage que nous faisons des matrices de dépendances, nous reprenons les exercices sur les contrats et les rémunérations. Rappelons que dans l'exercice sur les contrats de location, l'élève doit repérer que le montant de la location dépend du prix au kilomètre parcouru (tâche 1) ; puis élaborer un programme de calcul de ce montant qui prend en compte la part forfaitaire (tâche 2). Le choix de la bonne formule (tâche 4) dépend donc des deux grandeurs (prix unitaire et forfait) qui entrent dans le programme. Dans l'exercice sur la rémunération des voyageurs de commerce, l'élève doit reconnaître des structures (tâche 7) après avoir repéré les dépendances entre grandeurs (tâche 1).

Matrice des dépendances logiques

La description suivante n'est qu'une illustration de l'usage que l'on peut faire des matrices de dépendances. Nous avons porté dans une matrice, en ligne et en colonne, les tâches décrites précédemment, en reprenant leur numérotation de T1 à T7.
Dans chaque cellule (c_{ij}), le « 1 » indique que la réalisation de la tâche qui figure dans la $i^{ème}$ ligne nécessite la connaissance correspondant à la tâche qui figure dans la $j^{ème}$ colonne. Par exemple, pour pouvoir expliciter une relation fonctionnelle avec un programme, un tableau, une courbe ou une formule (tâche 2), l'élève doit avoir préalablement repéré les variables de la situation et leur dépendance (tâche 1) ; ce que nous figurons par un « 1 » dans la cellule c_{21}.

	T1)	T2)	T4)	T7)
T1) Repérer la dépendance entre variables				
T2) Décrire S avec PTCF	1			
T4) Associer deux des ostensifs PTCF	1	1		
T7) Reconnaître le représentant d'une classe	1	1		

Dans le paragraphe suivant, nous proposons une analyse plus détaillée des tâches T2 et T4 parce qu'elles correspondent à des enjeux incontournables de la classe de seconde.

IV.2.2. Analyse a priori des représentants P, T, F, C

Comme tout concept, celui de fonction nécessite des représentations. Nous avons vu comment l'activité « Aire de la baignade » conduisait progressivement les élèves à construire un programme, une formule, un tableau numérique et une représentation graphique. Nous attachons une importance toute particulière aux activités qui entretiennent une dialectique entre l'arithmétique et l'algèbre, dialectique qui fonde le sens du concept de fonction tel qu'il est visé par notre projet. La représentation d'une relation entre grandeurs par des outils adaptables autant au cadre des grandeurs qu'à celui de l'algèbre permet aux élèves de transformer leurs connaissances et d'accéder progressivement aux modèles algébriques.

Modes de désignation d'une fonction (tâche 2)
Le programme et le tableau numérique privilégient l'aspect quantitatif de la situation (correspondance entre quantités) alors que la formule et la courbe privilégient l'aspect qualitatif (nature et variation de la fonction). Ainsi l'usage de ces quatre représentants (programme, tableau numérique, formule, courbe) a des répercutions différentes sur les conceptions des élèves.

- Le **programme de calcul** donne un moyen ponctuel de déterminer le correspondant de n'importe quel élément.

- Le **tableau numérique** est une partie du graphe de la fonction. Il ne montre que quelques correspondances entre éléments (nombres ou grandeurs mesurées).
- La **formule** n'est pas seulement le résumé d'un programme. Elle est un élément d'une structure algébrique au sein de laquelle on peut faire des calculs.
- La **représentation graphique** (ou **courbe**) visualise les dépendances entre variations.

Nous désignerons ces quatre représentants (ostensifs) par les lettres : « P, T, F, C».

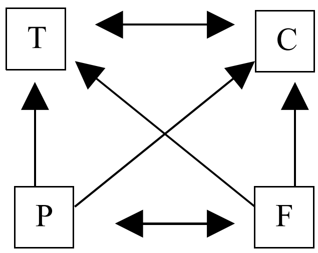
Relations entre ces quatre représentants, pour tout type de fonction (tâche 4)

Si on sépare l'aspect quantitatif de l'aspect qualitatif on perd une compréhension globale de l'idée de fonction (René de Cotret, 1985). Il convient donc de faire travailler les élèves avec ces quatre représentants simultanément, mais leur introduction nécessite le respect d'un ordre logique.

Dans la matrice suivante, nous avons porté en ligne et en colonne les quatre représentants précédemment décrits, en les désignant par les lettres : « P, T, F, C».

La case c_{ij} est cochée « 1 » si le représentant qui figure dans la colonne *j* permet de construire le représentant qui figure dans la ligne *i*. Le point d'interrogation « ? » signifie que la possibilité est conditionnée par d'autres connaissances (par exemple, les quelques valeurs figurant dans un tableau ne permettent pas de dire quelle est le type de fonction ; mais si on sait qu'elle est affine, alors deux couples suffisent à déterminer la formule correspondant au tableau).

	P	T	F	C
P		?	1	?
T	1		1	1
F	1	?		?
C	1	1	1	



La représentation, par un diagramme fléché, des huit dépendances cochées « 1 » dans le tableau, fait apparaître plus clairement que la connaissance de la formule (ou du programme, qui est une connaissance équivalente) permet de construire un tableau ou une courbe. La construction en sens inverse n'est éventuellement possible que si on connaît la nature de la fonction (linéaire, affine, quadratique, …). De plus, elle est souvent difficile à mettre en œuvre ; par exemple, pour déterminer une fonction affine à l'aide des couples connus du graphe, il faut résoudre un système de deux équations à deux inconnues.

Pour éviter cette difficulté et gagner du temps d'enseignement, le professeur peut être enclin à enseigner P et F avant T et C. Cette préoccupation d'une économie didactique peut expliquer le choix d'une présentation formelle de la notion de fonction dans le cadre numérique, comme celle proposée dans le manuel Repère. Mais ce choix n'est pas nécessairement le plus ergonomique.

Pour permettre au plus grand nombre d'élèves de donner un sens au concept de fonction, il nous semble utile de référer aux grandeurs. Dans notre projet, chaque fonction est sensée représenter une classe de situations issues du cadre des grandeurs. Or une présentation formelle de la notion de fonction, suivie d'illustrations avec des grandeurs, a, de notre point de vue, un coût didactique supérieur à celui résultant de l'ordre de construction en sens inverse qui consiste à étudier des relations entre grandeurs pour en extraire des fonctions numériques. En effet, exemplifier avec des grandeurs, l'usage d'une fonction numérique préalablement construite formellement, prend du temps, ne se justifie pas car le calcul formel se suffit à lui-même et fait apparaître les exemples puisés dans le cadre des grandeurs comme des habillages fantaisistes et futiles. En conséquence, l'organisation d'un curriculum ne peut pas se calquer uniquement sur un ordre logique des objets mathématiques à enseigner, elle doit aussi prendre en considération d'autres dépendances que nous avons qualifiées de didactiques.

IV.3. Les dépendances didactiques et leurs évolutions

Nous venons d'expliquer que les dépendances logiques entre les objets à enseigner conditionnent l'ordre de leur enseignement. Nous avons aussi remarqué que le choix d'une organisation didactique pèse sur le sens que les élèves peuvent attribuer aux objets enseignés : l'idée que les élèves peuvent se faire d'une relation numérique extraite d'une relation entre grandeurs diffère de la notion de fonction qui résulte d'une présentation formelle de ce concept. Une organisation ergonomique, apte à produire les effets didactiques attendus, doit aussi prendre en considération les formes de connaissances qui conditionnent le sens que les élèves peuvent attribuer aux objets mathématiques qu'ils rencontrent dans les situations didactiques. Les trois formes : usage implicite (Im), usage canonique (Ca), usage familier (Fa), concernent non seulement les objets de savoir mais aussi les relations que les élèves peuvent établir entre ces objets ; ce qui multiplie par trois les états didactiques envisageables. A cette lourdeur s'ajoute, pour le professeur, la difficulté d'attribuer, a priori, à une classe, une forme à une connaissance. Les conjectures du professeur s'appuient sur son expérience professionnelle et sur les informations qu'il peut recueillir auprès des élèves qui lui sont confiés. Il dispose des interactions qu'il a avec les élèves en situation didactique, des observations qu'il peut faire en situation adidactique (interactions entre élèves pendant les phases d'autonomie), des productions écrites (devoirs surveillés ou en temps libre).

Pour illustrer notre technique d'analyse, nous nous limitons aux fonctions linéaires et affines et nos conjectures porteront sur l'ensemble des élèves d'une classe de seconde.

IV.3.1. Les tâches

Pour exemplifier l'usage que nous faisons des matrices de dépendances didactiques, nous reprenons les exercices sur les contrats et les rémunérations. Pour conjecturer des formes aux connaissances que les élèves de seconde vont activer pour réaliser ces tâches, nous nous appuyons sur les pratiques supposées des élèves, du primaire au lycée. Depuis l'école primaire, les élèves travaillent sur les grandeurs et la proportionnalité et les programmes scolaires prévoient l'institutionnalisation, en fin de collège, des savoirs sur les fonctions linéaires et affines. A l'entrée en seconde, les élèves sont donc supposés capables de présenter un programme de calcul, permettant de résoudre une situation linéaire ou affine, sous une forme canonique (tâches T1 et T2). Par contre, ils ont plus de difficultés à associer la formule algébrique au programme de calcul et à reconnaître une structure dans une situation (Comin, 2005). Nous envisageons une connaissance implicite des tâches T4 et T7.

Dans la matrice suivante, figurent nos différentes conjectures sur les formes de connaissances que les élèves vont activer pour réaliser ces tâches T1, T2, T4, T7. Toute évaluation auprès des élèves peut conduire à invalider ces conjectures et à ajuster l'organisation didactique en conséquence.

Matrice cf. Évolution des formes de connaissance pour les fonctions linéaires et affines en seconde.

	Formes supposées des connaissances à l'entrée en seconde	Formes supposées des connaissances après les leçons en seconde
T1) Repérer la dépendance	Ca	Fa
T2) Décrire S avec PTCF	Ca	Fa
T4) Associer deux des ostensifs PTCF	Im	Ca
T7) Reconnaître le représentant d'une classe	Im	Ca

Un travail identique de conjectures sur la forme supposée du lien que les élèves sont capables d'établir entre les différentes tâches nous a conduit à dresser la matrice suivante pour les tâches T1, T2, T4, T7 qui concernent les exercices sur les contrats et les rémunérations. Par exemple, les élèves savent que pour décrire une situation avec au moins un des quatre ostensifs P, T, C, F (tâche T2), il faut préalablement repérer la dépendance entre les grandeurs (tâche T1) ; nous conjecturons que cette connaissance a été institutionnalisée au collège, ce qui est noté Ca dans la cellule c_{21} du tableau suivant.

Matrice ccf. Formes supposées des dépendances entre connaissances avant les leçons de seconde, pour les fonctions linéaires et affines.

	T1	T2	T4	T7
T1				
T2	Ca			
T4	Ca	Ca		
T7	Im	Im	Im	

La reprise de l'étude des fonctions linéaires et affines en seconde a pour but de faire évoluer les connaissances des élèves et les formes de leurs dépendances. Il conviendrait maintenant de refaire cette matrice en projetant les nouvelles formes de dépendances entre les connaissances des élèves après les leçons de seconde.

IV.3.2. Les représentants P, T, F, C

Rappelons que dans notre curriculum, nous accordons une importance toute particulière aux tâches 2 et 4. En effet, ces tâches conduisent progressivement les élèves vers des modèles algébriques et un travail sur ces modèles. Les matrices suivantes donnent le détail de nos conjectures sur les formes de connaissances des élèves avant et après les leçons de seconde sur les fonctions affines.
La matrice **cf** décrit, en termes de formes de connaissances, l'aptitude supposée des élèves à représenter une situation affine à l'aide de chacun des ostensifs P, T, F, C (tâche 2), avant et après les leçons de seconde.

Matrice cf : évolution des formes des connaissances

	Formes supposées des connaissances sur les fonctions affines dans le cadre des grandeurs à l'entrée en seconde	Formes supposées des connaissances sur les fonctions affines dans le cadre numérique après les leçons en seconde
P	Ca	Fa
T	Ca	Fa
F	Im	Fa
C	Ca	Fa

La matrice **ccf** suivante détaille les formes supposées des connaissances que les élèves mobilisent pour établir une relation entre deux des quatre représentants P, T, F, C (tâche 4), pour les fonctions affines avant et après les leçons de seconde.

Matrices ccf : formes des dépendances entre connaissances sur les fonctions affines

Fonctions affines avant les leçons					Fonctions affines après les leçons				
B → A B	P	T	F	C	B → A	P	T	F	C
P	Ca	Im	Im	Im	P	Fa	Ca	Fa	Fa
T	Ca	Ca	Ca	Im	T	Fa	Fa	Fa	Ca
F	Im	Im	Im	Im	F	Fa	Ca	Fa	Ca
C	Im	Im	Ca	Ca	C	Fa	Ca	Fa	Fa

Ces conjectures montrent que la complexité engendrée par l'étude des formes de connaissances, peut être contrôlée, au moins ponctuellement, grâce à la fonctionnalité des différentes matrices des dépendances didactiques.

IV.3.3. Validation des conjectures

Le professeur doit trouver un compromis entre la volonté d'améliorer les formes de connaissances des élèves et la nécessité d'introduire des objets de savoirs nouveaux sous la contrainte du temps institutionnel. Pour prendre des décisions, il doit disposer de moyens d'invalider ses conjectures. C'est ce qu'il fait de manière implicite avec les contrôles qu'il soumet aux élèves[3].

Pour poursuivre notre illustration, nous reprenons les fréquences de réussites aux deux exercices sur les contrats de location et les rémunérations des voyageurs de commerce. A défaut d'autres moyens, nous convenons arbitrairement de rejeter une forme canonique (Ca) si la fréquence de réussite des élèves est inférieure à 0,5 et de rejeter une forme familière (Fa) si cette fréquence est inférieure à 0,8.

Année 2002-2003 (avant les leçons de seconde)

Dans l'exercice sur les contrats de location, l'élève doit repérer la dépendance entre le nombre de kilomètres parcourus et le montant à payer (tâche 1), puis concevoir le programme de calcul (tâche 2), enfin établir le lien entre ce programme et la formule qui le résume (tâche 4). La forme supposée dans les matrices a priori était un usage canonique (Ca) pour les deux premières tâches et un usage implicite (Im) pour le lien (tâche 4). Or, le fait que plus de 90% des élèves interrogés réussissent à choisir la bonne formule, semble indiquer que les élèves se sont familiarisés avec les connaissances correspondant à ces trois tâches.

Année 2004-2005 (avant les leçons de seconde)

Dans l'exercice sur les trois voyageurs de commerce, l'élève doit repérer la dépendance entre la rémunération et le montant des ventes (tâche 1). Mais ici, le programme de calcul est seulement évoqué et non décrit en langage courant comme dans le questionnaire précédent. L'élève doit reconnaître, parmi les formules proposées, le représentant d'une classe de situations, c'est-à-dire, établir directement le lien entre la situation évoquée en termes de grandeurs et la formule, ce qui nécessite une articulation entre le registre sémantique des grandeurs et le registre syntaxique des structures opératoires de l'algèbre. C'est la tâche 7 qui relève du niveau d'abstraction réfléchissante que suppose le passage à l'algèbre.

[3] Marie Pierre Chopin décrit la tension que le temps institutionnel (légal) exerce sur le temps didactique et ses effets sur les décisions du professeur et sur l'évolution du répertoire de connaissances des élèves de la classe.

Nous avions supposé un usage implicite (Im) comme forme de connaissance à l'entrée en seconde pour cette tâche 7 ainsi que pour le lien entre la tâche 1 et la tâche 7. Les fréquences de réussite des élèves, supérieures à 50%, nous conduisent à rejeter cette hypothèse et à penser que cette connaissance est déjà institutionnalisée à l'entrée en seconde. Nous pouvons néanmoins remarquer que dans l'exercice sur les contrats de location les réponses sont groupées, alors que dans l'exercice sur les rémunérations des voyageurs de commerce les réponses sont plus dispersées (pour les rémunérations de Marie et Simon). On peut comprendre que des savoirs institutionnalisés permettent de choisir la bonne formule (les réponses des élèves sont alors groupées), alors qu'un usage implicite de connaissance laisse davantage de place au hasard, ce qui se manifeste par une plus grande dispersion des réponses des élèves. Il est difficile de repérer les formes de connaissances des élèves ; une quantification des réussites lors d'une évaluation standard n'y suffit pas. Une mesure de la dispersion des réponses pourrait être un indice plus fin que la seule fréquence des réussites.

Année 2006-2007 (après les leçons de seconde)
Le même exercice sur les voyageurs de commerce, soumis en 2006-2007 à des élèves de seconde, après les leçons sur les fonctions linéaires et affines, donne des fréquences de réussite supérieures à 90% pour les mêmes tâches. La reprise en seconde, des fonctions linéaires et affines, rend ces savoirs familiers aux élèves. (Nous avions prévu une connaissance familière pour la tâche 1 mais seulement une connaissance canonique pour la tâche 7). Cette évolution dans les réussites renforce l'idée que le passage à l'algèbre est un processus lent qui s'effectue sur plusieurs années. Seuls les exemples traités au travers de situations didactiques dans le cadre arithmétique puis algébrique fournissent aux élèves les outils transactionnels entre ces deux approches.

Conclusion

Nous avons expliqué l'évolution des comportements d'élèves en modélisant leurs connaissances par des formes qui conditionnent la signification qu'ils peuvent attribuer à différentes situations et objets mathématiques. Les matrices de dépendances didactiques sont un outil pour l'élaboration et l'ajustement de curriculums adaptés à l'évolution de ces formes de connaissances. Nous envisageons une construction progressive du concept algébrique de fonction, mais tous les élèves n'évoluent pas à la même vitesse ; or le professeur d'une classe ne peut pas assurer un enseignement individualisé. Au mieux, il peut travailler avec des groupes d'élèves en module ou en travaux dirigés.

Conclusion et perspectives

Pour que l'étude des fonctions n'apparaisse pas, aux yeux des élèves, comme la construction d'une théorie sans objet, nous avons envisagé un curriculum où les fonctions numériques sont abstraites de relations entre grandeurs avant de devenir des entités algébriques qui résument et réfléchissent les connaissances de l'arithmétique. Dans ce processus de conceptualisation, certains objets de savoirs, tels le tableau ou la formule, acquièrent une multidimensionnalité sémantique qui les rend adaptables aux différents cadres. Nous les appelons « transposons » car ils sont des objets de savoir dans chacun des cadres mais aussi des outils de transposition réversibles entre ces cadres. Pour que les élèves puissent attribuer plusieurs sens à ces mêmes objets, ils doivent les rencontrer dans différentes situations adaptées à l'état de leurs connaissances. Les matrices de dépendances logiques et didactiques peuvent être des outils mis à la disposition des professeurs, pour les aider à élaborer des projets didactiques adaptés à l'évolution des connaissances des élèves. Mais les répertoires des élèves placés dans les mêmes conditions d'apprentissage, n'évoluent pas tous de la même manière ni à la même vitesse. Or le professeur ne peut pas faire un suivi clinique individualisé. Il doit conduire toute une classe, au mieux, il peut moduler son enseignement avec des groupes d'élèves. Il faudrait donc lui fournir les moyens de discriminer des groupes homogènes relativement aux formes de connaissances nécessitées par les situations, pour qu'il puisse ajuster l'organisation didactique aux besoins réels des élèves.

Références bibliographiques

BALACHEFF Nicolas (1995). Conception, connaissance et concept. In Denise Grenier (ed.) *Séminaire Didactique et Technologies cognitives en mathématiques*, pp. 219-244. Grenoble IMAG.

BLOCH Isabelle (2002). Un milieu graphique pour l'enseignement de la notion de fonction. *Petit x* n° 58, pp. 25-46.

BROIN Dominique (2002). *Arithmétique et algèbre élémentaires scolaires.* Université de Bordeaux I.

BROUSSEAU Guy (1988). Le contrat didactique : le milieu. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 9/3, pp. 309-336.

CHAUVAT Gérard (1998-1999).Courbes et fonctions au collège. *Petit x* n°51, pp. 23-44.

CHEVALLARD Yves (1985-1990). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Petit x, n°5, n°19 et n°23.

CHOPIN Marie-Pierre. (2007). *Le temps didactique dans l'enseignement des mathématiques. Approche des phénomènes de régulation des hétérogénéités didactiques.* Bordeaux 2.

CIRADE Gisèle et MATHERON Yves (2001). Structures, fonctionnement, écologie des organisations didactiques, à propos de fonctions. *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques.* La Pensée sauvage éditions.

COMIN Eugène (2000). *Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire.* Bordeaux : Université de Bordeaux 1.

COMIN Eugène (2002). L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 22, n°2-3, p.135-182.

COMIN Eugène. (2005). Variables et fonctions, du collège au lycée. *Petit x* n°67, pp. 33-61.

COPPE Sylvie, DORIER Jean-Luc, YAVUZIlyas (2007). De l'usage des tableaux de valeurs et des tableaux de variations dans l'enseignement de la notion de fonction en France en seconde. *RDM*, vol.27, n°2, pp. 151-186

DOUADY Régine (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *RDM*, 7/2, pp. 5-31.

ESMENJAUD-GENESTOUX Florence (2006). Le travail personnel au collège ou le partage des responsabilités didactiques. *Petit x*, n°70, pp. 48-72.

GENESTOUX Florence (2001). Les assortiments didactiques. *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques*, La Pensée Sauvage éditions.

LACASTA Eduardo. (1995) *Les graphiques cartésiens de fonctions dans l'enseignement secondaire des mathématiques : illusions et contrôles.* Thèse, Université de Bordeaux I.

RENE DE COTRET Sophie (1985). *Étude historique de la notion de fonction : analyse épistémologique et expérimentation didactique*. Université du Québec.

ROUCHIER André (1996). Connaissances et savoirs dans le système didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, vol.16, n°2, pp. 177-196.