INTRODUIRE LES DÉRIVÉES PAR LES VITESSES. POUR QUI ? POURQUOI ? COMMENT ?

Jean-Yves GANTOIS
Maggy SCHNEIDER
Laboratoire de Didactique des Mathématiques,
Université de Liège, Belgique

Résumé. Cet article porte sur l'enseignement et l'apprentissage de la dérivée. Il pose la question du sens de ce concept et du niveau auquel il peut être travaillé, le sens pouvant renvoyer à des contextes divers. Après quelques observations faites lors de la transition secondaire-université, qui suggèrent que les apprentissages des élèves sortant du secondaire sont surtout de l'ordre du procédural, nous présentons ici un morceau d'ingénierie didactique permettant d'introduire la dérivée dans un contexte cinématique, ainsi que quelques réactions d'élèves.

Mots clés. accélération, cinématique, dérivée, instantané, transition secondaire-université, vitesse variable.

Introduction

Plusieurs concepts mathématiques sont des objets d'étude à la fois dans l'enseignement secondaire et dans l'enseignement supérieur, universitaire ou non. Ainsi en va-t-il du concept de dérivée et d'autres notions appartenant au même champ conceptuel et, en particulier, tout ce qui a trait aux fonctions.

On peut se demander quel doit être le partage des responsabilités entre les deux niveaux d'enseignement : ce qui peut être abordé dans l'enseignement secondaire, ce qui est attendu au commencement des études supérieures, et ce qui sera abordé spécifiquement au cours des études supérieures. Sans doute la question doit-elle être traitée différemment selon qu'il s'agit d'élèves qui poursuivront des études de mathématiques ou d'autres dont on attend qu'ils soient « simplement » utilisateurs des mathématiques dans d'autres disciplines : futurs biologistes, économistes, ... Nous nous sommes posés ici cette question pour ce dernier public, en nous focalisant sur les apprentissages liés à la dérivée.

Les demandes exprimées par certains professeurs d'université à l'égard de l'enseignement secondaire ne nous semblent pas très claires. Ainsi, dans le cadre d'un projet intitulé *Prérequis*, peut-on lire sur le site des Facultés universitaires Notre-Dame de la Paix à Namur (http://www.fundp.ac.be/recherche/projets/) ce qui est attendu des élèves qui vont entamer des études universitaires :

> *Fonctions : connaître la notion de fonction et le vocabulaire associé (variable, fonction constante, fonction positive, ...) au niveau graphique et/ou analytique, donner le domaine de définition et le graphe d'une fonction, connaître le vocabulaire élémentaire associé aux graphiques (abscisses, ordonnées,...), interpréter le graphe*

> *d'une fonction, relier le graphique d'une fonction à une expression analytique ; connaître la notion de continuité d'une fonction et pouvoir calculer les limites de fonctions simples ; connaître la notion de dérivée d'une fonction, pouvoir établir la fonction résultant de la composition de deux fonctions ; connaître les notions de base relatives aux fonctions logarithmes et exponentielles (graphes, dérivées, propriétés élémentaires)*.

En bref, beaucoup de connaissances de type procédural, des généralités sur les fonctions qui requièrent un apprentissage du vocabulaire, des contenus subtils — telle la continuité — dont on pourrait se demander s'ils ne trouveraient pas mieux leur place dans l'enseignement supérieur, des références qui s'expliquent par une grande importance accordée aux exercices dits de variation de fonctions. Le verbe « connaître » lui-même est abondamment utilisé mais masque mal une absence de signification.

Quelle est la part de « réelle compréhension » attendue ? On la cerne difficilement, à supposer que les auteurs du projet l'aient définie préalablement. Ou pire, elle est le monopole de l'enseignement universitaire si l'on en juge par ce propos tenu par un des responsables de ce projet (professeur en première année d'université) :

> *Je crois que tout simplement dans le secondaire j'ai vu la limite et la dérivée comme des techniques. Je savais très bien dériver, je ne me trompais pas mais la signification profonde de la dérivée, je ne l'avais pas perçue. Je pense que la maturité de l'élève est telle que c'est une notion sur laquelle il faut revenir après. Je ne vois pas de problème à dire : on a donné la définition, on a surtout insisté sur la technique de calcul parce que c'est à la portée des élèves à cet âge-là et puis en premier bac[1], on revient sur la notion en disant : attention, voilà ce qu'il y a en plus. Même en bio, je reviens dessus en disant : c'est un taux de variation instantané particulier. Et ça, dans le secondaire, on ne l'a pas vu mais il ne fallait peut-être pas le voir. C'est à nous à le faire*.

Peut-on admettre, comme le suggère la citation précédente, que l'enseignement des dérivées au niveau secondaire soit axé essentiellement sur des acquisitions procédurales ? Cet enseignement est-il tellement procédural dans le secondaire ? Que peut-on vraiment espérer comme type d'apprentissage à ce niveau ?

Pour tenter d'éclairer ces questions, nous avons, d'une part, proposé un questionnaire à des étudiants sortant de l'enseignement secondaire et nous avons, d'autre part, testé un enseignement qui se polarise sur le sens du concept et non sur le calcul. Dans les sections qui suivent, nous rendons compte de ces tentatives.

I. Questionnaire soumis à des élèves sortant de l'enseignement secondaire et résultats

I.1. Contexte

Nous avons proposé un questionnaire à des élèves sortant de l'enseignement secondaire. Notre seule ambition était de voir, par un premier coup de sonde, jusqu'à quel point ces élèves mobiliseraient spontanément différents aspects liés aux dérivées, en dehors du contexte de leur enseignement.

[1] Le Bac est le premier cycle des études supérieures ; en France, pour éviter la confusion avec l'examen sanctionnant les études secondaires, on parle de la licence.

Les aspects en question sont explicitement mentionnés dans les programmes scolaires, qu'il s'agisse du programme à 4 heures ou 6 heures de mathématiques par semaine, programmes suivis par les élèves interrogés.

Voici des extraits du texte relatif au programme pour 4 heures.

Dérivées

- *Nombre dérivé, fonction dérivée. Interprétation géométrique (tangente), cinématique (vitesse), économique (coût marginal)...*
- *Le nombre dérivé en un point sera défini à partir du taux d'accroissement.*
- *Calcul des dérivées.*
- *Dérivée des fonctions usuelles ; dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient ; dérivée de la composée de deux fonctions.* [...]

Applications diverses :

- *Dérivées et croissance.*
- *Modélisation de problèmes liés à la physique, l'économie, aux sciences humaines...*
- *Approximation locale d'une fonction par une fonction du premier degré.*
- *Résolution approchée d'une équation.*
- *Problèmes liés à la recherche de valeurs extrémales.*
- *Représentation graphique de quelques fonctions.*

On montrera le lien entre :

- *la dérivée première et la croissance de la fonction ;*
- *la dérivée seconde, la croissance de la dérivée première et la concavité.*

Le programme 6h/sem. ajoute, outre une mention de la règle de l'Hospital, quelques références à ce qui est appelé « théorèmes classiques » ; ajout que l'on peut interpréter comme relevant d'un objectif d'approche un peu plus théorique.

Théorèmes classiques : théorème des accroissements finis, relation entre la croissance d'une fonction dérivable et le signe de sa dérivée première, relation entre la concavité du graphique d'une fonction deux fois dérivable et le signe de sa dérivée seconde.

Toutes les démonstrations ne doivent pas être établies, cependant les propriétés seront reliées entre elles.

Précisons à présent le contexte de nos observations : le questionnaire mentionné a été soumis à des élèves inscrits à une formation « propédeutique » aux Facultés universitaires Saint-Louis (Bruxelles, 2007), pour consacrer une partie de leurs vacances à se préparer aux études universitaires. Pour ne pas fausser l'expérience, les étudiants ignoraient quel serait le contenu précis de la formation et sur quoi porterait le questionnaire.

Nous reprenons ci-après chacune des questions, ses enjeux et les réponses des étudiants.

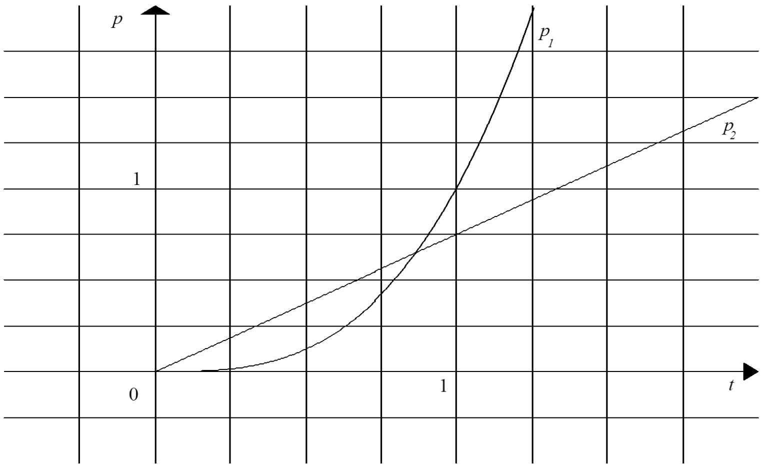
I.2. Le questionnaire

I.2.1. Question 1

Énoncé

Considérons deux particules P_1 et P_2 qui se déplacent sur un axe orienté. Leurs positions respectives p_1 et p_2 en fonction du temps sont données par les graphiques de la figure ci-dessous. Les fonctions correspondantes sont :

$$p_1(t) = t^3 \qquad p_2(t) = \tfrac{3}{4}\,t\ .$$



a) À quel moment ces deux particules ont-elles la même vitesse ? Estimer graphiquement ce moment, en faisant des mesures sur le graphique.

b) Même question : à quel moment ces deux particules ont-elles la même vitesse ? Déterminer ce moment par le calcul.

Enjeu

Cette question met en jeu l'interprétation cinématique de la dérivée, spécifiée par le programme scolaire belge. Nous n'en faisons pas ici une analyse *a priori* sur laquelle nous reviendrons à la section II.2. Mentionnons néanmoins que cette question requiert de savoir interpréter correctement des phénomènes cinématiques à partir de lois de mouvement donnant la position en fonction du temps, ce que l'on peut considérer comme un des objectifs des mêmes programmes scolaires, l'interprétation de graphiques dans divers contextes y étant reprise.

Observations

Seulement cinq étudiants sur trente-huit pensent spontanément à utiliser la dérivée pour résoudre la question 1 b). Parmi eux, trois parviennent à résoudre correctement cette question. Un de ces trois étudiants parle d'une droite parallèle au graphique de p_2 qui rencontre celui de p_1 en un seul point. Il égale les dérivées des fonctions t^3 et $\frac{3}{4}t$ pour trouver que $t = \frac{1}{2}$.
Deux étudiants, sans penser à la dérivée, utilisent la pente pour résoudre la question 1 a) mais aucun d'eux ne parvient à résoudre la question 1 b). L'un d'eux écrit que « pour calculer l'instant des mêmes vitesses, il faut trouver l'instant *t* dont la pente = ¾ ». Il poursuit :

« <u>ainsi</u> : $t^3 = \frac{3}{4}t$ »

Deux autres étudiants font référence à la tangente mais ne parviennent pas à s'en servir pour résoudre analytiquement la question. La réponse à 1 b) de l'un d'eux est « Je ne me souviens plus de l'équation de la pente de la tangente ».

Quant aux autres étudiants, ils considèrent que l'instant t cherché est tel que $p_1 = p_2$. Lorsque nous demandons pourquoi à l'un de ces étudiants, sa réponse est « vitesse égale distance sur temps ». Certains justifient ainsi leur réponse : ils égalent v_1 à v_2, remplacent v_1 par p_1 / t_1 et v_2 par p_2 / t_2 et concluent que $p_1 = p_2$ puisque $t_1 = t_2$.

Deux étudiants confondent la vitesse instantanée et la vitesse moyenne : $v = \Delta p / \Delta t$. Citons enfin le cas de quatre autres étudiants qui voient dans la loi de mouvement de P_1 une « accélération exponentielle » alors qu'ils disposent de l'expression analytique de cette loi. Aucun étudiant n'y voit un mouvement rectiligne uniformément accéléré, dupé par l'allure de la courbe, contrairement à ce que l'on observe d'habitude au secondaire.

I.2.2. Question 2

Énoncé

Considérons un mobile sur une trajectoire rectiligne. Il démarre à l'instant $t = 0$ *de la position* $p = 2$. *Il accélère jusqu'à l'instant* $t = 3$. *À cet instant, il occupe la position* $p = 6$ *et sa vitesse instantanée vaut* 2. *Il décélère ensuite jusqu'à l'arrêt, qui se produit à l'instant* $t = 6$ *et à la position* $p = 10$. *Il fait alors demi-tour et atteint la position* $p = 8{,}25$ *à l'instant* $t = 7{,}5$. *Sa vitesse vaut alors* -2,5. *Il continue à décélérer jusqu'à l'instant* $t = 9$ *et la position* $p = 2$. *Sa vitesse devient alors constante et vaut* -6. *Dessiner le plus précisément possible la loi de mouvement de ce mobile sur le graphique suivant.*

(Suivait un repère orthonormé quadrillé pour faciliter la tâche des étudiants. La formulation de cette question est perfectible sur plus d'un point. En particulier, dans une version ultérieure, il sera question d'accélération négative et non de décélération, et de marche arrière et non de demi-tour).

Enjeu

Il s'agit ici de tester dans quelle mesure les élèves sont capables de traduire graphiquement un mouvement décrit dans la langue courante et à propos duquel on donne des informations relatives à la position, la vitesse et l'accélération. Cette question peut permettre d'approfondir les difficultés à mobiliser la dérivée dans un contexte cinématique, lequel n'est pas précisé graphiquement, comme dans la première question.

Observations

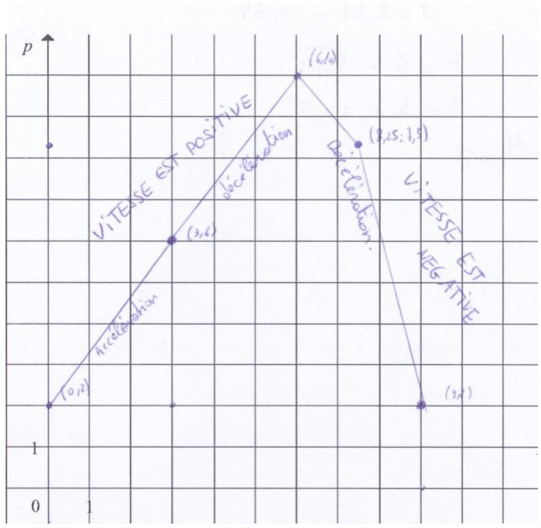
Le fait majeur relevé ici est que vingt-deux étudiants (sur trente-huit) se contentent de placer les points imposés et de les relier par des segments de droite.

Parmi ces vingt-deux étudiants, trois seulement dessinent la courbe au-delà de $t = 9$ (dernier point indiqué). On note alors parfois une confusion entre vitesse constante et fonction constante : les élèves tracent, à partir de $t = 9$, une demi-droite horizontale, comme si la position restait elle-même constante.

Une étudiante, à qui nous demandons comment elle distingue les phases d'accélération des phases de décélération, modifie son graphique en assimilant indûment accélération positive et croissance du graphique, accélération négative et décroissance.

Deux étudiants se rendent compte que des segments de droite sont incompatibles avec la présence d'une accélération ou d'une décélération ; ils ne proposent rien d'autre cependant.

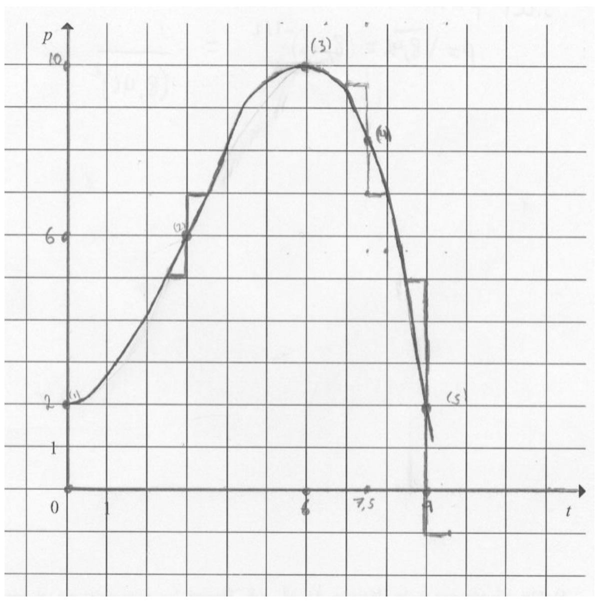
Quatre étudiants compensent « l'invisibilité » du signe de l'accélération et de la vitesse par des annotations sur leur graphique (cf. figure ci-après).



Parmi les seize étudiants qui dessinent un graphique « arrondi », aucun n'explique quel est le lien avec l'accélération. L'un d'eux colorie son graphique pour pouvoir distinguer les différentes phases, ce qui suggère que le graphique seul ne suffit pas pour lui à les distinguer. Un étudiant à qui il est demandé pourquoi il a arrondi la courbe précise ses raisons : « j'ai toujours dessiné les graphiques en arrondissant ».

Parmi les seize étudiants qui dessinent une courbe « arrondie », la moitié dessine la courbe au-delà de $t = 9$. Comme on s'y attendait, la proportion est bien supérieure à celle observée parmi ceux qui relient les points par des segments de droite.

Un seul étudiant traduit la vitesse instantanée à un instant donné par la pente correspondant à une vitesse moyenne (égale à la vitesse instantanée) sur un intervalle centré en l'instant donné.



Finalement, un (seul) étudiant représente les vitesses instantanées par des vecteurs.

I.2.3. Question 3

Énoncé

On suppose ici que la loi de mouvement d'un certain mobile est $p=\sqrt{t}$ *. Ainsi, à l'instant* $t = 9 = 3^2$*, la position du mobile sera* 3*. Sans calculatrice, il n'est pas évident de connaître la valeur numérique de la position du mobile aux instants qui ne sont pas des carrés parfaits. Ainsi, à* $t = 8{,}46$*, on peut seulement dire que, grossièrement, la position est de l'ordre de* 3*.*

a) On voudrait trouver une approximation plus fine de cette position. Quel(s) moyen(s) proposez-vous (en excluant le recours à une calculette) pour donner une telle approximation ?

b) Soit un mobile qui suit la loi de position $p=t^{17}+3t-1$ *. Donner une approximation plus fine que* $p(1) = 3$ *de la position du mobile à l'instant* $t = 1{,}127$.

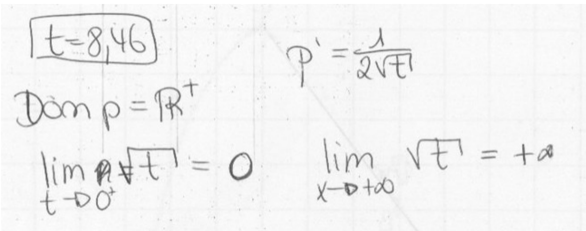
Enjeu

Cette question se situe à nouveau dans un contexte cinématique, mais là n'est pas l'important *a priori* : nous cherchons à déterminer si la dérivée est mobilisée pour procéder à des approximations numériques locales, ce qui est également une compétence spécifiée par le programme scolaire.

Observations

Aucun étudiant n'envisage de faire une approximation affine. Un (seul) étudiant a de vagues souvenirs : « Il existe une formule relative à la dérivée de la fonction (et aux tangentes ?) » écrit-il (c'est la première fois que le mot « dérivée » apparaît sur sa feuille).

Un autre pense à la dérivée, parmi plusieurs « outils » relatifs aux fonctions, mais sans l'exploiter :



Un dernier étudiant envisage d'utiliser une intégrale...

Vingt-deux étudiants sur trente-huit proposent néanmoins une résolution de la question 3 a) sans pouvoir l'étendre à la question 3 b) : lecture sur un graphique, mise en valeur de carrés parfaits ou tâtonnement numérique.

I.2.4. Question 4

Énoncé

On s'intéresse à la dérivée de $x^3.u^2$ *. Parmi les propositions ci-après, laquelle ou lesquelles sont correctes ? Justifier.*

a) $x^3 . 2u$

b) $3x^2 . u^2$

c) 0

d) $3x^2 . u^2 + x^3 . 2u$

Enjeu

Il est évident que cette dernière question est de l'ordre du piège. On demande à l'étudiant de dériver une expression dans laquelle apparaissent deux lettres, x et u, la première étant généralement utilisée pour désigner une variable, la seconde ayant un statut non explicité dans l'énoncé en ce sens qu'elle peut être une variable ou une constante. Les élèves, à ce stade, ne savent dériver qu'une fonction d'une variable et l'énoncé ne précise pas s'il faut dériver par rapport à x ou à u. Le but est donc de voir dans quelle mesure les élèves s'en aperçoivent et le traitement qu'ils imposent à u. Notons que la forme même de la question peut induire qu'au moins une réponse est correcte. En fait, nous aurions dû prévoir dans les choix multiples des réponses plausibles ou une option telle que « Aucune de ces réponses ».

Observations

Trente-trois étudiants sur trente-huit choisissent la réponse d), trois étudiants choisissent la réponse b), un étudiant donne sa propre réponse et un dernier ne répond pas. Parmi les trente-trois étudiants ayant choisi la réponse d), vingt-neuf justifient leur choix, mais aucun ne se demande par rapport à quelle variable il s'agit de dériver. De même, il ne fait de doute à personne que x est une variable. Un étudiant écrit dans la marge « mais 2 inconnues ? ». Cela ne l'empêche pas de choisir la réponse d). Deux autres étudiants se demandent explicitement si u est une variable ou une constante. Mais, le plus souvent, les étudiants citent « la » formule de la dérivée d'un produit. Bien sûr, ces résultats doivent être relativisés à la lumière de la maladresse de la question posée. En effet, on peut craindre ici un effet de contrat type « âge du capitaine », les élèves s'attendant à ce que chaque question du QCM soit assortie d'une réponse correcte. Il n'en demeure pas moins que les résultats obtenus ici corroborent d'autres observations faites lors de séances d'exercices en première année d'université : quand on demande aux étudiants de dériver une expression semblable à celle concernée ici par rapport à x ou à u, ils demandent très souvent : « Que veut dire : dériver **par rapport à** ... ? » Et cela peut se comprendre par le fait qu'ils n'ont pas souvent eu le loisir de gérer des expressions analytiques où les variables sont a priori multiples.

I.3. Éléments d'interprétation d'un constat négatif

Les réponses obtenues au questionnaire nous amènent à un constat négatif : les élèves éprouvent des difficultés à mobiliser la dérivée dans un contexte cinématique. Ils ne parviennent pas non plus à la réinvestir dans le cadre d'approximations numériques locales. Certes, la troisième question qui le testait était à nouveau formulée dans un cadre cinématique mais nous pouvons supposer, au vu d'observations faites par ailleurs, que le contexte joue ici un rôle négligeable. Quant au calcul de dérivées, il serait réduit à une procédure sans signification puisque les élèves ne semblent pas être conscients qu'il faut préciser la variable par rapport à laquelle on dérive.

Comment interpréter ce constat ? On peut, bien sûr, parler des circonstances de passation du questionnaire : les étudiants ont pu ne pas prendre au sérieux une « évaluation » qui n'a pas de caractère certificatif ou, au contraire, ils ont développé un stress lié à la perspective de l'entrée à l'université et à ce que cela supposait en termes de connaissances. On peut aussi convoquer un phénomène plus global, bien connu en didactique, à savoir que la rétention des mathématiques du lycée est décevante à l'entrée à l'université, après quelques semaines de vacances. Il n'empêche que, d'une part, les questions posées nous paraissent assez élémentaires par rapport aux objectifs de l'enseignement secondaire et que, d'autre part, les élèves n'ont pas tout oublié puisqu'ils se souviennent de la formule donnant la dérivée d'un produit...

Il nous paraît utile ici d'évoquer ce que nous savons des pratiques enseignantes en ce qui concerne l'enseignement de la dérivée au cycle secondaire en Belgique. Ces pratiques semblent orientées vers un exercice jugé majeur qui consiste à déterminer l'allure graphique d'une fonction à partir de son expression analytique, sur la base de renseignements multiples liés, entre autres, au signe de la dérivée première et à celui de la dérivée seconde. En général, l'interprétation cinématique de la dérivée se retrouve dans les manuels scolaires et dans les cahiers d'élèves. Cependant, elle y tient une place anecdotique, peu d'exercices lui étant consacrés. Le thème de la tangente est celui qui sert d'introduction au calcul des dérivées mais il n'est guère approché dans une perspective d'approximation numérique locale. Une grosse partie du cours est consacrée au calcul même des fonctions dérivées. Quant à l'enseignement de physique reçu par les élèves concernés, nous savons peu de choses : il semble qu'un passage obligé soit l'étude des mouvements rectilignes uniformes et des mouvements rectilignes uniformément accélérés, étude à l'occasion de laquelle sont dessinés et interprétés des graphiques de lois de mouvement, de lois de vitesse et de lois d'accélération. Mais la propédeutique proposée ici concerne les mathématiques et les élèves le savent bien... Au total, nous pensons que la piètre performance des élèves questionnés serait imputable, en grande partie, au rapport entretenu par l'institution « cours de mathématique dans l'enseignement secondaire » avec le savoir « dérivées ».

Sans chercher ici à prouver une telle interprétation, nous nous interrogeons sur la possibilité de travailler, au cycle secondaire, un ou des sens possibles du concept de dérivée, au-delà des calculs. Cette possibilité est remise en question par d'aucuns. Ainsi, un professeur d'université estime-t-il que :

> *Je pense que, dans le secondaire, les élèves n'ont aucun intérêt, aucun désir de maîtriser les dérivées.*

Quant aux propos suivants, venant de deux professeurs du secondaire, ils sont assez pessimistes pour des raisons diverses :

> *On nous dit qu'il faut évaluer selon trois compétences : connaître, appliquer et résoudre des problèmes. Mais il vaut mieux mettre le maximum de points pour la deuxième rubrique si l'on veut ne pas avoir trop d'échecs.*
>
> *Tout ce qu'on nous demande, c'est de préparer les élèves à bien calculer pour la suite.*

A contrario de ces avis, nous pensons qu'il est possible de travailler avec les élèves du secondaire le sens même du concept de dérivée et ce, dans des contextes appropriés, même si nous ne pensons pas qu'une telle démarche remédie forcément au problème de la transition secondaire-université. Dans la section suivante, nous montrons une partie d'une ingénierie didactique qui va dans ce sens, ainsi que les réactions que l'on peut attendre des élèves. Cette approche des dérivées est en cours d'expérimentation (Gantois, à paraître) et fait partie d'une ingénierie plus globale des dérivées et des intégrales, dans laquelle les contextes temporels jouent un rôle privilégié (Schneider, Gantois, Rouy, à paraître).

II. Une situation extraite d'une ingénierie didactique, réactions des élèves, brève analyse

L'approche standardisée du concept de dérivée dans l'enseignement secondaire s'appuie sur celui de tangente. On y montre des sécantes à une courbe en des points $(a, f(a))$ et $(a + h, f(a + h))$, lesquelles tournent autour du point $(a, f(a))$ lorsque h tend vers 0 pour finir par occuper la *position limite* de la tangente. On table là sur le fait que les élèves ont une première idée de la tangente à travers la recherche d'une tangente en un point d'un cercle. Souvent, cette approche est estimée suffisante pour faire comprendre ce qu'est un nombre dérivé. C'est méconnaître là plusieurs embûches possibles.

Premièrement, l'apprentissage du concept de limite se heurte à plusieurs obstacles épistémologiques, dont l'obstacle géométrique de la limite étudié par Sierpinska (1985) et Schneider (1988, 1991). Cet obstacle consiste à comprendre le mot limite au niveau de l'ensemble des sécantes : les élèves diront que « la tangente est la limite des sécantes » alors qu'aucune topologie n'a été définie sur l'ensemble des droites. En outre, les élèves ne font pas forcément le lien, numérique celui-là, entre les pentes des sécantes et la pente de la tangente.

Deuxièmement, on observe un cercle vicieux, la tangente n'étant pas vraiment définie dans le nouveau contexte étudié. En effet, on ne peut plus définir la tangente, en un point d'une cubique par exemple, comme une droite qui rencontre la courbe en un seul point. Il faut donc la définir par le biais de sa pente qui est un nombre dérivé. On observe alors une ambiguïté dans la relation tangente-dérivée : dans les cahiers d'élèves ou dans les manuels, on considère implicitement que la tangente est l'objet premier et la dérivée l'objet second, alors que c'est le contraire dans la théorie. Comme l'a montré Rouy (2007), cette ambiguïté persiste chez les étudiants professeurs, alors que ceux-ci en on été dûment avertis.

Troisièmement, en Belgique, on ne montre guère à quoi peut servir la tangente, les approximations numériques locales étant quasiment inexistantes comme déjà dit plus haut. Quant au lien entre la positivité de la dérivée et la croissance de la fonction, il n'est pas vraiment démontré et les élèves ne peuvent donc y voir le rôle de la tangente ni celui du théorème des accroissements finis.

Une autre piste est d'introduire la dérivée dans un contexte de vitesses variables. Cette hypothèse a été testée avec succès par Schneider (1988, 1992), qui a analysé un problème de vitesses liées, où la constance de la vitesse d'une des grandeurs impliquées induit l'intuition que la vitesse de l'autre varie constamment, ce qui pousse à envisager des intervalles de temps de plus en plus petits. Cependant, ce problème est fragile du point de vue écologique (Schneider, 2001) : il suppose de la part des élèves une certaine capacité à modéliser, il relève d'une classe de problèmes peu familière aux professeurs en Belgique et, surtout, il peut être résolu sans référence à la tangente en un point d'une courbe, laquelle constitue pourtant l'emblème de l'introduction des dérivées, comme nous venons de le voir.

D'autres contextes mobilisant des vitesses variables sont dès lors envisagés ici. Plus précisément, il s'agit de contextes qui relèvent de la cinématique, dans le sens où l'on ne s'intéresse pas aux causes des mouvements, c'est-à-dire aux forces en présence. Ces contextes, qui jouent le rôle d'expérience de pensée, englobent d'entrée de jeu des aspects graphiques. En effet, les mouvements des mobiles sur des trajectoires rectilignes sont précisés par des lois de position, d'abord graphiquement, ensuite analytiquement. Pour cette raison, ils permettent de travailler d'une manière conjointe vitesse et tangente.

II.1. En amont de cette situation

La situation sur laquelle nous nous focaliserons ici est précédée d'une autre qui lui sert d'amorce. Il s'agit de faire décrire par les élèves le mouvement d'une particule sur une trajectoire rectiligne (fig. 1) à partir du graphique de sa loi de mouvement (fig. 2).

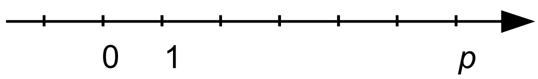


Fig. 1 : Axe sur lequel se déplace la particule

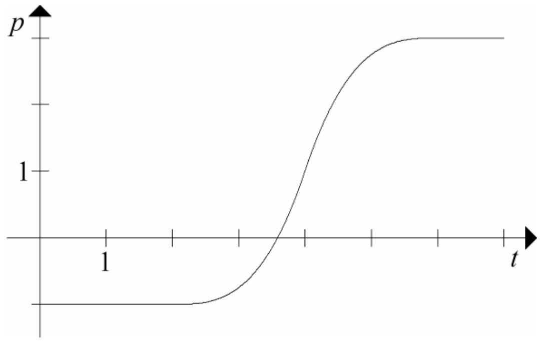


Fig. 2 : Loi de mouvement

Un premier enjeu de cette situation est de lever une confusion éventuelle entre le graphique d'une loi de position, d'une part, et la trajectoire du mobile, d'autre part.

Un deuxième enjeu est de travailler :

- le lien entre la position du graphique par rapport à l'axe des temps et celle de la particule qui bouge par rapport à l'origine de la trajectoire ;
- l'interprétation de la croissance du graphique ou de son caractère stationnaire en termes de progression ou d'arrêt du mobile ;
- le concept de vitesse moyenne sur un intervalle de temps [t ; $t + \Delta t$] et son interprétation graphique ;
- une relation qualitative entre la concavité de la courbe et la variation de ce que les élèves appellent la « pente de la courbe en un point » et, par conséquent, une première approche de l'accélération.

Ce travail fait l'objet d'une institutionnalisation sur laquelle élèves et professeur pourront s'appuyer pour réaliser la tâche suivante.

II.2. Analyse d'une tâche : à quel moment un mobile possède-t-il une vitesse donnée ?

On donne aux élèves la figure 3 qui représente les graphiques des lois de position respectives de deux mobiles évoluant sur une trajectoire rectiligne. Il s'agit de déterminer l'instant auquel les mobiles ont même vitesse. Dans un premier temps, les expressions analytiques des lois de position ne sont pas données.

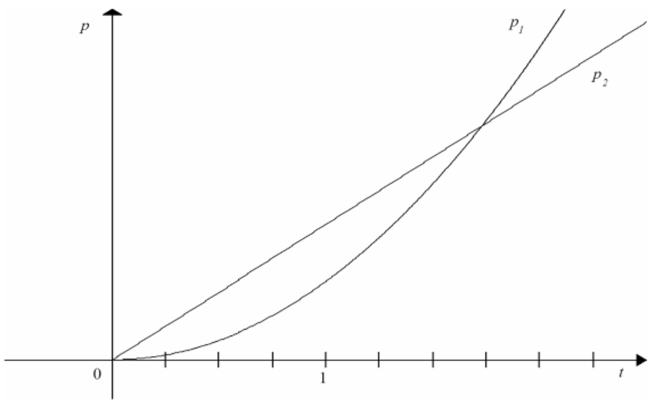


Fig. 3 : Lois de mouvement de P_1 et P_2

Elles le sont ensuite : $p_1(t) = t^2$ et $p_2(t) = \sqrt{3}\,t$. Enfin, elles sont remplacées par :

$$p_1(t) = t^3 \text{ et } p_2(t) = \tfrac{3}{4}\,t$$

(avec un graphique très semblable au précédent). En ce qui concerne le premier couple de lois de mouvement, trois stratégies au minimum de résolution sont possibles.

Stratégie de l'écart maximal

On recherche, par mesure ou par calcul, l'écart maximal entre les positions des deux mobiles (fig. 4) :

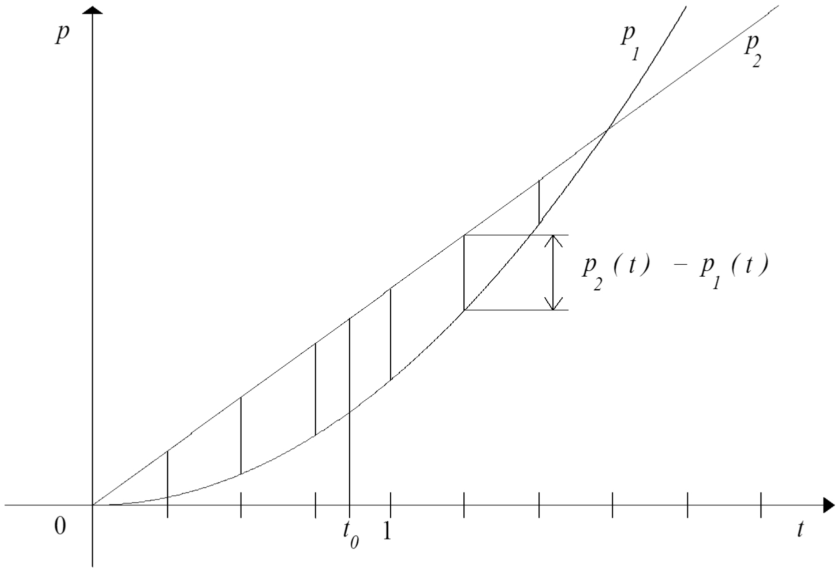


Fig. 4 : Écart maximal

L'axe de symétrie d'une parabole est connue et le maximum de $\sqrt{3}t - t^2$ est donc atteint en $t0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Un élève écrit que la solution correspond au point de P_2 le plus éloigné de P_1 en se justifiant de la sorte :

au début l'écart entre eux deux augmente.
P_1 s'éloigne de P_2. $V_1 < V_2$.
Au moment où P_1 est le plus éloigné de P_2,
c'est l'instant E (point tg) car à partir
de là, l'écart P_1P_2 diminue càd que $V_1 > V_2$.
Donc E = le pt où $V_1 = V_2$
= pt de tg.

(« au début l'écart entre eux deux augmente. P1 s 'éloigne de la v1 <v2. Au moment où P1 est la plus éloigné de P2, c'est l'instant E (point tg) car à partir de là, l'écrat P1P2 diminue càd que v1>v2. Donc E=le point où v1=v2 = pt de tg.»)

Stratégie de la tangente

On détermine, à nouveau par mesure ou par calcul, l'instant pour lequel la courbe relative à p_1 possède une « pente » égale à $\sqrt{3}$ ou, ce qui revient au même, l'instant en lequel une droite de pente $\sqrt{3}$ est tangente à cette courbe en ce sens qu'elle ne la rencontre qu'en un seul point (fig. 5).

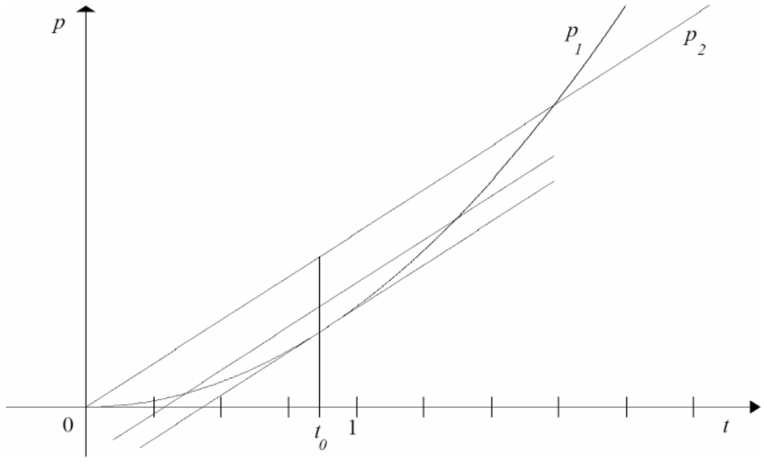
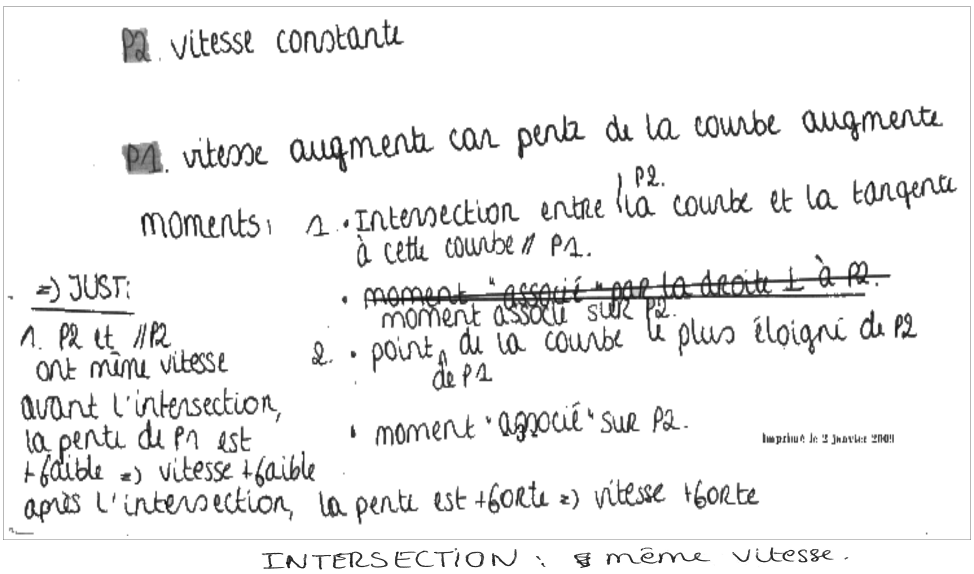


Fig. 5 : Un seul point de contact

En exprimant que l'intersection entre la parabole et une droite de pente $\sqrt{3}$ et d'ordonnée à l'origine k est réduite à un point, on obtient à nouveau $t_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Voici, à titre d'illustration, une production d'un élève qui va dans ce sens.



Stratégie des marches d'escalier

Une troisième stratégie consiste à comparer, pour les deux mobiles, les déplacements respectifs effectués en des intervalles de temps égaux et de plus en plus petits : on n'est pas loin de l'instant où les vitesses sont égales là où sont égales les contremarches des escaliers imaginaires dessinés à la figure 6 et ce, pour des intervalles de temps les plus petits possibles.

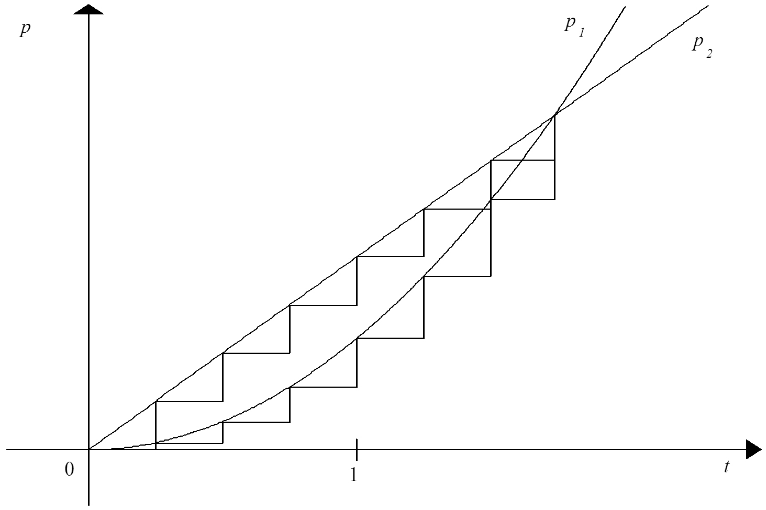


Fig. 6 : Contremarches ou vitesses moyennes égales

Puisque les intervalles de temps sont les mêmes partout, on peut tout aussi bien égaler les pentes entre deux marches que les hauteurs des contremarches. L'avantage est d'exprimer une vitesse moyenne qui ouvrira la porte plus tard à la vitesse instantanée.

Si l'on appelle Δp_1 la hauteur de la contremarche de p_1 et Δp_2 la hauteur de la contremarche de p_2 entre les instants t et $t + \Delta t$. On a :

$$v_{m_1} = \frac{\Delta p_1}{\Delta t} = \frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = \frac{2t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} \text{ , et}$$

$$v_{m_2} = \frac{\Delta p_2}{\Delta t} = \frac{\sqrt{3} \cdot \Delta t}{\Delta t}.$$

En écrivant que les vitesses moyennes sont égales, on trouve $2t + \Delta t = \sqrt{3}$.
En posant $\Delta t = 0$, on retrouve le même résultat que précédemment.

Des élèves, ayant dessiné une figure semblable à la figure 6, regardent là où les vitesses moyennes sont à peu près les mêmes d'un graphique à l'autre, ce qui les conduit aux échanges suivants avec l'expérimentateur « JY » :

E1 : *Mais donc, s'il y a un moment entre les deux où ils ont la même vitesse...*
[...]
M1 : *C'est par là.*
N1 : *Donc c'est le seul moment où les... Ce sera plus ou moins ici.*
JY : *Alors voilà. N1 est cohérent. Il dit : c'est plus ou moins ici parce que c'est encore une vitesse moyenne.*
E1 : *C'est très vague, c'est pas très précis.*
JY : *C'est pas loin, certainement, de cet intervalle. Après, la vitesse moyenne de* P_1 *est trop importante et, avant, elle est trop faible.*
C1 : *Ok.*
JY : *Donc, pas loin de l'instant* 1...
N1 [qui parle en même temps que JY] : *... Ce sera aux environs de* 1 *quoi.*
JY [terminant sa phrase] : *... se trouvera le moment qu'on cherche.*

N1 : *Ok.*

[...]

JY : *C'est-à-dire qu'on a pris une vitesse moyenne, d'accord ? Et dans cet intervalle de temps, ils ont parcouru la même distance. J'en déduis qu'à l'intérieur de cet intervalle de temps ils ont eu la même vitesse instantanée.*

E1 : *Oui. Et pour ça, il faudrait prendre des intervalles de temps encore plus petits.*

JY : *Voilà. Et plus je vais prendre un intervalle de temps plus petit...*

N1 : *... au plus on se rapprochera de...*

JY [terminant sa phrase] : *... et plus je vais affiner pour dire : ben voilà, c'est environ à ce moment, etc.*

N1 : *Ok.*

Comme on le voit dans l'ensemble des procédures illustrées, la situation en amont de celle-ci a donné aux élèves des référents sémiotiques qui leur permettent de répondre, fût-ce partiellement, aux questions posées ici ; en particulier, la relation qualitative « vitesse – pente de la courbe en un point » et la liaison « vitesse moyenne – pente d'une sécante ou d'un segment de droite ». C'est ce qui permet à certains d'utiliser « en acte » le théorème des accroissements finis pour imaginer une procédure liée à la tangente, même si cette dernière apparaît ici sous un jour différent.

Des trois stratégies observées, seule la troisième a un certain caractère « infinitésimal » et cela laisse supposer que la tâche proposée n'a pas de caractère fondamental par rapport au savoir visé, car cette troisième stratégie n'est pas vraiment optimale en regard des deux autres. Cependant, et le fait est majeur, c'est la seule stratégie qui subsistera lorsque la loi de mouvement quadratique sera remplacée par une cubique. En effet, les deux autres stratégies conduisent alors à résoudre des équations du troisième degré, ce que les élèves ne savent pas faire à ce stade. Ainsi, en tenant compte de toutes les courbes envisagées, la procédure « infinitésimale » est la plus pertinente pour répondre au type de questions posées.

Mais cette procédure est *a priori* sujette à caution pour les élèves, car elle se base sur la suppression de termes contenant Δt non compensée, comme cela se pratique dans le contexte algébrique standard. M. Schneider (1988) rapproche cette difficulté de celle qui consiste à concevoir une vitesse « en un temps $\Delta t = 0$ » dont elle montre l'origine dans une appréhension des mathématiques « contaminée » par les réserves que l'on peut avoir vis-à-vis des imprécisions liées à la mesure des grandeurs variant continuellement. C'est ici que la situation où la vitesse non constante est donnée par une fonction du second degré joue le rôle d'un milieu de validation pragmatique de la méthode infinitésimale. Celle-ci acquiert en effet quelque crédit par le fait qu'elle permet de retrouver un résultat déjà connu par d'autres procédures. On reproduit ici le comportement de Fermat (trad. 1896), lequel teste sa méthode d'adégalité (qui préfigure le calcul des dérivées) sur un problème d'optimisation et un autre de tangente, résolus par d'autres voies depuis l'Antiquité. La nouvelle méthode, ainsi « crédibilisée », est alors exploitée pour déterminer des résultats nouveaux qui ne sont plus « contrôlables » cette fois par un autre biais.

II.3. En aval de cette tâche

Dans la situation précédemment décrite, on demande l'instant auquel deux mobiles ont même vitesse : l'un dont la vitesse est constante, l'autre dont on sait qu'il accélère en décodant l'allure graphique de sa loi de mouvement. On demandera ensuite aux élèves de calculer la vitesse d'un mobile en un instant donné. La stratégie optimale se basera alors sur le calcul de la vitesse moyenne dans lequel on s'autorisera, fort du travail précédent, la suppression des termes contenant Δt, ce qui donne $2t$ pour un mobile dont la loi de position est t^2. Les circonstances incitent alors à définir la vitesse instantanée d'un mobile évoluant selon une trajectoire rectiligne comme la limite, pour Δt tendant vers 0, de sa vitesse moyenne sur $[\, t\, ;\, t+\Delta t\,]$, le passage à la limite se définissant lui-même par l'annulation de Δt après toutes les simplifications algébriques possibles. Cette définition conduira à la considération et l'interprétation de vitesses négatives. Cette vitesse instantanée sera ensuite interprétée comme pente en un point de la courbe-loi de mouvement. Et la tangente en un point de cette courbe sera définie via cette pente.

Conclusion

L'approche des dérivées proposée ici articule donc vitesse et tangente. Mais le plus important, nous semble-t-il, est que la vitesse est un marchepied intéressant vers le concept de dérivée en cela qu'il induit l'idée de taux de variation instantané, plus porteuse que l'idée de pente de tangente lorsqu'on applique le calcul des dérivées à des contextes extra-mathématiques. Regardons en effet les contextes d'application du concept de dérivée relevés par le manuel Mathécrit (1978) : vitesse d'un mobile ; taux de diminution instantané de la température en fonction de l'altitude ; taux de variation instantané de la quantité de déchets accumulés sur terre ; vitesse d'une réaction chimique ; taux de diminution, dans le temps, du nombre de microbes chez un patient ; taux de croissance d'une population ; coùt marginal en économie. Dans bon nombre de ces contextes, c'est le temps qui joue le rôle de variable indépendante. Cependant, même dans le cas contraire, les auteurs conservent la locution « taux de variation instantané », comme si le qualificatif « instantané » créait une sorte de filiation entre les taux instantanés où le temps est bien la variable indépendante et les taux « instantanés » où c'est une toute autre variable qui joue ce rôle. Pour cette raison, nous pensons que les vitesses peuvent constituer des formes embryonnaires du concept de dérivée, susceptibles de donner naissance à des formes plus générales, au-delà de contextes temporels. Mais il nous reste à étayer cette hypothèse...

Bibliographie

ÉQUIPE MATHÉCRIT (1978)*Atelier 103 : calcul différentiel et intégral I*, Montréal et Paris.

FERMAT P. (1896)*Oeuvres de Fermat*, Trad. P. Tannery, Gauthier-Villars, Paris.

GANTOIS J.-Y. (à paraître) *Étude de transpositions didactiques de la théorie des dérivées depuis l'enseignement secondaire jusqu'aux cours universitaires de mathématiques générales*. Thèse de doctorat, Université de Liège.

ROUY E. (2007) *Formation initiale des professeurs (du secondaire supérieur) et changements de posture vis-à-vis de la rationalité mathématique*. Thèse de doctorat, Université de Liège.

SCHNEIDER M. (1988) *Des objets mentaux « aire » et « volume » au calcul des primitives*. Thèse de doctorat, Université catholique de Louvain.

SCHNEIDER M. (1991) Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente, *Repères IREM*, n°5, pp. 65-82.

SCHNEIDER M. (1992) À propos de l'apprentissage du taux de variation instantané. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 23, pp. 317-350.

SCHNEIDER M. (2001) Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques. À propos d'un enseignement des limites au secondaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21/1.2, pp. 7-50.

SCHNEIDER M., GANTOIS J.-Y., ROUY E. (à paraître) *De la modélisation de grandeurs aux concept de dérivée et d'intégrale*. Presses universitaires de Liège.

SIERPINSKA A. (1985) Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, vol. 6.1, pp. 5-68.