RÉGULARITÉS DANS LA SUCCESSION DES NOMBRES NATURELS : PAS SI ÉVIDENT POUR LES JEUNES ÉLÈVES ! [1]

François JAQUET
Coordinateur international de l'ARMT
(Association Rallye Mathématique Transalpin)

Introduction

Le Rallye Mathématique Transalpin (RMT) est une confrontation internationale sur la résolution de problèmes où chaque classe participante, en l'absence de l'enseignant, a la responsabilité entière de résoudre de 5 à 7 problèmes en 50 minutes et de rédiger, pour chacun d'eux, un seul protocole de réponse, avec explications et justifications détaillées.

Les épreuves sont les mêmes pour les classes de toutes les sections nationales ou régionales regroupées autour du RMT. Chaque problème est l'objet d'échanges et de collaborations étroits entre les différents animateurs. Une « analyse a priori »[2] permet d'adapter les énoncés et les variables didactiques pour chaque catégorie d'élèves, allant de 8-9 ans (niveau 3) à 15-16 ans (niveau 10). Elle comprend aussi une définition du domaine de connaissances, une description de la tâche et des procédures de résolution que l'on s'attend à voir mises en œuvre par les élèves, ainsi que des critères d'attribution des points afin d'uniformiser les barèmes d'évaluation des résultats.
L'épreuve passée, pour chaque problème, les protocoles de résolution reçus des classes participantes sont examinés, par une même équipe au sein de chaque section. Celle-ci attribue les points en vue du classement régional des classes, mais elle observe également les stratégies de résolution et les erreurs les plus fréquentes.

Enfin, des analyses ultérieures de certains problèmes permettent d'affiner les observations précédentes, de regrouper les procédures, de comparer parfois des résultats de différentes régions. Elles constituent ainsi un ensemble de données fort riche pour la didactique des

[1] Une première version de cet article a été publiée dans la revue *L'educazione Matematica* (Anno XXVI – Serie VII – Vol 1 no 1 Febbraio 2003 pp. 16-37, sous le titre « Regolarità nella successione dei numeri naturali : non così evidente per i giovani allievi ! ».

[2] Selon une terminologie propre au RMT, une « analyse a priori » n'est constituée que des trois rubriques nécessaires aux choix du problème (contenu mathématique et tâche de l'élève) et à son évaluation (critères d'attribution des points), pour les besoins du concours. Cette analyse est étendue à d'autres aspects du problème lorsqu'il s'agit de le proposer à des fins d'apprentissage.

mathématiques et pour la formation des maîtres.
Le problème et les résultats décrits dans les pages suivantes sont un exemple de ce genre d'analyse.

L'histoire du problème et son énoncé

L'énoncé et une première analyse de ce problème ont été proposés sous cette forme, en octobre 2001, pour les travaux de la 5e rencontre internationale du RMT (Parme) consacrés à la préparation des épreuves du 10e RMT. Il s'agit d'un problème proposé à des élèves de niveau 3 (8-9 ans, CE2).

> Isidore écrit la suite des nombres, à partir de 1.
> 1, 2, 3, 4, 5…
> Il vient d'écrire le chiffre 3 pour la 25e fois.
> Quel nombre vient-il d'écrire ?

Domaine de connaissances
numération
Analyse de la tâche
comprendre la question ;
organiser sa recherche : écrire la suite des nombres ou procéder en examinant successivement les différentes dizaines.
Attribution des points
4 réponse correcte (131) avec justification claire
3 démarche correcte, mais erreur dans la réponse ou réponse correcte avec justification écrite incomplète
1 début de la suite des nombres avec dénombrement des « 3 », mais non aboutie
0 incompréhension du problème
Niveau : 3
Origine : Bourg-en-Bresse

Le groupe qui a examiné ce problème l'a accepté sans longues discussions et s'est contenté de faire les propositions suivantes :
- ajouter un titre : « *Chasse au trois* » ;
- proposer le problème aux classes de niveau 4 également ;
- remplacer 1 par 2 dans l'attribution des points et donner 1 point à une « *recherche non organisée et incomplète* ».

Il a également remarqué qu'il s'agit d'un type de problème similaire à d'autres, déjà proposés, mais toujours valide.
D'autres propositions de modifications ont été faites lors des relectures de ce projet d'épreuve par les différentes sections et lors de l'élaboration de la version définitive et de la traduction, par les coordinateurs internationaux, entre autres :
- un ajout de la demande « *montrez comment vous avez trouvé* », commune à tous les problèmes du RMT ;
- quelques modifications d'énoncé pour préciser l'ordre temporel des actions d'Isidore : « *en train d'écrire …* », « *à un certain moment* » avec leurs répétitions dans la question ;
- une prolongation d'écriture de tous les premiers nombres jusqu'à 12, pour montrer que le même chiffre peut apparaître plusieurs fois.

Les deux dernières modifications sont typiques des préoccupations des lecteurs et de ceux qui élaborent les énoncés des problèmes du rallye : il s'agit de faciliter au maximum la lecture de l'énoncé par les élèves - car il n'y a pas de relance ou d'aide possible au cours de l'épreuve, le maître étant absent - sans toutefois en dire trop et appauvrir ainsi le travail d'appropriation et de recherche dévolu au groupe.

Voici le texte définitif de l'énoncé, en version française :

> **Chasse au trois**
> Isidore est en train d'écrire la suite des nombres, à partir de 1 :
> 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, …
> À un certain moment, Isidore écrit le chiffre 3 pour la vingt-cinquième fois.
> **Quel nombre est-il en train d'écrire à ce moment ?**
> **Montrez comment vous avez trouvé.**

L'analyse préalable

En plus de la discussion du texte, conduisant à l'énoncé définitif, chaque problème du rallye est accompagné des différentes rubriques de son analyse, décrites précédemment dans l'introduction.
Ces rubriques se développent et s'affinent durant les relectures de chaque problème car celui-ci est analysé par de nombreuses équipes qui complètent successivement les descriptions précédentes par les procédures de résolution qu'elles ont elles-mêmes utilisées ou imaginées.
Mais, comme nous le verrons par la suite, cet inventaire préalable est rarement exhaustif et des erreurs des élèves ou stratégies non prévues apparaissent régulièrement.

Voici le texte définitif de l'analyse préalable, sensiblement plus copieux que la première proposition, décrite précédemment :

Domaine de connaissances

Numération : distinction entre chiffre et nombre

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'on doit compter le nombre d'apparitions du chiffre « 3 » dans la succession des nombres.
- Organiser sa recherche : écrire la suite des nombres en comptant les chiffres « 3 » ou n'écrire que les nombres contenant des chiffres « 3 » ou procéder dizaine par dizaine en examinant chacune d'elles.
- S'arrêter au nombre qui contient le vingt-cinquième « 3 ».

Attribution des points

4 Réponse correcte (131) avec présentation claire de la recherche effectuée
3 Réponse correcte, avec présentation peu claire de la recherche effectuée
2 Réponse « 131 » sans aucune autre explication
ou erreur de comptage (130 ou 132) avec présentation de la recherche
ou début organisé de la recherche avec dénombrement d'au moins 20 chiffres « 3 », mais pas aboutie
1 Recherche incomplète et sans organisation
ou réponse 130 ou 132 sans aucune autre explication
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3 - 4 - 5 [3]

Origine : Bourg-en-Bresse et rencontre de Parme

Analyse des résultats

Nous regroupons ici les réponses des classes de Suisse romande et de la région de Cagliari selon trois types de réponses : A, B et C, eux-mêmes répartis en plusieurs sous-ensembles. 139 copies ont été examinées. La synthèse des résultats figure dans le *Tableau 1*.

---

[3] (CE2 - CM1 - CM2)

Réponse 131

Pour arriver à cette réponse, juste, les groupes ont utilisé les procédures prévues dans l'analyse de la tâche (voir ci-dessus). Certaines sont plus courtes que d'autres, mais toutes reposent sur une écriture rigoureuse de la suite des nombres et sur la constatation que le chiffre 3 est présent deux fois dans le nombre 33.

Écriture des nombres contenant le chiffre « 3 », jusqu'à 131

Les groupes de cette première catégorie ont écrit tous les nombres contenant des « 3 », jusqu'à 131 :

3, 13, 23, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 43, ... , 93, 103, 113, 123, 130, 131.

Dans certains cas, ils ont compté les chiffres « 3 » au fur et à mesure de leur écriture et se sont arrêtés sur le nombre 131.
Dans d'autres cas, ils sont allés plus loin que 131 dans l'écriture ; ils ont compté les « 3 » dans une deuxième phase puis ont effacé les nombres inutiles ou n'ont recopié que les nombres nécessaires.
Dans d'autres cas, on ne peut pas savoir si la liste présentée est celle d'origine ou s'il s'agit d'un extrait, recopié d'une feuille de brouillon.[4]

- *On a écrit tous les chiffres jusqu'à 131 et on a compté les 3.* (3^{e})[5]
- *Ça va jusqu'à 131.* (4^{e})
- *Isidore a écrit le nombre 131. On a écrit tous les nombres qui ont des 3 dedans.* (3^{e})[6]
- *Nous avons utilisé tous les nombres de 1 à 131 avec 3.* (4^{e})
- *On a mis tous les chiffres avec 3 jusqu'à ce qu'il y ait 25 3.* (4^{e})
- *Nous avons écrit 25 fois le nombre 3.* (3^{e})
- *On a écrit tous les trois qu'on a trouvés jusqu'à 200 on les a comptés dès qu'il y avait 25 3 on s'est arrêté sur le nombre.* (5^{e}) (Ne sont écrits que les nombres contenant des « 3 » jusqu'à 131 qui est entouré)
- *Je me suis arrêté chaque fois qu'il y a un trois.* (5^{e})
- *On a écrit 25 nombres qui contiennent un 3 jusqu'au131 qui est le 25^{e} nombre.* (4^{e})
- *12 3 4 5 6 7 8 ... 22 23 24 <u>25</u>*
  313 23 30 31 32 33 34 ... 113 123 130 131
  (La suite des nombres de 1 à 25 est notée en regard des « 3 » et, en réalité, ces élèves ont écrit 24 nombres ou 25 fois le chiffre « 3 ».)
- *Il est en train d'écrire 131 car, en comptant tous les nombres qui ont un 3 jusqu'à 25 fois qu'on le voit, il y en a 131.* (5^{e})
- *Il est en train d'écrire le nombre 132. On a compté combien de 3 il y avait jusqu'à 130, on avait 24 trois. Et alors on en a rajouté 1.* (4^{e}) (Les nombres sont tous écrits, jusqu'à 131, le 132 est effacé. Il y a confusion entre « en train

---

[4] Les textes en italique transcrits par la suite sont ceux que les élèves ont écrits sur leurs feuilles de réponse. La ponctuation et l'orthographe ont été rectifiées, les calculs, lorsqu'ils existent, ne sont en général pas reproduits.

[5] Les niveaux des classes participant au Rallye mathématique transalpin correspondent aux degrés de la scolarité, souvent dite « obligatoire », dès l'âge de 6 ans, dans les différents pays intéressés. Le niveau 3 est celui des élèves de 8 à 9 ans (CE2 pour la France) les niveaux 4 (9 à 10 ans) et 5 (10 à 11) correspondent au CM1 et CM2 en France.

[6] Ibidem.

d'écrire » et « va écrire » ; confusion qu'on retrouve dans deux classes de cette catégorie, mais qui n'affecte pas le dénombrement.)

- *Per trovare la soluzione abbiamo scritto i numeri da 1 sino ad arrivare a 131 cosi ripentendo il numero 3 25 volte. E cosi siamo arrivati alla soluzione.* (4e)
  (Trad : Pour trouver la solution, nous avons écrit les nombres depuis 1 pour arriver à 131 répétant ainsi le nombre 3 25 fois. C'est ainsi que nous sommes arrivés à la solution.)
- *On a écrit tous les nombres avec 3 en rajoutant + 10. À partir de 3 jusqu'à 30 et on a compté tous les nombres de 30 à 39 et on est reparti de 43 en refaisant + 10 jusqu'à ce qu'on ait 25 nombres contenant le chiffre 3 et on est arrivé à 131.* (5e)
  (Sans mentionner l'arrêt de la progression par dizaines dès 130 et 131).
- *On a écrit tous les nombres qui contiennent le chiffre trois. Parce que dans chaque dizaine ex 10, 20, 30, etc. il y a un trois excepté le nombre 30 qui a 10 fois le chiffre 3 : 30, 31, 32, etc…* (suit la liste de 3 à 131).
- *On a continué ainsi jusqu'à 333, ensuite on a compté tous les 3 qu'il y avait dans la liste jusqu'à 25 fois le chiffre 3. Puis on a effacé ceux qui étaient en trop.* (5e)
- *Isidore écrit le nombre 131 à ce moment. On va de 10 en dix jusqu'à 30 (23) et on recommence de 10 en 10 jusqu'à 131 depuis 43 parce que depuis 30 jusqu'à 40 il y a des ou un 3 par nombre et depuis 43 de 10 en 10 nous allons à 131 parce que c'est la 2e fois qu'il y a un trois.* (5e)
- *Voici comment on a trouvé :* (4e)

3
13
23
30 31 32 33 34 35 36 37 38 39
43
...
103
113
123 -> 130 131

On remarque que, dans les explications précédentes, les élèves confondent presque systématiquement « nombre » et « chiffre ».
Dans deux cas, les explications sont correctes, la liste se termine par 131 mais il y a un oubli lors du report sur la feuille-réponse.

Écriture des nombres contenant le chiffre « 3 » et d'autres nombres, en début de liste, avec arrivée à 131

Tous les nombres naturels sont écrits en début de la liste, jusqu'à 12, 22, 29, généralement, ceux contenant des « 3 » sont entourés ou mis en couleur, puis les élèves n'écrivent plus que ceux-ci.

- *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 30, 31, ..., 131*
- *Nous avons souligné les nombres avec des 3 en rouge. Le nombre 33 a 2 traits rouges. Isidore vient d'écrire le nombre 131.* (5e)

Écriture de tous les nombres naturels jusqu'à 131, marquage et comptage des « 3 »

Ces groupes d'élèves ont écrit la suite des nombres naturels, comme Isidore, selon l'énoncé. Leur copie présente la liste complète, avec un marquage des « 3 », jusqu'à 131.

Certaines fois les nombres suivant 131 ont été effacés, d'autres fois il semble que le comptage s'est fait simultanément à l'écriture.

- *Noi abbiamo trovato la soluzione leggendo attentamente il testo, dopo averlo capito (il capo gruppo) ha assegnato le parti per lavorare insieme, tutto il gruppo. Tutto questo per prepararci, bene, tutti insieme per il grande et famoso Rally. Il venticinquesimo numero è 131 riprendendolo da uno all numero finale. (3e)*

  (Trad : Nous avons trouvé la solution en lisant attentivement le texte, après l'avoir compris (le responsable du groupe) a réparti les tâches pour travailler ensemble, tout le groupe. Tout ceci pour bien se préparer tous ensemble pour le grand et fameux Rallye. Le vingt-cinquième nombre est 131 en le reprenant de un au nombre final.)

  (Les 131 nombres sont écrits sur une demi-page, les «3 » sont entourés et numérotés, le 132 et 133 sont effacés.)
- *Isidoro alla venticinquesima volta ha trovato il numero 131. L'abbiamo trovato cerchiando ogni volta che veniva la cifre 3. (3e)*

  (Trad : Isidore a trouvé le nombre 131 à la 25e fois. Nous y sommes arrivés en cherchant chaque fois que venait le chiffre 3)

Un groupe s'est évité l'écriture fastidieuse de la suite des nombres naturels :

- *On a pris un tableau avec les nombres jusqu'à 599 et on a cherché 25 numéros 3 et on est arrivé à 131 numéros 3. (4e)*[7]

Tableau 1

	Cat 3		Cat 4		Cat 5		N régions		**N**
	SR	CA	SR	CA	SR	CA	SR	CA	
A1	6	0	12	1	22	0	40	1	**41** (.30)
A2	0	0	1	0	3	0	4	0	**4** (.03)
A3	0	3	1	2	2	1	3	6	**9** (.06)
A tot	**6** (.24)	**3** (.38)	**14** (.41)	**3** (.38)	**27** (.52)	**1** (.08)	**47** (.42)	**7** (.25)	**54** (.39)
B1	2	0	2	0	0	0	4	0	**4** (.03)
B2	1	2	5	3	5	3	11	8	**19** (.14)
B3	6	1	12	1	13	4	31	6	**37** (.27)
B tot	**9** (. 36)	**3** (.38)	**18** (.53)	**4** (.50)	**19** (.37)	**7** (.58)	**46** (.41)	**14** (.50)	**60** (.43)
C1	5	2	2	1	4	2	11	5	**16** (.12)
C2	5	0	0	0	2	2	7	2	**9** (.06)
C tot	**10** (.40)	**2** (.25)	**2** (.06)	**1** (.13)	**6** (.12)	**4** (.33)	**18** (.16)	**7** (.25)	**25** (.18)
Total	25	8	34	8	52	12	111	28	139

Résultats, par degrés (Cat 3, 4, 5), pour la Suisse romande (SR) et Cagliari (CA) et selon les différentes procédures (A1, A2, A3, B1, ...) décrites dans les pages précédentes et les suivantes.

Les totaux sont donnés par région (N régions) pour chaque catégorie, et pour l'ensemble des copies examinées (N). Les taux de répartition sont indiqués en petits caractères, pour la colonne N et pour les lignes des totaux de chaque type A, B, C.

[7] Ce protocole est classé dans le type A3, parce que la procédure correspond en effet à l'écriture de tous les nombres et au marquage des chiffres « 3 ». La fin de la réponse écrite fait en revanche une confusion totale entre les mots « nombres » et « numéro », on ne peut donc lui attribuer « 4 » selon les critères déterminés par l'attribution des points.

Listes incomplètes

Les copies examinées font apparaître une grande variété d'erreurs.

Oubli ou report imprécis

Des erreurs peuvent être considérées comme des inattentions ou de simples imprécisions dans le dénombrement des chiffres 3 ; elles correspondent à certaines réponses 130 et 132, prévues par l'analyse a priori. Lorsque la copie permet de les déterminer, les nombres oubliés sont 53 (une fois) et 113 (deux fois).
Un examen des réponses différentes de 131 montre qu'elles correspondent à des lacunes bien spécifiques dans la maîtrise de la numération.

Non-distinction des deux chiffres « 3 » du nombre « 33 », réponse 132

Lorsque les élèves comptent 25 nombres où apparaît le chiffre 3, ils n'analysent pas en détail le nombre 33 et ne tiennent donc pas compte de la présence de ses deux chiffres 3. Ils arrivent par conséquent à la réponse 132. Cette erreur se retrouve dans 19 copies, sur les 139 examinées.
Dans la plupart de ces cas, les 25 nombres sont écrits :

- *Il est en train d'écrire le nombre 132. Nous avons marqué un trait chaque fois qu'il y avait un trois dans un nombre.* (3e) (25 traits sont dessinés, la liste a vraisemblablement été établie oralement.)
- *On a écrit 25 fois les nombres où il y a un trois.* (4e)
- *Isidore est en train d'écrire le nombre 133.* (5e) (Les 25 nombres sont écrits, de 3 à 132, mais les élèves de cette classe, comme de deux autres, ont manifestement confondu le nombre qu'il venait d'écrire ou qu'il était en train d'écrire, avec celui qu'il allait écrire.)
- *On a fait tous les nombres qui contiennent 3 jusqu'à ce qu'on en a 25 avec le chiffre 3 et on arrive à 132. Le dernier chiffre sera le 132.* (5e)
- *Abbiamo risolto il problema facendo, come Isidoro, la sequenza dei numeri senza scrivere i numeri senza la cifra tre e poi gli abbiamo contati e l'ultimo con la cifra tre, il 25e, è 132.* (5e)
  (Trad. Nous avons résolu le problème en faisant, comme Isidore, la suite des nombres sans écrire les nombres sans le chiffre trois et nous les avons comptés et le dernier avec le chiffre trois, le 25e, est 132.)

Lacunes dans la numération

Nous venons de voir que certains groupes d'élèves n'ont compté qu'un seul chiffres « 3 » du nombre « 33 ». Mais, plus souvent, dans 37 cas sur 139, les élèves oublient de prendre en compte les « 3 » d'autres nombres.
Si l'on pouvait parler d'oublis ou de confusion chiffre-nombre dans les premières catégories d'erreurs, à mesure que l'on s'éloigne de la réponse « 131 » apparaissent les défaillances dans la construction de l'écriture de la suite de nombres et des conceptions lacunaires de notre système de numération.

L'éventail des réponses est assez large, mais présente toutefois des répartitions significatives qui permettent de définir le type de lacunes. Ces réponses, leur nombre d'apparition (effectif) et leur description sont donnés par le *Tableau 2*.
Parmi les réponses « 243 », signalons celle-ci, très synthétique, qui peut cependant être assimilée à celles qui mentionnent seulement les nombres se terminant par 3 :

- *24* x *10 + 3 = 243 voilà.*

L'inventaire des réponses erronées montre que, à deux exceptions près (83 et 193) dans les 40 réponses, tous les nombres non pris en compte ont un « 3 » dans les dizaines :

- 131 et 132, dans tous les cas ;
- 134 à 139, dans 38 cas sur 40 ;
- 130, dans 33 cas sur 40 (il figure dans les réponses 203 et 223 c) ;
- 30, dans 29 cas sur 40 (il figure sans les réponses 133, 143, 153, 203, 213 et 223 c)

Contrairement au « 3 » des dizaines, le « 3 » des unités est toujours pris en compte, sauf dans deux cas.

Tableau 2

réponse	N	nombres pris en compte	effectif	nombre de « 3 »
133	2	130, 131, 132	23	25
143	1	130 à 132, 134 à 139	24	26 (1 oubli)
153	1	83, 130, 131, 134 à 139	24	26 (1 oubli)
203	5	31, 32, 34 à 39, 131, 132, 134 à 139	23	25
213	1	31, 32, 34 à 39, 130 à 132, 134 à 139	23	25
223 a	2	30 à 32, 34 à 39, 130 à 132, 134 à 139, 193	22 (1 oubli)	24
223 b	9	30 à 32, 34 à 39, 130 à 132, 134 à 139 seulement les « 3 » des unités sont reconnus	23	25
223 c	2	31, 32, 34 à 39, 131, 132, 134 à 139	25	27 conflit nb/chiffre
243	13	30 à 32, 34 à 39, 130 à 132, 134 à 139 seulement les « 3 » des unités sont reconnus	25	27 conflit nb/chiffre
250	1	*tous les dix il y a 3 dans le nombre donc 25* x *10 = 250*		
253	4	30 à 32, 34 à 39, 130 à 132, 134 à 139 seulement les « 3 » des unités sont reconnus	26	28 conflit nb/chiffre et oubli

Inventaire des réponses de la sous-catégorie B3.
Réponse donnée, nombre d'apparition de cette réponse (N), liste des nombres manquants dans les listes, effectif des nombres de la liste et nombre de « 3 » écrits.

Indépendamment des nombres ignorés, le comptage des chiffres « 3 » est précis, dans 18 cas sur 40 (23 nombres de la liste et 25 chiffres « 3 » pour les réponses 133, 203, 213 et 223 b). La confusion entre « nombre » et « chiffre » se retrouve, sans oublis, dans 15 cas sur 40 (25 nombres dans la liste, pour les réponses 223 c et 243). (Dans ce dernier cas, l'erreur caractéristique de la catégorie B2 - la non-distinction des deux chiffres « 3 » du nombre « 33 » - se répète avec le nombre « 133 » et se combine avec celle de l'oubli des chiffres « 3 » des dizaines de 30 à 39 et de 130 à 139).

Autres erreurs

Comme toujours, les interprétations de l'énoncé et les inventions fantaisistes des élèves sont plus riches que celles de l'analyse a priori. Si la première catégorie de ces erreurs s'explique aisément comme résultant d'une lecture « à la lettre » en absence de sens, les autres sont plus difficiles à interpréter.

Réponse 75

De nombreux groupes, de tous les degrés et des deux régions, se sont contentés de multiplier 3 par 25, vraisemblablement influencés par l'expression « vingt-cinquième fois » (venticinquesima volta) de l'énoncé. Les commentaires et explications des élèves sont révélateurs de l'influence du texte sur ces procédures et de l'absence totale de contrôle du sens. On pourrait dire ici que le sens n'est contrôlé qu'à l'intérieur de la représentation que les élèves se font du problème, c'est-à-dire que le contrôle ne porterait, par exemple, que sur l'exactitude du calcul.

- *Il est en train d'écrire 75 parce que 3* x *25 = 75. On a pris la calculette et on a calculé 25 + 3 = 28, 25* x *3 = 75.* (3e)
- *3* x *20 = 60   60 + 5 + 5 + 5 = 75 vrai.* (3e) Ces opérations sont entourées et reliées à l'expression « vingt-cinquième fois » de l'énoncé.)
- *On a écrit le calcul 25* x *3 = ...* (en colonne sur la feuille). *Nous avons trouvé le calcul grâce à l'information qui dit qu'il a écrit 25 fois le chiffre 3.* (4e)
- *Isidore écrit le chiffre 75. On a fait 25* x *3 = 75.* (5e)
- *On a fait 25* x *3 = 75 parce que Isidore écrit 3 pour la 25ième fois.* (5e)
- *Il est en train d'écrire en ce moment le nombre 75. Car on a trouvé le nombre 75 en faisant 25 multiplié par trois = 75.* (6e, problème donné par erreur à une classe de degré 6.)
- *Abbiamo fatto l'operazione 3* x *25 perchè Isidoro ripeteva per 25 volte il numero 3.* (5e)
  (Trad. On a fait l'opération 3 x *25 parce qu'Isidore a répété 25 fois le nombre.)*
- *3, 3, 3, ... 3, 3* (25 fois)
- *Ragionamento. 75 l'abbiamo trovato moltiplicando il 3 per 25 volte. Risposta. Il risultato è 75.* (3e)
  (Trad. Raisonnement. On a trouvé 75 en multipliant le 3 par 25. Réponse. Le résultat est 75.)
- *Noi provando abbiamo scoperto che Isodoro ha ripetuto venticinque volte il tre perciò abbiamo fatto 3* x *25 (è ci ha dato 75). Cosi abbiamo seguito il testo.* (3e)
  (Trad. En essayant, nous avons découvert qu'Isidore a répété vingt-cinq fois le trois et c'est pourquoi nous avons fait 3 x *25, ce qui nous a donné 75. Comme cela nous avons suivi l'énoncé.)*

Réponses diverses

Dans cette dernière catégorie, il y a parfois de belles illustrations de la manière dont les élèves interprètent un texte, avec une certaine logique parfois :

- *Giustificazione : Isidoro sta scrivendo il numero 3. Abbiamo letto bene, il testo dice che Isidoro scive 3, 25 volte. Quindi Isidoro sta scrivendo 3.* (5e)
  (Trad. Justification : Isidore est en train d'écrire le nombre 3. Nous avons bien lu, le texte dit qu'Isidore écrit 3, 25 fois. Donc Isidore est en train d'écrire 3.)
- *On a dit dans la consigne 3. C'est le 3.* (3e)
- *3* x *25 + 12 = 87. Il est en train d'écrire 87. Comme il a écrit 25 fois 3 + 12 = 87.* (3e) (Les élèves ont vraisemblablement pris en compte les 12 nombres donnés en exemple.)

Deux réponses « 23 » de classes de troisième année montrent que les élèves se sont arrêtés à la troisième apparition du chiffre 3. Dans les deux cas, les nombres de 1 à 23 sont écrits, les « 3 », « 13 » et « 23 » sont entourés avec les indications correspondantes « *1e fois, 2e fois et 3e fois* ».

Deux classes de cinquième se sont référées à la somme des nombres de 1 à 12, qu'ils ont multipliée par 25 :

- *Réponse 1251. On a additionné les nombres 1, 2, 3, ... 12 = 78* x *25 = 1250.*

On ne relève qu'une seule page blanche sur les 139 copies examinées.

Évaluation

Une analyse des résultats comme la précédente constitue une source de données qui, selon nous, peuvent être utilisées dans le cadre de l'évaluation des connaissances et compétences des élèves.
En reprenant les trois grands types de réponses et leurs sous-ensembles, plus orientés sur le genre de procédures utilisés, on peut pour chacune d'entre elles, se poser de nombreuses questions ou émettre des hypothèses à propos des savoirs mathématiques sous-jacents et de leur degré de conceptualisation.

La réponse 131

Il y a une différence sensible entre la procédure consistant à écrire tous les nombres naturels (A3) et celle où l'on n'écrit que les nombres contenant le chiffre 3 (A1). Le passage de l'une à l'autre est explicite dans les procédures mixtes (A2) où les élèves se rendent compte, après avoir écrit tous les nombres jusqu'à 13, 23 ou 43, que certains sont « inutiles ». La découverte qu'il n'est plus nécessaire de les écrire conduit à une première conviction : celle que le « 3 » n'apparaît qu'une fois sur dix dans les unités. Cette conviction est bien un « savoir » sur la numération de base dix, identifié par l'absence des nombres inutiles dans la liste.

Nous ne pouvons cependant pas dire que ce savoir n'existe pas chez ceux qui écrivent tous les nombres naturels, mais, chez ces derniers, il n'a simplement pas été assez puissant pour leur faire renoncer à une écriture fastidieuse et inutile.

Nous ne pouvons non plus pas dire que ce savoir est extensible à toutes les situations de numération. Certains groupes, qui ont renoncé à écrire les nombres « inutiles » avec un chiffre des unités différent de 3, n'ont en effet pas reporté le savoir précédent sur le chiffre des dizaines (B3). Chez ces élèves, la première conviction sur la présence du chiffre 3 une fois sur dix a peut-être (ou vraisemblablement) été généralisée abusivement à l'ensemble des nombres naturels. Le premier « savoir » s'érigerait alors en obstacle pour les stades suivants de sa conceptualisation : le deuxième savoir et les savoirs ultérieurs seraient alors reconstruits « contre » celui qui les précède – selon le modèle du constructivisme piagétien.

L'évaluation que fait le didacticien, ou le maître, à propos de considérations de ce genre est de type « analytique ». Pour s'approcher de l'évaluation dite « formative », il faudrait que l'analyse précédente débouche sur des décisions à propos de la conduite de l'enseignement :

- aux groupes ou aux classes concernés, on pourrait par exemple proposer le même genre de problème, en agissant sur la variable didactique « nombre de chiffres 3 écrits par Isidore » (remplacer 25 par 100 ou un nombre encore plus grand), ou sur la variable « chiffre » (remplacer 3 par 0, ou considérer plusieurs chiffres) ou sur la variable « question » (en demandant le nombre de « 3 » utilisés pour écrire les nombres de 1 à N), ou sur des variables d'énoncés, ...
- on pourrait aussi décider d'organiser des recherches dans le domaine de l'écriture des nombres, étudier d'autres systèmes de numération, proposer des exercices systématiques,
- ...

Nous pensons que c'est au maître à juger de cette conduite de l'enseignement et non pas au didacticien.

A la lecture des explications - en particulier dans les copies de Suisse romande - qui accompagnent la réponse 131, on observe un usage impropre des termes « nombre », « chiffre », « numéro ». Les correcteurs de l'épreuve n'en ont pas tenu compte pour l'attribution des points. Ils auraient pu le faire et sanctionner ces réponses. Ils ont sans doute considéré que la réponse exacte et le procédé correct avaient la priorité sur la rigueur des termes utilisés. Ils ont ainsi fait un choix pédagogique.
Là aussi, pour la conduite de la classe, nous pensons que c'est au maître que revient la responsabilité de chercher à améliorer la terminologie utilisée par les élèves ou de tolérer les usages impropres de la langue courante.

Listes incomplètes

Un autre type d'évaluation apparaît à la lecture des listes incomplètes (B1 et B3) ou des confusions nombre-chiffre (B2). Il concerne le fonctionnement interne des groupes de travail et, plus particulièrement, le contrôle de la production collective.
Tous les observateurs sont frappés par l'intensité des échanges au sein des groupes durant les épreuves du rallye, en phase d'appropriation et en phase de recherche. Cependant, ils sont aussi étonnés de constater que, lorsque le groupe s'accorde sur la voie à suivre et que la solution s'esquisse, l'intérêt baisse. Il arrive fréquemment qu'un seul élève soit désigné pour rédiger le protocole de résolution - avec l'aide d'un autre membre du groupe dans le meilleur des cas - et que, au moment où il remet sa copie, les autres ne la lisent pas ou se contentent d'y jeter un regard distrait. C'est ainsi que des oublis ou des erreurs de l'un échappent au contrôle des autres.

C'est un des défis les plus difficiles à relever dans la résolution collective de problèmes : maintenir l'engagement de tous jusqu'à la conclusion. Les responsabilités sont inégalement réparties lorsqu'on admet que l'un écrit, un autre dicte, les autres commentent, regardent ou se désintéressent de la production finale. Le « pouvoir » est en général chez celui qui tient le crayon ou, s'il ne fait que recopier, chez celui qui dicte. En fait, pour de nombreux élèves, l'enjeu du problème ne va pas au-delà de la démarche générale ou d'une esquisse de réponse. Les validations ou le contrôle sont dévolues à ceux qui sont, souvent implicitement, désignés comme « responsables » du groupe.

Un autre enseignement tiré de l'évaluation des réponses de type B est que, pour de très nombreux élèves et jusqu'au degré 5, les régularités dans l'écriture de la suite des nombres naturels ne sont pas perçues avec évidence. (Selon le *Tableau 1* des résultats, 40 % des groupes donnent des réponses de type B2 et B3). Tous savent écrire les nombres, dans l'ordre, sans en oublier, en respectant les positions de leurs chiffres, mais beaucoup ne se sont jamais rendu compte que le chiffre « 3 » apparaît régulièrement une fois par dizaine en première position depuis la droite (dans les unités), dix fois successivement par centaine en deuxième position (dans les dizaines), ... Dans l'enseignement de la numération, on accorde généralement beaucoup d'attention à la valeur positionnelle des chiffres dans l'écriture du nombre ainsi qu'aux règles d'échanges qui régissent les passages d'une position à l'autre. On y consacre de nombreuses activités. Mais les régularités de la suite sont trop souvent inobservées. De nombreuses études (Brun et al., 1984, Valentin et al., 1995, Jaquet et al., 1988, Perret 1981) ont fait apparaître ce type de difficulté. Ce problème de la « *Chasse au trois* » le confirme : il vaudrait la peine de s'attarder sur les rythmes et les fréquences d'apparition des chiffres dans la suite des nombres naturels, la compréhension en profondeur de notre système décimal de numération de position y gagnerait sans doute.

Autres erreurs

Les autres erreurs (18%, selon le *Tableau 1* des résultats) peuvent être attribuées à une incompréhension du problème ou à une absence de sens. Il faut relever à ce propos que la majorité des réponses de ce type (12%) est « 75 ».

L'énoncé, par sa phrase « 25^{e} fois le chiffre 3 » engage certes l'élève qui n'a pas pu s'approprier le problème à effectuer la multiplication « 25 x 3 », mais on reste étonné de constater l'ampleur du phénomène.

Il n'y a vraisemblablement pas eu beaucoup d'interactions au sein des groupes qui ont répondu ainsi, ce qui renforce le sentiment déjà exprimé plus haut que, au-delà des compétences mathématiques mises en oeuvre, il y a toute la problématique de la résolution de problèmes par groupes et de l'efficacité des interactions entre élèves.

Conclusions

Une analyse comparative de copies d'élèves est toujours intéressante car elle fait apparaître des stratégies, des procédures, des erreurs et, finalement, des obstacles souvent ignorés de l'enseignant ou des didacticiens.

Mais cette analyse prend du temps à ceux qui s'en chargent et ses résultats ne sont pas faciles à transmettre car elle entre rapidement dans les distinctions « techniques » qu'exige la finesse des comparaisons. On se trouve ici devant le dilemme bien connu de la transmission de données issues d'une recherche à ses utilisateurs potentiels : ceux qui sont en charge de la classe et doivent, dans le cas présent, « enseigner » la numération de position à leurs élèves.

Le problème de la « *Chasse au trois* » ne constitue pas un passage obligé dans un parcours didactique qui mène à notre numération de base dix. Il n'est au plus qu'une péripétie, un moment de répit permettant de contempler avec un peu de recul le chemin accompli.

Mais, cette petite péripétie révèle une grande richesse d'observations : elle montre que, jusqu'au CM2, il y a encore beaucoup de zones d'ombre dans la construction de la numération, qu'on croyait éclairées en permanence depuis fort longtemps,

Le RMT a poursuivi ses investigations dans ce domaine de la numération de position[8] et a observé systématiquement que, au-delà de la comptine et de l'écriture des nombres, il y a des régularités et des règles de construction qui restent longtemps ignorées et qui valent la peine d'être explicitées.

Pour le maître, il ne s'agit pas de surcharger le programme en insérant ces propriétés de notre système de numération comme de nouveaux objets « à enseigner ». Il semble préférable de les aborder une ou deux fois dans l'année, au travers d'un problème original, inattendu, comme celui de la « *Chasse aux trois* » dont on peut être certain qu'il va servir de déclencheur pour un saut qualitatif dans la maîtrise de l'écriture de la suite des nombres, au travers des oublis, des erreurs ou des confusions qu'il fera apparaître. Car, selon les concepteurs du RMT et de ses problèmes, s'il est évident qu'il faut arriver à la solution correcte, il est plus important encore de constater qu'il y a souvent plusieurs manières d'y accéder et, par conséquent, de les valider. C'est au cours de cette phase de validation, collective, que les élèves pourront passer à un niveau supérieur, dans les représentations ou dans la maîtrise du concept.

[8] Voir à ce propos le site http://www.math-armt.org pour obtenir une documentation plus complète.

Références bibliographiques

BRUN J., GIOSSI J.-M., HENRIQUES A. (1984) A propos de l'écriture décimale, *Math-Ecole,* 112.

GRUGNETTI L., JAQUET F., MEDICI D., RINALDI M.-G., POLO M. (2003), *RMT : potentialités pour la classe et pour la formation*, Actes des journées d'études du RMT, Parma 2001, Torre delle Stelle 2002, Bologna : Pitagora Editrice.

JAQUET F., GEORGE E., PERRET J.-F.(1988), *Bilan des acquisitions en fin de deuxième année*. Berne : Peter Lang.

PERRET J.-F (1981), *Numération : coder ou compter*, Neuchâtel : IRDP.

VALENTIN D., et al. (1995), Maîtrise de la distinction entre valeur et quantité , in Charnay, R., Douaire, J., Guillaume, J.-C., Valentin, D. *Chacun, tous... différemment !* Paris : INRP.