GÉOMÉTRIE PLANE ET FIGURES AU CYCLE 3

UNE DÉMARCHE POUR ÉLABORER DES SITUATIONS VISANT À FAVORISER UNE MOBILITÉ DU REGARD SUR LES FIGURES DE GÉOMÉTRIE

Bachir Keskessa
Marie-Jeanne Perrin-Glorian
Jean-Robert Delplace
IUFM Nord – Pas de Calais[1]

Introduction[2]

Cet article se rattache aux travaux d'un groupe de recherche de l'IUFM Nord-Pas-de-Calais dont le cadre général est présenté dans (Duval, Godin, Perrin, 2005). Le travail de ce groupe repose sur l'hypothèse fondamentale suivante : le rapport aux figures est un point clé dans l'apprentissage de la géométrie plane. Or, de la maternelle au collège, les élèves sont amenés à passer d'une vision des figures comme assemblage de pièces (donc surfaces à manipuler, découper, colorier) à une vision en termes de points et lignes qui servent à décrire cette figure, soit pour la construire à l'aide d'instruments permettant de faire correspondre des propriétés graphiques et des propriétés géométriques, soit pour la caractériser et prouver ses propriétés géométriques.
Dans un précédent article paru dans Grand N (Duval et Godin, 2005), des membres de notre équipe ont explicité et illustré sur des exemples la déconstruction dimensionnelle nécessaire pour acquérir une mobilité du regard permettant d'envisager une même figure de géométrie selon deux visions radicalement différentes, et très difficilement simultanées,

- soit comme assemblage de parties ou surfaces, éventuellement matérielles, agencées selon une certaine organisation spatiale,
- soit comme assemblage de lignes et de points vérifiant certaines propriétés, et de passer d'une vision à l'autre selon les besoins.

---

[1] Cet article est issu d'une recherche en géométrie soutenue par l'IUFM du Nord - Pas de Calais et menée par un groupe de travail dont font partie aussi : Raymond Duval, Claire Gaudeul, Marc Godin, Joël Jore, Bernard Offre, Odile Verbaere.

[2] **Remarque préalable**

Les figures de cet article devront présenter, lorsqu'elles seront proposées aux élèves, des tracés précis et lissés, non crénelés. Elles seront faites précisément à la main. Si elles sont obtenues par un logiciel de géométrie dynamique, l'enseignant sera particulièrement vigilant à la qualité de la sortie imprimante

Acquérir une telle mobilité du regard nécessite pour l'élève une prise de recul assez considérable par rapport aux objets, aux dessins et aux activités qu'on lui propose en géométrie, qu'il doit considérer d'une manière différente de celle dont il les considère dans la plupart des autres activités, notamment dans la vie quotidienne.

L'expérience des professeurs (de nombreux mémoires professionnels de PLC2 en témoignent) permet de souligner les difficultés des élèves concernant l'appréhension de la figure dans la résolution de problèmes de géométrie au collège et en seconde, y compris dans le passage à la démonstration. Des travaux de recherche confirment ces difficultés (Celi, 2002 ; Berthelot et Salin, 2000-2001), ou analysent les pratiques des enseignants à ce sujet (Demongeot et Gandit, 2003). Nous faisons l'hypothèse qu'il est possible de mettre en place et travailler, dans les activités de reproduction de figures à l'école primaire, un rapport aux figures qui permettrait d'améliorer les apprentissages des élèves en géométrie au collège.

Dans leur article, Duval et Godin (2005) esquissent des pistes pour produire des situations de classe visant à développer la mobilité du regard des élèves sur les figures de géométrie, c'est-à-dire leur capacité à changer de point de vue, notamment en termes de dimension (passer de la vision de surfaces à celle de lignes ou de points et réciproquement). Le but du présent article est de présenter quelques situations qui ont été utilisées dans des classes du cycle 3 dans cet esprit, d'identifier leurs variables didactiques et d'analyser comment elles peuvent contribuer aux acquisitions visées. Ces situations amènent un changement du contrat didactique habituel dans les activités géométriques proposées aux élèves à l'école primaire. Nous commencerons donc par situer notre approche par rapport à d'autres travaux et par rapport aux programmes.

Quelques repères théoriques

La difficulté de passage des objets matériels aux objets idéaux de la géométrie est théorisée, prise en compte dans de nombreux travaux de recherche et généralement signalée dans les commentaires des programmes ; elle a par exemple donné lieu à la distinction entre dessin et figure géométrique (Parzysz, 1989, Laborde et Capponi, 1994). Il n'en est pas de même de la difficulté de lecture d'une figure complexe qui demande de dépasser la vision de surfaces juxtaposées pour identifier des figures superposées dans un enchevêtrement de lignes ainsi que les points qui les déterminent[3]. Cette deuxième question, qui suppose un changement de regard sur les figures, se pose pour nous à propos du dessin matériel sur la feuille de papier. Nous ne reprenons pas la distinction maintenant classique entre dessin et figure puisque nous ne nous occuperons que de dessins en ce sens. Cependant les dessins géométriques ne sont pas n'importe quels dessins : ils sont porteurs de propriétés[4] que l'on peut construire et vérifier avec des instruments. Nous appellerons donc figure aussi bien une figure géométrique qu'une de ses réalisations sur le papier.

---

[3] On peut trouver dans des articles précédents de Grand N la préoccupation que nous partageons de travailler l'analyse des figures à l'aide de la reproduction de figures complexes éventuellement dès le cycle 2 (Bouleau, 2000-2001), ou au cycle 3, mais souvent en faisant intervenir des mesures, par exemple Verney-Masselin (1999-2000).

[4] Dans tout l'article, nous utilisons propriété géométrique avec un sens large : cela peut recouvrir l'alignement, l'orthogonalité, mais aussi des propriétés d'incidence, des rapports de longueurs. Il s'agit de propriétés graphiques du dessin, contrôlables aux instruments, qui traduisent des propriétés géométriques d'une figure.

Par ailleurs, les figures que nous considérons sont en général des figures de la géométrie métrique dont les dimensions sont fixées, elles sont fixées à isométrie près (même dans le cas où nous proposons une tâche d'agrandissement ou de réduction). Nous nous situons à l'intérieur de ce que Houdement et Kuzniak (2000) appellent géométrie 1, et même à l'articulation géométrie 0 et géométrie 1 (Parzysz, 2001). Cependant, contrairement à ces auteurs, à l'intérieur de la géométrie 1, nous faisons une différence entre la mesure qui suppose l'usage des nombres et le report de longueurs qui nécessite le recours à des instruments mais pas de nombre.

Evidemment, les situations que nous proposons ici ne permettent pas d'atteindre tous les objectifs de l'enseignement de la géométrie à l'école. Notre démarche rejoint sur plusieurs points d'autres travaux qui se sont intéressés à la place de l'espace physique dans la géométrie à l'école, notamment Berthelot et Salin (1992). Cependant, ce n'est pas le rapport de modélisation de l'espace physique par la géométrie que nous considérons mais le travail dans l'espace graphique des figures qui peuvent représenter aussi bien des objets physiques de l'espace que des objets géométriques. Gobert (2001) avait déjà considéré l'importance du travail au niveau de cet intermédiaire graphique dans la prise en compte par les élèves des rapports entre l'espace physique modélisé et les objets géométriques : le travail en classe sur des figures censées représenter la situation physique s'est révélé essentiel pour que les élèves prennent en compte les connaissances géométriques nécessaires à la résolution du problème posé dans l'espace physique et ne se limitent pas aux connaissances spatiales. Dans notre démarche, nous travaillons cet espace graphique en lien avec la construction des notions géométriques et non avec la représentation de situations spatiales. En particulier, les situations que nous proposons se situent dans le micro-espace de la feuille de papier. La représentation dans ce micro-espace de situations issues du méso-espace est tout aussi importante pour que la géométrie puisse être utilisée comme modélisation de situations spatiales.

Insertion dans l'enseignement ordinaire

Les programmes actuels distinguent connaissances spatiales et connaissances géométriques et mettent l'accent sur la résolution de problèmes. Le document d'accompagnement du cycle 2 suggère un passage des solides aux surfaces. Les documents d'application précisent que "*les activités du domaine géométrique ne visent pas des connaissances formelles (définitions), mais des connaissances fonctionnelles*" et suggèrent des activités variées à partir de figures complexes. Cependant, ils ne sont pas toujours compris de cette manière par les enseignants qui travaillent souvent les savoirs et compétences à acquérir dans l'ordre usuel d'énonciation des savoirs (droites et segments, puis parallèles et perpendiculaires, puis les figures planes du programme avec leur construction, puis les figures composées enfin les solides). Dans les classes, la résolution de problèmes semble cantonnée au domaine numérique et le travail en géométrie plane se limite encore souvent au maniement des instruments de tracé en relation avec les objets et propriétés géométriques de base (droites perpendiculaires ou parallèles, symétrie) ainsi qu'à la reconnaissance et à la reproduction de figures dont le nom est mentionné par les programmes, notamment des triangles, carrés, rectangles, ce qui favorise leur vision en termes de surfaces. L'observation des classes (en particulier celle qui est faite par des conseillers pédagogiques membres de notre équipe) nous laisse penser que, dans l'étude et la reproduction de figures, les maîtres procèdent souvent du simple au complexe, et donnent la priorité aux figures usuelles, celles qui ont un nom. Souvent, les propriétés sont travaillées isolément au cycle 2 en lien avec l'usage d'un instrument (l'alignement et la règle, l'angle droit et l'équerre) avant d'être intégrées dans la construction des figures classiques. Les figures complexes sont peu présentes avant la fin du cycle 3 sauf sous la forme de figures juxtaposées, par exemple à l'aide des tangrams et, quand elles le sont en fin de cycle 3, leur reproduction s'accommode souvent d'une vision de la figure comme juxtaposition ou superposition simple (par inclusion) de surfaces familières.

La démarche que nous proposons inverse ce schéma classique. C'est le passage progressif de la reconnaissance perceptive d'une figure à une analyse de cette même figure, même complexe et sans angle droit, qui devient un fil conducteur pour l'apprentissage de l'élève. A partir de ce qu'il voit (le plus souvent comme assemblage de surfaces), il peut faire des hypothèses (sur les lignes qui bordent ces surfaces et certains points remarquables) qu'il vérifie avec des instruments et en utilisant ce qu'il sait (ce dernier point devant remplacer totalement le contrôle perceptif puis le contrôle par les instruments dans le cadre des démonstrations[5]). Nous pensons qu'une telle démarche permet de prendre en compte des difficultés comme celles que signale Grenier (1988) concernant la symétrie orthogonale en sixième : pour reproduire un segment, au lieu de chercher les symétriques des deux extrémités, certains élèves reproduisent le symétrique d'une extrémité et tracent un segment de même longueur dans une direction déterminée au jugé ; de plus, certains élèves utilisent cette procédure pour reproduire un assemblage de segments alors qu'ils reproduisent correctement la figure composée des points isolés constituant les extrémités de ces segments.

La problématique d'acquisition par les élèves d'une mobilité du regard entre surfaces, lignes et points dans la vision d'une figure nous semble nécessiter pour sa mise en œuvre dans les classes des situations de résolution de problèmes pour lesquels c'est une telle mobilité qui permet la résolution du problème. Cela suppose un changement assez profond dans les pratiques des maîtres en géométrie.

Le cycle 2 devrait jouer un rôle crucial dans cet apprentissage au moins pour le passage des surfaces aux lignes, notamment le repérage d'alignements de bords de surfaces, même éloignées, pour préparer au cycle 3 la détermination de points caractéristiques des figures comme intersection de lignes et l'utilisation d'autres propriétés géométriques. Nous avons élaboré des situations pour ce niveau (Perrin-Glorian, 2003, Duval, Godin et Perrin-Glorian, 2005) qui feront l'objet d'un autre article. Cependant, nous pensons qu'on peut envisager d'introduire une telle approche dans une classe ordinaire du cycle 3 de l'école alors que d'autres apprentissages en géométrie ont déjà eu lieu ou sont en cours dans un esprit différent. Nous faisons en effet l'hypothèse qu'il est possible d'amorcer, à partir de situations bien choisies, un travail sur les figures planes qui permette le développement chez l'élève d'habiletés en analyse des figures géométriques favorisant la mobilité du regard que nous recherchons. C'est ce type de situations que nous présentons ici, principalement pour travailler les alignements et intersections et à travers eux les notions de droite et point. Nous pensons que ce travail peut permettre de travailler aussi les contenus notionnels en géométrie en choisissant des reproductions de figures complexes présentant des propriétés qu'on veut travailler (par exemple : symétries, etc.) et en choisissant bien les parties qui sont fournies ; nous commençons seulement à explorer cette direction.

Nous tenterons de préciser le plus possible les conditions permettant de caractériser les situations présentées pour que les enseignants, qui ne sont pas habitués à cette manière de

[5] Bien sûr, la vision opératoire des figures (Duval, 1994) qui fait appel à la perception (ou aux instruments) reste essentielle pour trouver la solution, même pour les experts.

voir les figures de géométrie et les tâches de reproduction de figures, puissent s'en emparer. En effet, nous pensons que pour qu'ils s'en emparent, il est nécessaire qu'ils puissent non seulement reproduire les expériences décrites avec les figures fournies, mais aussi produire eux-mêmes des figures et concevoir l'organisation de la classe qui permet le travail prévu sur les figures.

Dans la seconde partie de l'article, nous explicitons sur un exemple les variables didactiques sur lesquelles on peut agir pour produire de telles situations au niveau du cycle 3. Ces variables portent sur le choix de la figure, l'effacement de certaines lignes (ou le choix de la partie fournie), les instruments disponibles, l'organisation de la classe. Dans une troisième partie, nous rendons compte de l'observation de quelques séances dans des classes de cycle 3, dont certaines en REP, avant de revenir dans la quatrième partie sur les conditions des situations.

Variations sur une figure : identification de quelques variables didactiques

Dans cette partie, nous envisageons diverses variations sur une même figure permettant de mettre en évidence des variables concernant les propriétés de la figure et les outils de géométrie sur lesquels on peut jouer pour construire des situations de reproduction de figure de niveaux de difficulté différents pour les élèves et permettant de travailler les notions d'alignement, de droite, et de point comme intersection de droites.

Un premier choix

Considérons la figure 1 ci-dessous et l’une de ses parties, la figure 2.

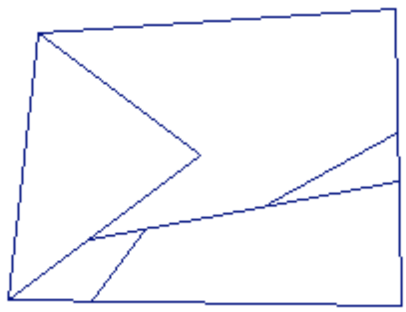


Figure 1

Figure 2

La tâche considérée tout au long de l'article sera la suivante :
La figure 1 et une de ses parties, la figure 2, étant fournies sur papier uni, il s'agit de compléter la figure 2 par des tracés pour obtenir une figure identique à la figure 1, ce qui pourra être contrôlé par un calque. La figure modèle 1 reste toujours disponible.

Divers procédés sont envisageables suivant les connaissances et le matériel dont on dispose.

- Si on dispose des gabarits des pièces (morceaux de la figure 1), la reproduction peut s'obtenir par juxtaposition de surfaces dont il faudra veiller à bien aligner les bords. On retrouve des situations de puzzles ou tangrams classiques pour le cycle 2 pour lesquelles on peut jouer sur la disponibilité de certaines pièces.
- Au collège, ou auprès d'adultes qui savent construire des triangles à partir des longueurs des trois côtés, on pourrait envisager une construction à la règle non graduée et au compas par report de longueurs et construction de triangles.

Notre objectif étant de travailler les alignements et l'obtention de points comme intersections de lignes, nous écartons ces possibilités en jouant sur le choix des instruments, par exemple en ne laissant disponible qu'une règle non graduée. Une analyse différente de la figure 1 devient alors nécessaire pour repérer l'alignement de sommets de diverses pièces. On peut ne pas exclure totalement les longueurs en fournissant aussi une bande de papier qui permet le report de longueurs tout en le contrôlant : le report de longueurs avec une bande de papier évite le domaine numérique et il nécessite un marquage qui permet de compter le nombre de reports. Nous reviendrons sur ce point.

Pour reconstituer la figure à partir de la partie fournie, il est d'abord nécessaire d'identifier cette partie dans la figure dont elle est extraite. Cette reconnaissance visuelle de la partie dans le tout permet une analyse des positions relatives de certains éléments de la partie fournie (surfaces, segments ou sommets) avec des éléments de la figure complète. Mais cette première analyse visuelle est insuffisante et doit être dépassée si on ne peut que tracer des lignes droites.

En effet, pour tracer une droite, deux points distincts et disponibles de cette droite sont nécessaires. Cela oriente l'analyse de la relation entre la partie fournie et la figure complète dont elle est extraite vers la recherche d'alignements de points ou sommets caractéristiques (cf. figure 3). Plus précisément la recherche va porter sur un sommet qui n'est pas encore tracé sur la reproduction mais qui est aligné sur le modèle avec deux couples de sommets disponibles. En effet, un tel sommet est alors obtenu comme intersection des deux droites déterminées par ces sommets disponibles.

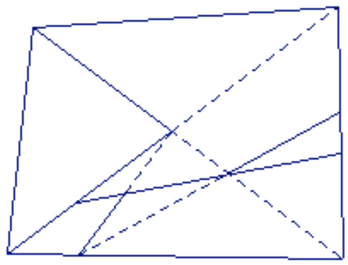


Figure 3

Par exemple, N est un sommet non encore tracé qui est aligné d'une part avec A et F, d'autre part avec C et D qui sont déjà tous les quatre tracés sur la reproduction. On peut donc obtenir N comme intersection des droites (FA) et (CD) (cf. figure 4). De même, le sommet M est aligné avec chacun des couples de points (F ; A) et (E ; B). Ces deux couples de points sont connus. Le point M est donc l'intersection des deux droites (FA) et (EB). Chacun des sommets M et N est ainsi obtenu comme intersection de deux droites connues, chacune déterminée par un couple de points connus. Une construction pas à pas est possible comme l'indiquent les figures 4 à 7. Nous y avons nommé les sommets pour des nécessités d'écriture et de lecture de cet article, mais les figures proposées aux élèves pour la reproduction ne comportent ni lettres, ni symboles.

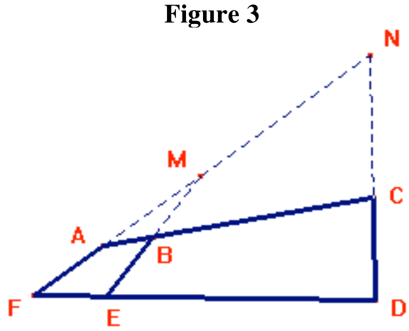


Figure 4

Le sommet P est obtenu avec deux couples non alignés de sommets connus, dont un sommet construit, (A ; C) et (M ; D) (cf. figure 5).

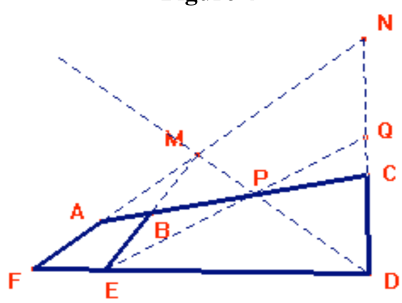


Figure 5

Le sommet Q est obtenu avec deux couples non alignés de sommets connus dont un sommet construit, (D ; C) et (E ; P) (cf. figure 6).

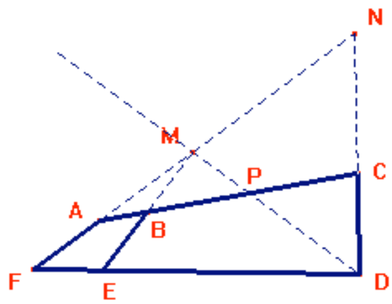


Figure 6

Le sommet R est aligné avec M, P et D, mais cela ne donne qu'une droite. S'il est aligné aussi avec A et E, cela permet de terminer la figure sans aucun report de longueur. Si E, A, R ne sont pas alignés, ce sommet R est extrémité de la diagonale portée par (MP) : un unique report de longueur est nécessaire pour achever la figure (figure 7).

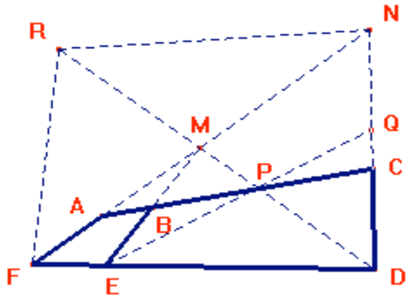


Figure 7

Les sommets sont ainsi construits dans l'ordre indiqué sur la figure 8 : les premiers sommets marqués 1, puis un sommet marqué 2, puis celui marqué 3, et enfin le sommet marqué 4. Il faut noter que les alignements sont plus ou moins faciles à percevoir suivant que les segments à tracer sont ou non présents sur la figure modèle à reproduire. Par exemple, [DN] est entièrement présent alors que [FN] ne l'est que partiellement : il faudra en effacer une partie dans la figure finale. L'alignement E, A, R, s'il existe, est beaucoup plus difficile à percevoir puisque aucune partie de [AR] n'est présente dans la figure finale.

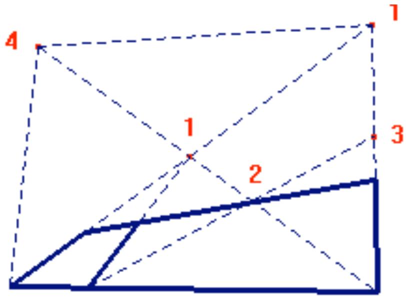


Figure 8

Des variations autour de cette même figure

Si la partie fournie était celle représentée en gras dans la figure 9, la nécessité du report de longueur ne se présenterait pas comme l'indiquent les traits en pointillés.
La figure 10 suivante et l'une de ses parties, la figure 11, sont visuellement proches des figures 1 et 2 précédentes, sans alignement de E, A, R.

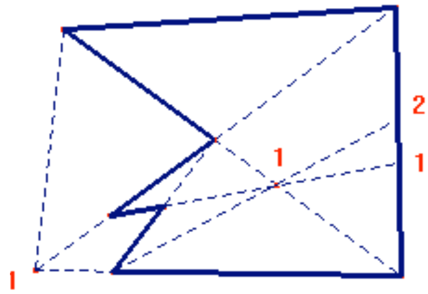


Figure 9

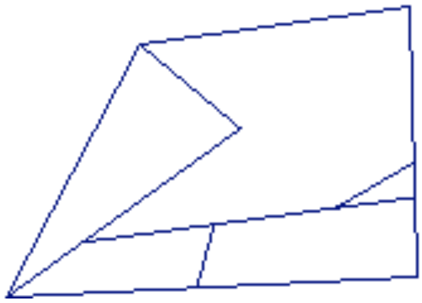
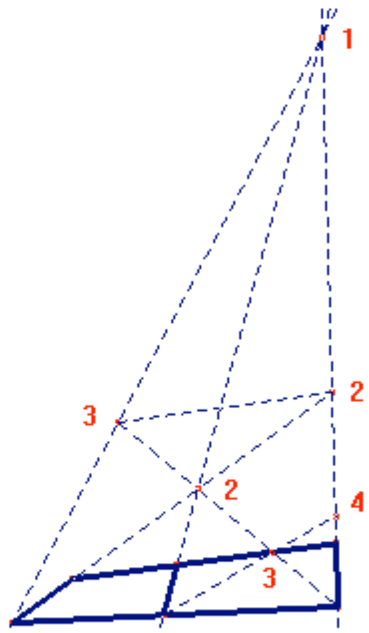


Figure 10

Figure 11

Cependant, un exemplaire identique à la figure 10 s'obtient à partir de la figure 11 avec uniquement des alignements de points, sans report de longueur comme l'indique la figure 12. Chacun des sommets recherchés est aligné avec deux couples non alignés de sommets donnés ou construits, mais il faut sortir du contour fermé de la figure à reproduire (cf. le sommet marqué 1 dans la figure 12), ce qui est une difficulté supplémentaire sur laquelle on peut jouer.

Figure 12



De plus ce sommet n'est pas lui-même un des sommets recherchés, mais seulement un intermédiaire pour l'obtention de deux d'entre eux (cf. les sommets marqués 2 puis 3). Cela relève encore le niveau d'analyse nécessaire.

Ainsi, trois variables importantes sont en jeu et ont un effet sur le niveau d'analyse d'une figure et sur les stratégies à adopter dans les tracés :

- les propriétés de la figure qui permettent ou non d'obtenir un exemplaire identique à cette figure à partir de l'une de ses parties avec seulement des alignements de points ;
- la partie de la figure fournie ;
- les outils de géométrie disponibles.

Nous abordons à présent la manière dont on peut gérer ces variables en classe à partir de quelques exemples.

Des exemples d'utilisation en classe

Travail sur les alignements au CM1

La figure analysée dans la partie précédente a été utilisée avec différentes variantes dans une classe de cycle 3 - 2ème année (CM1) d'une école classée REP, notamment au cours de séances d'ateliers de développement de pratiques pédagogiques (ADPP) dans la classe d'un maître formateur. Comme c'est une figure qui n'a ni angle droit ni symétrie, ce sont les notions d'alignement, droite et point qui pourront principalement être travaillées. On souhaite autoriser le report de longueurs, la reproduction se fait donc à l'identique (modèle et reproduction de même taille). La vérification se fait par superposition à un calque disponible sur le bureau du maître. Deux phases sont prévues : dans un premier temps, le nombre de reports de longueurs n'est pas limité. Dans un deuxième temps, on demande le moins possible de reports de longueurs.

Le nombre de reports n'est pas limité

Objectifs et organisation de la classe choisis par le maître

L'objectif est ici d'amener les élèves à se passer de mesures et à repérer des alignements pour reproduire une figure. Les élèves ne disposent donc que d'une règle non graduée, mais les reports de longueur sont possibles à l'aide d'une bande de papier.
Le maître choisit ici de faire dévolution du problème dans une phase collective de description de la figure : la figure 1 est exposée au regard de l'ensemble des élèves de la classe au moyen d'un transparent projeté. Une première analyse de cette figure projetée est engagée avec les élèves conduisant à exprimer différentes décompositions et recompositions de cette figure à partir de ses parties. L'analyse reste donc au niveau d'une vision de la figure comme assemblage de pièces juxtaposées de dimension 2 (Duval et Godin, 2005). Cette phase d'analyse collective permet au professeur d'orienter le débat vers l'objectif de l'activité qu'il veut proposer : l'obtention d'un exemplaire identique de cette figure à partir d'une partie seulement, partie qui sera fournie (cf. figure 2).
Cette phase collective pourrait être raccourcie et réduite à la description du matériel fourni, de l'objectif de la tâche à effectuer par les élèves et des conditions de validation de la figure obtenue (à l'aide d'un calque). Il est en effet important, pour fixer la tâche et le contexte de travail, que ces divers points soient clairement précisés, notamment les moyens de vérifier ainsi que le fait qu'on peut écrire sur le modèle sans trop appuyer et qu'on peut se servir de la gomme (donc qu'il faut avoir des crayons bien taillés et ne pas appuyer trop fort). Il est

important aussi de ne pas déflorer dans cette première phase le moyen d'obtenir des sommets manquants par prolongements de segments de la figure 2.

Matériel fourni et règle du jeu :

- un exemplaire de la figure 1, dans des dimensions appropriées, sur papier uni ;
- un exemplaire d'une partie de cette figure, sur papier uni (figure 2) qui servira de point de départ pour les tracés ;
- règle non graduée, bande de papier, crayon bien taillé, gomme.

Le choix fait au niveau des outils est essentiel : tout recours au mesurage en centimètres ou millimètres est impossible. Par contre, reporter une longueur au moyen de la bande de papier reste possible pour que les élèves qui ne voient pas d'emblée tous les alignements puissent entrer dans la tâche demandée. Le fait d'avoir recours à un instrument différent de la règle graduée permet d'identifier le report en tant que tel : il passe plus facilement inaperçu quand on procède à une mesure via l'instrument de tracé.
Quelques exemplaires de la figure à obtenir, disponibles sur transparents, serviront pour la validation de la figure obtenue par les élèves. Quand il pense avoir terminé, chaque élève est autorisé à se déplacer pour vérifier sa figure. S'il est satisfait, il peut commencer la reproduction de la même figure à partir d'une autre partie. Sinon, il peut effectuer des corrections en gommant ou reprendre à partir d'un autre exemplaire de cette même partie de la figure (le maître a prévu des exemplaires supplémentaires de cette partie). Ces exemplaires sont fournis un à un, ce qui fait que les élèves travaillent sur un unique cas à la fois. Si l'on veut un suivi plus aisé des réalisations de chaque élève, on peut interdire la gomme après vérification par les transparents et fournir un autre exemplaire de la partie.

Déroulement : alternance du travail individuel et des bilans collectifs

Un premier temps de recherche individuelle est accordé aux élèves avant que le professeur ne fasse, avec eux, un premier bilan des démarches adoptées et des réalisations. Ce premier bilan ne donne pas la solution : il ne vise qu'à débloquer certains élèves qui n'envisagent la reproduction d'une figure qu'à partir de l'obtention de ses côtés, c'est-à-dire ici les bords de sous figures (ou morceaux de surfaces) qui la composent. On peut y évoquer le fait qu'un point ne peut s'obtenir que comme intersection de lignes que l'on trace ou la possibilité d'écrire sur le modèle, de prolonger des segments. Le professeur relance une nouvelle recherche individuelle pour permettre une action de chaque élève puis, après un temps de recherche suffisant pour que chaque élève ait pu reproduire au moins une figure, il reprend la main pour un bilan des procédures adoptées par les élèves et une explicitation de quelques points clé de la reproduction effectuée.

A l'issue de cette première phase, le bilan comprend les points suivants qui, pour la plupart, restent liés à la figure choisie :

a. la distinction à faire entre deux actions : reporter une longueur au moyen d'une bande de papier et mesurer une longueur au moyen d'une règle graduée ;
b. le repérage sur le modèle de quelques sommets et notamment de sommets alignés au moyen d'une règle non graduée ;
c. le repérage sur le modèle de lignes droites et de leurs points d'intersection ;
d. le tracé de droites pour obtenir des sommets à partir de la seule partie donnée.

Nous pensons que cette phase de débat avec les élèves, la production d'une trace écrite[6] et

[6] Par exemple : "*pour trouver un point, il faut tracer deux lignes de la figure qui passent par ce point ; on a souvent besoin de prolonger des segments pour trouver le point*".

sa conservation suite au débat jouent un rôle essentiel comme mémoire de l'activité réalisée et dans la construction des savoirs géométriques pour les élèves[7].

Quelques remarques sur l'observation des élèves à l'issue de cette première phase

Nous avons constaté, dans la classe de CM1, observée qu'à l'issue de ces premiers temps de recherche et de bilan, une majorité d'élèves :
- trace une droite à partir d'un point connu en tentant une estimation perceptive globale de sa direction ;
- éprouve le besoin de recourir à de nombreux reports de longueurs.

Ce besoin de recourir plusieurs fois au report de longueur semble être renforcé par les tentatives non réussies du tracé d'une droite avec une estimation « à l'œil » de sa direction (cf. Annexe 1 : Figure 1, premier essai). En effet, si une droite est ainsi tracée à partir d'un point connu et d'une longueur d'un segment porté par cette droite en estimant à l'œil sa direction, il est peu probable qu'elle passe par le ou les sommets souhaités : longueur et direction doivent être dissociées. Ainsi, bien qu'une activité soit déjà assez engagée avec les élèves sur la recherche de sommets, de points alignés, de droites remarquables, les pratiques évoluent encore très lentement.

Avec le moins possible de reports

Un nouveau défi

Une reprise de la situation est nécessaire pour consolider la distinction entre longueur et direction d'un segment. Le professeur relance l'activité avec un défi à relever dans le contexte précédent : *obtenir un exemplaire identique de la figure, mais cette fois avec le moins possible de reports de longueur*. Il annonce qu'*avec un unique report de longueur, il est possible d'obtenir un exemplaire identique de cette figure 1*. La recherche est alors relancée. Chaque élève est ainsi amené à développer une nouvelle analyse de la figure et à rechercher de nouvelles pistes pour utiliser le moins possible le report de longueur : rechercher des tracés de lignes droites, des intersections de droites, des alignements de points.

Cette nouvelle orientation de l'analyse de la figure avec la lecture de points, de points d'intersection, de lignes droites, d'alignements de points sur la figure impose une manière différente de voir cette figure et ses parties : trouver les sommets c'est trouver la figure. On est bien en train de travailler le passage d'une vision en termes de lignes à une vision en termes de points.
Une autre étape reste utile, voire nécessaire, afin de consolider encore certains acquis : engager une telle activité dans les mêmes conditions en proposant la reproduction de cette même figure à partir d'une autre de ses parties (cf. figure 13) ou encore celle d'une autre figure construite sur la même trame (cf. figures 14 et 15). Nous appelons *trame* la figure obtenue en ajoutant à la figure donnée toutes les droites qui joignent deux points déjà présents et tous les points d'intersection de droites déjà présentes. En général, il suffira de s'intéresser à une partie de cette trame : un réseau de droites qui porte tous les segments

[7] A ce stade, les formulations sont contextualisées à la figure fournie (par exemple avec des lettres si on a nommé les sommets au fur et à mesure comme dans la classe observée) et ne concernent que des points particuliers. Les traces écrites peuvent être des affiches utilisées lors des mises en commun et auxquelles on pourra revenir par la suite.

nécessaires à la reproduction de la figure à partir de n'importe laquelle de ses parties que l'on envisage de fournir. Une autre variable didactique concerne les propriétés géométriques de la trame (qui ne sont pas totalement indépendantes des propriétés géométriques de la figure, mais sont à distinguer), comme nous le verrons dans l'exemple suivant (trame quadrillée à base carrée).

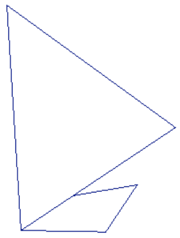


Figure 13

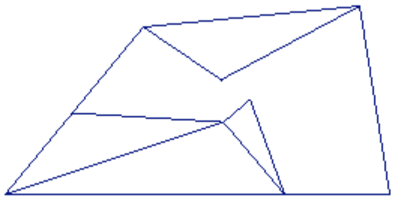


Figure 14

Figure 15

Ce que nous pouvons retenir avec les élèves à l'issue de ces activités

Outre le développement de l'acuité visuelle dans l'analyse des figures, les principales connaissances géométriques que nous pouvons retenir de ce genre d'activité concernent les segments, les droites et les points, leurs relations et leur intervention dans la construction de figures géométriques, par exemple[8] :

- la figure qu'on voulait reproduire est composée de plusieurs pièces (surfaces) qui ont des bords droits ; pour la reproduire, il faut tracer les segments qui délimitent ces surfaces ; pour cela, il faut construire certains points de la figure ; ces points sont des sommets des surfaces, des extrémités de segments ou des intersections de droites ;
- pour reproduire la figure, on peut avoir besoin de points et de lignes qui ne sont pas visibles sur le modèle ;
- un point se construit par l'intersection de deux lignes ; c'est en particulier facile s'il est à l'intersection de deux droites ;
- pour tracer une droite, on peut joindre deux points qu'on a déjà ou prolonger un segment ;
- un segment est porté par une droite qu'on peut prolonger autant qu'on veut sur le dessin, de chaque côté ;
- il suffit de deux points pour tracer une droite ;
- quand on veut construire une figure, il est intéressant de rechercher des alignements pour voir si le point qu'on veut construire est aligné avec deux points qu'on a déjà.

Alignements et milieux au CM2

Les figures utilisées dans l'exemple précédent sont construites sur une trame qui ne fait apparaître ni rapport particulier, ni angle droit, ni droites parallèles. Nous présentons maintenant quelques figures qui demandent d'utiliser des alignements et des milieux. De plus, certaines d'entre elles sont tracées sur un quadrillage à maille carrée. Elles ont été utilisées dans le CM2 d'un autre maître formateur, au cours de trois séances qui ont duré chacune entre une heure et une heure et demie.

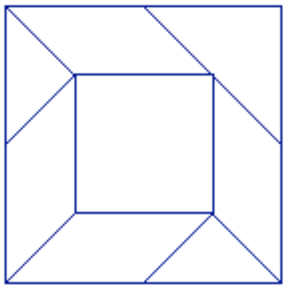
Présentation générale de la suite de séances

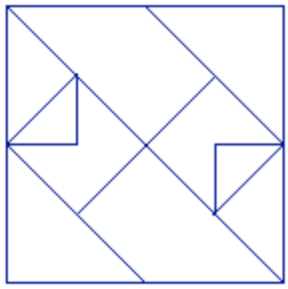
Des choix différents des variables didactiques ont été effectués (propriétés de la trame, propriétés des figures, partie fournie, taille du modèle, consigne de reproduction).

---

[8] On pourra rarement formuler tous les savoirs énoncés ci-après à l'issue de la reproduction d'une seule figure ; cet énoncé peut se faire progressivement.

La première séance a été consacrée à la reproduction de figures[9] construites à partir d'une trame quadrillée inscrite dans un carré. Par exemple[10] :





Un grand carré est fourni sur feuille A4 comme point de départ, les élèves doivent reproduire la figure de leur choix dans ce carré ; les modèles sont rassemblés à échelle réduite sur une seule feuille qui est à disposition des élèves sur leur table. Quand ils pensent avoir fini, ils peuvent vérifier leur production à l'aide de transparents à disposition près du tableau. S'ils sont satisfaits de leur reproduction, ils peuvent en commencer une autre en prenant un nouveau grand carré. S'ils ne sont pas satisfaits, ils peuvent corriger à leur place, sans emmener le transparent. Ils peuvent aussi reprendre un grand carré pour recommencer (en fait deux grands carrés sont présents sur la feuille A4 fournie, ce qui permet la reproduction de deux figures par feuille).
La seconde séance a été consacrée à un bilan de cette première séance. Une troisième séance a permis la reproduction de deux autres figures construites sur une trame sans angles droits ; l'une d'elles demandait de sortir du cadre fourni (voir annexe 2 B).

Sans entrer dans le détail du travail, nous explicitons dans la suite quelques mises au point qui ont été nécessaires au niveau collectif pour que l'ensemble des élèves puisse tirer profit de ce travail et en retenir des savoirs géométriques.

D'autres choix pour les variables didactiques

Les figures proposées à la première séance présentent des symétries et des angles droits. Elles peuvent s'obtenir à partir d'un quadrillage reconstruit sur le carré fourni en mettant en œuvre la notion de milieu et les propriétés du carré, de ses diagonales et de ses médianes qui rendent inutile l'usage de l'équerre pour tracer des angles droits.
On fournit, non pas une partie de la figure, mais le cadre, ce qui facilite le repérage des alignements nécessaires, tous intérieurs à ce cadre.
Les instruments de géométrie sont tous disponibles, mais les élèves peuvent se contenter d'une règle graduée dont l'usage est familier au CM2. Cependant les dimensions du carré fourni ne sont pas entières en centimètres (on a même un nombre impair de millimètres) pour décourager les mesures (il faut partager en quatre les côtés du carré et les calculs sur les décimaux sont encore peu fiables en ce début de CM2) et favoriser la bande de papier comme outil de report et de partage de longueurs.
Les figures à reproduire ne sont pas à la même taille que le modèle, ce qui empêche le report direct de longueurs ; l'identification de rapports de longueurs (ici simplement des milieux) est nécessaire.

---

[9] Les figures proposées n'ont rien d'original. On peut par exemple trouver des figures analogues dans des brochures IREM anciennes, par exemple Ducel et Peltier (1986). C'est la démarche de restauration et l'analyse du choix des variables qui constitue l'apport de cet article.

[10] On trouvera en annexe 2A l'ensemble des figures proposées.

Des interventions nécessaires de l'enseignant

Lors de la première séance, quelques mises au point sont nécessaires après un premier temps de recherche des élèves pour répondre collectivement à quelques questions que se sont posées certains élèves :

- on a le droit de tracer sur le modèle ;
- on a le droit de gommer sur la reproduction ;
- pour arrêter le tracé d'un segment, il faut savoir où l'arrêter : on ne peut s'arrêter que si l'on rencontre une autre ligne déjà tracée.

Le dernier point est abordé à partir de l'exemple qui suit.

Beaucoup d'élèves ont choisi de commencer par la reproduction de la figure ci-contre qui leur paraît sans doute plus simple parce que moins chargée (en réalité c'est une des plus complexes parce qu'elle pose fortement le problème de l'arrêt du tracé des segments[11]).

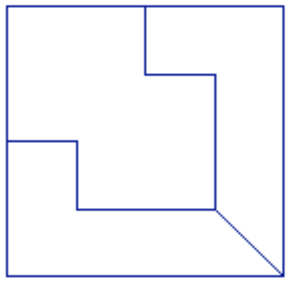


Figure 16 (M)

Ils ont repéré la diagonale, commencent le tracé du segment et l'arrêtent au jugé pour tenter ensuite de tracer des parallèles aux côtés du carré.

L'intervention du maître incite donc à tracer la diagonale en entier et à chercher une autre ligne qui permettra de déterminer la partie utile, mais cette ligne n'est pas explicitée collectivement.

Il faut noter que le fait que les élèves travaillent sur des figures différentes amène un intérêt supplémentaire aux mises en commun réalisées en cours d'activité. Il ne s'agit pas de reproduire une figure particulière, mais de discuter un problème commun qui se pose dans toutes les reproductions. L'exemple ci-dessus en témoigne. C'est le moyen d'arrêter le tracé d'un segment qui est discuté et ainsi la nécessité de repérer un point comme milieu d'un segment ou encore comme intersection de deux lignes droites.

Les élèves ont une adaptation à faire (tout de suite ou plus tard) pour retrouver le résultat de la discussion sur leur figure.

A la troisième séance, aucune intervention collective ne sera nécessaire pour la première figure qui fait à nouveau intervenir des milieux (elle est reproduite en moins de dix minutes par certains élèves alors que d'autres y passeront toute la séance). En revanche, pour la deuxième figure, il faudra d'une part préciser que cette fois seule la règle non graduée est nécessaire et d'autre part qu'on a le droit de sortir du cadre fourni : il est très difficile de penser droite passant par deux points plutôt que segment joignant deux points. Un logiciel de géométrie dynamique pourrait sans doute être d'une grande aide pour dépasser cet obstacle visuel, mais nous n'avons pas exploré cet aspect.

Ce qui peut être retenu à chaque étape

Lors de la première séance, les élèves sont restés dans l'action de la reproduction des figures, avec d'ailleurs un grand enthousiasme. Les mises au point collectives sont restées très liées aux figures proposées et ont porté sur le « comment faire ? », même pour la correction en fin de séance de la figure H. Deux questions se posent : « quelles lignes tracer ? » puis « quelles lignes effacer ? ».

---

[11] On peut d'ailleurs choisir de ne pas la proposer dans un premier temps et de la fournir aux élèves qui ont déjà reproduit une autre figure pour les faire rencontrer plus clairement, dans un deuxième temps, le problème de la détermination des extrémités des segments à tracer.

La deuxième séance a permis de corriger collectivement les autres figures (la figure H a été réalisée au tableau et sa réalisation discutée collectivement en fin de première séance) et de revenir sur l'activité en comparant les figures. Certaines figures étaient plus faciles à tracer (la H) et d'autres plus difficiles (la M) parce que, dans le premier cas, on peut voir plus facilement ce que les élèves et le maître ont appelé la trame de toutes ces figures. Un moyen convenant à toutes ces figures a donc été explicité par les élèves : tracer la trame commune, puis effacer les segments inutiles. Pour tracer cette trame, il fallait rechercher des milieux et des quarts.
Deux autres savoirs plus généraux ont pu être explicités dès cette étape :

- les points qui délimitent les segments à tracer sont l'intersection de deux lignes ;
- pour tracer une droite, il faut deux points déjà tracés ou un segment qu'on prolonge.

La première figure de la troisième séance était un réinvestissement qui ne mettait pas en jeu de savoir nouveau, sauf qu'ici la trame, si elle s'appuyait toujours sur des diagonales et des milieux, ne comportait pas d'angle droit et ne ressemblait donc pas du tout à un quadrillage.
En revanche, la deuxième figure amenait à expliciter un nouveau savoir : une droite peut se prolonger autant qu'on veut et deux droites peuvent se couper à l'extérieur de la figure de départ.
Les savoirs mis en œuvre ici, pour élémentaires qu'ils paraissent, font souvent défaut aux élèves de collège dans le traitement des problèmes de géométrie.

Alignements et orthogonalité au CM1

L'exemple présenté maintenant est tiré du mémoire de master de Jean-Robert Delplace soutenu en 2005 à l'université Paris 7-Denis Diderot.
La figure présentée dans ce paragraphe est la quatrième d'une série de 5 figures qui ont été données à travailler à des élèves d'une classe de CM1. Les élèves de cette classe avaient l'habitude de travailler la géométrie de façon classique, mais très régulièrement : il s'agit donc d'une classe « ordinaire », dont les élèves ont un niveau correct dans l'ensemble. Lorsque ce travail leur a été proposé, ils avaient déjà réalisé de nombreuses activités de reproduction de figures complexes à l'aide des instruments usuels de la géométrie plane : règle graduée et règle non graduée, compas, équerre « de fortune » en carton.
Ils avaient également l'habitude de voir le professeur valider leur travail à l'aide d'un calque.
Leur professeur a suivi une formation de 3 heures avec l'un d'entre nous lors d'un stage d'école. Cette enseignante y a découvert l'activité décrite ci-dessus (avec des figures à trame quelconque), a montré un vif enthousiasme devant le travail demandé et s'est montrée désireuse d'essayer ce nouveau type de travail dans sa classe.
Dans le cadre de l'observation, cinq figures ont été proposées aux élèves, présentant chacune des caractéristiques différentes. Trois séances d'une heure et demie ont été consacrées à ces activités de restauration de figures. Nous présentons dans la suite de cet article la figure F4 de cette série, qui demande d'utiliser des alignements et de l'orthogonalité.

Présentation générale de la suite des séances

La première séance a été consacrée à la restauration de trois figures construites à partir d'une trame inscrite dans un quadrilatère quelconque. Les deux premières figures ne mettent en jeu que des propriétés d'alignement et de longueurs. La troisième figure peut être restaurée en utilisant une propriété d'orthogonalité. Comme point de départ, les élèves reçoivent une figure complète accompagnée de deux figures incomplètes qu'il leur faudra

restaurer. Quand leur travail est fini, ils demandent à ce que l'enseignante valide ou non leur reproduction à l'aide d'un transparent. Un bilan sur les méthodes utilisées est alors réalisé en classe complète à la fin de chacune des restaurations.
La deuxième séance est une reprise du travail proposé aux élèves lors de la première séance ; elle n'a pas été observée.
La troisième séance comprend la restauration de deux figures construites à partir d'une trame mettant en jeu des alignements et de l'orthogonalité (figure F4 décrite ci-après), des alignements, de l'orthogonalité et des milieux en ce qui concerne la dernière figure. Après une mise en commun comme lors de la première séance, un bilan sur les méthodes utilisées est réalisé en classe complète à la fin de chacune des restaurations. Enfin, le savoir mathématique utile à ces restaurations est institutionnalisé à partir de questions posées aux élèves.

Présentation et analyse de la figure 4

La trame du dessin à examiner est formée par un quadrilatère quelconque et cinq segments particuliers de ce quadrilatère : les deux diagonales, un segment passant par le point d'intersection des deux diagonales et perpendiculaire à un autre côté, et deux segments reliant chacun un sommet du quadrilatère à une des extrémités du segment précité.
Le dessin à reproduire par restauration et à analyser par les élèves se présente sous la forme de ce quadrilatère quelconque et de deux triangles tracés à l'intérieur de ce quadrilatère. Le quadrilatère est fourni ; il faut donc replacer à l'intérieur la figure composée des deux triangles.

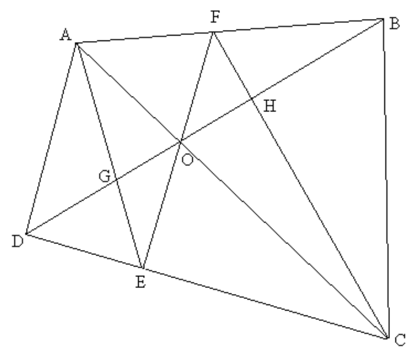


Figure 17
Trame du dessin

Il est nécessaire pour cela de repérer l'angle droit présent sur la figure et d'identifier le point d'intersection des triangles comme point d'intersection des diagonales alors que l'une d'elles a entièrement disparu et que l'autre n'apparaît que par un segment qui ne rejoint aucun des sommets du quadrilatère. De plus l'angle en H est involontairement presque droit ; c'est une propriété qui risque d'être perçue, mais n'est pas pertinente pour la reproduction. La situation est donc complexe.

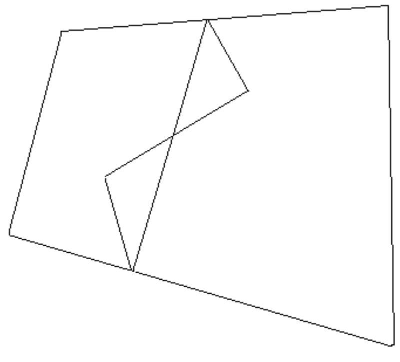


Figure 18 Dessin à reproduire par restauration

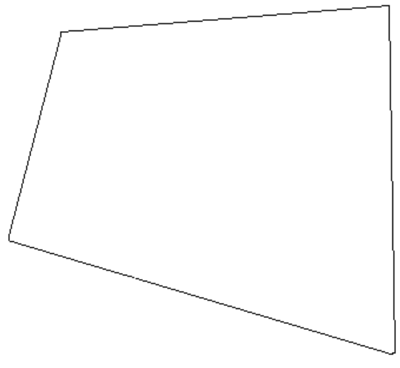


Figure 19 Dessin à compléter par les élèves

Connaissances mises en jeu

En plus du repérage des propriétés visuelles de la figure, la reproduction de ce dessin telle que demandée par l'enseignante fait appel à des connaissances géométriques utilisées dans les séances précédentes. Par exemple, concernant les moyens de tracer un point : un point est déterminé par l'intersection de 2 droites, un point sur un segment est déterminé par la donnée d'une mesure à partir d'un point donné, un point est déterminé par le report d'une longueur à partir d'un point sur une droite donnée, un segment est déterminé par la donnée de ses deux extrémités, des points alignés sont des points qui appartiennent à une même droite… Ces connaissances restent souvent implicites. C'est le cas ici : elles n'ont pas été institutionnalisées par l'enseignante.

Variables didactiques

Le quadrilatère fourni a la même position dans la feuille que celui de la figure à reproduire, les triangles doivent donc être tracés dans la même position par rapport au quadrilatère donné. Dans tous les exemples traités, nous avons fait le choix de fixer ainsi cette variable pour ne pas compliquer la reconnaissance des sous-figures. Ce choix peut aussi faciliter le repérage de l'angle droit qui n'est pas en position horizontale-verticale puisque le quadrilatère n'est pas représenté de façon « usuelle », c'est-à-dire avec un côté horizontal « sur lequel il reposerait ». Une telle position du quadrilatère qui amène l'angle droit en position horizontale-verticale faciliterait sans doute beaucoup sa reconnaissance.
Ici, il est important que la figure à produire, donc le quadrilatère extérieur fourni, ait les mêmes dimensions que le modèle puisque nous voulons que les élèves puissent prendre des informations sur les longueurs.
La possibilité ou non de prendre des mesures effectives à l'aide de la règle graduée ou de faire des reports de longueur à l'aide du compas ou d'une bande de papier est particulièrement importante, car c'est la limitation de cette possibilité qui va amener l'élève à rechercher d'autres moyens, par exemple des alignements de points, et ainsi favoriser le changement de regard sur le dessin.
Le travail se fait sur du papier uni, ainsi l'appui sur la position de points nœuds d'un papier quadrillé n'est pas envisagé. Il en est de même pour d'éventuelles prises de mesures grâce aux carreaux.
Le quadrilatère ainsi que les triangles sont quelconques, ainsi la connaissance des différentes propriétés des quadrilatères ou triangles particuliers n'est d'aucune aide.
La figure a été construite pour faire apparaître les notions de diagonale et de perpendiculaire : en effet, le tracé des côtés des triangles à restaurer fait intervenir quatre segments intermédiaires dont une diagonale et une perpendiculaire à un côté passant par le point d'intersection des diagonales, mais aucun milieu. Les deux triangles à restaurer ont un sommet commun qui est le point d'intersection des diagonales du quadrilatère dans lequel ils sont inscrits, ils ont chacun un côté, dans le prolongement l'un de l'autre, reliant ce sommet commun à un sommet placé sur un côté du quadrilatère ; le segment ainsi formé, dont il faut repérer la perpendicularité à un côté du quadrilatère, est entièrement visible. Deux autres côtés sont alignés sur la même diagonale du quadrilatère.

La restauration par les élèves

Cinq élèves réalisent une restauration fausse :

- l'un d'eux produit un dessin ressemblant, c'est-à-dire sur lequel les deux triangles ont un sommet commun et deux couples de côtés de même support, mais il place un des sommets d'un triangle en A ;
- trois autres élèves respectent aussi l'alignement des côtés, mais avec une très mauvaise reproduction de l'angle commun ;
- sur le dessin du dernier élève, les points O, E et F ne sont pas alignés.

Les 20 autres élèves (80 %) placent correctement le point O par intersection des deux diagonales [AC] et [BD] du quadrilatère ABCD et placent correctement les deux triangles dans le quadrilatère donné. Cependant, parmi eux, trois ne restaurent pas correctement les deux triangles.

Six élèves ont utilisé l'orthogonalité des droites (CD) et (EF) pour achever correctement la restauration. Parmi eux, cinq élèves placent des symboles d'angles droits en des points autres que E ; ils se fient donc encore à leur perception visuelle sans vérifier avec l'équerre. On voit donc que la perception et la vérification de l'orthogonalité sont encore loin d'être acquises.
Dix-sept élèves ont utilisé des mesures ou des reports de longueurs pour déterminer le point E ou/et le point F. Parmi eux, deux ne restaureront pas correctement les triangles.
Nous avons dit que les savoirs utilisés dans les séances précédentes n'ont pas été institutionnalisés. Il semble que certains élèves aient surtout retenu qu'il fallait tracer des segments supplémentaires sur la figure modèle avant de reproduire. Ainsi, six élèves tracent des segments inutiles sur le dessin à analyser. Parmi eux, quatre élèves tracent même deux segments inutiles sur leur dessin à analyser ; ces quatre élèves reproduisent ces segments inutiles sur leur production.
On peut interpréter ce fait en disant que ces élèves oublient une partie de la consigne ou alors se redéfinissent la tâche à accomplir : ils ne restaurent pas la figure seulement, ils reproduisent à l'identique leur dessin analysé, qui est devenu leur nouvel objet d'étude. Ils ne contrôlent plus leurs actions par rapport à la question du problème, mais cherchent à « attraper » de nouveaux segments (tout comme dans des problèmes d'arithmétique, ils cherchent à attraper des nombres). Aussi, le dessin étant terminé, ils tracent encore des segments.

Continuité et ruptures du contrat didactique

On voit apparaître très nettement dans cette dernière classe les effets d'une rupture du contrat didactique et de la recherche d'un nouveau contrat sans que les savoirs mathématiques en jeu aient été suffisamment explicités. Les élèves avaient déjà pratiqué beaucoup de reproductions de figures et manipulaient correctement les instruments classiques. Dans la pratique habituelle de la classe, les figures à reproduire étaient complexes, mais s'appuyaient sur la reconnaissance des figures usuelles et restaient, la plupart du temps, compatibles avec une vision de ces figures comme surfaces juxtaposées ou incluses l'une dans l'autre. La reproduction de ces figures complexes demandait de repérer les éléments caractéristiques des figures simples du programme et de déterminer un ordre de construction, mais elle ne demandait pas de construire des lignes qu'il faudrait effacer ensuite. La nécessité pour reproduire la figure de repérer des lignes non tracées sur la figure à reproduire mais indispensables à la reproduction amène une rupture du contrat didactique. Les élèves cherchent de nouveaux repères, en particulier ils retiennent qu'il faut tracer de nouveaux segments sur le modèle, mais sans toujours faire le lien avec les propriétés géométriques mises en œuvre pour la construction. L'intervention du maître est nécessaire pour aider les élèves à expliciter ce lien en phase collective. Une certaine pratique de ce type de problème de reproduction est indispensable pour que les élèves remettent en question leurs habitudes. Sans l'explicitation collective des tracés et propriétés qui ont servi pour la reproduction, le risque serait que les élèves créent de nouvelles habitudes sans mettre en œuvre les propriétés visées et sans changer leur regard sur la figure. De plus, une certaine variété dans le choix des propriétés à mettre en œuvre évite que les élèves ne se focalisent sur les seuls alignements. Bien sûr, comme toujours à l'école primaire, les propriétés contrôlables aux instruments sont supposées vérifiées et donc à reproduire. Le contrôle se fait par un calque, donc dans l'espace sensible, avec une certaine tolérance. Les propriétés géométriques utilisées sont des moyens de reproduire un dessin superposable au modèle. Sur ce point, il y a conformité avec le contrat didactique usuel en géométrie en primaire. Une nouvelle rupture interviendra au collège quand on ne devra utiliser que ce que l'on sait pour démontrer.

Quelle institutionnalisation ?

La question de l'institutionnalisation que l'on peut effectuer dans ce type de situation est délicate. D'une part, au moins dans les premières séances, des mises au point collectives sont nécessaires pour aider les élèves qui ne démarrent pas du tout et aussi pour formuler assez vite qu'un point est obtenu par l'intersection de deux lignes. Ceci ne peut se faire que quand les élèves ont déjà commencé à travailler (cette remarque n'aurait pas de sens avant) mais assez tôt pour que les élèves portent un regard géométrique sur la figure : les segments ajoutés le sont parce qu'ils permettent d'obtenir des points intéressants. On a vu que, faute de clarifier ce point, certains élèves de la dernière classe retiennent seulement qu'il faut ajouter des segments sur le modèle sans les relier à une fonction dans la reproduction de la figure.

D'autre part les enseignants ne voient pas facilement les savoirs à retenir de ces séances et à formuler avec les élèves parce que ces savoirs restent généralement implicites, dans les programmes comme dans les manuels.
Cependant, au cours de chacune des séances, dans les phases collectives, il est possible de faire apparaître, *de façon contextualisée à la figure traitée*[12], les savoirs mis en jeu dans ces problèmes, que l'on peut résumer de façon non exhaustive :

- un point est défini par l'intersection de deux droites ;
- par un point donné, il passe autant de droites que l'on veut ;
- par deux points distincts, il passe une droite et une seule ;
- trois points alignés sont trois points qui appartiennent à une même droite ;
- des points alignés sont des points qui appartiennent à une même droite ;
- on peut toujours prolonger un segment ;
- un segment a pour support une droite ;
- un triangle est défini par la donnée de ses trois sommets, c'est-à-dire par trois points non alignés ;
- un quadrilatère est défini par la donnée de ses quatre sommets ;
- quand on a un quadrilatère, on a quatre droites apparentes : les supports des côtés plus deux autres qu'on peut tracer : les supports des diagonales.

Une partie de ces savoirs, à déterminer dans chaque cas, peut être décontextualisée et écrite sur le cahier. Rappelons que ces savoirs, pour élémentaires qu'ils paraissent, font souvent défaut aux élèves de collège dans le traitement des problèmes de géométrie.

Retour sur les conditions des situations et le choix des variables

Des conditions fixées et, à l'intérieur de ces conditions, des variables didactiques

Passage de figure à figure sans mesure

Tous les problèmes de reproduction de figures analysés dans cet article vérifient des conditions communes.

- Un modèle est fourni, toujours disponible et sur lequel on peut écrire. La figure à obtenir, qu'elle soit de même taille que le modèle ou de taille différente, est disponible

[12] Par exemple ici, on pourrait dire : les triangles ont un sommet commun. On peut le trouver parce que c'est l'intersection des diagonales du quadrilatère. Il faut aussi trouver les sommets des triangles qui sont sur les côtés du quadrilatère. Il faut donc trouver une autre ligne qu'on peut tracer à partir de ce qu'on a…

sur transparent pour que les élèves puissent vérifier leurs productions quand ils pensent avoir fini. Nous sommes donc dans le cadre du passage d'une figure à une figure, ce qui ne nécessite pas de formulation dans la langue naturelle, même si les mises en commun et l'institutionnalisation des notions vont, elles, nécessiter la mise en œuvre d'un langage géométrique et amener à le préciser.
- De plus, aucune mesure n'est donnée, mais des éléments graphiques de la figure à obtenir sont fournis ; il s'agit de ce que nous appelons *restauration de figures*.
- Nous avons vu également que la restauration des figures choisies demande l'identification de lignes qui permettent la construction des points nécessaires à la reproduction, ce que nous avons appelé la trame de la figure.

Moyen de validation, qualité des figures et appréciation des erreurs de tracé

La validation de la reproduction est faite par l'élève lui-même grâce à un calque préparé par l'enseignant. Le but à atteindre est ainsi clairement fixé, particulièrement dans le cas d'une reproduction à une taille différente du modèle. Il faut souligner que la qualité matérielle des figures proposées, aussi bien pour le modèle que pour la partie fournie, est importante. L'idéal est de produire la figure avec un logiciel de géométrie pour que les propriétés qu'on veut faire utiliser par les élèves soient présentes visuellement. Il faut aussi veiller à ce que n'apparaissent visuellement que ces propriétés là. De plus, toute déformation provoquée par la photocopie des supports peut gêner la mise en œuvre des connaissances visées ou rendre problématique une validation par superposition.
De même dans la validation des figures par les élèves, il faut pouvoir distinguer les maladresses de tracé des erreurs de méthode. On peut éventuellement prévoir plusieurs transparents avec des épaisseurs différentes du trait. De toute façon, ce point est à aborder à un moment ou un autre dans une phase collective. Il est important car, comme nous l'avons déjà indiqué, il s'agit d'une validation dans l'espace sensible, conformément aux attentes de l'école primaire, mais aussi d'une validation de propriétés graphiques qui traduisent le respect de propriétés géométriques à travers l'usage des instruments.

Variables didactiques

Au-delà de ce cadre qui reste fixe, nous avons pu voir dans les exemples précédents quelques choix différents des variables didactiques. Nous reprenons maintenant ces variables qui gouvernent les connaissances nécessaires à la réussite de la reproduction et le choix qu'on peut en faire en fonction des apprentissages visés.

La figure choisie peut être plongée dans un réseau de droites que nous avons appelé la trame. Les variables didactiques identifiées sont les suivantes :
- les propriétés géométriques de la trame ;
- les propriétés géométriques de la figure et leurs relations avec la trame ;
- les éléments fournis de la figure à reproduire[13] ;
- les instruments disponibles ;
- la règle du jeu de la reproduction.

[13] Dans les exemples proposés, on a toujours fourni un élément graphique de dimension 2 ; c'est ce que nous appelons restauration. Cependant les réflexions qui suivent peuvent aussi concerner des reproductions de figures à partir de la donnée d'un segment ou sans donnée d'élément graphique s'il s'agit d'une reproduction à l'identique.

Choix de la trame, de la figure et de la sous-figure à reprendre ICI un PEU

Nous traitons ensemble ces variables qui sont très liées : les liens entre propriétés de la trame et propriétés de la figure sont essentiels pour le choix de la figure. Il faut y ajouter le choix de la sous-figure dans le cas d'une sous-figure de dimension 2 parce que les relations entre figure et sous-figure vont amener à mobiliser une plus ou moins grande partie de la trame et à sortir ou non du contour de la figure à reproduire, ce qui est une variable essentielle.

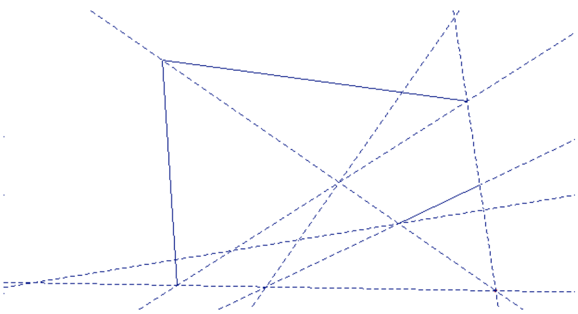


Figure 20

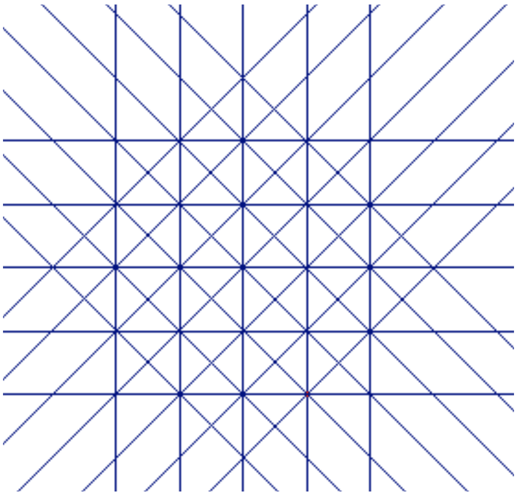


Figure 21

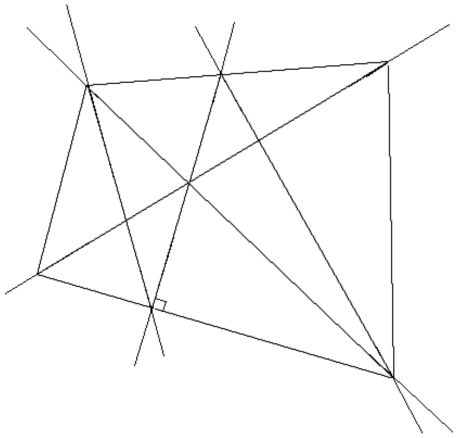


Figure 22

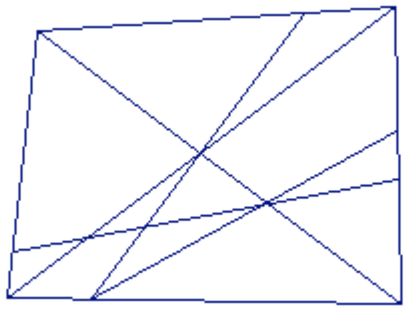


Figure 23

Les deux premiers exemples présentés possèdent des trames très différentes. La première est un réseau de droites quelconques[14] (figure 20) ; la deuxième un double quadrillage à mailles carrées (figure 21) qui est donc invariant par beaucoup de transformations géométriques. Quant à la troisième (figure 22), c'est essentiellement un réseau de droites quelconques : certaines d'entre elles sont perpendiculaires, mais le réseau n'a pas de régularité.

Si l'on reprend la figure 1, on relève qu'elle a un contour fermé (ici un quadrilatère convexe). Le prolongement des segments de la figure à l'intérieur de son contour fermé donne une figure (figure 23) telle qu'un sommet (ou point d'intersection) est toujours aligné avec au moins deux couples de sommets non alignés de la figure. Plusieurs parties ou sous figures sont aussi mises en évidence. Il est alors possible d'isoler l'une des parties de cette figure en effaçant les autres. Le choix de la partie (ou surface) à retenir a des

[14] Certaines droites n'ont pas été tracées pour plus de lisibilité et un repérage plus aisé de la figure de départ.

implications sur les stratégies des tracés et sur l’analyse à mener sur la figure, comme montré plus haut.
Une telle figure peut être perçue comme inscrite dans un réseau de droites, contenant celui obtenu à partir de l’ensemble des prolongements des segments de la figure cible. Suivant la sous-figure choisie, il faudra faire appel à une partie plus ou moins étendue du réseau. A l’inverse, un tel réseau de droites permet l’extraction de diverses figures et parties. La richesse du réseau en termes de nombres de droites fait que plus ou moins de reports seront nécessaires. Une nouvelle variante de la figure 1 et de la sous-figure 2 est obtenue avec le cas de la figure 24 et de l’une de ses parties, la figure 25, tirée du réseau de la figure 26. L'alignement du 4$^{\text{ème}}$ sommet (marqué 3 sur la figure 27) du contour fermé de la figure 24 avec les 2 points extérieurs à ce contour marqués 1 fait qu'on peut, cette fois, obtenir ce 4$^{\text{ème}}$ sommet sans recourir au report de longueur (cf. figure 27).

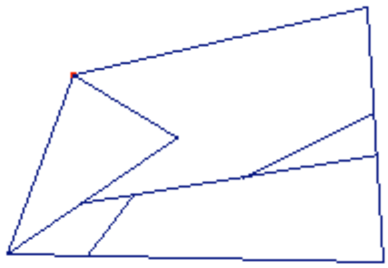


Figure 24

Figure 25

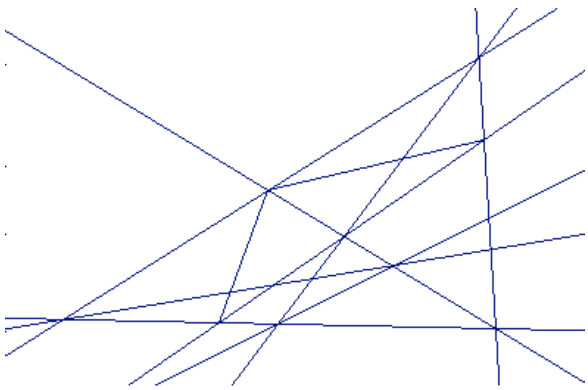


Figure 26

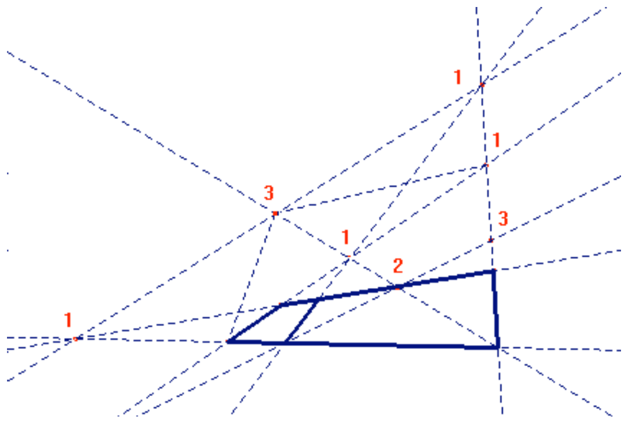


Figure 27

Le choix d’une figure et d'une sous-figure par effacement de lignes ou de parties équivaut donc à celui d’un réseau de droites, qui correspond, lui, à un enrichissement de la figure de départ. Ce réseau comprend les droites nécessaires à la construction de la succession (dans l'ordre de leur construction) des points qui permettent de passer de la sous-figure à la figure. Les choix sont faits en fonction de l’analyse des figures que l’on souhaite développer avec les élèves, des connaissances dont ils disposent, de celles qu'on souhaite développer en tenant compte de l'accessibilité des points qu'il faut construire pour passer de la sous-figure à la figure.

Dans le cas d'un réseau qui n'a pas d'angle droit ni de symétrie, il est nécessaire de fournir des éléments de dimension 2 (donc deux directions) de la figure à reproduire si l'on ne veut pas mettre en jeu de report d'angle. Si on ne fournissait qu'un élément de dimension 1, le report d'angle serait nécessaire par gabarit d'angle ou par triangulation.
Dans le cas d'un réseau qui possède des angles droits et des symétries, comme celui de la figure 21, l'identification de la trame devient plus évidente, même si la reproduction de la

figure ne nécessite pas de la reconstruire en entier. En effet, les propriétés portées par le réseau sont à reconnaître pour identifier le réseau et le reconstruire sur la figure de départ, mais il peut ne pas être nécessaire de les mettre en œuvre pour reproduire la figure. Ainsi dans les exemples traités, la donnée du grand carré comme point de départ dispense de tracer des angles droits : il suffit de prendre des milieux ou de tracer des diagonales pour obtenir des angles droits. Cependant, il y a d'autres éléments de dimension 2 dont la donnée ne le permettrait pas. On pourrait aussi donner comme point de départ le grand côté du carré pour fixer la taille de la figure à reproduire ; il faudrait alors utiliser l'équerre pour construire deux angles droits permettant de reconstituer le grand carré. On pourrait aussi ne fournir aucun élément de départ si on ne fixe pas la taille, mais, dans ce cas, la vérification des productions sur un transparent devient impossible.
Le cas du troisième réseau (figure 22) est plus complexe puisqu'il présente certaines propriétés (orthogonalité de certaines droites), nécessaires à prendre en compte pour la reproduction, mais sans présenter les symétries et les régularités qui permettent de les repérer facilement. La recherche de l'orthogonalité par les élèves ne peut que répondre à une consigne explicite ou être induite par le contrat didactique (par exemple par la donnée des instruments).

Dans tous les cas, la donnée de plus ou moins d'éléments du réseau visibles sur la figure à reproduire constitue une des variables importantes sur laquelle des choix peuvent être faits pour anticiper sur un niveau de difficulté chez des élèves et opérer une différenciation.

Choix des instruments

Le choix des instruments est bien sûr une des variables importantes. L'indication des instruments disponibles restreint les méthodes à la disposition des élèves, mais en même temps, leur donne une indication sur les procédures attendues. On peut jouer sur les instruments disponibles, en laissant la règle graduée à disposition dans un premier temps puis en la supprimant, quitte à la remplacer par une bande de papier comme dans la première classe. Suivant les cas, on peut restreindre les instruments à ceux qui sont indispensables ou laisser plus de possibilités, ouvrant ainsi l'éventail des procédures attendues. Sans contraindre les instruments, on peut favoriser l'usage de ceux qui mènent aux procédures qu'on veut développer par un jeu de malus. Par exemple, dans le premier choix de figure, on pourrait dire qu'on dispose d'un capital de 100 points, que chaque utilisation de la règle graduée coûte 10 points, chaque utilisation de la bande de papier coûte 5 points, chaque utilisation de la règle non graduée coûte un point. Le but est de reproduire la figure correctement en gardant le meilleur capital. Le choix du barème se fait bien sûr en liaison avec les autres choix en fonction des objectifs visés.

Choix des conditions de reproduction

Il s'agit ici principalement de savoir si la figure reproduite aura ou non la même taille que le modèle. Cette variable est, elle aussi, liée aux autres. Le choix de demander une reproduction à une taille différente ne peut se faire que si aucun report de longueur n'est nécessaire pour la reproduction. Dans ce cas, on travaille uniquement sur les propriétés géométriques des figures et éventuellement des rapports de longueurs (par exemple milieu), comme c'est le cas dans la deuxième classe. La validation par transparent est possible si on a fixé la taille de la figure à obtenir, différente de celle du modèle, par la donnée d'une de ses parties, surface ou segment. Bien sûr c'est aussi un moyen de déboucher sur la proportionnalité et de travailler le lien entre respect de la forme et proportionnalité des longueurs. Mais c'est une nouvelle histoire qui nécessiterait d'autres choix des variables et un autre article.

Conclusion

Les notions de *modèle* et de *modélisation* sont souvent sous-jacentes aux activités développées en géométrie pour traiter de questions liées aux objets du monde sensible. Mais la rupture au niveau du regard que l'on porte sur ces objets suivant la nature des activités ou suivant les connaissances dont on dispose semble être beaucoup moins prise en compte dans les apprentissages à l'école. L'est-elle mieux au collège ?

En géométrie, passer d'une vision de la figure comme déterminée par ses côtés ou bords de parties à une vision de cette même figure comme déterminée par des lignes droites et des points, nécessite chez l'élève un remaniement des connaissances qui ne va pas de soi. Cette mobilité des regards à propos d'une même figure, nécessaire pour entrer dans une démarche géométrique et résoudre des problèmes de géométrie dans le modèle au collège et au lycée, est à initier et à développer. Elle n'est pas donnée, elle est à construire.

Nous avons proposé une démarche pouvant contribuer à la conception de situations de résolution de problèmes en géométrie adaptées au cycle 3 de l'école pour initier chez les élèves une démarche d'analyse des figures qui conduit à développer la mobilité du regard à propos d'une même figure.

Nous avons montré comment, en effaçant des sous figures ou parties (surfaces) d'une figure complexe, il est possible de concevoir des activités pour rendre problématique pour un élève de cycle 3 une analyse basée sur ce que l'on voit pour amorcer celle basée sur ce que l'on voit et ce que l'on sait. Par exemple, tracer un trait (ou bord de surface) à partir d'un point connu et d'une estimation à l'œil de sa direction (celle de la droite qui le porte) ou d'une longueur de ce trait ne suffit plus. Une reconsidération des moyens qui permettent d'obtenir un tel trait en situation de résolution de problèmes est devenue nécessaire : par exemple rechercher des alignements de points, rechercher des lignes droites.

Nous avons aussi montré comment, dans cette démarche, faire un choix de variables et décliner plusieurs possibilités à partir d'une même figure de base assez complexe pour anticiper sur des niveaux de difficulté chez l'élève au cycle 3 et des connaissances à mettre en oeuvre. Les modifications apportées à l'utilisation des outils de géométrie et aux propriétés d'une figure révèlent une grande marge d'action pour le professeur pour modifier le contexte de travail sur une figure. Par exemple l'introduction progressive d'une nouvelle contrainte en supprimant la règle graduée, puis en réduisant au maximum le recours au report de longueur au moyen d'une bande de papier permet de forcer la recherche de lignes droites et de points, et de ce fait d'orienter vers une nouvelle analyse de la figure.

Cette démarche, avec les variantes qu'elle permet d'élaborer, nous donne à penser qu'elle peut être exploitée avec des élèves pour les initier à porter un regard géométrique (et même de plusieurs points de vue) dès l'école tout en travaillant aussi sur des contenus notionnels et ce d'autant plus que les élèves s'impliquent volontiers dans ce qu'ils réalisent (il faut parfois insister pour les voir s'arrêter). Cependant, les observations réalisées nous montrent aussi des dérives possibles et posent la question de la formation des maîtres en géométrie pour qu'ils puissent mettre en œuvre cette démarche de façon efficace pour la formation des élèves. C'est dans cette direction que nous poursuivons nos recherches.

Références bibliographiques

BERTHELOT R. & SALIN M.H (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I.

BERTHELOT R. ET SALIN M.-H. (2000-2001), L'enseignement de la géométrie au début du collège. *Petit x*, n° 56, 5-34.

BOULEAU N. (2000-2001), Reproduction et géométrie en cycle 1 et 2. *Grand N*, n°67, 15-32.

CELI V. (2002) *Comparaison de l'enseignement de la géométrie en France et en Italie pour des élèves de 11 à 16 ans. Effets sur leur formation*. Thèse, université Paris 7.

DEMONGEOT M.C. ET GANDIT M. (2003) Faire la figure, coder, écrire les hypothèses, démontrer que… *Petit x* n° 63, 30-50.

DUCEL Y. ET PELTIER M.L. (1986) *Géométrie : une approche par le dessin géométrique,* IREM de Rouen.

DUVAL R. (1994) Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères-IREM*, 17, 121-138.

DUVAL R. ET GODIN M. (2005), Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N* n°76.

DUVAL R., GODIN M., PERRIN-GLORIAN M.J. (2005) Reproduction de figures à l'école élémentaire in Castela C. & Houdement C. (eds) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques. Année 2004*, ADIREM et IREM de Paris 7, p. 5-89.

GOBERT S. (2001) *Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible, dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.

GRENIER D. (1988) *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale en sixième*. Thèse de doctorat, université Joseph Fourier, Grenoble.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (2000) Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 20/1, 89 - 116.

LABORDE C. & CAPPONI B. (1994) Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géometrique. *Recherches en didactique des mathématiques,* 14(1.2), 165-210.

PARZYSZ B. (1989) *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir/savoir*. Thèse, Université Paris 7.

PARZYSZ B. (2001) Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1. *Actes du colloque COPIRELEM de Tours*.

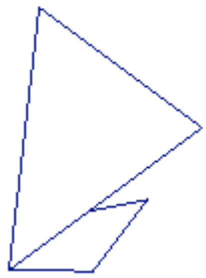
PERRIN-GLORIAN M.J. (2003) Studying geometric figures at primary school. From surfaces to points. In *Proceedings of CERME3*, Bellaria (Italy) 27 Feb - 2 Mar 2003, publication en ligne. http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings

VERNEY-MASSELIN B. (1999-2000) Reproduction de figures au cycle 3, *Grand N* n°65, 15-34.

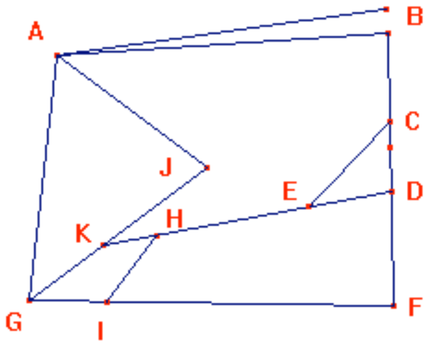
Annexe 1[15]

Exemple de trois réalisations successives chez un même élève de 2ème année du cycle 3 à partir d'une partie de la figure et à l'issue d'une séance

La figure à reproduire est la figure 1 présentée au paragraphe II.1, la partie fournie est reproduite ci-contre.
Les codages de points utilisés ont été choisis par l'élève et ne correspondent pas à ceux que nous avons faits antérieurement.

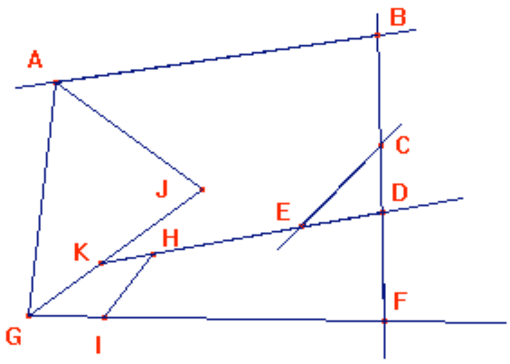


Annexe 1 : Premier essai



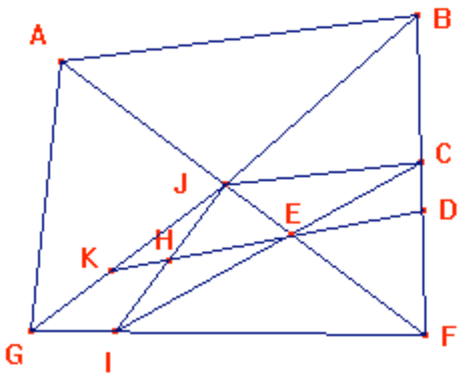
Un tracé qui résulte de la première tentative pour obtenir le côté [AB] à partir du sommet A de la partie fournie et d'un report de la longueur de ce côté à partir de la figure fournie. Un second tracé donne le point B aligné avec les points G, K et J (report de la longueur JB). Cependant l'alignement des points I, E, C et celui des points A, J, E, F, ne sont pas respectés. Chaque sommet donné ou construit est nommé.

Annexe 1 : Deuxième essai



L'alignement des points G, K, J, B, celui des points I, E, C et celui des points A, J, E, F ne sont pas respectés. Chaque sommet donné ou construit est nommé.

Annexe 1 : Troisième essai



Les alignements
K – H – E – D / A – J – E / B – C – D – F / B – J – K – G / G – I – F / H – I – J / A – G / A – B / C – E – I / J – C
Chaque sommet donné ou construit est nommé. Des alignements de points sont repérés et nommés. Certains tracés sont obtenus avec des alignements de points. Cependant les points G, K, J, B ne sont pas obtenus alignés sur la figure. Le segment [JB] n'est pas dans le prolongement du segment [GJ] : la règle est ajustée sur un point seulement, le point J, mais pas aussi sur le point G ou le point K

[15] Les figures données dans les annexes 1 et 3 sont des reprises sans modification au moyen du logiciel CABRI géomètre des traces produites par l'élève.

Annexe 2

A. Figures fournies à la première séance en CM2

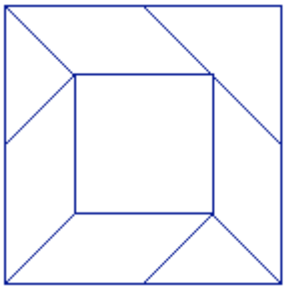


Figure 28 (E)

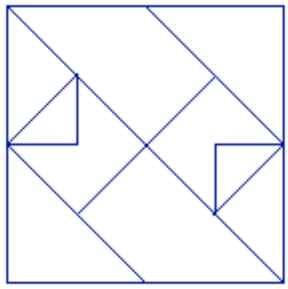


Figure 29 (D)

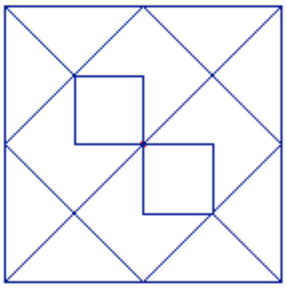


Figure 30 (H)

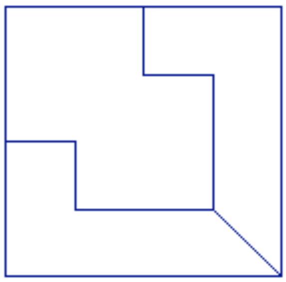


Figure 31 (M)

B. Figures fournies à la troisième séance en CM2

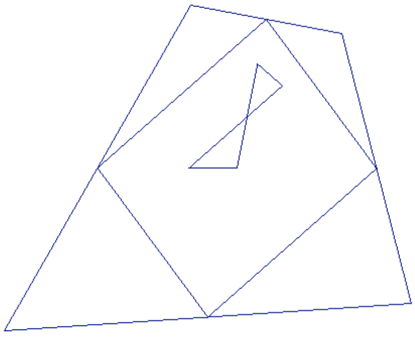


Figure 32 (nœud papillon)

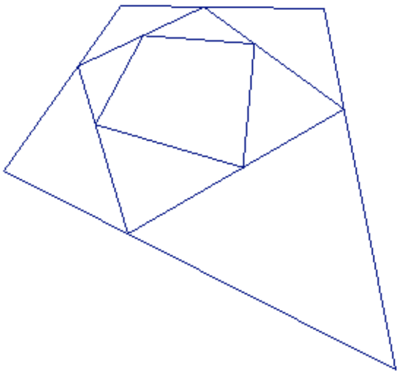
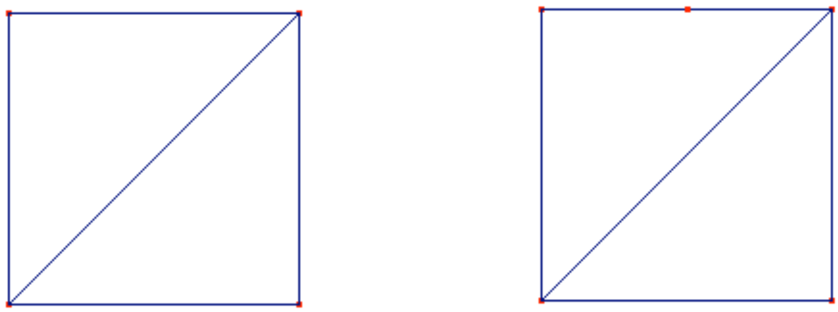


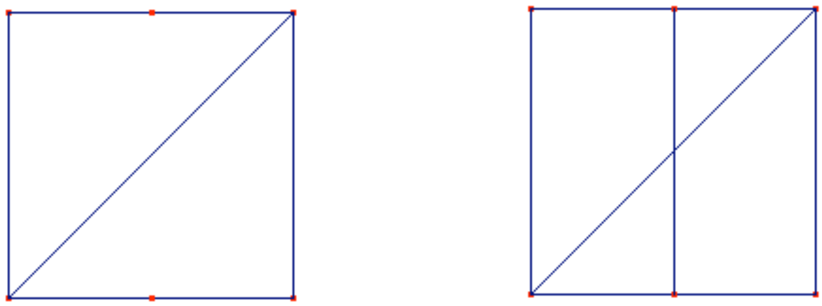
Figure 33 (quadrilatères emboîtés)

Annexe 3

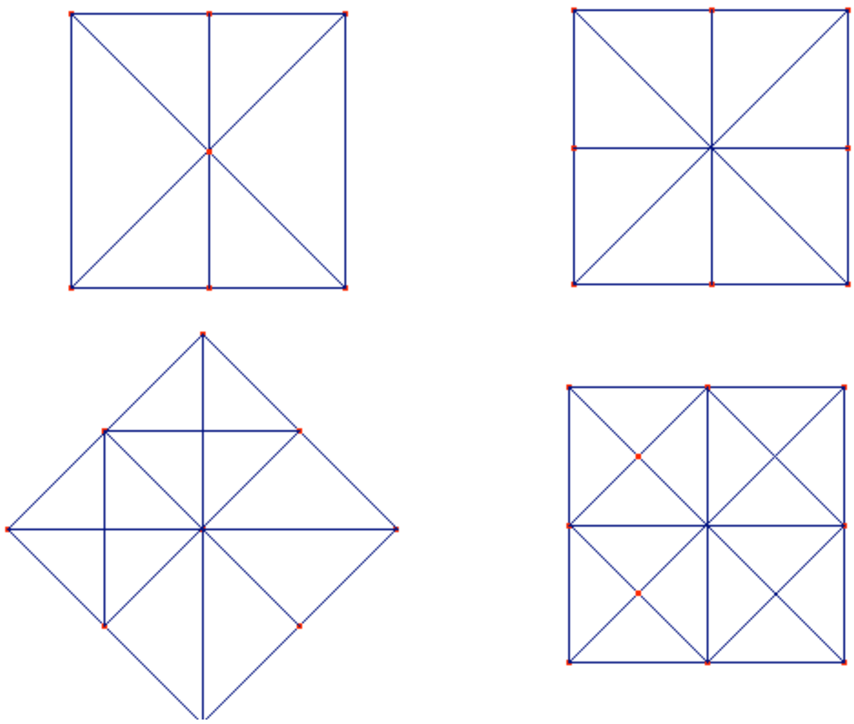
Exemple de quelques étapes réalisées par une même élève de 3ème année du cycle 3 à l'issue d'une séance[16]



Les deux premiers pas : une diagonale puis un milieu repéré à la règle graduée

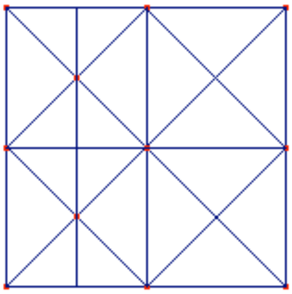


Étapes suivantes



[16] Cette élève travaillait à partir d'un grand carré pour obtenir une figure semblable à la figure 30 de l'annexe 2. Elle avait déjà travaillé avant sur une figure semblable à la figure 29.

Autres étapes encore avec parfois une rotation de la figure pour un tracé à la règle à l'horizontale ou à la verticale et avant dernière étape avant effacement de traits



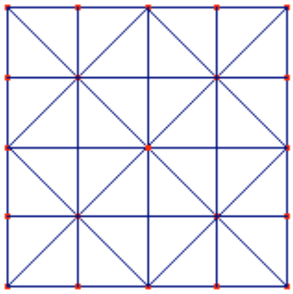


Figure finale obtenue après effacement des traits qui conviennent