L'ANGLE DIÈDRE, NOTION INCONTOURNABLE DANS LES CONSTRUCTIONS PRATIQUE ET THÉORIQUE DES POLYÈDRES RÉGULIERS

Denise GRENIER,
Université Joseph Fourier, Grenoble (UJF)

Denis TANGUAY,
Université du Québec à Montréal (UQAM)

Résumé. Le présent article rend compte de l'étude didactique d'une situation d'exploration des solides de Platon. La situation est basée sur une mise en relation des activités de définition, de construction et de preuve. Elle a été expérimentée avec des étudiants d'université en mathématiques et en enseignement des mathématiques, en France et au Québec. L'analyse des productions des étudiants montre la nécessité pour eux de confronter leurs connaissances pratiques et théoriques pour accéder à la preuve qu'il n'existe que cinq polyèdres réguliers. L'angle dièdre, élément fondamental de la preuve, y apparaît à la fois comme le nœud de cette confrontation et le principal obstacle.

Mots clés. Géométrie de l'espace, polyèdre régulier, angle dièdre, définition, construction, preuve.

Introduction

La plupart des études didactiques sur la géométrie de l'espace (par exemple Janvier, 1994 ; Berthelot et Salin, 1992 ; Parzysz, 1991...) font valoir que le développement du « sens spatial » doit, pour se faire efficacement, passer par une phase de travail (construction, manipulation, observation, description...) avec des *modèles tri-dimensionnels manipulables* des objets géométriques. Or, quand l'élève a à résoudre un problème de géométrie dans l'espace, ces modèles ne sont pas toujours disponibles en pratique. Pour visualiser des angles, imaginer des « tranches », des découpages et des réagencements[1], montrer, résumer, démontrer, conjecturer etc., l'élève doit donc en parallèle développer des *représentations mentales* des objets 3D, mais aussi être capable d'en analyser les *représentations planes* (Janvier, 1994).

Dans l'enseignement, tant en France qu'au Québec, l'étude des objets de l'espace se réduit généralement à :

- la construction, la reconnaissance et la classification de certains solides (prismes, pyramides, cylindres, cônes et sphère) au primaire ;
- une liste des différentes formules de volume et d'aire (avec ou sans justification) des solides précités au secondaire ;

[1] Les habiletés sous-jacentes sont en général requises quand on cherche à justifier les formules de volume : on n'a qu'à penser par exemple au principe de Cavalieri.

- la présentation des cinq polyèdres réguliers[2], exhibés au primaire, accompagnés ou non de la formule d'Euler, et revus au secondaire, éventuellement et sans démonstration, le statut de leur existence y étant énoncé comme théorème du corpus historique mathématique classique.

Les enseignants s'entendent sur le constat suivant : les habiletés et connaissances nécessaires à la conceptualisation de l'espace, elles-mêmes requises pour la compréhension des formules de volumes et d'aire, sont mal installées chez les élèves-étudiants. Dans le présent article, nous décrivons une situation destinée aussi bien à la formation des enseignants qu'aux élèves du secondaire, et susceptible selon nous de mieux asseoir ces habiletés et connaissances. Par ailleurs, nous montrerons que cette situation s'inscrit bien dans le cadre des situations de recherche pour la classe (SiRC, Grenier, 2007 ; Grenier et Payan, 1998), par lesquelles on cherche à mettre en œuvre les savoir-faire transversaux (aux différents domaines des mathématiques) tels qu'expérimenter, conjecturer, définir, modéliser, prouver.

La plupart des propositions didactiques[3] de construction des polyèdres de Platon s'appuient sur une définition déjà institutionnalisée de la régularité, et sur des manipulations avec du matériel où les faces sont déjà construites (*Polydron*, polygone en carton et élastiques, développement plans de polyèdres, etc.). Les questions relatives aux éléments conceptuels n'y sont pas à la charge des élèves. Cependant, la situation étudiée par Dias et Durand-Guerrier (2005) est proche de la situation décrite ici. La nôtre s'en différencie sur les points suivants.

- La définition de la régularité est à construire par les étudiants parce que pour nous, la question de l'égalité des degrés en chaque sommet fait partie de la conceptualisation et permet de mettre en relation la régularité avec l'angle dièdre et la convexité. De plus, pour privilégier une entrée théorique, nous ne donnons pas de matériel dans la phase de définition.
- Dans la phase de construction, les étudiants ne disposent pas de faces polygonales pré-construites, ceci dans le but de faire émerger la question de l'angle dièdre : un matériel comme *Polydron* est selon nous trop « efficace » parce qu'il fait apparaître trop rapidement les contraintes entre angle dièdre et nombre de faces en chaque sommet.
- Dans la phase de preuve, nous cherchons à aller au-delà de la preuve géométrique — on raisonne sur la somme des angles aux sommets pour affirmer qu'il n'y a au maximum que cinq polyèdres et on en a justement cinq —, en aiguillant les étudiants vers une preuve combinatoire, à partir des graphes planaires induits.

1. Description et analyse mathématique de la situation

1.1. Énoncé du problème

Le problème se présente en trois questions.
Question 1. Caractériser et définir les polyèdres réguliers.
Question 2. Les réaliser matériellement.
Question 3. Prouver que la liste établie précédemment est valide et complète.

[2] ... connus sous l'appellation de « Solides de Platon ».
[3] Par exemple, le texte du n°466 de l'APMEP, « Des pavages aux polyèdres de Platon », pp. 631-644 ; ou encore la page 83 du manuel Maths 2[e], Collection Abscisse, Éditions Magnard (2004).

1.2. Analyse du problème

Toute définition relève d'un choix. Selon la définition la plus standard, un *polyèdre régulier* est un solide[4] convexe de l'espace, délimité par des faces toutes congrues au même polygone régulier, et ayant en chaque sommet le même nombre de faces adjacentes[5] (ou ce qui revient au même, le même nombre d'arêtes adjacentes). Cette dernière propriété peut être remplacée par l'une ou l'autre des trois propriétés b), c) et d) ci-dessous. En effet, pour un polyèdre convexe dont les faces sont congrues à un même polygone régulier, les quatre énoncés ci-dessous sont équivalents :

a) Les sommets sont de même degré.
b) Les angles dièdres sont tous congrus.
c) Le polyèdre est inscriptible dans une sphère.
d) Le groupe des symétries directes du polyèdre agit transitivement sur ses sommets.

1.2.1. Quelques définitions

Pour mieux fixer les idées, précisons un peu plus les termes employés. Un *polyèdre* est un solide de l'espace délimité par un nombre fini de polygones plans. Ces polygones à la frontière sont les *faces*, les côtés de ces faces sont les *arêtes* et les extrémités des arêtes sont les *sommets* du polyèdre. Nous demandons de plus que dans un polyèdre, deux faces d'intersection non vide aient en commun soit exactement un sommet, soit exactement une arête (et les deux sommets à ses extrémités). Dans ce dernier cas, les deux faces seront dites *adjacentes.*

Deux faces adjacentes forment un *angle dièdre*, qui est l'angle dont le sommet est sur l'arête commune et dont les côtés, perpendiculaires à cette arête, portent chacun un segment inclus respectivement dans chacune des faces (voir Figure 1). Nous appellerons *angle digone*[6] un angle formé par deux arêtes adjacentes d'une même face. Un polyèdre inscriptible dans une sphère est bien sûr un polyèdre qui a tous ses sommets sur cette sphère. Le *groupe des symétries* du polyèdre est constitué des isométries de l'espace qui laissent le polyèdre globalement fixe (qui appliquent le polyèdre sur lui-même). Les symétries *directes* sont celles qui préservent l'orientation, et elles forment un sous-groupe (d'indice 2) du groupe des symétries du polyèdre. Pour les polyèdres réguliers, ce sous-groupe n'inclut en fait que des rotations. Ce sous-groupe *agit transitivement* sur les sommets si pour toute paire de sommets, il existe un élément du sous-groupe dont l'action applique le premier sommet sur le deuxième.

[4] Certains auteurs définissent le polyèdre comme la frontière du solide et non le solide lui-même. Nous retenons l'autre alternative simplement parce qu'elle permet en général d'alléger la rédaction.
[5] On appelle *degré d'un sommet* le nombre de faces (ou d'arêtes) adjacentes en ce sommet.
[6] Ce terme n'est pas standard.

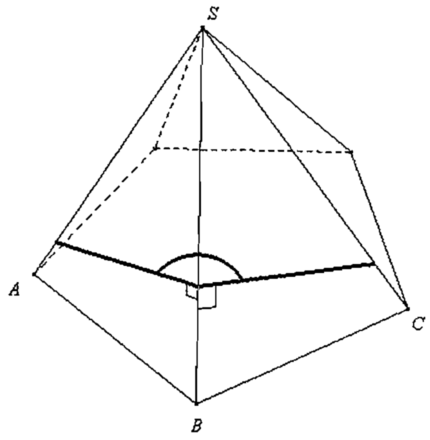


Figure 1 : L'angle dièdre entre les faces SAB et SBC

1.2.2. Quelques éléments mathématiques

Le premier résultat facilement accessible est celui des types de faces possibles, en lien avec le degré d'un sommet. Pour des raisons relativement évidentes, dans un polyèdre convexe, la somme des angles digones groupés autour d'un même sommet doit être strictement inférieure à 2π. Si les faces sont un même polygone régulier, on en déduit que les seules configurations possibles consistent à grouper 3, 4 ou 5 triangles équilatéraux, 3 carrés ou 3 pentagones autour d'un sommet. Mais même ceci établi, l'équivalence entre les propriétés a), b) c) et d) énoncées ci-dessus, pour un polyèdre convexe dont les faces sont un même polygone régulier, n'est pas facile à démontrer. Hartshorne (2000, ch. 8), par exemple, donne une construction théorique pour chacun des cinq solides de Platon (chacune des « configurations aux sommets » sus-mentionnées donne lieu à l'un des solides) et montre qu'ils vérifient les quatre propriétés. Il montre ensuite qu'un polyèdre convexe dont les faces sont un même polygone régulier et qui de plus vérifie a), est forcément semblable à l'un des solides construits.

Pour les solides dont les sommets sont de degré 3, la preuve reste relativement élémentaire : la configuration « trois polygones groupés autour d'un même sommet » est suffisamment contraignante pour que les trois angles digones déterminent uniquement les trois angles dièdres (Hartshorne, 2000, lemme 44.5). Ainsi, trois triangles équilatéraux, trois carrés et trois pentagones groupés autour d'un même sommet déterminent respectivement les angles dièdres du tétraèdre, du cube et du dodécaèdre. Étant donné un polyèdre convexe dont les faces sont un même polygone régulier et dont les sommets sont de degré 3, on applique un sommet et les trois faces qui y sont adjacentes sur un sommet et trois faces adjacentes du tétraèdre, du cube ou du dodécaèdre selon le cas. On étend ensuite la similitude aux configurations autour des sommets qui sont à l'autre extrémité des arêtes déjà « placées », puis à tout le solide, gagnant les autres sommets de proche en proche.

Mais pour les sommets de degré 4 ou 5, cette contrainte ne vaut plus, comme on s'en convaincra aisément en collant quatre ou cinq triangles équilatéraux de carton autour d'un même sommet : **on peut faire varier les angles dièdres sans changer ni la longueur des côtés, ni la mesure des angles digones**. L'argument précédent ne s'applique plus. Hartshorne (2000, théorème 44.4) montre qu'un polyèdre convexe où sont groupés, en chaque sommet, quatre (respectivement cinq) triangles équilatéraux, est forcément semblable à l'octaèdre (respectivement à l'icosaèdre), en faisant appel à des résultats techniques relativement ardus, notamment au *Théorème de rigidité de Cauchy* (op. cit., théorème 45.5), que nous renonçons à énoncer ici. Pour ne pas laisser le lecteur en reste, nous démontrons en annexe qu'un polyèdre convexe inscriptible dans une sphère et dont les faces sont un même polygone régulier, a ses sommets de même degré et ses angles dièdres congrus. Nous prouvons donc que la propriété c) implique les propriétés a) et b). Notre démarche donnera en outre une formule de calcul de la mesure des angles dièdres.

1.4. Connaissances en jeu

Dans cette situation, on considère que la définition de polyèdre est acquise (ou redonnée au besoin). C'est donc sur la régularité que porte la Question 1.

1.4.1. Définitions

La caractéristique de régularité qui semble la plus naturelle est que toutes les faces sont identiques. La question qui vient ensuite est celle du type de faces admissible, ce qui renvoie à la notion de régularité pour les polygones. Il y a alors essentiellement trois critères à considérer : la congruence des côtés, la congruence des angles et la convexité. Les critères combinés de congruence des côtés et de convexité ne sont pas suffisants parce qu'on considère, par exemple, qu'un losange non carré n'est pas régulier. Par ailleurs, les deux premiers critères suffisent. Le fait que ces deux premiers critères impliquent la convexité (parce qu'alors, il ne peut pas y avoir d'angle rentrant) n'est généralement même pas mentionné dans l'enseignement.

On peut s'attendre à ce que les élèves considèrent que le critère « un même polygone régulier pour les faces » suffit. Une des raisons possibles en est que les polyèdres non convexes ou les polyèdres dont les sommets ne sont pas tous de même degré ne sont pas étudiés en tant qu'objets institutionnels au primaire et au secondaire. Or, on peut facilement construire des polyèdres convexes dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux et dont les sommets ne sont pas tous de même degré : on colle deux pyramides à base pentagonale le long de leur base, ou plus simplement encore, deux tétraèdres. La construction analogue avec deux pyramides à base carrée donne l'octaèdre qui vérifie, lui, tous les critères de régularité. Une autre famille de contre-exemples s'obtient à partir de chacun des solides de Platon en collant une pyramide sur chaque face. On peut ainsi construire des polyèdres étoilés non convexes dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux congrus. Dans le cas où l'on colle des pyramides à base pentagonale sur les faces du dodécaèdre, les faces triangulaires sont coplanaires cinq à cinq et forment des pentagrammes[7]. Il est étonnant que malgré cette abondance de polyèdres « quasi réguliers », pour certains auteurs de manuels, la convexité ou l'égalité des degrés vont de soi et restent implicites dès qu'on parle de régularité.

[7] Le solide ainsi obtenu, généralement désigné par « petit dodécaèdre étoilé », est un des quatre polyèdres dits « de Képler-Poinsot ». Si l'on ajuste les définitions pour que ses faces soient les pentagrammes et non les triangles équilatéraux, que les arêtes du solide soient les côtés du pentagrammes (de longueur triple de celle des triangles équilatéraux) et que les sommets du solide soient aux extrémités des pointes du pentagramme, alors on peut considérer que ces sommets sont tous de degré cinq. Autrement dit, en admettant des polygones croisés (équilatéraux mais non convexes) comme faces et en ajustant en conséquence la notion d'arête et de sommet, on peut étendre la définition de « polyèdre régulier » pour y inclure les quatre solides de Képler-Poinsot.

De la discussion précédente, il ressort que les critères de convexité et d'égalité pour les degrés des sommets sont tous deux nécessaires si l'on veut exclure les polyèdres de Képler-Poinsot (voir note de bas de page 7). La Question 2 porte donc dans notre esprit sur la construction des cinq solides de Platon, et les polyèdres non convexes en sont exclus.

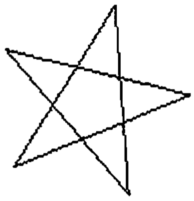


Figure 2a) : Un pentagramme

Figure 2b) : Le petit dodécaèdre étoilé

1.4.2. Constructions

Au primaire, l'entrée la plus usuelle dans la construction de polyèdres se fait par les faces, soit avec des développements plans en carton, à monter, soit avec des polygones de plastique articulables (Polydron ou autres). Dans le premier cas, le type de faces, le nombre de faces et le degré des sommets sont donnés ou contraints, et l'activité de l'élève porte essentiellement sur l'organisation des faces et la visualisation du solide. Dans le deuxième cas, l'élève peut avoir à déterminer un ou plusieurs des éléments précédents, ce qui implique alors un travail d'anticipation plus riche du point de vue du développement du sens spatial.

Au secondaire, les activités de construction sont absentes ou isolées. Le programme ministériel du Québec de 2005 prescrit de telles activités, soit comme préalable au travail sur les formules de volume et d'aire, soit comme voie d'accès à la formule d'Euler et aux cinq solides de Platon. Le matériel fourni permet généralement une entrée rapide dans la production des solides, qui se fait alors soit par les faces (*Polydron* ou polygones de carton avec onglets et élastiques), soit par les sommets et arêtes (boules de polystyrène ou de pâte-à-fixe et bâtonnets). La construction à partir des sommets et arêtes nous semble la mieux à même de susciter la réflexion sur les relations entre degré des sommets, angles intérieurs des faces, angles dièdres et organisation générale des éléments constitutifs. En France, la situation est assez semblable. On trouve dans quelques manuels de troisième une activité très guidée de construction des polyèdres réguliers à partir des faces, mais peu d'enseignants la proposent à leurs élèves, si l'on en juge par le peu de souvenirs qu'en gardent les étudiants d'université en mathématiques sur ce sujet.

On peut supposer que si l'activité des élèves consiste seulement à construire des polyèdres réguliers pour « illustrer » une formule ou un théorème, les polyèdres reconnus spontanément seront le tétraèdre et le cube. L'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre seront vraisemblablement moins accessibles. On peut s'attendre à ce que le problème de la construction des polyèdres réguliers ne soit que superficiellement résolu, jusqu'au début de l'université. Or, l'approche de l'espace en jeu dans ce problème est essentielle à une conceptualisation consistante et stable, nécessaire entre autres pour aborder la géométrie vectorielle du plan et de la droite dans $\mathbb{R}^3$.

1.4.3. Preuves

On peut s'attendre à ce que pour la grande majorité des élèves ou des étudiants, le problème de la validité d'un polyèdre réalisé matériellement ne se pose pas : l'existence de l'objet matériel attestera de son existence théorique. Mais comment garantir que le solide qu'on a sous les yeux a bien ses angles dièdres congrus ? La question se pose même avec du matériel rigide. Dans l'Annexe 1, on mesure bien la difficulté qu'il y a à établir cette congruence des angles dièdres. Même pour un étudiant qui ne se contenterait pas des solides qu'il a réalisés, une preuve de leur validité nécessite à tout le moins des bases d'algèbre linéaire importantes, un argument purement « euclidien » étant hors de portée.

Nous attendons donc en fait que les étudiants cherchent à établir qu'il n'existe pas d'autres polyèdres réguliers que les cinq qu'ils auront collectivement construits. Pour cela, il s'agit dans un premier temps de reconnaître qu'il doit y avoir au moins trois faces groupées autour de chaque sommet : avec deux faces seulement, on ne peut créer un solide. On établit ensuite que la somme des mesures des angles digones groupés autour d'un sommet doit être strictement inférieure à 2π. En effet, si cette somme égale 2π — ce sera le cas par exemple si l'on groupe trois hexagones réguliers autour de chaque sommet —, alors les faces pavent le plan et on ne peut enfermer un volume. Si cette somme est supérieure à 2π, alors le polyèdre s'ouvre vers « l'extérieur » au voisinage du sommet et le polyèdre ne peut être convexe. Ces deux affirmations — au moins trois faces et moins de 2π d'angles en chaque sommet — constituent le noyau de la preuve : il suffit ensuite de considérer le nombre fini de cas possibles, après avoir constaté qu'on ne peut donc faire de polyèdre régulier avec des polygones à six côtés ou plus, et qu'on ne peut grouper plus de cinq triangles équilatéraux (et a fortiori plus de cinq carrés ou pentagones) autour d'un sommet.

Le problème est que les arguments que nous venons de donner pour justifier ces deux affirmations ne sont convaincants que pour quelqu'un qui a « déjà » une bonne idée de la façon dont s'organisent les faces autour d'un sommet. Le risque est grand que ces arguments passent pour des actes de foi, que l'enseignant chercherait à imposer, notamment aux élèves dont le sens spatial est peu sûr. Certains rétorqueront, par exemple, que si le polyèdre s'ouvre vers l'extérieur en chaque sommet, il pourrait éventuellement se refermer sur une portion de cet extérieur et que dès lors, ce qu'on croyait être l'extérieur était en fait l'intérieur ! Il est difficile de trouver quels arguments opposer à de telles objections — sinon que de dire que ça n'a pas de sens ! — et on voit mal comment donner une justification plus formelle à ces affirmations sans faire une étude d'un tout autre niveau, comme celle de Hartshorne (2000), déjà citée. Nous sommes donc ici en accord avec l'analyse de Dias et Durand-Guerrier (2005) qu'il faut donner un statut théorique à ces deux affirmations.

Il existe une preuve relativement accessible, différente de celle que nous venons de décrire ; en particulier, on n'y fait pas intervenir la somme des mesures des angles digones en un sommet. Cette preuve s'appuie sur l'étude des diagrammes de Schlegel (représentations par des graphes planaires des polyèdres convexes[8]). Les étapes de la preuve sont les suivantes. En utilisant la propriété que tout polyèdre régulier est inscriptible dans une sphère, on établit qu'il

[8] Ceci peut être une bonne occasion de relier la Théorie des graphes (récemment introduite dans la spécialité maths de la terminale ES) avec la géométrie de l'espace, domaine plus traditionnel des mathématiques. On peut consulter la thèse de L. Cartier (2008) sur ce sujet.

en existe une représentation par un graphe planaire — unique à isomorphisme de graphe près —, obtenue par projection stéréographique sur un plan tangent à la sphère, avec un point de tangence qui n'est pas un des sommets du polyèdre. Les sommets et les arêtes du graphe correspondent alors à ceux du polyèdre : deux sommets sont reliés par une arête dans le graphe si et seulement si ils sont reliés par une arête dans le polyèdre. L'étape suivante consiste à établir la « formule d'Euler » pour les graphes planaires : $F+S-A = 2$ (où F est le nombre de faces, S le nombre de sommets et A le nombre d'arêtes du graphe), et d'en déduire que tout polyèdre régulier vérifie la relation suivante :

> si p est le nombre de côtés de chaque face et q le nombre d'arêtes issues de chaque sommet, alors $2p + 2q - pq > 0$.

La résolution de cette inéquation dans les entiers naturels donne seulement cinq couples (p, q) possibles, et ce sont ceux qui donnent lieu aux polyèdres réguliers déjà construits[9]. En conséquence, il y a exactement cinq polyèdres réguliers dans notre espace. Deux techniques pour construire le diagramme de Schlegel d'un polyèdre convexe sont décrites dans le document reproduit à l'Annexe 2.

2. Dispositifs de l'expérimentation

La situation a été expérimentée avec des étudiants en troisième année d'un programme de quatre ans en formation des maîtres de l'UQAM, habilitant à être enseignant de mathématiques du secondaire au Québec, et avec des étudiants de troisième année de Licence de mathématiques de l'UJF, inscrits dans un module de préparation à l'enseignement. Des versions voisines avaient été expérimentées respectivement avec des élèves de 2nde en France (Bacher et al., 2006) et avec des élèves de 3e secondaire (14-15 ans) au Québec (Tanguay, 2004). La situation étudiée ici est décrite à travers le document distribué aux étudiants et donné à l'Annexe 2. Les séances ont été conduites par les deux chercheurs, également enseignants responsables des cours dans lesquels elles s'inséraient.

Les deux expérimentations se sont déroulées chacune en une séance de trois heures. C'était une occasion d'introduire ces étudiants aux problèmes didactiques de la géométrie dans l'espace, qu'ils avaient peu abordés jusque là. Les étudiants travaillaient en équipes de trois ou quatre. Deux parmi ces équipes ont été filmées à l'UQAM. On a pu recueillir des productions écrites par les équipes dans les deux universités. Pour la Question 2, nous avons distribué, dans un premier temps, et selon les équipes, pâte-à-fixe et cure-dents, ou boules aimantées et tiges métalliques. Plus tard dans la séance, certaines équipes ont reçu des polygones de plastique articulables (de type *Polydron*).

[9] Le couple (p, q) est appelé *symbole de Schläfli* du polyèdre régulier.

3. Analyse des productions

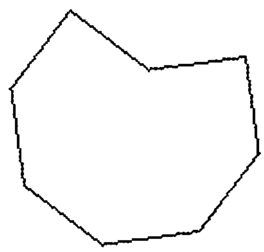
3.1. Définition

3.1.1. Première équipe filmée

Il semble que pour les étudiantes, la définition est liée à la possibilité de construire[10], même s'il leur était demandé de définir avant de construire. En atteste des remarques récurrentes à ce sujet, et le fait que les trois étudiantes vont finalement récupérer différents matériels dans leur environnement (trousses, feuilles de papier, etc.) pour manipuler.

La première des caractéristiques de régularité est la **congruence des faces** du polyèdre. Elle est spontanément exprimée, de manière intuitive, par les expressions « les faces sont pareilles » ou « c'est partout le même, le même polygone régulier », accompagnée de gestes de la main qui suggèrent un agencement de telles faces polygonales pour créer un volume. Suit une phase où les étudiantes s'interrogent sur la définition de polygone régulier, autour de la convexité.

> *A* « J'ai entendu *polygone convexe*, s'il est régulier, ... quand on dit des polygones réguliers... qu'est-ce qu'on entend par polygone régulier..., ben ça va avec » [voulant dire que *convexe* vient avec la définition de *polygone régulier*].
> *C* [n'est pas sûre, dit quelque chose avec...] « ... non convexe ? »
> *A* « Ah ben non, ça se peut ? » [Elle a quelque chose en tête qui suggère que ça ne va pas de soi, qu'un polygone pourrait être régulier et non convexe. Elle dessine dans le coin de sa feuille un octogone régulier]. « On prend ces deux côtés là [elle repasse avec son crayon sur deux côtés adjacents du polygone] puis on les rentre en dedans » [elle ajoute un angle rentrant à l'intérieur du polygone]. Il semble qu'à ce moment de leurs réflexions, les étudiantes n'ont pas mis la congruence des angles en relation ni avec le dessin, ni avec la convexité.



Le doute persistera sur la convexité d'un polygone régulier, jusqu'à ce que les étudiantes posent la question à l'un des observateurs. C'est dans l'échange qui suivra que pour la première fois, le lien entre convexité du polygone et congruence des angles va être fait par l'étudiante *A*.

> *A* « on se demande, quand on dit *polygone régulier*, polygone régulier... est-ce qu'on est obligé de mentionner que c'est un polygone régulier convexe ? ... quand on dit polygone régulier, ça veut donc dire *convexe* ?
> ***Observateur*** « eeeh, ... bonne question, ... je pense que, dans la plupart des livres, quand

[10] On peut mettre cela en relation avec deux « principes » mathématiques : des objets peuvent être définis avant que leur existence n'ait été prouvée ; il ne suffit pas qu'un objet soit construit pour valider son adéquation à une définition, une preuve est nécessaire. Voir par exemple Ouvrier-Buffet (2003) à ce sujet.

on parle de polygone régulier, il est convexe ».
B « On se demandait, si on pouvait juste dire, ... que tous les côtés sont congrus, parce que là [elle montre en passant avec son stylo sur les deux côtés rentrants de l'octogone dessiné], ... on n'était pas sûre... »
A « ... si en rabattant ces deux côtés là, ils vont pas se toucher ? [comme ***B***, elle met en doute que l'octogone aux angles rentrants a bien des côtés tous congrus ; mais il semble que le déclic se produise ici chez ***B*** : elle comprend alors que ce qui fait défaut, c'est la congruence des angles] ***B*** : Non, ça ne marche pas, parce qu'il faut qu'ils aient les mêmes angles, aussi... »

L'observateur confirme qu'un polygone régulier doit bien avoir des angles congrus, en plus des côtés. Il mentionne le losange comme polygone qui a ses côtés congrus mais qui n'est pas régulier pour autant. Il semble persister de la perplexité chez l'étudiante ***A***, qui demandera « On peut faire un polyèdre avec un losange ? », à quoi ***B*** répond « Oui, mais il ne sera pas régulier. »

Après un moment de flottement, les étudiantes réfléchissent à voix haute en manipulant un octogone de papier, produit par ***A***.

B prend l'octogone de papier. ***C*** lui enlève des mains et dit : « tu en as un de même, puis un là, puis un là ... » Elle fait un geste de la main pour chaque côté de l'octogone de papier, geste qui signifie qu'on place une face pour chacun des côtés, face qui partage le côté qu'elle désigne. Elle tourne et finit par un geste englobant, comme pour former une boule] ***B*** : « puis plus t'as de côtés, puis plus ça ressemble à une boule ».

Il semble bien que l'image qu'elles viennent de se donner confirme que les caractéristiques retenues sont les bonnes et suffisent. L'étudiante ***B*** écrit d'ailleurs sur sa feuille :

Définition de polyèdre régulier

- Toutes les faces sont le même polygone régulier
- En 3D
  - → pas nécessaire pcq'on parle de faces
- Qu'entend-t-on par poly régulier ?
  - → non concave ?
  - → tous les côtés ont la même mesure et tous les angles sont congrus
- On ne pourrait pas faire un poly avec un losange ?
  - → du moins pas un poly régulier
- \+ il y a de côtés, + ça ressemble à une boule

A « OK, ... est-ce que c'est suffisant ?
C « Moi j'suis sûre que oui ». ***A*** « Parce que, regarde, il faut que la définition... soit [lisant les directives] suffisamment explicite pour permettre de valider ou invalider tout candidat polyèdre. »
C « ben, avec ça [montre ce qui est écrit sur la feuille], j'vois pas comment qu'on pourrait, ... pas valider ».
A « Est-ce qu'un polyèdre, attend, ça va avoir l'air ridicule là, mais... est-ce qu'il faudrait mentionner que c'est fermé ? ... Oui, ... il pourrait y avoir quelque chose » [geste de la main pour montrer une face qui manquerait sur le dessus] ...

Les étudiantes s'entendent alors pour ajouter « Fermé » à la liste. Une d'entre elle, convaincue que cette liste est complète, suggère que celle-ci devrait être écrite en une seule phrase pour acquérir le statut de définition. Cette proposition n'est cependant pas relevée par les autres.

À ce stade, il apparaît clairement que ni la convexité du polyèdre, ni la congruence de ses angles dièdres, ni ses symétries ne sont invoquées comme éléments caractérisant sa régularité. Le critère de ressemblance à la sphère est resté flou, et associé de manière erronée au nombre de côtés de la face polygonale (« plus il y a de côtés, plus ça ressemble à une boule »). Le mot « arête » va entraîner toute l'équipe sur un calcul qui aboutit à la formule suivante, qui est ajoutée au bout de la liste des caractéristiques, mais avec un statut flou :

$$\Rightarrow \text{nb d'arêtes : } \frac{\text{nb de faces} \times \text{nb de côtés par faces}}{2}$$

Or, ce résultat est vrai pour tout polyèdre. Mais il semble être attribué aux polyèdres réguliers (la formule est en fait induite par des calculs sur le cube et le tétraèdre, comme l'attestent deux dessins apparaissant aussi sur la feuille récapitulative)[11]. Bien que transcrite sur la feuille, la formule ne fait pas partie de la définition dans l'esprit des étudiantes :

> ***A*** « Ben, les angles en dedans ... [Il y a aussi] les arêtes... »
> ***B*** « C'est ça que j'allais dire, les arêtes, ... il faut vérifier le nombre d'arêtes »
> ***A*** « ben, j'sais pas comment, ben, ya quelque chose, là, ... à calculer, là »
> ***C*** « non, c'est pas une définition, ... ça fait pas partie de la définition » [faisant référence à ce qu'il y aurait à calculer pour les arêtes].

Dans le même temps, les angles font leur apparition mais il semble que pour ces étudiantes, seuls les angles digones (angle entre les arêtes d'une face) sont à considérer.

> ***B*** « Y as-tu d'autres choses ? » [à ajouter comme caractéristiques].
> ***A*** [faisant le point] « Toutes les faces, ... non non mais je veux dire, on parle des faces, ... les angles on n'en parle pas parce que, parce que c'est, ... c'est les polygones qui forment les angles. ...

Cette affirmation n'est pas étonnante si l'on considère que les seuls angles « matériellement » représentés sont les angles entre deux arêtes adjacentes, qui coïncident bien à chaque fois avec l'angle intérieur d'une face. Alors que pour visualiser l'angle (dièdre) entre deux faces adjacentes, il faut imaginer des perpendiculaires menées sur ces deux faces à partir d'un point de leur arête commune et qui n'est pas une des extrémités[12] (voir Figure 1). Cette distinction angles digones, angles dièdres a clairement constitué une difficulté. Même après l'intervention d'un des observateurs pour susciter un questionnement à ce sujet, les échanges entre les trois étudiantes montrent qu'elles arrivent difficilement à identifier clairement les angles dont elles parlent. Il est question de « l'angle d'inclinaison entre les faces », montré du doigt au moyen de deux bouts de carton articulés à une feuille de papier mise à plat, suggérant ainsi trois faces jointes en un sommet.

---

[11] Notons qu'un autre comptage sur les arêtes aurait été pertinent pour l'étude de la régularité : celui de l'égalité des degrés en chaque sommet.

[12] Les étudiants observés avaient pourtant tous suivi un cours d'Algèbre linéaire, où l'angle dièdre entre deux plans sécants est défini et calculé, à partir des équations des plans.

3.1.2. Deuxième équipe filmée

La phase s'ouvre avec des hésitations autour de la pyramide à base carrée, puisque comme le dit l'étudiante ***D***, celle-ci est qualifiée de *régulière* à l'école secondaire. Mais les membres de l'équipe concluent rapidement que le mot régulier n'a pas ici le même sens, et se mettent d'accord que « toutes les faces sont des polygones réguliers congrus. » L'étudiante ***F*** se demande s'il faut ajouter convexe [et on ne saura pas si elle fait référence à la convexité du polyèdre ou de ses faces] et l'étudiante ***E*** répond « les polygones réguliers, c'est toujours convexe. » ***F*** a fait quelques esquisses sur sa feuille sensées représenter des polyèdres (tétraèdre, cube, octaèdre et deux ou trois pentagones juxtaposés dont on saura plus tard qu'ils représentent le ballon de soccer). ***D***, pointant le dessin sur la feuille de ***F***, se demande si les triangles du tétraèdre sont bien équilatéraux. S'ensuit une discussion confuse sur la congruence des angles, les étudiantes ne s'entendant pas sur les angles dont elles parlent. Rien ne laisse croire que les angles dièdres font partie des angles invoqués.

D a encore les pyramides en tête et soulève la question de la présence, ou non, d'une « base » pour chaque polyèdre régulier. L'octaèdre est ici mis en cause (il n'a pas de base), et c'est suffisamment important pour que la définition initiale soit questionnée. D'une série d'échanges confus ressort en effet qu'avec la définition initiale, les triangles peuvent donner lieu à plusieurs possibilités, alors que les autres polygones réguliers ne donnent chacun qu'un polyèdre : « Le triangle, il te permet de faire plusieurs choses, le pentagone, l'hexagone, tu peux juste en faire un » (***F***). Sans que cela ait été dit, nous soupçonnons que les étudiantes cherchent un ou des critères qui permettraient de ne garder qu'un polyèdre par type de faces. Le tétraèdre (effectivement mentionné) serait celui à garder pour le triangle, alors que l'octaèdre serait à rejeter. Le critère de la présence d'une base ne semble pas suffire, et il est aussi question de la ressemblance à une sphère.

Les étudiantes sont donc amenées à chercher ce qu'il est possible de faire avec les triangles. La famille obtenue en collant deux pyramides sur leur base commune (***E*** et ***F*** vont mentionner l'octogone, l'hexagone, l'heptagone… comme bases possibles) est envisagée. ***D*** réagit en demandant si « on peut vraiment faire ça avec des triangles équilatéraux ? » Elle ajoute que c'est réalisable « si on a juste trois [si la base a trois côtés], mais plus que trois ?... ». ***F*** renchérit en proposant que plus le nombre de côtés de la base est grand, plus les triangles latéraux sont « étroits » [sous-entendant qu'ils seront isocèles, mais pas équilatéraux]. ***D*** et ***F*** se lancent d'ailleurs dans des constructions de pyramides en papier avec lesquelles elles cherchent à avoir des triangles équilatéraux. Uniquement à partir de leurs essais, elles concluent à l'impossibilité, pour les pyramides dont la base a plus de quatre côtés, d'avoir des triangles équilatéraux pour faces latérales. Ces réflexions vont les amener à intervenir sur ce sujet dans la phase collective : voir section suivante.

3.1.3. Mise en commun

La caractéristique que toutes les faces sont un même polygone régulier est admise d'emblée. La question qui se pose alors est de savoir s'il s'agit d'une condition suffisante. L'enseignant propose le polyèdre étoilé, obtenu en collant des pyramides à base carrée sur les faces d'un cube. Doit-il être « gardé » ou non ? Plusieurs étudiants objectent qu'il n'est pas convexe. L'enseignant relance en demandant si la convexité doit être ajoutée à la caractéristique déjà retenue. L'étudiante ***E*** propose plutôt d'ajouter que le nombre de faces soit minimum, en évoquant le tétraèdre (cela justifie pour elle de garder le tétraèdre et de rejeter l'octaèdre).

> ***E*** : « Ou on pourrait peut-être dire que ça doit être fait avec un minimum ... un minimum de faces, ... de polygones, ... tu sais comme, admettons,... notre tétraèdre avec des triangles, on pourrait utiliser un minimum de triangles pour le faire, ce qui exclurait... »
> ***Observatrice*** : « pourquoi vous voulez minimiser ? »
> ***E*** : « je sais pas » [Rires]
> ***F*** : « parce qu'en minimisant, on exclut justement toutes, les étoiles, ou, comme ... les deux tétraèdres collés ensemble, les pyramides à base carrées ensemble... »

Nous mettons cela en relation avec une idée qui va se manifester plus loin à plusieurs reprises, dont nous avons déjà relevé la trace chez l'équipe 2, et qui sera décisive dans la phase suivante : il y a un polyèdre par type de faces[13]. Selon ***E***, le polyèdre à retenir pour un polygone régulier donné — en l'occurrence le tétraèdre pour les triangles — est celui qui est réalisé avec un minimum de faces. Mais la proposition n'est pas reprise (la question de savoir si les polyèdres réguliers sont en nombre fini ou infini reste en suspens) et le débat s'oriente plutôt vers la question des angles entre deux faces. L'étudiante ***B*** avance la condition que les angles entre deux faces doivent être inférieurs à 180°. L'enseignant fait le lien avec les angles rentrants et la perte de la convexité. Il introduit l'expression « angle dièdre » et la condition qu'ils soient tous congrus. Est ensuite lancée l'idée d'inscriptibilité dans une sphère. Un étudiant objecte que le polyèdre étoilé l'est, ce qui amène l'enseignant à préciser que l'inscriptibilité signifie que tous les sommets doivent être sur la sphère, ce qui n'est pas le cas des sommets à la base des pyramides du polyèdre étoilé. Tous les éléments de la définition prévue pour la phase suivante ayant été abordés, on distribue alors la feuille de présentation, en en-tête de laquelle est inscrite cette définition (voir Annexe 2).

3.2. Constructions

3.2.1. Première équipe

L'étudiante ***C*** construit rapidement le tétraèdre avec le matériel fourni, en l'occurrence, pâte-à-fixe et cure-dents. Pendant que ***B*** construit le cube, ***A*** et ***C*** débutent une construction à partir d'une « base » pentagonale, en lui adjoignant un premier « étage » (c'est le terme qu'elles emploient), puis un deuxième. ***A*** se plaint que ce n'est pas facile parce que ce n'est pas rigide, mais avance que la fermeture devrait consolider le tout. Elles arrivent en effet à fermer la construction et la reconnaissent bien comme correcte, malgré les déformations. Une intervention de l'enseignant valide le dodécaèdre construit. Pour répondre à la consigne, elles remplissent un tableau donnant, pour chacun des trois polyèdres construits, le nombre d'arêtes, le type de faces, le nombre de faces et le nombre de sommets. En réponse à la question « Quelles propriétés géométriques doivent être vérifiées pour obtenir un polyèdre régulier ? », les étudiantes disent à plusieurs reprises « il y a toujours trois arêtes en chaque sommet » et écrivent :

> $\Rightarrow$ 3 arêtes par sommet et 3 poly. réguliers qui s'y joignent
> $\Rightarrow$ même chose pour ts les sommets

Les étudiantes cherchent ensuite à construire un polyèdre avec des hexagones. Entre temps,

[13] On relève cette même conviction que les polyèdres réguliers forment une famille infinie indicée par le nombre de côtés de chaque face chez les sujets des expérimentations de Dias et Durand-Guerrier (2005).

un des observateurs leur a fourni des polygones de plastique articulables (*Polydron*). Par analogie avec leur décomposition du dodécaèdre — une base (horizontale), un étage de cinq pentagones qui s'ouvre vers le haut, un deuxième étage de cinq pentagones orienté en sens inverse et un pentagone parallèle à la base, qui ferme le tout —, les étudiantes formulent la conjecture qu'il y aura un étage de plus pour le polyèdre formé d'hexagones, et qu'il aura vingt-six faces : une « base », un étage de six, un de douze, un de six et un hexagone qui referme. Elles généralisent en avançant qu'il faut ajouter un étage chaque fois que le nombre de côtés des faces augmente de un : elles ont toujours en tête cette famille infinie de polyèdres (un par type de faces) de plus en plus proches de la sphère[14]. Elles partent et parlent en effet toujours de cette « base », qui est un premier hexagone posé bien à plat sur la table, autour duquel elles ont accroché une première couronne de six autres hexagones, qu'elles cherchent à relever vers le haut. Elles imputent leur difficulté à construire effectivement le polyèdre au fait qu'elles ne disposent que d'une douzaine d'hexagones de plastique, et que leur rigidité semble empêcher qu'on puisse relever vers le haut comme on le voudrait. À ce stade, elles semblent ne plus savoir quoi faire.

3.2.2. Deuxième équipe

Dès qu'elles reçoivent les boules aimantées et tiges métalliques, les étudiantes ***E*** et ***F*** commencent à construire un polyèdre à partir de pentagones. Elles mettront plus de dix minutes à compléter le dodécaèdre. Entre temps, ***D*** a rapidement construit le cube et le tétraèdre. Les trois se demandent si la propriété « 3 arêtes et 3 faces par sommet » sera partagée par tous les polyèdres réguliers, et s'il s'agit d'une des réponses à la question du document : « Quelles propriétés géométriques... ? » Sans qu'on sache trop d'où est issue la motivation, les trois coéquipières cherchent maintenant une formule qui donnerait le nombre d'arêtes en fonction de n, le nombre de côtés de chaque face. Comme chez l'équipe 1, cette formule est recherchée par un découpage en « étages ». ***D*** propose $n + n\,(n-2)$ en montrant du doigt sur le cube à quoi correspond chaque terme de la somme. Elle remarque ensuite que la formule fonctionne pour le tétraèdre. Elle montre du doigt le découpage correspondant sur le dodécaèdre, mais constate que $n + n\,(n-2)$ ne dénombre pas la dernière série d'arêtes en dessous. Elle ajoute donc un terme, et propose $n + n\,(n-2) + n\,(n-3)$ pour le dodécaèdre. ***F*** dit que ça fonctionne pour le tétraèdre, puisque le terme ajouté va donner zéro, mais aucune ne relève que ce n'est pas le cas pour le cube. On peut mesurer ici quelle place prend la recherche de formules dans ce type d'activité, au point d'amener ces étudiantes à admettre sans sourciller deux formules distinctes pour « justifier » les termes d'une suite de trois entiers !

L'observatrice passe avec une boîte de polygones de plastique articulés et ***F*** lui demande des hexagones. L'observatrice lance à la classe qu'elle fournira les hexagones de plastique à l'équipe qui pourra prédire, en justifiant, de combien d'hexagones elle a besoin. L'équipe essaiera alors de trouver une formule pour le nombre de faces, toujours en fonction de n. ***F*** défait le cube et le tétraèdre (le dodécaèdre, qui reste assemblé pendant toute la durée de la phase, servira de référence pour les tentatives de dénombrement) pour récupérer les boules aimantées et tiges métalliques, avec lesquelles elle assemble quatre hexagones adjacents. L'hexagone du bout est laissé à plat sur la table, et ***F*** tente de « relever » les trois autres. Vu le

[14] Incidemment, selon leur découpage en étages, le tétraèdre n'a pas d'étage, le cube en a un, le dodécaèdre deux et le polyèdre formé d'hexagones trois. Rappelons que l'octaèdre n'a pas encore été considéré par cette équipe.

peu de rigidité du matériel[15], D et E doivent l'aider à soutenir les trois dans les airs. Une décomposition en étages analogue à celle de l'équipe 1 va alors se mettre en place pour E et F, mais le nombre d'étages n'augmente pas avec n : il est de deux ou trois étages, selon que n est impair ou pair.

> F : « Tu as combien d'étages, là ? [...] Il y a le même nombre de faces ici (montre la moitié du dessus du dodécaèdre) qu'en dessous, c'est comme... 'fois deux'. Mais si je le fais avec l'hexagone, c'est pas 'fois deux', parce qu'il y a une ligne d'hexagones qui va arriver en plein milieu, ça fait que tu peux pas le séparer en deux » [montre du doigt l'hexagone qui est le plus haut parmi les trois qui sont tenus en l'air ; elle fait un geste de haut en bas, puis une geste circulaire à l'horizontal, laissant entendre que cet hexagone est vertical et qu'il y aura une rangée complète d'hexagones verticaux « au milieu »].
> E : « Oui ! Ça dépend de la parité ! Pour n impair, il y a deux étages, un dessus, un dessous, et les deux s'imbriquent » [elle montre sur le dodécaèdre]. « Mais pour n pair, il y a une rangée au milieu ».
> F : « Tu peux pas faire 'fois deux' » [sous-entendu, quand n est pair].
> E [expliquant à D, en faisant des gestes] : en bas tu as une base, plus une rangée de six hexagones, un pour chaque côté. Même chose en haut, sur le dessus, mais le haut et le bas, ça se colle pas, ça prend une rangée de plus au milieu.
> D [sceptique] : « Quand t'en a sept, est-ce que ça va encore... s'imbriquer[16] [elle fait le geste, une main au-dessus, une main en dessous] ? »
> F : « Moi je pense que oui. »

Jusqu'à la mise en commun, les trois coéquipières vont maintenant tenter de mettre en relation le nombre d'arêtes et le nombre de faces, et chercher des formules pour chacun de ces nombres, en fonction de n. Il est frappant de constater que cette quête de la formule stoppera toute manipulation, toute validation sur les modèles construits, et poussera même les coéquipières à énoncer des formules contradictoires. F trouve le nombre de faces du dodécaèdre connaissant le nombre d'arêtes : « J'ai pris le nombre d'arêtes, j'ai divisé par 5 parce que chaque face a 5 arêtes, et j'ai multiplié par 2, parce que chaque arête touche à 2 faces. » Elle constate que ça marche pour le cube. La formule $n + n\,(n–2)$ est énoncée à nouveau, mais il est aussi question de $n + n\,(n–2) + n\,(n–3)$, ainsi que de l'expression « n factoriel ». Le nombre de faces du polyèdre à faces hexagonales est avancé, c'est 20 (1 + 6 + 6 + 6 + 1), mais il sera ensuite corrigé pour 16, quand F aura arrêté l'observatrice, pour lui expliquer qu'on a « autant d'arêtes que de côtés, plus autant d'arêtes que de côtés moins 2, n fois, plus autant d'arêtes que de côtés moins 3, n fois. » Elle ajoutera : « si on le fait pour le pentagone, ça marche et ensuite, pour le nombre de faces, on divise par n et on multiplie par 2 » [ce qui donne bien 16 quand $n = 6$], mais aucune des trois coéquipières ne relève que le nombre de faces donné par la formule ne colle pas avec celui de leur découpage en étages.

3.2.3. Des conjectures fausses discutées lors de la mise en commun

La synthèse collective qui a suivi a consisté à discuter de quatre conjectures, que les observateurs énoncent en les présentant pour ce qu'elles sont, à savoir des conjectures avancées par certaines des équipes pendant les phases précédentes.

[15] Il est intéressant de constater que pour l'équipe 1, la difficulté à construire un polyèdre à faces hexagonales est imputée à la trop grande rigidité du matériel, alors que c'est l'inverse pour l'équipe 2 !
[16] L'idée d'une famille infinie de polyèdres réguliers, un pour chaque polygone régulier, est toujours solidement ancrée et oriente en fait complètement leur démarche.

- **Les seules faces qui « marchent » sont celles qui pavent le plan**

Non seulement le raisonnement selon lequel la somme des mesures des angles digones groupés autour d'un sommet ne peut être égale à 360° mettra-t-il beaucoup de temps à s'imposer et même à convaincre, une fois exposé, mais le plus étonnant est sans doute que la conjecture « inverse » a été formulée explicitement par plusieurs équipes. On peut supposer qu'elle ait émergé du fait que les polyèdres réguliers les mieux connus (le cube, le tétraèdre et l'octaèdre) la vérifie. En conséquence, le pentagone est rejeté (un groupe en France et un autre au Québec). Les étudiants d'un de ces groupes sont tellement convaincus qu'on ne peut pas construire un polyèdre régulier avec des pentagones qu'ils examinent un dodécaèdre pris à un groupe voisin pour y chercher « ce qui ne va pas » !

- **Un polyèdre à faces hexagonales**

Comme nous l'avons vu chez les deux équipes filmées, dans chacune des expérimentations, l'hexagone fait l'objet de nombreux et répétés essais, même chez des équipes qui n'ont pas adopté la conjecture précédente. Se manifeste ici la conviction que c'est possible, mais que cela va exiger beaucoup de faces et que le polyèdre obtenu sera voisin de la sphère (voir § 3.2.1). Le constat que la construction est difficile est plutôt attribué à l'inadéquation du matériel, ou à la supposée (trop) grande taille du polyèdre cherché. Il appert donc que le passage, des 360° d'angles couverts par trois hexagones groupés autour d'un sommet commun, à l'impossibilité de la construction du polyèdre, **ne va pas du tout de soi**.

- **Un octaèdre non régulier**

La discussion sur la nécessité d'ajouter l'égalité des degrés en chaque sommet aux critères de régularité — discussion menée après présentation de la famille des contre-exemples obtenus en collant deux pyramides congrues — est peut-être à la source du constat suivant, totalement inattendu pour les chercheurs : plusieurs équipes construisent effectivement l'octaèdre mais le rejettent, alléguant qu'il ne s'agit pas là d'un polyèdre régulier. Certains étudiants diront qu'il y a une face carrée en plus des faces triangulaires (ils n'ont pas vu qu'elle disparaît). On avance le plus souvent que les angles dièdres n'y sont pas congrus, une perception vraisemblablement induite par le fait que tous les sommets n'y auraient pas le même statut, que le polyèdre n'y serait pas complètement symétrique, ce que la construction par collage peut effectivement suggérer.

- **Conjectures sur le degré des sommets**

Deux conjectures contradictoires sont apparues localement, concernant le nombre de faces adjacentes qu'il est possible d'avoir en chaque sommet. Un groupe a proposé que « plus on met de triangles en un sommet, plus on se rapproche de la sphère » ; tandis qu'un autre, prenant appui sur le cube et le tétraèdre, était au contraire convaincu « qu'on ne peut pas mettre plus de trois faces parce qu'on est dans un espace de dimension 3 ». Ces deux conjectures ont été invalidées, la première par l'argument que « la somme des angles des faces polygonales adjacentes en un sommet ne peut dépasser 360° », la seconde en exhibant l'icosaèdre.

La discussion a permis d'éliminer les conjectures fausses ainsi que les polyèdres qui ne convenaient pas, en particulier celui composé de faces hexagonales, par l'argument que les hexagones réguliers pavent le plan. Cinq polyèdres sont retenus, et ce sont bien sûr les polyèdres de Platon. Cependant, des doutes subsistent sur la validité de ceux d'entre eux qui se déforment et sur l'existence éventuelle d'autres polyèdres réguliers qui n'auraient pas été trouvés. L'argument des 360° d'angles couverts par trois hexagones ou six triangles équilatéraux laisse bien des étudiants perplexes, et continuera d'être discuté un bon moment pendant le début de la phase suivante. La deuxième équipe filmée continuera pour sa part à s'interroger sur l'octaèdre, l'étudiante ***D*** se demandant si les angles entre chaque face sont bien tous les mêmes. ***F*** ressent même la nécessité de reconstruire rapidement un octaèdre avec les boules aimantées. Celui-ci apparaît en effet comme l'un des cinq polyèdres de Platon sur la feuille distribuée pour la phase de preuve, qui va suivre. Les trois coéquipières examinent cet octaèdre construit en le tournant dans tous les sens, pour en vérifier les symétries.

3.3. Un premier bilan

La construction collective de la définition a permis non seulement de donner les caractéristiques à retenir pour la régularité, mais aussi de débattre de celles que l'on rejette et pourquoi. Ceci permet une exploration des polyèdres de l'espace, et même plus généralement des solides. Au terme des deux phases de définition et construction, il apparaît clairement que l'argumentation qui lie angles dièdres, angles digones et possibilité d'enfermer un volume n'emporte toujours pas la conviction des étudiants. L'acharnement des étudiants à vouloir construire un polyèdre avec des hexagones est à mettre en relation avec leur interprétation de la régularité par l'existence d'une suite infinie d'objets et la recherche de formules associées, particulièrement manifeste dans l'équipe 2. On peut faire l'hypothèse qu'il s'agit ici d'une conséquence du peu de place accordée dans l'enseignement à la question du contre-exemple : tout est toujours « vrai et calculable » en mathématiques. On voit bien la nécessité de la preuve pour expliciter les propriétés fondamentales sur lesquelles tous ces raisonnements s'appuient, et pour leur donner un statut institutionnel. C'est l'objectif de la phase suivante.

4. La preuve par les diagrammes de Schlegel

Rappelons que dans cette phase, il s'agissait de prouver qu'il n'existe pas plus que cinq polyèdres réguliers (cf. § 1.4.3). La preuve de la validité des cinq polyèdres construits dans la phase précédente n'était pas demandée. Dans les deux expérimentations, bien que le temps accordé à cette phase n'ait pas été suffisant et que les résultats finaux aient été exposés par l'enseignant lui-même, nous avons malgré tout pu arriver au bout de cette preuve. La construction des diagrammes de Schlegel associés aux cinq polyèdres de Platon n'a pas soulevé de vraies difficultés, même si quelques dessins incorrects ont été produits. La confrontation de représentations parfois très différentes pour un même polyèdre a conduit à préciser la notion d'isomorphisme de graphes et à affirmer l'existence d'une représentation par un graphe planaire.

Une des difficultés rencontrées par les étudiants a été d'accepter que les diagrammes de Schlegel, parce qu'ils ne tiennent pas compte des angles et des longueurs des arêtes des polyèdres qu'ils représentent, puissent être utiles pour prouver des résultats sur les polyèdres réguliers : comment en effet un modèle qui ne « montre » pas les caractéristiques de régularité d'un objet peut-il être pertinent pour prouver un résultat sur sa régularité ? D'autre part, la résolution dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ de l'inéquation $2p + 2q - pq > 0$ (cf. § 1.4.3) a posé problème, probablement parce qu'elle est inhabituelle et non rattachée à une technique reconnaissable.

Finalement, il apparaît que la complexité dans le cheminement de la preuve (construction des diagrammes de Schlegel, étude de la formule d'Euler, recherche des solutions entières d'une inéquation, caractérisation d'un polyèdre par un couple (p, q)) a empêché certains étudiants de reconnaître qu'on avait bien prouvé le résultat cherché : « j'ai perdu le fil, je sais plus ce qu'on est en train de démontrer », « Pourquoi ce qu'on fait là permet de démontrer qu'on n'a que cinq polyèdres réguliers ? ». Malgré cette complexité, il nous semble que ce choix du cadre de preuve est une opportunité pour mettre en relation la théorie des graphes et la géométrie dans l'espace, via une modélisation (cf. Cartier, 2008). Cette situation a donc tout à fait sa place dans un enseignement scientifique ou en formation d'enseignants.

5. Résultats et conclusion

La situation dans son ensemble (définition, construction et preuve) nous semble consistante du point de vue des connaissances sur les polyèdres réguliers de l'espace, parce qu'elle interroge les relations entre les objets de l'espace, ceux du plan et diverses représentations de ces objets. Cependant, la phase de preuve n'est pas en l'état concluante.

5.1. La validation des polyèdres construits

La question de la validité des polyèdres construits, que nous n'avions pas prévu de traiter à cause de la quasi impossibilité d'établir ou même de vérifier la congruence des angles dièdres, s'est quand même manifestée, entre autres à travers la remise en cause de la régularité de l'octaèdre (cf. § 3.2.3). Même si la résolution de cette question n'est pas accessible à un élève du secondaire, nous pensons a posteriori qu'il est important de la discuter, ne serait-ce que pour bien mettre en évidence le principe suivant, absent de l'enseignement standard : la construction effective d'un polyèdre ayant tous ses sommets de même degré et ses faces congrues **ne garantit pas a priori la congruence des angles dièdres**. Ceux-ci apparaissent donc comme l'élément géométrique incontournable, et il est pourtant ignoré de l'enseignement secondaire, où il est rarement défini ou même désigné lorsqu'il est question d'angle entre deux plans. Une des explications possibles de cette « ignorance » est que la définition de l'angle dièdre nécessite de le rendre visible à partir du tracé de droites bien choisies, ce qui implique qu'on doive prouver que sa mesure est alors déterminée de manière unique.

5.2. Les cinq polyèdres construits sont les seuls

Les deux démarches de preuve — *graphique*, passant par l'étude des diagrammes de Schlegel, et *géométrique*, basée sur l'étude des angles aux sommets — ont chacune leurs inconvénients et leurs avantages, et renvoient à différents présupposés théoriques. Précisons.

La démarche graphique n'est pas directement induite par les activités de définition et de construction qui précèdent : ce qui est proposé ressemble plutôt pour l'étudiant à un nouveau problème. En revanche, cette preuve nécessite qu'on fasse un pas de côté par rapport aux objets construits. La représentation sur laquelle on travaille ne retient que des informations de nature topologique et combinatoire (nombre de côtés des faces, degré des sommets, adjacence des sommets, des arêtes et des faces). Les propriétés géométriques sont perdues. Le principal présupposé théorique est l'existence et l'unicité (à isomorphisme de graphes près) du diagramme de Schlegel pour chaque polyèdre convexe[17].

La démarche géométrique découle plus naturellement des phases de définition et de construction. La familiarité avec les objets visibles (le solide lui-même, ses symétries, la régularité des faces) en facilite la dévolution. Mais cette familiarité peut aussi faire obstacle, entre autres parce qu'elle induit le recours à une validation perceptive qui ne favorise pas le passage à un point de vue théorique. Or, il y a bien ici aussi des présupposés théoriques, comme le relève d'ailleurs Durand-Guerrier (2005, § IV.2). Ce sont ceux que nous avions identifiés a priori, en § 1.4.3, comme les deux affirmations constituant le noyau de la preuve. A posteriori, l'observation des difficultés des étudiants avec ces énoncés nous conduisent à être plus précis et à y voir plutôt **trois énoncés fondamentaux** : « on doit avoir au moins trois faces en chaque sommet », « avec 360° d'angles (digones) en chaque sommet, les angles dièdres sont plats et on ne peut enfermer un volume » et « avec plus de 360° d'angles (digones) en un sommet, on perd la convexité au voisinage de ce sommet. »

5.3. SiRC, angle dièdre et géométrie axiomatique naturelle en 3D

Bien que la situation porte sur des résultats mathématiques établis, notre analyse didactique nous amène à la considérer comme une SiRC (cf. l'introduction) parce qu'elle en satisfait en particulier les critères suivants : la manipulation est facile d'accès et permet d'expérimenter, d'énoncer des conjectures et de les étudier par des allers-retours avec les objets construits ; cette approche expérimentale ne suffit pas et une démarche théorique de preuve est nécessaire, et par ailleurs relativement accessible.

Nous avons pu constater dans l'expérimentation que la phase de définition permet de faire émerger l'angle dièdre comme angle distinct de l'angle digone. La phase de construction permet de manipuler cet angle, et de le mettre en relation avec la possibilité de « refermer » pour faire un solide. Il s'agit bien du nœud central dans la preuve géométrique qu'il n'existe pas plus de cinq polyèdres réguliers. L'équivalence théorique des énoncés a), b), c) et d) (cf. § 1.2) permet à la preuve graphique d'éluder l'angle dièdre. Mais quelle que soit la démarche adoptée pour prouver qu'il y a au plus cinq polyèdres réguliers, la question de la congruence des angles dièdres dans les polyèdres réguliers construits reste entière.

Or, l'angle dièdre nous apparaît central dans les processus de conceptualisation de l'espace, notamment pour asseoir les notions d'angle, de perpendicularité et de distance entre les différents objets géométriques de l'espace, toutes notions à la base d'une compréhension robuste des formules de volume. Cela nécessite entre autres que le statut de certains énoncés, comme ceux considérés dans la section précédente, fasse l'objet d'une **clarification théorique**. Furtuna (2008) relève en effet qu'au Québec — et on peut penser que la situation est sensiblement la même en France à cet égard —, un des obstacles à un travail efficace de la géométrie de l'espace au secondaire est que l'élève y travaille dans un cadre paradigmatique différent, mais pourtant concomitant, de celui de la géométrie plane : alors que le travail en géométrie plane se situe dans le paradigme de la *géométrie axiomatique naturelle* (grosso modo, celui de la géométrie axiomatique « à la Euclide » : cf. Houdement et Kuzniak, 2006), le travail en géométrie de l'espace se fait dans le paradigme de la *géométrie naturelle*, où les validations sont essentiellement empirico-perceptives, et où le statut théorique des énoncés

[17] De fait, l'existence et l'unicité sont assurées dès lors que le polyèdre est homéomorphe à la sphère.

n'est ni discuté, ni même problématisé. Pour bien comprendre ce que l'enseignant attend de lui, il est essentiel que l'élève sache dans quel paradigme se situer, discerne une cohérence minimale dans les contrats relatifs à la géométrie, et puisse transposer à la géométrie de l'espace les raisonnements, connaissances et modes de travail mis en œuvre en géométrie plane. Entre autres par le travail qu'elle permet sur l'angle dièdre, nous avançons donc en conclusion que la situation présentée ici est appropriée pour faire passer les élèves au paradigme de la géométrie axiomatique naturelle en géométrie de l'espace, et ainsi contribuer à combler le hiatus entre géométrie plane et géométrie de l'espace au secondaire.

Bibliographie

BACHER R., CARTIER L., GRENIER D., SCHMITT M.-J. (2006) Activités... autour des polyèdres de Platon. *Petit x*, n°70, pp. 73-79.

BERTHELOT R. et SALIN M.-H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire.* Thèse de l'Université de Bordeaux 1.

CARTIER L. (2008) *Le graphe comme outil pour enseigner la preuve et la modélisation.* Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble.

DIAS T. et DURAND-GUERRIER V. (2005) Expérimenter pour apprendre en mathématiques, *Repères IREM*, n°60, pp. 61-78.

DURAND-GUERRIER V. (2005) Retour sur le Schéma de la validation explicite dans la théorie des situations didactiques à la lumière de la théorie des modèles de Tarski. *Actes du colloque Quelles références épistémologiques pour les didactiques*, Bordeaux, 25-27 mai 2005.

FURTUNA D. (2008) *Modélisation dans l'espace : obstacles du passage du bidimensionnel au tridimensionnel.* Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal.

GRENIER D. (2007) Des « situations recherche » pour l'apprentissage des savoirs transversaux. *Actes du colloque EMF 2006*, Université de Sherbrooke, Québec.

GRENIER D. et PAYAN C. (1998) Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en didactiques des mathématiques*, vol. 18, n°1, pp. 59-99.

HARTSHORNE R. (2000) *Geometry: Euclid and beyond.* Springer, New-York.

HOUDEMENT C. et KUZNIAK A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, vol. 11, pp. 175-216.

JANVIER C. (1994) *Le volume. Mais où sont les formules ?* Modulo Éditeur, Ville Mont-Royal, Québec.

LAKATOS I. (1984) *Preuves et réfutations.* Trad. de N. Balacheff et J.-M. Laborde. Éditions Hermann, coll. Actualités scientifiques et industrielles, Paris.

OUVRIER-BUFFET C. (2003) *Construction de définitions/construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques.* Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble.

PARZYSZ B. (1991) Espace, géométrie et dessin. Une ingénierie didactique pour l'apprentissage, l'enseignement et l'utilisation de la perspective parallèle au lycée. *Recherches en didactiques des mathématiques*, vol. 11, n°23, pp. 211-240.

TANGUAY D. (2004) La formule d'Euler. *Envol* (Revue du GRMS). Première partie dans le n°129, pp. 11-18. Deuxième partie dans le n°130 (2005), pp. 11-14.

ANNEXE 1. Calcul de la mesure des angles dièdres

Soit un polyèdre inscriptible dans une sphère, dont les faces sont toutes un même polygone régulier à p côtés. La mesure en radians β de chacun des angles digones est alors donnée par $\beta = \pi\,(p-2)/p$. Notons Σ la sphère et G son centre. Soit S un sommet quelconque du polyèdre. Pour fixer une image, nous supposons que S est le pôle nord de Σ et que SG est une droite verticale. Notons q le degré de S : il y a donc q faces adjacentes en S. Il y a aussi q sommets adjacents à S, chacun à l'autre extrémité d'une des q arêtes jointes en S. Ces q sommets étant à égale distance de S, ils sont placés sur le cercle, intersection de Σ avec la sphère centrée en S et de rayon égal à la longueur des arêtes. Les angles digones formés par les arêtes qui joignent ces sommets à S étant de même mesure β, les q sommets forment un q-gone régulier, situé dans un plan horizontal (perpendiculaire à l'axe SG) que nous notons P. P découpe les q faces adjacentes en S en q triangles isocèles congrus $T_1, T_2, \ldots, T_q$, de sommet commun S et de côtés les arêtes de ces faces. La projection orthogonale sur P des triangles $T_1, \ldots, T_q$ donne q triangles isocèles $T_1', T_2', \ldots, T_q'$, de sommet commun S'. Les angles en S' des triangles T_i' sont de même mesure $\gamma = 2\pi/q$. Nous allons maintenant calculer l'angle dièdre ϕ en calculant l'angle entre deux vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{m}$, orthogonaux respectivement à deux faces adjacentes, $\vec{m}$ étant l'image de $\vec{n}$ par rotation d'angle γ et d'axe $SG = SS'$. Considérons pour cela le point H, pied de la hauteur issue de S dans un des triangles T_i, par exemple dans $T_1 = \Delta ASB$ (voir Figure 2).

L'angle dièdre est l'angle (obtus !) entre le triangle T1 = ΔASB et le triangle T2 = ΔBSC, soit le supplémentaire de l'angle que font les deux vecteurs normaux, respectivement, aux plans ASB et BSC, quand ces vecteurs sont choisis pour pointer de S' vers l'extérieur de la pyramide.

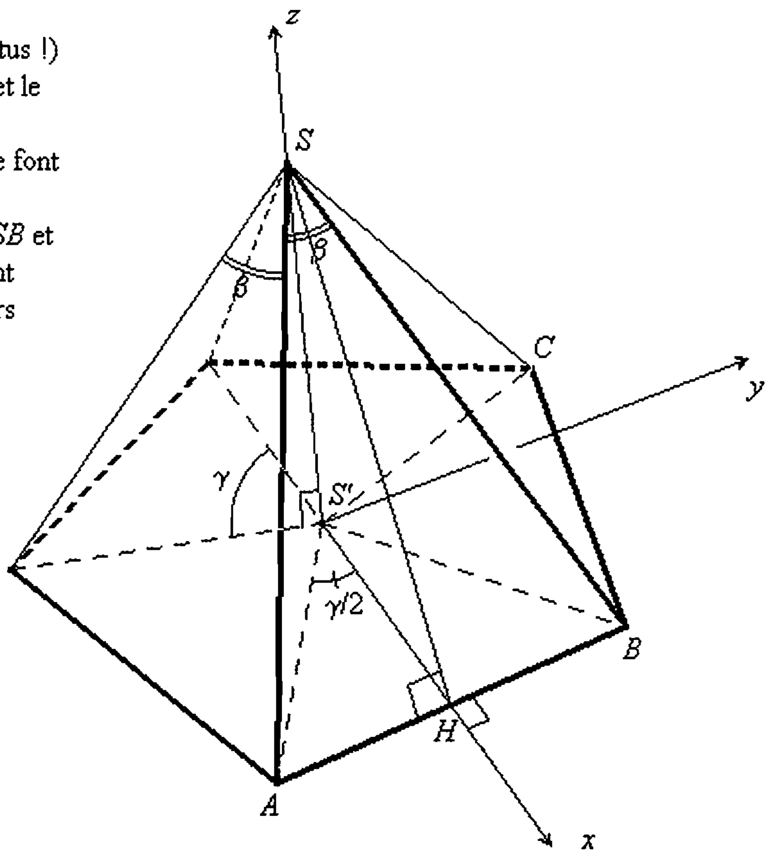


Figure 3 : Calcul de l'angle dièdre

Calculons l'angle θ que fait T_1 avec le plan P, c'est-à-dire l'angle $\angle SHS'$. Comme le triangle $\Delta SHS'$ est rectangle en S', on a que $\cos\theta = HS'/HS$. Considérant les triangles $\Delta S'HA$ et ΔSHA, rectangles en H, on a $HS' = AH/\mathrm{tg}(\gamma/2)$ et $HS = AH/\mathrm{tg}(\beta/2)$, si bien que

$$\cos\theta = HS'/HS = \frac{\mathrm{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\mathrm{tg}\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{p}\right)}{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{q}\right)} = \frac{1}{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{p}\right)\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{q}\right)}. \quad (*)$$

En prenant le repère de l'espace centré en S', d'axes $S'x$ le long de $S'H$, $S'z$ le long de $S'S$, et $S'y$ perpendiculaire au plan HSS', la matrice de rotation d'axe SS' et d'angle γ est donnée par

$$\begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Un des deux vecteurs unitaires normaux au plan qui inclut $T_1 = \Delta ASB$ est le vecteur

$$\vec{n} = (\sin\theta,\ 0,\ \cos\theta)$$

et son image par la rotation d'axe SS', d'angle γ, est le vecteur (unitaire)

$$\vec{m} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma\sin\theta \\ \sin\gamma\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Le cosinus de l'angle entre les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{m}$ est bien sûr donné par leur produit scalaire, égal à $\cos\gamma\sin^2\theta + \cos^2\theta$. Attention ! Cet angle est le supplémentaire de l'angle dièdre ϕ cherché (dans la figure précédente, on voit bien que l'angle dièdre est obtus, mais que l'angle entre deux vecteurs, normaux respectivement à ΔASB et ΔBSC et pointant vers l'extérieur de la pyramide, est aigu). On a donc la relation

$$\cos\phi = -\vec{n}\cdot\vec{m} = -\cos\gamma\sin^2\theta - \cos^2\theta.$$

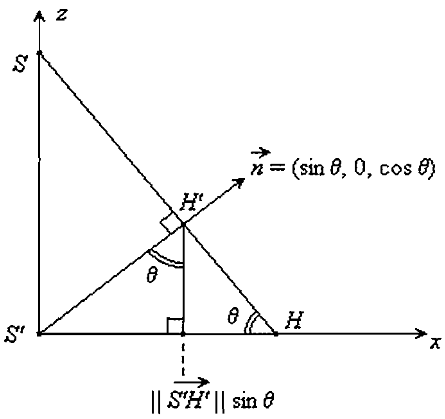


Figure 4 : Le vecteur normal pointant vers l'extérieur

Un calcul utilisant la relation (*) et les identités trigonométriques usuelles (notamment l'identité $\sin^2 a \sin^2 b - \cos^2 a \cos^2 b = \sin^2 a - \cos^2 b$) permet d'obtenir la formule

$$\sin(\phi/2) = \cos(\pi/q)/\sin(\pi/p).$$

Sachant que $0 \leq \phi \leq \pi$, on a finalement que $\phi = 2\arcsin\left(\cos(\pi/q)/\sin(\pi/p)\right)$.

Pour montrer que cet angle ϕ sera le même entre toutes les faces du polyèdre donné au départ, et que le degré des sommets distincts de S sera partout de q, il suffit d'étendre le raisonnement aux autres sommets, de sommet adjacent en sommet adjacent en partant de S. En effet, considérons par exemple le sommet A, au bout d'une des arêtes dont l'autre extrémité est S. En A se joignent un certain nombre q' d'arêtes, elles-mêmes côtés de p-gones réguliers, et formant donc des angles digones de mesure $\beta = \pi(p-2)/p$. Comme pour S, A est le sommet d'une pyramide inscrite dans la sphère Σ, dont la base est un q'-gone régulier et dont les triangles latéraux sont chacun inclus dans une des faces adjacentes en A. Au moins deux de ces triangles forment un angle dièdre de mesure ϕ, puisque les deux faces d'arête commune AS forment un angle dièdre de mesure ϕ. Comme la pyramide est régulière droite, les angles dièdres des triangles latéraux sont en fait tous de mesure ϕ, et l'on a forcément $q = q'$. CQFD.

	Faces	Sommets	Arêtes	p	q	Angle dièdre	Symétries directes	Symétries
Tétraèdre	4 triangles équilatéraux	4	6	3	3	70° 31' 44"	A_4	S_4
Cube	6 carrés	8	12	4	3	90°	S_4	$S_4 \times \{\pm 1\}$
Octaèdre	8 triangles équilatéraux	6	12	3	4	109° 28' 16"	S_4	$S_4 \times \{\pm 1\}$
Icosaèdre	20 triangles équilatéraux	12	30	3	5	138° 11' 32"	A_5	$A_5 \times \{\pm 1\}$
Dodécaèdre	12 pentagones réguliers	20	30	5	3	116° 33' 54"	A_5	$A_5 \times \{\pm 1\}$

… où S_n désigne le *groupe symétrique* sur n éléments et où A_n désigne le *groupe alterné* sur n éléments, sous-groupe des permutations paires de S_n.

ANNEXE 2. Le document de présentation donné aux étudiants

Thème : polyèdres et graphes

0. Introduction

Un polyèdre est une région fermée non aplatie de l'espace, délimitée par des faces planes polygonales. Les sommets et les côtés de chacune des faces polygonales sont appelés respectivement *sommets* et *arêtes* du polyèdre. Les mathématiciens se sont intéressés depuis longtemps à des polyèdres particuliers, ceux vérifiant « le plus de régularités possibles ». Nous vous proposons un approche expérimentale des « polyèdres réguliers de l'espace » et de quelques-unes de leurs propriétés remarquables.

Dans un premier temps, nous vous proposons de chercher une définition (une caractérisation) des polyèdres réguliers, que nous débattrons collectivement, question de nous mettre d'accord. Dans un deuxième temps, il s'agira de construire « le plus grand nombre possible » de polyèdres réguliers, à partir de leurs sommets et arêtes, puis de faire des conjectures sur leur nombre total (à similitude près, bien entendu). Enfin, nous étudierons quelques propriétés fondamentales. Pour cela, nous vous proposerons de construire une représentation plane particulière de ces objets de l'espace, représentation qui servira à établir les preuves de ces propriétés.

I. Une définition de « polyèdre régulier »

Question 1

Proposer une définition de « polyèdre régulier », à partir des caractéristiques qui vous semblent les mieux à même de lui assurer « le plus de régularités possibles ».

On pourra réfléchir aussi bien à une définition « intuitive » négociable avec des élèves, qu'à une définition plus formelle. Cependant, la définition « intuitive » doit être suffisamment explicite pour permettre de valider ou invalider tout candidat polyèdre, pour décider ou non si on l'admet comme polyèdre régulier.

Remarque. Une définition n'est pas unique : un même objet peut avoir plusieurs caractérisations (une caractérisation étant une propriété nécessaire et suffisante pour avoir l'objet en question) et de telles caractérisations sont équivalentes. Lorsqu'une définition est choisie, toute définition équivalente peut être présentée comme « propriété caractéristique ». Par exemple, si l'on choisit de définir un rectangle comme un quadrilatère convexe ayant quatre angles droits, alors on pourra démontrer ensuite que la propriété « être un parallélogramme avec un angle droit », ou la propriété « avoir des diagonales congrues et qui se coupent en leur milieu », est caractéristique du rectangle. Mais on pourrait tout aussi bien définir le rectangle comme « un parallélogramme ayant un angle droit », et démontrer ensuite que la propriété « avoir quatre angles droits » est caractéristique du rectangle (nécessaire et suffisante pour avoir un rectangle).

Pour le rapport : sans nécessairement transcrire le détail de tous vos échanges, gardez une trace écrite des principales questions que vous vous êtes posées, des débats auxquels elles ont donné lieu (essayez de les synthétiser) et bien sûr, de vos conclusions.

II. Construction de polyèdres réguliers

Il s'agit ici de construire le plus possible de polyèdres « réguliers », à partir d'une des définitions établie lors de l'activité précédente. Pour ce qui suit, nous nous baserons sur la définition ou caractérisation suivante.

Définition – caractérisation

Un *polyèdre régulier* est un polyèdre convexe ayant un même nombre d'arêtes issues de chacun des sommets, et dont toutes les faces sont des polygones réguliers isométriques (côtés et angles congrus). En chaque sommet, il y a donc toujours le même nombre d'arêtes et le même nombre de polygones réguliers (les faces) qui se joignent. Si on appelle *angle dièdre* l'angle entre deux faces (mais au fait, comment définiriez-vous l'angle entre deux faces ou plus généralement, l'angle entre deux plans de l'espace), les angles dièdres sont tous congrus dans un polyèdre régulier. Un « polyèdre régulier » est inscriptible dans une sphère.

Remarque : un polyèdre est convexe s'il est entièrement situé du même côté de chacun des plans définis par ses faces. Décider qu'un polyèdre régulier est convexe est un choix.

Il y a différentes manières de réaliser un polyèdre, selon le matériel qu'on choisit. Le matériel que nous vous proposons (billes aimantées et tiges rigides, ou pâte-à-fixe et cure-dents) permet de réaliser des solides polyédraux à partir de leurs sommets et de leurs arêtes. Mais quel que soit le matériel utilisé, **il faut anticiper la construction.**

Question 2

2.1. Quelles propriétés géométriques (nombre d'arêtes, nombre de faces, type de face, angles) doivent être vérifiées pour obtenir un polyèdre régulier ? Par exemple, que se passe-t-il en un sommet donné ? Justifiez vos réponses.

2.2. Réalisez le plus grand nombre possible de polyèdres réguliers, en notant à chaque fois :
- les caractéristiques ;
- les critères de validation de votre construction ;
- les polyèdres construits que vous rejetez et pourquoi vous les rejetez.

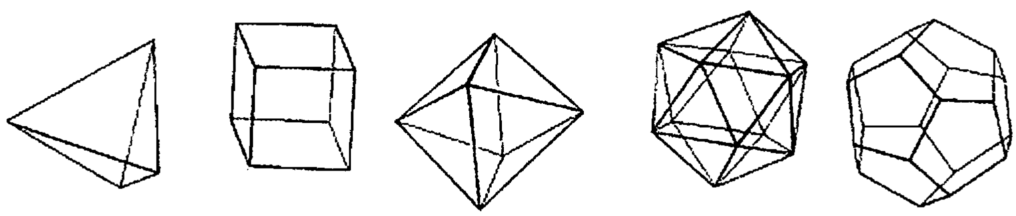
Consignez tout cela dans le rapport écrit.

Question 3

Décrivez dans le rapport les apprentissages qui sont en jeu — pour vous et pour d'éventuels élèves à qui vous soumettriez l'activité — dans les parties 1 et 2 de l'activité.

III. Une représentation plane (un peu particulière) des polyèdres réguliers

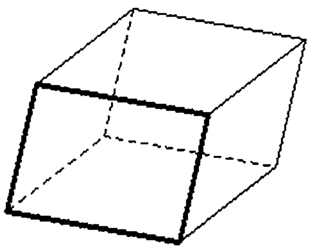
Dans la phase II, le matériel fourni a permis de construire cinq « polyèdres réguliers », conformes à la définition choisie. En voici une représentation classique.

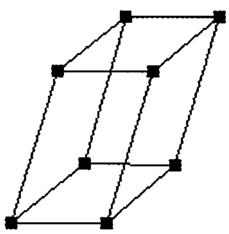


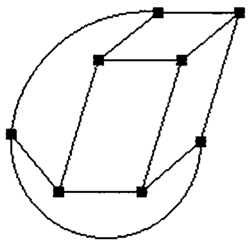
Vous avez pu constater que certains de ces polyèdres sont plus faciles à construire que d'autres, à cause de leur rigidité ou du petit nombre de leurs arêtes. Certains polyèdres ont pu être éliminés, car ne répondant pas aux critères choisis pour la « régularité ».

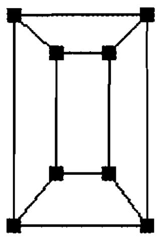
Cependant, la construction matérielle ne permet pas de répondre, de manière certaine, à la question suivante : y a-t-il d'autres polyèdres réguliers, en plus des cinq construits ?

Pour répondre à cette question, plusieurs approches sont possibles. Nous vous en proposons une qui utilise une représentation plane particulière de ces polyèdres. À chacun d'eux, on associe **un graphe**, de la manière (très simple) suivante : les sommets et les arêtes du graphe sont ceux du polyèdre (deux sommets sont reliés par une arête dans le graphe si et seulement si ils sont reliés par une arête dans le polyèdre). Une telle représentation met en évidence les relations entre les sommets. En revanche, elle ne montre pas les propriétés d'isométries des arêtes et des polygones. On peut même décider, par exemple, de représenter une arête du graphe par une courbe. On peut ainsi tracer plusieurs représentations équivalentes du graphe associé à un polyèdre. Par exemple, les trois schémas à droite sont des représentations équivalentes d'un même graphe, celui associé au parallélépipède à gauche :









Certaines de ces représentations sont plus faciles à interpréter que d'autres.

Voici une technique pour réaliser un tel graphe.
Prenez le solide en le positionnant devant vous, un peu loin (bras tendu), de manière à le regarder du point de vue d'un de ses sommets. Sur la feuille de papier, placez les sommets dans les positions et ordre où vous les voyez. Ensuite, tracez les arêtes du graphe : il y a une arête entre deux sommets du graphe si et seulement si il y a une arête correspondante sur le polyèdre. Pour bien voir tous les sommets et toutes les arêtes, il faut prendre un point de vue légèrement décalé à partir du sommet que vous avez choisi, en direction du centre d'une des faces proches.

Une autre technique
On peut également concevoir le graphe planaire associé au polyèdre en imaginant un polyèdre dont la frontière serait translucide, et faite d'une matière parfaitement élastique, qu'on pourrait déformer et étirer comme on veut sans rien déchirer. On choisit une face qu'on étire uniformément dans toutes les directions, jusqu'à ce qu'on puisse y « aplatir » les autres faces, avec leurs sommets et arêtes. On obtient ainsi un graphe planaire, ayant le même nombre de sommets et d'arêtes que le polyèdre. Le tracé du graphe délimite un certain nombre de zones fermées qui correspondent chacune à une face du polyèdre. On retrouve ainsi toutes les faces, sauf celle de laquelle l'observateur est proche ou encore, celle qu'on a étirée et où l'on a aplati les autres faces. On compte autant de zones fermées dans le graphe qu'il y a de faces moins un, dans le polyèdre. On associe la face manquante à la portion de plan illimitée, au-delà des arêtes extérieures du graphe. On peut ainsi, dans une telle représentation, retrouver les sommets, arêtes et faces du polyèdre. Les polygones constituant les faces du polyèdre sont repérables sur le graphe, avec le même nombre de sommets et d'arêtes, mais ces faces sont « déformées ».

Question 4

4.1. Vérifier la propriété suivante : pour chacun des 5 polyèdres réguliers, il existe une représentation par un graphe telle qu'aucune arête du graphe ne recoupe aucune autre (un tel graphe est dit *planaire*).

4.2. Essayez ensuite de vous (de nous !) convaincre que cette propriété est vraie pour tout polyèdre régulier.

4.3. On associe à chaque polyèdre le couple (p, q), où p est le nombre de côtés de chaque face polygonale et q le nombre de côtés issus de chaque sommet. Récapitulez dans un tableau l'information glanée jusqu'à maintenant : donnez pour chacun des 5 polyèdres son nom, le nombre de ses faces (F), de ses sommets (S), de ses arêtes (A) et le couple (p, q).

Définition

On appelle *diagramme de Schlegel* une représentation par un graphe planaire d'un polyèdre régulier.

IV. Combien existe-t-il de polyèdres réguliers dans notre espace ?

Pour répondre à cette question, nous avons donc à notre disposition :

- une représentation plane classique des 5 polyèdres réguliers ;
- le diagramme de Schlegel de chacun d'eux.

Question 5

5.1. Établir la relation suivante, valable pour tous les graphes planaires et connue sous le nom de « formule d'Euler » :
Soit F *le nombre de faces d'un graphe (on compte aussi la face extérieure infinie),* A *son nombre d'arêtes et* S *son nombre de sommets. Alors* F+S–A = 2.
Indice : on peut faire une preuve par récurrence sur A.

5.2. Établir la relation suivante, valable pour tout graphe planaire associé à un polyèdre régulier :

$$Fp = Sq = 2A.$$

5.3. En déduire que pour tout polyèdre régulier, on a :

$$F/(1/p) = S/(1/q) = A/(1/2)$$

et que donc, p et q vérifient nécessairement la relation $(2p + 2q - pq) > 0$.

5.4. Résoudre l'inéquation précédente dans $\mathbb{N}^2$. En déduire qu'il n'existe que cinq couples (p, q) d'entiers positifs satisfaisant cette relation, et que ces 5 solutions correspondent aux 5 polyèdres réguliers construits précédemment. Conclure.

Note : le couple (p, q) est appelé le *symbole de Schläfli* du polyèdre régulier.