CLASSER ET DEFINIR : DES PROCESSUS CONNEXES

Cécile OUVRIER-BUFFET
IUFM de Créteil
DIDIREM, Paris 7
ERTé Maths à Modeler

La classification s'avère transversale aux sciences. Elle apparaît de manière forte en sciences naturelles du fait de la diversité des espèces, mais constitue aussi un processus présent à part entière en mathématiques. Nous allons interroger dans cet article ce processus de classification et en proposer une nouvelle lecture : celle de la construction de définitions. Nous présenterons une activité de classification en mathématiques, ainsi que les modes de gestion possibles, relativement à la co-construction d'un nouveau concept et de sa (ou ses) définition(s).

Classer et trier

La frontière entre tri et classification demeure parfois floue. Certains parlent même de confusion entre tri et classification, mais cela dépend de l'objet d'étude. Nous rejoignons ici les définitions énoncées par Pierrard (2002). Trier, c'est réaliser, dans une logique binaire, deux classes, à partir d'une propriété discriminante (par exemple : les objets rouges d'une part et les objets non rouges d'autre part). Classer, c'est regrouper des objets ayant une même propriété. Considérer la relation « a la même couleur que » conduit à établir autant de classes que de couleurs. Il est vrai que la classification n'utilise en général pas de critères négatifs. Mais si l'on considère une propriété, il est alors toujours possible de classer des objets suivant qu'ils possèdent cette propriété ou non. Une recherche de nouvelles propriétés peut s'opérer dans chacune des deux classes alors établies et le processus de classification se poursuit. En mathématiques, on établit généralement des propriétés inclusives[1], tel que l'on peut l'observer dans la classification des quadrilatères. Cela n'a pas toujours été le cas, comme le montrent les définitions du livre I des Eléments d'Euclide. Ces dernières sont en effet exclusives[2] et ne se situent pas dans une logique de

[1] Par exemple, les rectangles sont définis comme des parallélogrammes ayant un angle droit : il s'agit là d'une structure hiérarchique inclusive.

[2] Euclide définit les quadrilatères ainsi : « *Parmi les figures quadrilatères, un carré est celle qui est équilatérale et rectangulaire, un rectangle, celle qui est rectangulaire et non équilatérale, un losange, celle qui est équilatérale et non rectangulaire, un parallélogramme, celle qui a ses côtés et ses angles opposés égaux entre eux et qui n'est ni équilatérale ni rectangulaire ; les autres quadrilatères, ceux-là exceptés, se nomment trapèzes.* » (définition 22, livre I).

classification hiérarchisée et dérivative. Cette discussion terminologique sur le tri et la classification n'est en fait, pour l'objet de notre étude, pas d'actualité. Précisons notre questionnement. Nous considérons la classification comme un processus ayant pour but de restituer des propriétés, mais aussi de catégoriser et de nommer. Ainsi, se pencher sur la classification, c'est interroger le concept de « propriété » et l'acte de dénomination. Nous en venons alors au concept de « définition ». Classer est un processus propre à la démarche scientifique, tout comme l'est l'acte de définir, ce dernier ne se réduisant pas à une seule dénomination. Ces deux processus ne sont pas étrangers l'un à l'autre : nous allons montrer les liens qui les unissent.

Classer et définir

Définir en sciences

Nous allons nous pencher sur les sciences naturelles et les mathématiques pour questionner le processus de classification et étudier les liens qu'il entretient avec la construction de définitions. Ces deux sciences nous offrent un terrain particulièrement favorable pour l'observation de ces processus.

On peut se tourner vers la taxinomie où l'activité de classification prédomine (on parle de classification typologique). C'est, traditionnellement, la **méthode aristotélicienne de définition** des classes, par *genre* et *différences spécifiques*, qui y opère. Il faut trouver le genre auquel appartient la chose puis un trait particulier qui différencie cette chose des autres éléments du genre. Par exemple, « animal » est le genre de l'homme et « raisonnable » est sa différence spécifique. Définir signifie alors « diviser », en référence à la méthodologie platonicienne. Aristote insiste de plus sur le fait de ne pas être redondant lors de l'établissement d'une définition. D'un point de vue purement logique, la méthode aristotélicienne consiste à caractériser un concept par condition nécessaire et suffisante[3]. Ce processus est tout autant présent en mathématiques qu'en taxinomie.

Mais restons dans le domaine des sciences naturelles. Dans sa philosophie, la classification en sciences naturelles est passée d'une conception aristotélicienne à une vision « en évolution » (voir par exemple Crépin, 2002). La théorie de l'évolution est bien sûr au cœur de ce phénomène. Mais les transformations du cahier des charges de la classification, et donc la modification profonde des conceptions propres à ce processus, ont été historiquement très progressives. À l'école, c'est encore la classification de Linné (XVIII$^{\text{ème}}$ siècle) qui est enseignée : elle implique une vision aristotélicienne des définitions. Pour l'analyse de la classification en sciences naturelles, nous renvoyons le lecteur à l'article de D.Orange (2006) ainsi qu'au séminaire de G.Lecointre (2005).

Revenons maintenant au processus de définition. Des philosophes de la biologie (Hull 1965, Sober 1980) ont explicitement remis en cause la méthode aristotélicienne, avançant qu'une caractérisation par conditions nécessaires et suffisantes ne permettait pas de prendre en compte le transformisme continu des espèces. Ces auteurs font par ailleurs remarquer que ce problème ne se pose pas en géométrie où les concepts sont « *éternels* »

---

[3] Caractérisons un concept X par deux conditions C1 et C2. Deux implications en découlent :

- Si j'ai X, alors j'ai C1 et C2 (il s'agit là de la condition nécessaire).
- Si j'ai C1 et C2, alors j'ai X (c'est la condition suffisante).

Par exemple, en mathématiques, définir un carré comme étant un quadrilatère ayant 3 angles droits n'est pas suffisant. Le carré doit nécessairement avoir 3 angles droits mais cela ne suffit pas (cette seule propriété nous permet d'obtenir un rectangle).

(sic)[4]. Dans le raisonnement de Hull, déterminer quelles sont les propriétés suffisantes à la caractérisation définitive « une fois pour toutes » d'une espèce s'avère impossible, tout comme l'établissement du nombre de ces propriétés. Hull souligne ainsi que, contrairement aux définitions aristotéliciennes, ces « nouvelles » définitions pourront être modifiées et seront de longueur indéfinie. En d'autres termes, les propriétés ne seront nécessaires et suffisantes qu'à un instant donné, l'évolution des espèces faisant émerger de nouvelles propriétés et/ou en transformant certaines. Nous avons là des définitions provisoires, évolutives et non minimales, pour les besoins de la classification des espèces. Comme l'indique D.Orange (2006), il faut s'interroger aussi et surtout sur la question qui sous-tend une classification. En sciences naturelles, il s'agit de classer pour répondre à un problème de diversité et d'unité du monde vivant. Le questionnement est *in fine* de même nature en mathématiques : classer permet de faire émerger des propriétés discriminantes ou non, de hiérarchiser et de nommer des entités.

Ce qui prédomine donc en sciences naturelles, tout comme en mathématiques, est la reconnaissance d'objets, et, avec elle, l'établissement de propriétés. Mais qu'est-ce qu'une propriété ? La dualité variable/invariant est fondamentale en mathématiques. On peut définir une propriété comme étant l'invariant dans les variations d'un objet satisfaisant à un ensemble de conditions. Classer, c'est alors **hiérarchiser** des attributs, et non pas questionner l'origine des choses ou l'existence des concepts. Une fois réalisée, la classification va restituer des **propriétés**, mais aussi des **dénominations**. L'arbre résultant d'un tel processus sera variable suivant le point de vue adopté sur les objets.

Nous allons développer deux exemples, l'un en mathématiques, l'autre en sciences naturelles, pour souligner les similitudes quant au travail sur les propriétés et la classification. Mais avant cela, rappelons quelques conceptions sur la question. Philosophiquement, les processus à l'œuvre en biologie et en géométrie sont fréquemment opposés malgré l'existence de nombreuses similitudes entre ces deux sciences (le procédé aristotélicien de définition par exemple). Presque caricaturalement, certains auteurs[5] présentent les définitions géométriques comme le commencement d'un système déductif, alors que les définitions en sciences naturelles seraient obtenues par induction, du fait de l'observation d'expériences. L'existence des objets mathématiques provient ainsi de l'acte intellectuel qui les définit, alors qu'en sciences naturelles, la préexistence est de rigueur. Dans les deux cas cependant, la dénomination est postérieure à la génération de la chose : l'attribution d'un nom vient en quelque sorte valider la classification et les définitions qui la structurent. Mais cela n'est pas si trivial : définir pour classer certes, mais « pour quoi faire » ? Quel est le questionnement sous-jacent ? Depuis Darwin, les classifications en sciences naturelles ont connu certains flottements : il n'était pas toujours évident de savoir si la classification reposait sur « qui descend de qui ? » ou sur « qui est le plus proche de qui ? ». Méthodologiquement, la classification phylogénétique[6] actuelle s'interroge sur « qui est le plus proche de qui » et présente une hiérarchisation des attributs, ce qui la rend voisine de la classification en mathématiques. La caractérisation minimale reste, quant à elle, une spécificité mathématique.

---

[4] Remarquons qu'il est souvent question de l'opposition entre les mathématiques et les sciences expérimentales, reléguant ainsi les mathématiques à une vérité de toute éternité et les privant d'une dimension expérimentale qu'elles comportent pourtant.

[5] Voir par exemple Liard (1873) ou Hull (1965).

[6] La classification phylogénétique est un système de classification systématique des êtres vivants. Elle illustre les principes d'évolutions et de parenté des espèces.

Nous utilisons dans cet article des exemples mathématiques issus de la géométrie : cela sera justifié par la suite.
Etudions maintenant quelques exemples et questionnons la classification, les propriétés et les définitions qu'il est possible d'énoncer.

Un exemple en mathématiques

Prenons tout d'abord un exemple en mathématiques : les polygones. Recherchons une régularité, un invariant au sein de cette classe afin d'établir des sous-classes. On pourra se concentrer sur des propriétés liées à :

- la combinatoire (nombre de côtés),
- ou la forme (convexité : croisé, concave, convexe, étoilé),
- ou la symétrie,
- ou les angles (présence d'angles droits ou non) etc.

La définition même de « polygone » peut se faire de différentes façons, ne serait-ce que du fait de la prise en compte ou non de la convexité. On peut ensuite définir, au sein du groupe « polygones », différentes classes suivant le nombre de côtés, puis, dans chacune de ces classes, questionner la convexité par exemple. La classe « 3 côtés » pourra s'appeler triangle, et pourra aussi être définie d'une autre façon (avec 3 angles par exemple). Et ainsi de suite. Multiplier les approches sur un même objet et définir alors une classe comprenant plusieurs caractéristiques est également envisageable. En mathématiques, la dénomination viendra « après » qu'une classification ait été établie, validant en quelque sorte l'aboutissement de celle-ci. La **définition** d'un objet[7] **mathématique** comprendra alors **la caractérisation et la dénomination.**

Un exemple en sciences naturelles

Prenons maintenant un exemple en sciences naturelles, les oiseaux, et tentons d'établir différentes propriétés propres à cette classe[8]. Même si théoriquement la démarche est la même, il est vraisemblablement plus aisé pour un élève d'énoncer des caractères propres aux oiseaux que de travailler sur les polygones, du simple fait de l'existence des animaux hors de la classe. Les oiseaux volent, pondent des œufs, ont des plumes, ont un bec dur, peuvent marcher, ne nagent pas. Le rouge-gorge vérifie toutes ces caractéristiques, et s'avère être incontestablement un oiseau. Le lapin, hormis le fait de marcher, n'en vérifie, lui, aucune, heureusement puisque « ce n'est pas » un oiseau. Mais que faire avec l'autruche par exemple qui ne vole pas mais valide les autres caractéristiques ? Un phénomène semblable se produit si l'on considère le pingouin : il ne vole pas, il nage, mais pond des œufs, a des plumes, a un bec dur et peut marcher. Il y a là un réel questionnement. Ces deux exemples soulignent le phénomène suivant : en sciences naturelles, le concept et son nom **préexistent**, hors de l'école. Ainsi, l'élève possède déjà une **connaissance en extension**[9] du concept en question, ce qui n'est pas le cas en mathématiques. Le rapport qu'a l'élève aux objets n'est en effet pas le même en sciences naturelles qu'en mathématiques. De plus, le questionnement sur les propriétés vient « naturellement » dans l'exemple des oiseaux, alors qu'il peut sembler plus difficile à faire émerger pour les polygones.

---

[7] Nous pourrions également parler de concept.

[8] Il pourrait également être question de sous-classes de la classe « oiseaux », mais la définition même d'oiseau pose de nombreuses questions, nous allons nous y arrêter.

[9] On parle de connaissance en extension, à l'image de la connaissance que tout un chacun a d'un chien ou d'un chat : tout le monde sait différencier un chat d'un « non chat » mais qui peut le définir ?

Concevoir des situations de classification

Pour concevoir des situations de classification en mathématiques, nous faisons l'hypothèse qu'il est nécessaire de développer la connaissance perceptive de ce qu'est un objet et de ce qu'il n'est pas (si elle n'existe pas encore chez l'élève). Cela signifie donner un accès à l'élève à une première délimitation intuitive entre des objets « qui se ressemblent » et les autres objets. Un travail sur les propriétés mathématiques en jeu en découlera. De plus, **épistémologiquement, la classification en appelle à un acte définissant, quelle que soit la discipline.** Classer et définir sont ainsi des **compétences scientifiques transversales**, comme l'est la démarche de preuve. Il nous semble primordial, pour la constitution d'une démarche scientifique chez l'élève, de questionner l'enseignement de telles compétences à l'école. Il est alors indispensable, pour la construction de situations d'apprentissage, de se concentrer sur les objectifs que l'on souhaite atteindre, en terme de **compétences transversales**, telles que « classer, définir, caractériser », mais aussi de **connaissances notionnelles**.

Une activité réalisable en classe se dessine. Elle comporterait les éléments suivants :
- une entrée par un questionnement sur une classification (à deux classes), afin de favoriser une première appréhension perceptive, en extension, d'un objet ou d'un concept ;
- la donnée du nom de la classe considérée : celle-ci permet de conférer un statut au nouvel objet et agit ainsi comme une institutionnalisation locale ;
- la demande de l'écriture d'une définition afin de faire expliciter les critères sous-jacents à la constitution des classes.

Nous concentrons notre étude sur la question suivante : **en quoi la demande de l'écriture (voire de la réécriture) d'une définition alimente et fait évoluer la situation de classification ?** Nous montrerons en particulier que la demande explicite d'une définition, formulée par l'enseignant, permet aux élèves de revenir sur leur classification et favorise l'explicitation des propriétés en jeu. Cette phase de formulation qu'est l'écriture d'une définition représente la stabilisation d'un écrit et renseigne l'enseignant sur les propriétés perçues par les élèves mais aussi sur leur rapport à la définition. **Nous soulignerons qu'un travail de définition ne se limite pas à la seule demande de l'écriture d'un énoncé définissant et caractériserons ainsi un « nouveau » mode de gestion de situations de classification à la disposition de l'enseignant**.
D'un point de vue didactique, on peut s'interroger : **en quoi une tâche de classification en appelle à la définition** si ce n'est la dénomination arbitraire et conventionnelle d'une classe ? **Quel est l'intérêt d'une entrée par la définition ?** Des études précédentes (Ouvrier-Buffet 2003, 2004) ont montré qu'une culture des mathématiques induit des conceptions sur ce qu'est et doit être une définition en mathématiques. On peut certes s'interroger sur la représentation que des élèves de primaire ont de la définition et sur la façon dont ils la mettent en œuvre. A priori, il s'agirait d'une conception lexicale, proche de l'usage du dictionnaire, la culture mathématique en primaire n'étant encore que peu développée, mais qu'en est-il exactement ? Rappelons ici le sens étymologique de « définir » : il s'agit de délimiter ce qu'est un objet de ce qu'il n'est pas. Entrer dans un processus de définition commence dans la construction d'un « premier » rapport à un objet, c'est-à-dire « savoir en extension » ce qu'est cet objet et ce qu'il n'est pas, i.e. être en mesure de le reconnaître, et ce, sans nécessairement apporter une justification. Il est ici question de classification comportant deux classes. De plus, le rapport préexistant que les élèves ont au concept de définition peut venir enrichir leur processus de recherche d'une définition (et donc d'une classification). Chercher à expliquer ce qu'est le concept,

l'illustrer par des exemples et contre-exemples, définir d'autres termes apparaissant dans la définition sont autant d'éléments pouvant servir de relance à l'enseignant si les élèves ne le font pas. Demander aux élèves de formuler une (ou plusieurs) définitions représente certes une phase de formulation importante, notamment dans un processus classificatoire, mais marque aussi l'intérêt porté à un concept, et de ce fait constitue une institutionnalisation locale.

Nous garderons à l'esprit tout au long de l'article les caractéristiques prédominantes d'une définition en mathématiques, telles qu'elles peuvent être questionnées en primaire, à savoir (Ouvrier-Buffet 2003) :

- une dimension « logique » (condition nécessaire et suffisante, mode de définition aristotélicien par *genre* et *différences spécifiques*) ;
- une dimension « preuve et réfutations » (importance des exemples et des contre-exemples dans la construction d'une nouvelle connaissance et donc dans le processus définissant) ;
- une dimension « dénomination ».

Présentation d'une activité de classification : un travail sur la définition

Il existe dans la littérature des situations de classification, en géométrie plane principalement, s'adressant à des élèves d'une dizaine d'années. Le point de départ est généralement la donnée d'exemples et de contre-exemples d'objets. Il peut s'agir de formes convexes (Fletcher 1970) ou de quadrilatères (Freudenthal 1973, repris par De Villiers 1998). Les objets mathématiques sont alors donnés par des représentations, et c'est justement sur ces représentations qu'un premier travail de définition peut s'effectuer. En effet, l'appréhension perceptive d'objets peut représenter un premier pas vers l'identification, perceptive elle aussi, d'une propriété.
Prenons donc l'une de ces situations de construction de définition potentielles. Fletcher propose une séquence sur la convexité. Nous avons choisi ce concept pour plusieurs raisons. Il n'est certes pas enseigné en primaire, mais cela représente en soi un avantage puisque les élèves ne disposeront pas de définition « toute prête » ou lue auparavant dans un manuel. Nous pourrons de plus analyser les processus de classification et de définition et étudier en quoi la demande explicite d'une définition est effectivement un levier à la disposition de l'enseignant pour faire évoluer une situation de classification. Indiquons de plus que le concept de « convexité » a une dimension « perceptive » non négligeable, favorisant ainsi une connaissance en extension. Il possède également plusieurs définitions, différentes par leur nature et les concepts mathématiques sous-jacents.

Classification de formes « convexes »

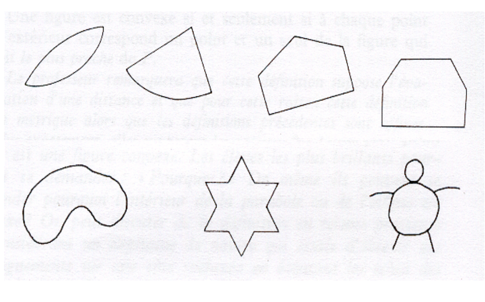


Figure 1 - Exemples et contre-exemples du concept de « convexe » (Fletcher, 1970)

Etudions tout d'abord la leçon portant sur la convexité proposée par Fletcher. Elle se présente ainsi. L'enseignant désigne les formes présentées ci-dessus en spécifiant aux élèves celles qu'il « *préfère* ». Avant l'introduction de la terminologie « convexe » par l'enseignant, les élèves ont à **distinguer** des formes convexes d'autres qui ne le sont pas, mais « *sans formuler cette distinction verbalement* » (Fletcher, 1970, p. 266). C'est en fait un travail sur des exemples et contre-exemples[10], sans définition à la clef, permettant une connaissance en extension de la convexité. Une fois la terminologie introduite, les élèves ont à produire des figures convexes et d'autres qui ne le sont pas. Nous sommes là en présence d'une phase de **génération d'exemples et de contre-exemples**. Après d'éventuelles introductions de termes supplémentaires, considérés comme « *sans difficulté* » par l'auteur, tels que la « frontière d'un ensemble de points » ou l'« intérieur », « *le moment est maintenant venu de chercher des définitions formelles* » (ibid. p. 267). Il est conseillé d'orienter la suite de la leçon vers une discussion sur les définitions possibles du concept de « convexe ». Le but de cette activité, affiché par Fletcher, est de « *développer un langage précis pour exprimer correctement les données initiales* ».

Une construction de définitions

Il y a clairement dans la séquence de Fletcher une phase de construction de définitions dans laquelle des exemples et contre-exemples sont tout d'abord donnés. Une activité de génération d'exemples et de contre-exemples est ensuite proposée sans verbalisation. Un travail sur les définitions formelles possibles de « convexe » termine la séquence. Fletcher différencie la phase de recherche de définitions, qui se situe dans la donnée et la génération des exemples et contre-exemples, de la phase d'élaboration de définitions. Plus précisément, Fletcher distingue une phase portant sur des définitions « *intuitives* » et une phase sur les définitions dites « *formelles* ». Les définitions suivantes sont proposées par l'auteur :

> *« Définition possible 1 : une figure est convexe si et seulement si, étant donnés deux points P et Q de la figure, tous les points du segment PQ appartiennent à la figure.*
> *Définition possible 2 : une figure est convexe si et seulement si toute droite passant par un point quelconque intérieur à la figure, coupe la frontière exactement en deux points.*
> *Définition possible 3 : une figure est convexe si et seulement si par chaque point de sa frontière il passe au moins une ligne de support.*
> *Définition possible 4 : une figure est convexe si et seulement si à chaque point P extérieur correspond un point et un seul de la figure qui soit le plus proche de P »* (Fletcher, 1970, p. 267s)

La situation de Fletcher présente de réelles potentialités pour devenir une situation de construction de définitions. Il nous faudrait donc expérimenter une situation de type « classification », pour laquelle des exemples et des contre-exemples constitueraient un point de départ. L'analyse précédente nous indique déjà que les situations de classification favorisent naturellement le processus de définition aristotélicien par *genre et différences spécifiques*.

Classer et définir à l'école élémentaire

Dans les programmes, les seules activités traitant des classes appartiennent au champ de la géométrie. Elles concernent le « *classement* » de figures selon l'existence d'axes de symétrie, le « *classement* » de figures planes et de solides, « *pour formaliser quelques*

[10] On trouve également des activités concernant l'identification d'exemples et de contre-exemples appropriés à un concept donné chez BM. Barth (1987).

propriétés simples » dès le cycle 2. Classer et faire émerger des propriétés fonctionnent de pair. Au cycle 3, il est question de « *classer et ranger des surfaces selon leur aire* » et de « *classement et de rangement d'angles* », comme préliminaires aux activités de mesurage (il s'agira là du niveau primaire ou collège, suivant le concept considéré). Certes, la comparaison est « le » type de tâches proposé généralement pour questionner les grandeurs et mesures. Mais l'activité de « ranger » - ranger des nombres en particulier - implique la mise en œuvre d'une relation d'ordre, ce que nous ne considérons pas comme relevant de la classification.

Dans les manuels, des activités de classification sont parfois présentes, sans explicitation particulière. Prenons un exemple, « J'apprends les Maths CM1 », paru en 2005 (voir en annexe). La présentation fait penser à une activité de classification. Le contenu mathématique sous-jacent est en effet la classification des quadrilatères, avec des définitions inclusives. L'auteur explicite son intention : définir à partir d'exemples et de contre-exemples. On pourrait donc voir là une activité de définition … Cependant, les critères et dénominations sont donnés. Il ne reste que l'étape d'écriture de la définition à partir de la perception d'invariants. Dans la seconde activité, rien ne montre que tous les quadrilatères qui ont 4 côtés de même longueur sont des parallélogrammes et pourtant on affirme avoir appris que le losange est un parallélogramme particulier. La gestion s'avère alors délicate … De plus, la classification mathématique des quadrilatères s'appuie sur des propriétés nécessaires et suffisantes alors que la connaissance des élèves de ces objets est tout à la fois perceptive et redondante en terme de propriétés.

Il faut alors s'interroger : souhaite-t-on là faire travailler les élèves sur des propriétés géométriques ou sur des processus comme la classification et la construction de définition ? Il ne faudrait pas se méprendre sur les objectifs, étant donnée la complexité de ces processus.

Pour notre expérimentation, nous avons choisi un concept permettant la construction de plusieurs définitions afin de montrer la richesse d'une activité de classification (même si elle ne comporte que deux classes !). L'entrée dans l'activité se fait par la classification : le concept de « convexe » doit y être défini.

Présentation de la situation « convexité »

Le matériel à disposition des élèves (cycle 3) est constitué d'objets physiques découpés dans du carton et d'une feuille où les figures sont dessinées (voir figures ci-dessous). La manipulation et le tracé de segments ou de droites sont ainsi possibles.

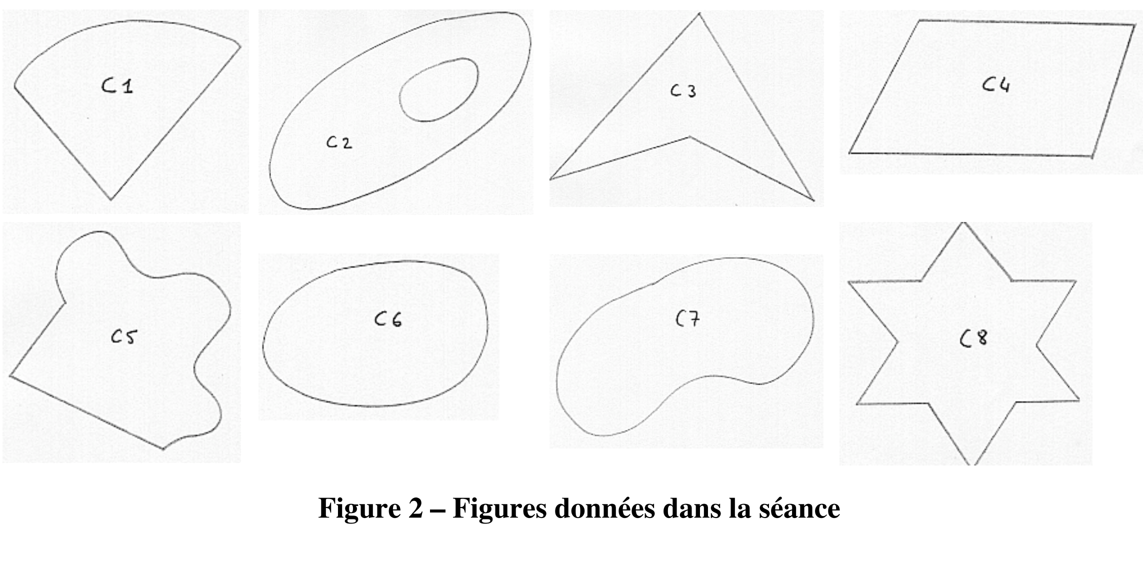


Figure 2 – Figures données dans la séance

La consigne est énoncée de la façon suivante : « faire deux classes ».
Cinq groupes, chacun étant constitué de trois ou quatre élèves de cycle 3, participent à l'activité. Au niveau du déroulement, un gestionnaire-observateur (noté GO) est présent et a pour projet de conduire la séance vers la construction de définitions de « convexe », à partir des classes produites par les élèves.

Analyse a priori de la situation

Définitions possibles

Les figures, objets de la classification que nous avons proposée aux élèves, ont été réalisées selon les contraintes suivantes :

- nous avons choisi de tracer au moins une figure comportant des traits courbes et non courbes afin de ne pas avoir une classification suivant la caractéristique « traits courbes et traits droits » ;
- nous avons évité les quadrilatères et autres figures géométriques très institutionnalisées, pour court-circuiter tout recours à des classifications et définitions pré-établies.

Le concept en jeu est celui de convexe. Nous avons déjà exposé ci-dessus les différentes **définitions** de Fletcher.
Notons qu'une définition semblable à la définition 3 donnée précédemment, mais de nature « dynamique » cette fois, pourrait émerger. En langage naturel, il s'agirait de :

> Définition 3bis : en parcourant la frontière de la figure, toute la figure est toujours du même côté (un sens de parcours étant choisi).

Pour cette définition en particulier, nous pourrions en imaginer une évolution catalysée par des arguments de nature langagière et logique, à savoir définir les termes non encore définis apparaissant dans la définition. En effet, il y est question de « frontière », notion topologique à définir. De plus, l'expression « être toujours du même côté » d'une figure nécessite une explicitation.
Un autre point de vue possible sur la « convexité » consisterait en la considération des angles : tous les angles sont saillants dans une figure convexe. Resterait alors à définir ces deux notions d'angle et de saillance.

Intéressons-nous maintenant au processus mis en œuvre dans le type de situation que nous proposons.

Classification : vers la construction de définitions

Le **processus** que nous souhaitons observer est celui de la réalisation de classes et de construction de définition(s) de « convexe ». La construction de définitions étant en étroite relation avec la classification, nous prévoyons d'utiliser un **mode de gestion** de la séance s'appuyant sur des leviers mis en évidence dans notre étude de la définition en mathématiques (Ouvrier-Buffet 2003). Un processus de définition s'articule en fait autour de quatre pôles qui sont bien sûr dépendants des types de problèmes considérés :

- un pôle « construction de théorie » (qui ne concerne pas directement le primaire mais que nous préparons)[11] ;

[11] Si travailler sur la construction de théorie ne concerne pas directement le primaire, il s'agit par ce genre de situations de dégager le concept de propriété (comme invariant dans les variations). Une seule tâche de tri ne le permet pas. Axer la situation sur la construction de définitions permet de faire émerger non pas la dénomination mais la caractérisation.

- un pôle « résolution de problème » (comprenant un travail spécifique sur les exemples et contre-exemples) ;
- un pôle « logique » (caractérisation par condition nécessaire et suffisante notamment) ;
- un pôle « langagier ».

La gestion de la construction de définition peut s'appuyer sur l'énoncé définissant : il s'agira, dans ce cas, de questionner les élèves sur des aspects langagiers ou logiques de la définition, en particulier lorsque les formulations s'avèreront ambiguës. L'enseignant pourra de plus demander explicitement aux élèves de générer des exemples et contre-exemples, leur permettant ainsi de revenir sur la définition qu'ils sont en train de construire. Ce travail est primordial lors de la construction de définitions. Nous soulignons là l'importance de la génération d'exemples et de contre-exemples pour tester une définition. L'enseignant dispose également de modes de gestion « classique » : il pourra par exemple reprendre un trait pertinent énoncé par les élèves. Un tel geste apparaît comme majeur lors de la gestion de processus de construction de définitions : il permet en effet d'entretenir la dévolution[12] de la « construction de définitions ». Si un tel geste est notable, celui de renvoyer les élèves à la consigne (classer, écrire une définition) l'est tout autant.

Pour résumer, les interventions de l'enseignant (ou du GO) dans une activité de classification (vue comme une activité de construction de définitions) sont les suivantes. Il s'agit donc pour le GO d'utiliser la demande explicite de définition pour faire évoluer la situation. Les interventions prévues du GO vont porter sur les éléments ci-après. Le GO demande aux élèves d'expliciter les classes réalisées, dans le but de leur faire verbaliser les propriétés permettant de constituer les classes. Lorsque les caractéristiques de ces classes sont suffisamment consistantes, le GO introduit le terme « convexe ». Il n'a pas été prévu de laisser la dénomination aux élèves. Cet acte est loin d'être neutre : en effet, attribuer un nom à un concept permet de lui donner un statut, une importance, ce qui, en soi, constitue une institutionnalisation de connaissance. La dénomination valide implicitement le travail que les élèves ont réalisé jusque là. Le GO peut également intervenir en demandant aux élèves de produire des figures convexes et des figures qui ne le sont pas, favorisant ainsi un travail de génération d'exemples et contre-exemples. Ce type de travail permet l'émergence de la formulation de propriétés.

Productions des élèves

Quatre types de classes : lexicale, morphologique, mathématique, pavage

Les élèves ont constitué les classes uniquement à partir des figures cartonnées. Le support papier a cependant été utilisé dans certains groupes comme nous le décrirons plus loin lors de l'étude détaillée de productions d'élèves.

Différentes classifications sont apparues.

La première est de nature **lexicale**. Les élèves rapprochent les figures d'objets issus de la vie quotidienne et leur attribuent un nom. On trouve alors :

> « *Part de pizza* » pour C1, « *palette de peintre* » pour C2, « *deltaplane* » pour C3, « *œuf* » pour C6, « *étoile* » pour C8, et « *sans forme précise* » pour C4, C5 et C7.

Il s'agit là d'une conception nominaliste de la définition, la seule donnée d'un nom

[12] Nous considérons la « dévolution » comme un processus présent tout au long de la situation, sans réduire la dévolution à la donnée du problème et à la production de stratégies de base (Brousseau 1998, Margolinas 1993).

suffisant à caractériser l'objet. On peut supposer que la donnée de nouvelles formes semblables à une part de pizza ou une étoile aurait conduit les élèves à enrichir chacune de ces classes.

La deuxième classification pourrait être qualifiée de **morphologique** car elle met en œuvre des descriptions physiques des formes manipulées. Deux types de classes, présentes dans la quasi-totalité des groupes observés, apparaissent alors :
- une distinction classique : figures pointues (C1, C3, C4, C5, C8) / figures non pointues (C2, C6, C7) ;
- et son pendant : figures arrondies / figures non arrondies.

Cette explicitation des classes « arrondies/non arrondies » a conduit les élèves d'un groupe à construire verbalement la définition de figure « *plus arrondie qu'une autre* » par des considérations portant sur la longueur du périmètre et la surface. Ainsi, pour les élèves, une figure F1 est plus arrondie qu'une figure F2 si la longueur de sa frontière est plus grande. Par exemple, pour ces élèves, C5 est plus arrondie que C1. Si perceptivement les périmètres sont semblables, les élèves désignent la figure la plus arrondie comme celle possédant le plus de sous figures arrondies, appréciant en fait perceptivement les surfaces pouvant composer chacune des figures à comparer. Par exemple, C5 comportent « plus » de surfaces arrondies que C1.

Une troisième classification, « **mathématiquement** » exprimée, appelle des connaissances explicites antérieures de géométrie. Quatre de ce type sont apparues, à savoir :
- figures possédant un axe de symétrie (C2, C3, C4, C8) / ou non ;
- polygones (C3, C4, C8) / non polygones ;
- figures ayant des diagonales (C3, C4, C5, C8) / ou non ;
- figures ayant au moins un angle (C1, C3, C4, C5, C8) / et les autres.

La quatrième et dernière classification entre dans la catégorie « **pavage** » : elle correspond en fait aux manipulations des élèves conduisant à l'assemblage de certaines figures entre elles. Les élèves parlent de figures qui « s'accouplent » ou non (C1, C3, C4, C8 s'emboîtent véritablement, un tel phénomène n'était a priori pas prévu lors du tracé des figures). À leurs yeux, cette classification apparaît comme anecdotique et le vocabulaire qu'ils utilisent alors les fait singulièrement rire !

La construction de définitions

Nous avons choisi de relater ici le cheminement d'un groupe de trois élèves de CM1-CM2, afin de montrer où peut se situer un processus de construction de définitions en primaire. Nous soulignerons en particulier les représentations des élèves sur le concept de définition ainsi que la gestion opérée par le GO.

Critères de classement

Le groupe en question a proposé successivement trois types de critères pour classer :
- les figures possédant un axe de symétrie ou non ;
- les figures ayant au moins un angle et celles n'en ayant pas ;
- une caractérisation très proche de convexe : « *quand on relie les coins, les bords, c'est intérieur ou extérieur* ».

La dernière classification a conduit les élèves à élaborer deux classes, deux figures restant cependant non classées (C2, la pièce trouée, et C5, la pièce alliant droites et courbes) : « *ce n'est pas bon car il faudrait trois colonnes* ».

Les **interventions du GO** se sont organisées en trois moments distincts :
- le premier consistait en l'exigence d'obtention de deux classes (répondre ainsi à la consigne), en tranchant pour C2 et C5 ;
- le deuxième était la donnée du nom de « convexe » : cela est en accord avec une vision philosophique des définitions (donner un nom avant d'entrer dans la caractérisation, pour savoir « de quoi l'on parle ») ;
- le troisième était, conformément à ce qui était annoncé, la demande d'une définition écrite de « convexe ».

La réaction des élèves ne s'est pas faite attendre : ils sont allés chercher le dictionnaire, ce qui nous permet de souligner que leur rapport aux définitions mathématiques est de même nature que leur rapport aux définitions lexicales, ce qui n'est pas le cas d'élèves du secondaire ou du supérieur[13]. Il s'avère alors que les leviers langagiers et logiques ne peuvent pas être utilisés. De plus, pour les élèves, une seule définition suffit. La demande réitérée du GO d'autres définitions de « convexe » n'a eu de réponse que par effet de contrat didactique. Les définitions produites, même si elles s'avèrent nombreuses, reprennent la même propriété mathématique (voir ci-après). Restent alors à la disposition du GO des leviers de nature mathématique, consistant en la recherche de caractéristiques de la convexité : ces leviers comprennent notamment la demande explicite d'exemples et de contre-exemples. Le GO doit être particulièrement sensible aux potentialités, en terme de construction de définitions, des propriétés caractéristiques en germe dans le discours des élèves.

Définitions produites par les élèves et gestion opérée par le GO

Voici les définitions successives écrites par ces élèves : nous les articulons avec les interventions du GO.

- **Déf-élève 1** : « *convexe : figure ayant les points qui se relient à l'intérieur* ». Les élèves remarquent que ce n'est « *pas convexe dès qu'il y a un creux* ». Le terme "point" est ainsi barré, remplacé par "angles" puis par "angles et arrondis". La discussion porte alors sur « *relier un arrondi* ».

  Intervention du GO : « *quelle est la signification de relier un arrondi ? Précisez "arrondi"* ». Le GO demande aux élèves un exemple et un contre-exemple répondant à leur première définition.

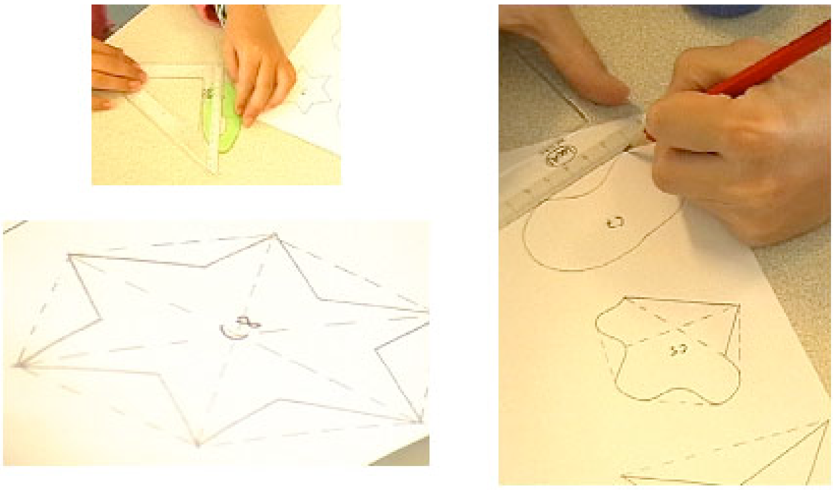
- **Déf-élève 2** : « *figures régulières (ou irrégulières) se reliant à l'intérieur* ». Le terme "irrégulières" est ensuite barré.

  Intervention du GO : il demande alors une autre définition ne mobilisant pas l'idée des traits intérieurs. Ce à quoi les élèves répondent très justement : « *quand on relie les points, c'est à l'intérieur. On ne voit pas comment on pourrait dire autrement* ». Pourtant, notons que dans le discours des élèves, deux autres définitions auraient pu émerger du fait de la manipulation des figures (voir photo ci-dessous). Ce sont la définition 2[14] car les élèves posent la règle sur les figures et considèrent l'intérieur et l'extérieur (mais n'aboutissent pas sur le nombre de points d'intersection d'une sécante

[13] Voir Ouvrier-Buffet 2003.

[14] Définition 2 : une figure est convexe si et seulement si toute droite passant par un point quelconque intérieur à la figure, coupe la frontière exactement en deux points.

avec la figure) et la définition 3[15] puisque les élèves posent la règle contre les figures, tangentiellement, lorsqu'un arrondi est présent en particulier, mais dans les autres cas également.



Figures 3 – Tracés des élèves

Suite à la demande du GO, plusieurs définitions semblables ont été écrites : les définitions potentielles n'ont pas émergé.

- **Déf-élève 3** : « *figure de n'importe quelle forme, quand on relie les points, ils sont à l'intérieur* ».
- **Déf-élève 4** : « *convexe : quand on trace les diagonales, ça reste à l'intérieur de la figure* ». Ce que l'on trouve dans un autre groupe avec la formulation suivante : « *si on trace une droite ou une diagonale hors de la forme, c'est non convexe* ».
- **Déf-élève 5** : « *convexe : quand on relie un point à un autre, la droite ne sort pas de la figure* ». Autre énoncé proposé par les élèves : « *si on met une corde qui relie les angles, et qu'elle sort de la figure, elle est non convexe* ».

  Intervention du GO : le GO demande alors de considérer non pas des segments mais des droites (se basant sur la potentialité de la définition 2). Le lecteur ne sera pas étonné de lire la réaction des élèves : « *mais on sort du thème ! Si on trace une droite sur toutes les figures, elles peuvent toutes être non convexes* » … ce qui bien sûr ne répond plus à la consigne, à savoir établir deux classes.
- Fin de la séance : le GO tente « encore » de faire émerger la définition 2 en particulier (l'on pourrait voir dans les tracés des élèves, avec un petit effet Jourdain certes, les définitions 2 et 3). Les élèves ne voient pas les points d'intersection, l'intérieur et l'extérieur de la figure ayant une prégnance perceptive plus forte. La transcription de la propriété énoncée par le GO (« deux points d'intersection ») s'effectue par les élèves dans les termes suivants, après quelques difficultés avérées dans la compréhension du quantificateur universel : « *si on trace n'importe quelle droite, s'il y a deux points aux extrémités, c'est convexe. S'il y en a plus, c'est non convexe* ».

Les interventions du GO ont été semblables dans d'autres groupes : elles portaient

[15] Définition 3 : une figure est convexe si et seulement si par chaque point de sa frontière il passe au moins une ligne de support.

principalement sur la construction de définitions, c'est-à-dire sur la demande explicite d'une définition, sur la réécriture de l'énoncé produit par les élèves (suivant les termes utilisés) ainsi que sur la demande de génération d'exemples et de contre-exemples. Les réactions des élèves montrent que la conception « une idée suffit » pour caractériser est présente, même s'ils acceptent d'écrire plusieurs définitions. La difficulté dans la gestion de telles situations résident dans l'écriture de diverses définitions mettant en jeu des points de vue différents sur un même concept. Même si d'autres définitions étaient potentiellement présentes dans le discours et les tracés des élèves, le GO n'est pas parvenu à les faire ressortir. Ce que l'on peut attribuer à l'âge des élèves et à leur manque de pratique de définitions mathématiques. Montrer qu'un concept peut être appréhender de différentes façons représente un élément essentiel à la compréhension des mathématiques. Caractériser un même concept suivant des points de vues variés est une compétence qui sera utilisée lors de l'apprentissage de la preuve. C'est cela qui constitue un élément de la pensée mathématique : il faut le préparer dès l'école.

Conclusion

Dans le cadre des activités de classification, l'entrée par la définition permet d'aménager des phases de formulation. Cela peut être réalisé en sciences naturelles comme en mathématiques.

Nous pouvons renvoyer le lecteur aux activités présentées dans « La Main à la Pâte » pour ce qui concerne les sciences naturelles. Nous avons montré, à partir d'un exemple en mathématiques, à quel point ce processus est intimement lié à celui de la construction de définitions. Les extraits présentés soulignent un mode de gestion spécifique à un processus définissant. Il est bien évident que l'expérimentation de la construction de définitions en primaire n'est absolument pas de même nature que dans le secondaire : en effet, les élèves de cycle 3 n'ont pas encore une culture des définitions mathématiques, ce qui limite les interventions du GO. Cependant, la richesse conceptuelle que proposent les situations définissantes issues de tâches de classification n'est pas à nier : le travail sur les propriétés prépare l'apprentissage de la preuve qui se fera au collège. Existe-t-il des concepts se prêtant « mieux » à se type de situation que d'autres ? Nous avons illustré l'ensemble de cet article avec des concepts issus de la géométrie. La raison en est la suivante : la connaissance en extension peut être activée dans l'appréhension perceptive des objets géométriques (domaine du visuel). La manipulation de formes dans l'activité va dans le même sens. Les figures planes et les solides se prêtant ainsi particulièrement bien à des situations de classification et donc de définition. Leur appréhension peut se faire par la vue et par le toucher à l'aveugle. Il faut garder à l'esprit les processus « classer » et « définir » comme des compétences transversales de la démarche scientifique et ne pas considérer une activité de construction de définitions comme un but en soi. La demande de définition est en effet un mode de gestion de la situation permettant à l'enseignant de faire porter l'attention de l'élève sur les propriétés. Cet article illustre ainsi les possibilités en terme de gestion de telles situations, en soulignant les leviers permettant d'agir sur un processus définissant. De telles expérimentations seraient à conduire de nouveau sur des concepts du programme, afin d'évaluer plus finement leurs impacts en terme d'appréhension de nouveaux concepts à l'école élémentaire.

Références bibliographiques

BARTH, BM. (1987) *L'apprentissage de l'abstraction*. Retz.

BRISSIAUD, R. (2005) *J'apprends les Maths, CM1*. Editions Retz.

BROUSSEAU, G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage, Grenoble.

CREPIN, P. (2002) Des conceptions initiales aux systèmes explicatifs des élèves de l'école primaire sur l'origine des espèces. *Grand N n°70*. IREM de Grenoble.

DE VILLIERS, M. (1998) To teach definitions in geometry or to teach to define? In A. Olivier & K. Newstead (Eds), *22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 2, 248-255. Stellenbosch, RSA.

FLETCHER T.J. (1970) *L'apprentissage de la mathématique aujourd'hui – Essai d'une didactique nouvelle pour l'enseignement du second degré*. 4ème Edition, OCDL, Paris.

FREUDENTHAL, H. (1973) *Mathematics as an educational task*. Dordrecht. Reidel.

HULL, D. (1965) The Effect of Essentialism on Taxonomy - Two Thousand Years of Stasis, Part I. *British J. Phil. Sci.*, vol. 15(60), 314-326.

LECOINTRE, G. (2005) *La classification en sciences naturelles à l'école et ses enjeux*. Séminaire de la main à la Pâte, Diffusion des savoirs de l'ENS. Séminaire disponible à l'adresse : http://www.diffusion.ens.fr/index.php?res=conf&idconf=744

LIARD, L. (1873) *Des définitions géométriques et des définitions empiriques*. Thèse publiée à La Librairie Philosophique de Ladrange. Paris.

MARGOLINAS, C. (1993) *De l'importance du vrai et le faux dans la classe de mathématiques*. La Pensée Sauvage, Grenoble.

MATH.EN.JEANS (1992) Combien méchant peut être un convexe ? Ou quel est le convexe le moins rond. *MATh.en.JEANS au Palais de la Découverte*, 167-172. Ed. MATh.en.JEANS, Paris.

ORANGE, D. (2006) Les classifications du vivant à l'école : former l'esprit scientifique ou inculquer la « bonne » solution ? *Grand N n° 77*, 91-107. IREM de Grenoble.

OUVRIER-BUFFET, C. (2003) *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques*. Thèse. Laboratoire Leibniz, Université Joseph Fourier – Grenoble. Disponible en version électronique : http://www-leibniz.imag.fr/~buffet

OUVRIER-BUFFET, C. (2004) Dévolution et gestion de situations de construction de définitions en mathématiques. In *Symposium « Travail du professeur et dévolution dans les classes ordinaires », Congrès de l'AECSE*, Paris, septembre 2004. Disponible en version électronique : http://www-leibniz.imag.fr/~buffet

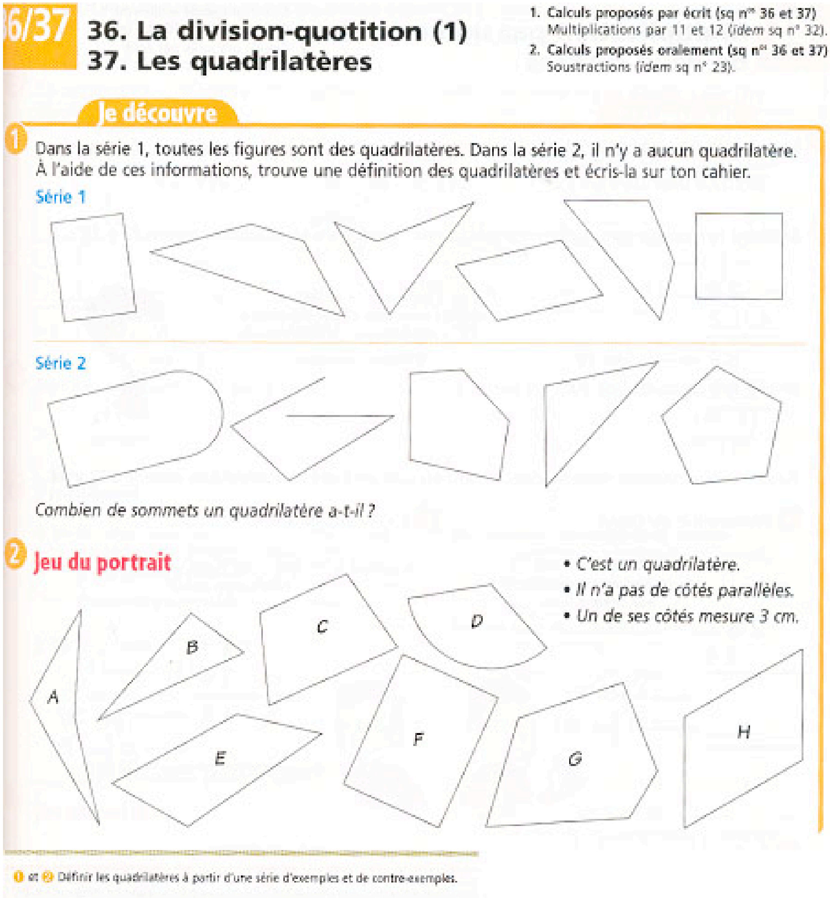
PIERRARD, A. (2002) *Faire des mathématiques à l'école maternelle*. CRDP de l'académie de Grenoble.

SOBER, E. (1980) Evolution, Population Thinking, and Essentialism. *Philosophy of Science*, vol. 47(3), pp. 350-383.

MEN (2002) Documents d'application des programmes, Mathématiques, cycles 2 et 3, Scéren. CNDP.

Annexe

J'apprends les Maths CM1 (2005), Editions Retz.


36/37 **36. La division-quotition (1)**
37. Les quadrilatères

1. Calculs proposés par écrit (sq n^{os} 36 et 37)
Multiplications par 11 et 12 (idem sq n° 32).
2. Calculs proposés oralement (sq n^{os} 36 et 37)
Soustractions (idem sq n° 23).

Je découvre

1 Dans la série 1, toutes les figures sont des quadrilatères. Dans la série 2, il n'y a aucun quadrilatère. À l'aide de ces informations, trouve une définition des quadrilatères et écris-la sur ton cahier.

Série 1

Série 2

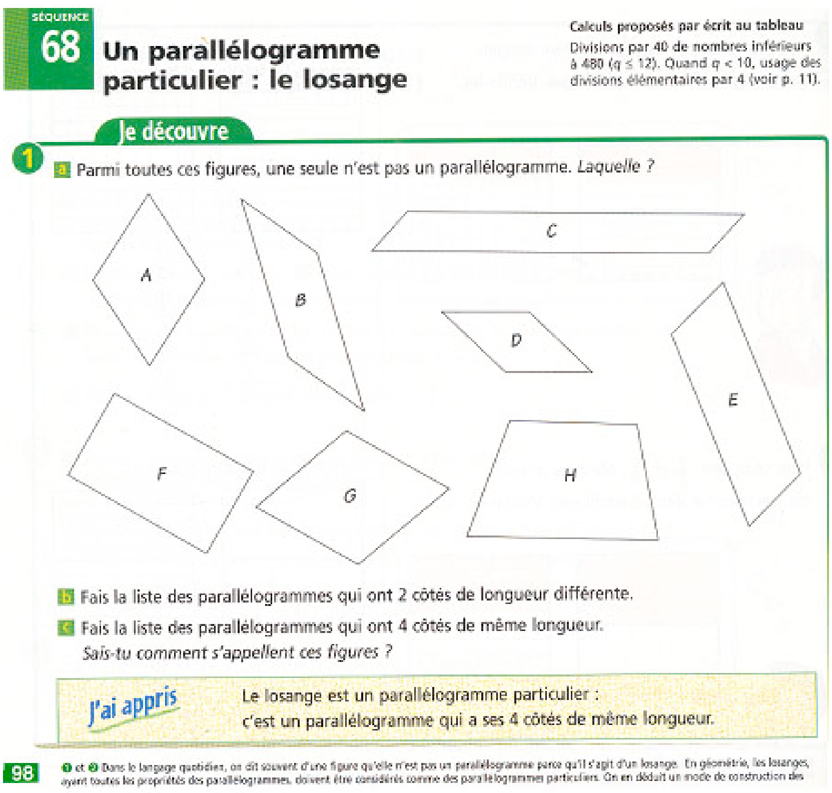
Combien de sommets un quadrilatère a-t-il ?

2 **Jeu du portrait**

- *C'est un quadrilatère.*
- *Il n'a pas de côtés parallèles.*
- *Un de ses côtés mesure 3 cm.*

1 et 2 Définir les quadrilatères à partir d'une série d'exemples et de contre-exemples.

Soulignons les écritures présentes en bas de page : « *définir les quadrilatères à partir d'une série d'exemples et de contre-exemples* ».


SÉQUENCE 68 **Un parallélogramme particulier : le losange**

Calculs proposés par écrit au tableau
Divisions par 40 de nombres inférieurs à 480 ($q \leq 12$). Quand $q < 10$, usage des divisions élémentaires par 4 (voir p. 11).

Je découvre

1 a Parmi toutes ces figures, une seule n'est pas un parallélogramme. *Laquelle ?*

b Fais la liste des parallélogrammes qui ont 2 côtés de longueur différente.

c Fais la liste des parallélogrammes qui ont 4 côtés de même longueur.
Sais-tu comment s'appellent ces figures ?

J'ai appris Le losange est un parallélogramme particulier :
c'est un parallélogramme qui a ses 4 côtés de même longueur.

98 1 et 2 Dans le langage quotidien, on dit souvent d'une figure qu'elle n'est pas un parallélogramme parce qu'il s'agit d'un losange. En géométrie, les losanges, ayant toutes les propriétés des parallélogrammes, doivent être considérés comme des parallélogrammes particuliers. On en déduit un mode de construction des

Dans l'extrait ci-contre, la classification des quadrilatères est implicitement présente et la hiérarchisation de ces polygones particuliers est soulignée en bas de page.