LA NOTION DE FONCTION RÉCIPROQUE ET SON ENSEIGNEMENT

Susana MURILLO-LOPEZ
Université Toulouse III Paul Sabatier,
E.A. 3692, LEMME, France

Catherine-Marie CHIOCCA
ENFA, Dpt. CLEF, PATRE, France

Résumé. Malgré la présence, dans les programmes français de mathématiques, des fonctions carré et racine carrée, exponentielle et logarithme, la notion de fonction réciproque n'a pas d'existence institutionnelle, ce qui peut constituer un obstacle didactique. L'article présente une partie des recherches préliminaires sur cette notion, effectuées dans le cadre de nos travaux sur la correction en classe de mathématiques. Vient ensuite une analyse des difficultés suscitées par certains choix faits dans les programmes français actuels de Terminale S à propos de fonctions réciproques de référence sur lesquelles s'appuient les enseignants du secondaire et du post-secondaire. Enfin, nous relatons les propositions d'enseignement de la fonction réciproque issues des travaux de recherche anglophone.

Mots-clés. fonction réciproque, obstacle didactique, obstacle épistémologique.

Introduction

Nous nous intéressons aux pratiques de correction mises en œuvre par les professeurs ordinaires[1] lorsqu'ils doivent corriger des exercices faisant intervenir des notions qui ne sont plus dans les programmes. Ce phénomène est fréquent dans l'enseignement des mathématiques en France puisque les réformes successives font disparaître des programmes d'enseignement certains contenus mathématiques et en font apparaître d'autres. Or parallèlement, persistent des exercices "classiques" dans lesquels le recours aux contenus disparus est nécessaire pour justifier certaines méthodes de résolution. Nous nous intéressons à la façon dont les professeurs, sous ces contraintes, corrigent ces exercices "classiques".

La notion de fonction réciproque, depuis les changements de programme de 2002 au secondaire, est un exemple de ces contenus disparus des programmes de Terminale S, tout en restant un outil implicite pour certains exercices. Dans le cadre d'un travail de thèse, nous avons mené une analyse a priori de la notion de fonction réciproque, dont le présent article rend compte en partie. La thèse reprend des travaux qui montrent que cette notion est un obstacle didactique et montrent en quoi elle se constitue en

1 Nous appelons "professeur ordinaire" un professeur qui n'a pas de liens avec la didactique des mathématiques sauf celui éventuel d'accepter d'être observé dans sa classe.

obstacle épistémologique.

Nous avons centré nos travaux sur la correction en classe de mathématiques lors d'enseignement dans lesquels la notion de fonction réciproque intervient. Il s'agit plus généralement d'étudier les pratiques d'enseignement des professeurs ordinaires face à un contenu constitué en obstacle didactique au sein d'un vide didactique. La méthodologie de recherche articule une analyse quantitative sur la correction en classe avec une analyse qualitative, issue d'observation de corrections en classe. Nous mettons ainsi en évidence, au sein des marges de manœuvre potentielles des enseignants ordinaires, les choix qu'ils effectuent dans la contrainte de réaliser un enseignement avec une notion clairement constituée en obstacle d'origine épistémologique et didactique.

En effet, le fait que dans les instructions officielles il n'y ait pas d'indication de travail avec les élèves sur la notion de fonction réciproque constitue un vide didactique institutionnel au sens de A. Bronner (1997) et par conséquent un obstacle d'origine didactique au sens de G. Brousseau ; c'est-à-dire : « *ceux qui semblent ne dépendre que d'un choix ou d'un projet du système éducatif* » (G. Brousseau, 1998, p.125).

Cependant il reste dans les manuels scolaires de ce niveau des traces de problèmes anciens pour lesquels il faut disposer de cette notion pour justifier les solutions comme par exemple les résolutions d'équations (avec ou sans changements de variables) logarithmique ou exponentielle. Par ailleurs, C-M. Chiocca[2] a mis en évidence que la notion de fonction réciproque, à l'œuvre implicitement lors de la recherche des valeurs critiques d'un test d'hypothèses dans un enseignement de statistique au niveau L3, constituait un obstacle didactique dans l'enseignement post-secondaire. Lorsque dans un test d'hypothèse, on recherche la valeur critique pour un seuil de risque donné, deux fonctions entrent en jeu : la variable aléatoire (statistique de décision) qui suit une distribution connue sous l'hypothèse nulle et l'inverse de la fonction de répartition de cette distribution. La fonction de répartition d'une distribution donnée semble opérer pour les étudiants comme une « boite noire » qui transforme des nombres réels (valeurs de la variable aléatoire) en probabilités qui sont aussi des nombres réels et qui sont compris entre 0 et 1. L'étude du phénomène de « confusion » entre la fonction de répartition et son inverse (en mathématiques comme avec le tableur) avait révélé que la notion de fonction réciproque était un obstacle didactique.

Dans notre étude des pratiques de correction sous contraintes, nous avons plus particulièrement porté notre attention sur les notions qui ont été longues à se constituer en tant qu'objets mathématiques et qui par conséquent sont des obstacles d'origine épistémologiques pour les élèves. Le concept de fonction réciproque est une de ces notions. En effet, la construction historique de la notion de fonction réciproque s'étale du XVIII^e^ à nos jours (Cf. Murillo-Lopez 2008). L'étude historique du développement et de la constitution de ce concept qui n'est pas présentée ici, montre en quoi la fonction réciproque est un obstacle épistémologique. Longtemps outil non formalisé, puis objet mathématique avec de nombreuses formulations, le concept de fonction réciproque constitue un obstacle d'origine épistémologique au sens de G. Brousseau, c'est-à-dire : « *ceux auxquels on ne peut, ni ne doit échapper, du fait même de leur rôle constitutif dans la connaissance visée. On peut les retrouver dans l'histoire des*

2 Cf. Chiocca (2002)

concepts eux-mêmes » (G. Brousseau, 1998, p.125).

Notre propos ici, n'est pas de développer ces deux aspects de la notion de fonction réciproque mais de montrer quelques points de l'analyse a priori menée dans le cadre des études préliminaires nécessaires à l'exploration des pratiques de correction face à un obstacle didactique.

L'article présente tout d'abord deux définitions actuelles de la fonction réciproque. Puis nous exposons quelques fonctions réciproques de références avec lesquelles travaillent les enseignants du secondaire et du post-secondaire. Enfin, nous donnons un aperçu rapide des rares travaux de recherche actuels sur cette notion.

1. La notion de fonction réciproque

Avant d'aborder la notion de *fonction réciproque* nous revenons sur la notion de fonction. Puis nous préciserons différentes propositions de définition de la notion de fonction réciproque de nos jours.

1.1 Précisions sur la notion de fonction

Les mathématiciens de la fin du XXè siècle proposent des définitions de la notion de fonction réciproque en liaison avec la notion de bijection, en référence unique au secteur des fonctions ou en liant le point de vue des fonctions à celui des équations.

A l'époque des Mathématiques Modernes certains mathématiciens ont introduit une distinction entre les termes de *fonction* et d'*application*. En général la distinction est très particulière. Elle n'est parfois qu'une commodité de langage qui permet d'éviter certaines confusions et qui selon M. Rogalski (2001) n'a rien d'obligatoire. M. Rogalski propose d'employer le mot fonction pour travailler sur des « *fonctions d'une ou plusieurs variables réelles* », et celui d'application « *soit lorsque les ensembles qui interviennent sont a priori quelconques, soit lorsque l'un d'eux au moins est un espace de 'fonctions numériques'* » (Rogalski, 2001, p.20).

La définition donnée par L. Schwartz dans son cours d'analyse de 1981, qui ne fait référence qu'au secteur des fonctions, souligne le fait qu'il n'y a pas de distinction entre les termes « fonction » et « application » :

> « Soit I et J deux ensembles, on appelle <u>application de I dans J</u> ou <u>fonction définie sur I à valeurs dans J</u>, toute correspondance f qui, à chaque élément x de I, fait correspondre un élément, noté $f(x)$, de J. La notation $I \xrightarrow{f} J$ signifie que f est une application ou fonction de I dans J. I s'appelle <u>ensemble initial</u>, J <u>ensemble final</u> de l'application » (L. Schwartz, 1981, p.6).

Adoptant la position de L. Schwartz, nous travaillons indifféremment avec les deux termes.

Plusieurs travaux de recherche portent sur l'enseignement de l'analyse dans le secondaire et plus particulièrement sur l'enseignement des fonctions. Ils proposent des ingénieries didactique pour améliorer l'enseignement et l'apprentissage de cette notion dans le secondaire. En particulier, les travaux d'I. Bloch (Bloch 2002) présentent en détail une situation fondamentale sur les Représentations Graphiques Cartésienne qui constitue un outil précieux pour les professeurs du secondaire soucieux des difficultés futures de leurs élèves dans le post-secondaire.

Après ces précisions sur la notion de fonction, le paragraphe suivant développe les propositions savantes disponibles concernant la notion de fonction réciproque.

1.2 La notion de fonction réciproque

L'idée de fonction réciproque et son usage en tant qu'outil sont présents dès le début du XVIII[e3]. Si l'on pense à l'idée d'inversion comme un processus, on peut faire appel aux premières préoccupations techniques que les analystes se posaient autour de la différentiation et des quadratures (la dérivation et l'intégration). Le terme de « fonction inverse » se retrouve dès les fondements de l'analyse classique au XIX[e] siècle.

a) La proposition de L. Schwartz intrinsèque au secteur des fonctions

L. Schwartz propose la définition ci-dessous en référence exclusive aux fonctions et sans référence aux équations comme le fera M. Rogalski. Quand on a une fonction $f{:}I \to J$, qui fait correspondre à tout élément x de I un élément y de J, il s'agit d'étudier les conditions qui permettent d'affirmer qu'il existe une autre fonction g qui à y fasse correspondre x ; c'est-à-dire, « le chemin de retour » (Cf. Bloch 2002) qui est nommé *fonction réciproque.* L. Schwartz (1981) propose alors la définition suivante :

> « Soit f une bijection, et soit $y \in J$. Appelons $f^{-1}(y)$ l'unique élément x de I tel que $f(x)=y$. Nous venons de définir une application f^{-1} de J dans I. C'est encore une bijection, on dit que c'est l'<u>application réciproque</u> ou la <u>bijection réciproque</u> de f » (L. Schwartz, 1981, p.7-8).

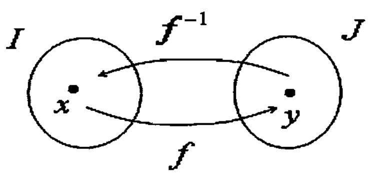


Figure 1

b) La proposition de M. Rogalski liant deux points de vue

Rogalski (2001) propose les définitions antérieures à partir de l'équation qui est attachée à l'application :

> « Soit $f: I \to J$ une application, et y un élément de J. On dit qu'on veut résoudre l'équation $(e_{f,y})$, et on note $(e_{f,y}) : f(x)=y$, lorsqu'on recherche un élément x de I dont l'image par f est y (on peut aussi dire qu'on recherche un antécédent x de y). On dit que x est l'<u>inconnue</u>, et que y est <u>donné</u>. Un élément x de I qui répond à la question est dit une <u>solution</u> de l'équation » (M. Rogalski, 2001, p.18).

On sait la richesse pour l'enseignement de disposer de plusieurs points de vue différents. En effet, cela permet au professeur d'organiser des jeux entre les cadres mathématiques[4] qui sont favorisant pour l'apprentissage. D'où l'importance du résumé ci-dessous[5] qui rassemble le point de vue du langage usuel, le point de vue formel, le

3 Pour plus de détails consulter par exemple : A-P. Youschkevitch (1981) ou bien J. Itard (1984).
4 Douady R. (1987)
5 Rogalski M. (2001) p.21

point de vue des équations et le cas du graphe des fonctions numériques.

« Soit l'application ou fonction $f: I \to J$. On dit que :

Langage usuel	Point de vue formel	Point de vue des équations	Répercussion sur le graphe (dans le cas de fonctions numériques)[6]
f est une <u>injection</u> si des points différents de I ont des images différentes, ou, si tout point y de J a un antécédent *au plus*.	$\forall x, x' \in I$, si $x \neq x'$, alors $f(x) \neq f(x')$, ou bien, $\forall x, x' \in I$, si $f(x) = f(x')$, alors $x = x'$.	Pour tout y de J, l'équation $(e_y): f(x) = y$ a *au plus* une solution.	$\forall a$ réel, l'horizontale $y=a$ coupe $G(f)$ *au plus* en un point.
f est une <u>surjection</u> si pour tout point y de J il y a un antécédent *au moins*.	$\forall y \in J$, $\exists x \in I$, tel que $f(x) = y$.	Pour tout y de J, l'équation $(e_y): f(x) = y$ a *au moins* une solution.	$\forall a$ réel, l'horizontale $y=a$ coupe $G(f)$ *au moins* en un point.
f est une <u>bijection</u> si pour tout point y de J il y a un antécédent et *un seul*.	$\forall y \in J$, $\exists x \in I$, unique tel que $f(x) = y$.	Pour tout y de J, l'équation $(e_y): f(x) = y$ a une solution et *une seule*.	$\forall a$ réel, l'horizontale $y=a$ coupe $G(f)$ en un point et un seul.

En ce cas, si l'application $f: I \to J$ est bijective, alors tout élément x de J est l'image par f de son unique antécédent y dans I, donc bien déterminé par x ; la correspondance $x \to y$ ainsi définie est une application de J en I, appelée <u>application réciproque</u> de f et notée f^{-1} . Par définition, on a l'équivalence :

$$\left.\begin{array}{c} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = f(y) \\ y \in I \end{array}\right.$$ »

(M. Rogalski, 2001, p.22).

Le point de vue des équations nous intéresse plus particulièrement puisqu'une grande partie des exercices « classiques » qui subsistent dans les manuels de Terminale S porte sur les résolutions d'équations exponentielle ou logarithmique.

Les développements de M. Rogalski constituent une base pour l'élaboration de séries d'exercices faisant intervenir plusieurs cadres. Ils complètent les travaux d'I. Bloch cités ci-dessus.

c) De manière plus générale

Lorsque l'on travaille avec une partie des ensembles I et J, on a des situations plus générales par rapport aux définitions données ci-dessus. Par exemple nous avons la situation montrée par L. Schwartz (1981) :

« Soit A une partie de I et B une partie de J. On appelle $f^{-1}(B)$ la partie de I formée de tous les x tels que $f(x) \in B$. Évidemment $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

6 Dans l'ouvrage de M. Rogalski, un graphe accompagne chaque explication.

Avec une notation abrégée, on a $f^{-1}(B)=\{x\,;f(x)\in B\}$ et $f(A)=\{f(x);\ x\in A\}$. On peut aussi avoir $f^{-1}(B)=\emptyset$ pour $B\neq\emptyset$. Par exemple, si f est l'application $x\to x^2$ de **R** dans **R**, $f^{-1}(\{-1\})=\emptyset$.

On remarque donc que l'application f^{-1} ainsi définie est plus simple que l'application f définie plus haut. La partie $f^{-1}(B)$ s'appelle image réciproque de B par l'application f. Il y a lieu de remarquer que cette définition ne suppose nullement que f soit bijective. De toute façon, si $y\in J$, on a le droit de parler de $f^{-1}(\{y\})$, mais c'est une partie de I et non un élément de I. Elle peut comprendre plus d'un élément, si f n'est pas injective, et elle peut être la partie vide, si f n'est pas surjective.

Si f est bijective, on a exactement $f^{-1}(\{y\})=\{f^{-1}(y)\}$ » (L. Schwartz, 1981, p.8-9).

Cette dernière égalité justifie certains choix de transpositions didactique comme nous le verrons dans le paragraphe sur la fonction racine carrée. Cependant, que ce soit la proposition intrinsèque au secteur fonctionnel ou la proposition liant le point de vue fonctionnel à celui des équations, aucune n'est enseignée en secondaire dans son intégralité.

d) Le cas particulier de la dimension 2

L. Schwartz (1981) écrit sur les applications composées de la manière suivante :

« Si f^{-1} est la bijection réciproque d'une bijection f de I dans J, on a $f^{-1}\circ f=Id_I$, application identique de I, et $f\circ f^{-1}=Id_J$, application identique de J. Inversement, si f est une application de I dans J, et si g est une application de J dans I, telle que $g\circ f=Id_I$ et $f\circ g=Id_J$, alors f est une bijection et g est sa bijection réciproque » (L. Schwartz, 1981, p.10).

Par rapport aux applications composées, si on a une fonction $f: I\to J$ bijective on peut affirmer que $y\in J$ on a $(f\circ f^{-1})(y)=y$ et que $x\in I$ on a $(f^{-1}\circ f)(x)=x$. Ainsi, pour une fonction f définie de **R** dans **R**, les courbes représentatives des fonctions f et f^{-1} dans un même repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.

Cependant, il faut préciser que cette caractéristique de symétrie des deux courbes représentatives des fonctions f et f^{-1} par rapport à la droite d'équation $y=x$ dans un repère orthonormé est une particularité des fonctions bijectives définies de **R** dans **R**. Pour des fonctions définies dans des ensembles plus généraux, $\mathbf{R}^2$ par exemple, on ne pourrait plus représenter un « échange » d'axes entre l'ensemble de définition de f et l'ensemble de définition de f^{-1} pour que cette symétrie soit visible.

C'est parfois pour maintenir cette propriété que sont faits certains choix de définitions de fonction réciproque comme nous le verrons dans le paragraphe sur la fonction racine carrée.

Après cette présentation de deux expositions savantes de la notion de fonction réciproque, nous abordons dans le paragraphe suivant l'étude des instructions officielles françaises, quelques exemples des fonctions réciproques de références dans l'enseignement secondaire et post-secondaire et les rares travaux de recherche portant sur l'apprentissage et l'enseignement de cette notion.

2. Exemples de fonctions réciproques de référence

Actuellement en France, la notion de fonction réciproque est abordée pour la première fois avec les élèves ou les étudiants, explicitement ou implicitement, à la charnière entre l'enseignement secondaire et l'enseignement post-secondaire. L'étude de deux manuels scolaires de terminale S montre que la notion de fonction réciproque est présente dans l'étude des fonctions logarithme et exponentielle. Le plus souvent, cette notion est nécessaire pour résoudre des équations logarithmique ou exponentielle comme par exemple : Résoudre dans $\mathbf{R}^{+*}$ l'équation $(\ln x)^3+2\,(\ln x)^2-5\ln x = 6$.

Le paragraphe ci-après rappelle ce qui est proposé dans les programmes de 2002 pour l'enseignement de l'analyse en Terminale S, avec une attention particulière sur ce qui est retenu par les Instructions Officielles à propos de la notion de fonction réciproque. Puis il évoque quelques fonction réciproques de références.

2.1 Quelques précisions sur les programmes français

Le statut du concept de fonction réciproque dans l'enseignement français a beaucoup évolué depuis le début du XX^e siècle. M. Artigue (1996 et 2003) et P. Trabal (1997) exposent l'évolution de l'enseignement de l'analyse au lycée. Après un grand formalisme et le travail avec les structures à l'époque des mathématiques modernes, il apparaît à la fin du XX^e siècle un constructivisme mal compris, marqué par une opposition entre l'apprentissage de concepts et l'apprentissage de techniques (M. Artigue, 2003). Cela a eu comme résultat une situation de crise qui n'est pas un phénomène isolé et qui a amené à réserver les ambitions théoriques aux enseignements universitaires.

Dans le cas du chapitre d'« Analyse » du programme de Terminale S de l'année 2002 (enseignement obligatoire), les prescriptions institutionnelles n'incluent pas l'étude des fonctions réciproques. Elles proposent l'étude des fonctions logarithme et exponentielle, mais n'imposent pas la manière d'introduire ces fonctions. Les caractères bijectif et réciproque ne figurent pas dans le programme. Par conséquent, ces notions ont parfois été traitées au lycée d'une manière implicite, voire pas du tout ou traitées malgré les instructions officielles.

Les professeurs d'IUT ont une liberté assez grande dans le cadre du cours d'analyse qu'ils prennent en charge. Ils peuvent décider, ou non, d'inclure un paragraphe spécifique sur la notion de fonction réciproque.

Ainsi, lorsqu'un étudiant arrive en première année d'IUT, ces concepts en sont ni disponibles ni mobilisables (Robert, 1998). Compte tenu de l'absence de commentaires sur l'utilisation de la notion de fonction réciproque pour résoudre une équation et de la présence importante d'exercices « types » de résolution d'équation lors des études des fonctions Logarithme et exponentielle, nous avons décidé d'étudier ce qu'il en était au début de l'enseignement post-secondaire en France.

Nous parlerons dans cette section de différents choix dans les définitions des fonctions : exponentielle et logarithme, carrée et racine carrée, sinus et Arcsinus.

2.2 Les fonctions logarithme et exponentielle

Lorsque l'on enseigne au lycée les fonctions exponentielle et logarithme, on pourrait aborder le concept de fonction réciproque. Mais cette notion n'est pas au programme de terminale. L'un des choix donnés pour introduire la fonction logarithme est de partir des propriétés de la fonction exponentielle, ce qui veut dire que la notion de fonction réciproque serait abordée au moins implicitement. Un autre choix – qui permettrait d'aborder aussi la notion de fonction réciproque, au moins de manière implicite – est de partir des propriétés de la fonction logarithme pour introduire la fonction exponentielle.

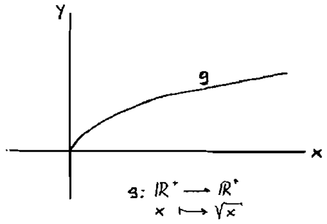
Lors de la résolution d'équations exponentielles ou logarithmiques, ce statut implicite de la notion de fonction réciproque est aussi présent. Tel qu'il a été mentionné auparavant, pour résoudre une équation quelconque on peut procéder par la recherche des opérations inverses, ce qui sous-entend la mise en relation de l'expression en jeu avec la fonction correspondante et la composition avec sa fonction réciproque, en ayant pour but l'obtention de l'identité.

Or les instructions officielles ne proposent pas ce type de raisonnement. Les enseignants doivent donc faire résoudre des exercices portant par exemple sur des équations logarithmiques, sans avoir à leur disposition l'outil fonction réciproque. Ce problème peut d'ailleurs s'être posé en amont, lors du travail sur les fonctions et équations du second degré ; l'impact possible sur les élèves, notamment les interrogations éventuelles sur l'existence de solutions définies à l'aide de racines carrées, n'a pas été étudié.

2.3 Les fonctions carré et racine carrée

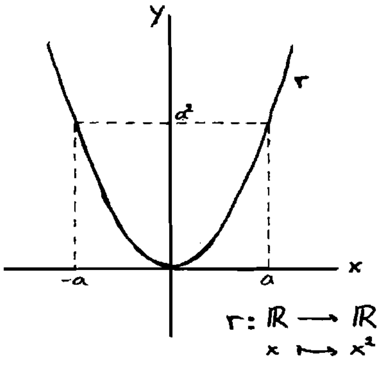
La question de l'enseignement de la racine carrée a été étudiée par Assude dans sa thèse (Assude 1992) : l'auteur constatait déjà l'incomplétude des organisations didactiques relatives à l'enseignement de la notion de racine carrée, et les difficultés qui s'ensuivaient.

En effet, au moment d'introduire la fonction racine carrée, on peut le faire en tant que fonction réciproque de la fonction carrée, ou bien, séparément.



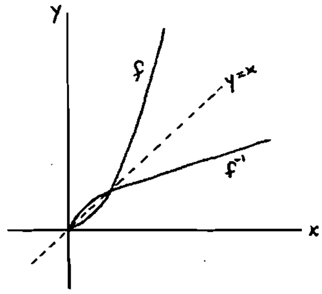
Si l'on décide de définir la fonction racine carrée séparément de la fonction carrée, comme g : $\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, où $x \rightarrow \sqrt{x}$ (ci-contre), on doit encore préciser la raison de ce choix. La décision peut être prise par convenance (peut-être pour ne travailler qu'avec des nombres positifs) ; ou bien, on justifie qu'on est parti de la définition de racine carrée de x comme le nombre a qui élevé au carré est égal à x, c'est à dire : $a^2 = x$.

Toutefois, la question du choix se pose à nouveau puisque avec une telle définition (à partir de la solution de l'équation $a^2 = x$), pour tout x positif non nul, on a toujours deux valeurs de a qui vérifient l'équation ; ainsi, pour associer une seule des deux solutions de l'équation $a^2 = x$ à un nombre x donné (afin d'avoir affaire à une fonction), il faut faire un choix. On revient alors au choix usuel traditionnel qui est de prendre le nombre positif.

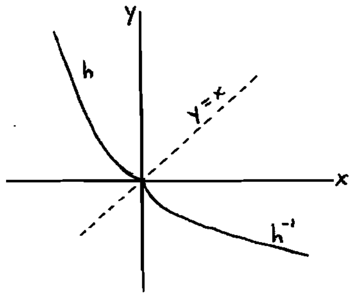


D'autre part, lorsque l'on définit la fonction racine carrée comme la réciproque de la fonction carrée, il faut commencer par déterminer l'ensemble de définition sur lequel la fonction carrée est bijective. En effet, pour r : **R** → **R** où $x \to x^2$, lorsque $y < 0$, il n'y a pas d'antécédent et donc r n'est pas une bijection de **R** sur **R**. Ensuite pour s : **R** → **R**$^+$, comme $y \geq 0$, l'équation $y = x^2$ possède deux solutions distinctes (si $y \to 0$) dans **R** et donc s n'est non plus une bijection de **R** sur **R**$^+$.

Ainsi, on arrive à définir la fonction f bijective de **R**$^+$ sur **R**$^+$ où $x \to x^2$ et respectivement, sa fonction réciproque f^{-1}: **R**$^+$ → **R**$^+$ par $y \to \sqrt{y}$ (ci-contre).



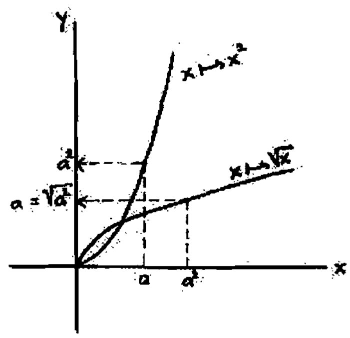
En effet, même si avec la notation proposée par L. Schwartz, on pourrait avoir $r^{-1}(\{-1\})=\emptyset$ ou bien $s^{-1}(\{1\})=\{-1;1\}$, nous rappelons que la définition utilisée est celle de f, car l'intérêt est que $f^{-1}(\{y\})=\{f^{-1}(y)\}$, tel qu'on l'a explicité dans la section concernant le concept de fonction réciproque.



D'autres choix pour définir la fonction carrée et la racine carrée sont possibles.
Regardons dans la figure ci-contre : elles sont également bijectives et réciproques si on les définit de la manière suivante : h : **R**$^-$ → **R**$^+$ où $x \to x^2$ et h^{-1}: **R**$^+$ → **R**$^-$ où $y \to -\sqrt{y}$

Cependant on n'a plus affaire à $\sqrt{x}$, ce choix n'est donc pas possible, car pour conserver la propriété de symétrie par rapport à la droite $y = x$, il faut choisir $h^{-1}: y \to -\sqrt{y}$. La composition de la fonction carrée et la fonction racine carrée qui correspond au calcul algébrique de $(\sqrt{x})^2$ on peut revenir à la composition des fonctions associées $f \circ f^{-1}$ pour f et f^{-1} telles qu'elles ont été définies ci-dessus, parce qu'en effet, l'expression admet seulement les valeurs $x \geq 0$ et donc $(\sqrt{x})^2 = x$, car au moment d'appliquer : $x \to \sqrt{x} \to X^2 \to \sqrt{x^2}$
on a déjà $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 \geq 0$.

Dans l'autre sens, pour calculer algébriquement $\sqrt{x^2}$ tout nombre réel est une valeur possible pour x ; ainsi on aurait affaire à une composition de fonctions qui pourrait être regardée en deux cas : $x \to x^2 \to \sqrt{X} \to \sqrt{x^2}$.
Si $a \geq 0$, on aura $a^2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a^2} \geq 0$ et pas de problème, car en effet $\sqrt{a^2} = a$, ce qui est illustré ci-contre.

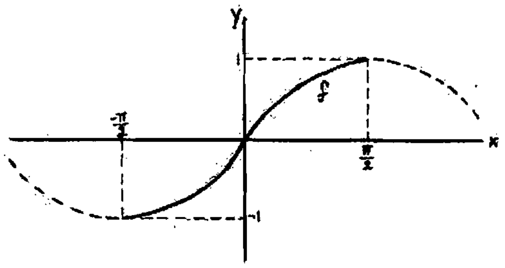


Si $a<0$, on a encore $a^2>0$ (ci-contre), mais on ne peut plus avoir $\sqrt{a^2}<0$ et $\sqrt{a^2}=a$ puisque on a convenu de définir la fonction racine carrée toujours positive (de $\mathbf{R}^+$ sur $\mathbf{R}^+$). Donc, dans le cas où $a<0$, on doit avoir $\sqrt{a^2}=-a$. Ainsi, $\sqrt{x^2}=|x|$ pour tout nombre réel x.

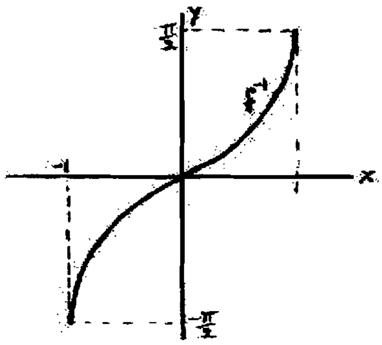
En général, ce résultat est présenté comme une convention mathématique. On pourrait concevoir un enseignement qui prévoit ces questionnements comme une préparation à l'étude de fonctions trigonométriques et leur réciproques au niveau supérieur. Nous renvoyons à ce sujet aux travaux de C. Ouvrier-Buffet (2007) sur les Situations de Construction de Définition en classe.

2.4 Les fonctions sinus et Arcsinus

On trouve une situation identique avec la convention faite sur les ensembles de définition de la fonction sinus, pour définir sa fonction bijective réciproque Arcsinus.



Ainsi, à partir de la fonction définie par $h:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ où $x\rightarrow\sin x$, on peut toujours définir la fonction arcsinus comme la réciproque de fonction la sinus ; mais, on restreint à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ pour avoir $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\rightarrow[-1,1]$ où $x\rightarrow\sin x$ et qu'elle soit bijective (ci-dessus). Ainsi on peut définir sa bijection réciproque par $f^{-1}:[-1,1]\rightarrow\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ où $x\rightarrow Arc\,sin\,x$ (ci-après), qui permet de garder la condition $f^{-1}(|y|)=|f^{-1}(y)|$.



Avec la composition de ces fonctions, au moment de calculer certaines expressions algébriques, on rencontre également des difficultés.

On va étudier les différences de calcul des expressions $sin(Arc\,sin\,x)$ et $Arc\,sin\,(sin\,x)$.

D'une part, l'expression $sin(Arc\,sin\,x)$ n'admet que les valeurs telles que $-1\leq x\leq 1$; ainsi, au moment de composer les fonctions :

$x\rightarrow Arc\,sin\,x\rightarrow sin\,X\rightarrow sin(Arc\,sin\,x)$, on aura

$-1\leq x\leq 1\Rightarrow -\frac{\pi}{2}\leq Arx\sin x\leq\frac{\pi}{2}\Rightarrow -1\leq\sin(Arc\sin x)\leq 1$, et donc,

$sin(Arc\,sin\,x)=x$ pour tout nombre réel $x\in[-1,1]$.

Dans l'autre sens, l'expression $Arc\,sin(sin\,x)$ est définie pour toute valeur réelle, parce que l'expression $sin\ x$ n'a en principe aucune restriction pour être définie. Ainsi, pour étudier la composition des fonctions associées $x\rightarrow sin\,x\rightarrow Arc\,sin\,X\rightarrow Arc\,sin(sin\,x)$, en sachant que cette fonction composée est impaire et périodique (de période 2π), on peut restreindre l'étude à l'intervalle $[0,\pi]$, puis le prolonger à $[-\pi,\pi]$ pour la propriété d'imparité et puis sur tout nombre réel pour la propriété de périodicité.

Deux cas se présentent. D'abord, pour une valeur a donnée telle que $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$, on a :

$0 \leq \sin a \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \operatorname{Arc}\sin(\sin a) \leq \frac{\pi}{2}$, et donc, $\operatorname{Arc}\sin(\sin a) = a$ pour les valeurs $a \in \left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$. Ce résultat est généralisable à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right]$ puisque la fonction est impaire. Pour une valeur donnée b telle que $\frac{\pi}{2} \leq b \leq \pi$, on a encore :

$0 \leq \sin b \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \operatorname{Arc}\sin(\sin b) \leq \frac{\pi}{2}$, par la convention de définition de la fonction Arcsinus, et donc, $\operatorname{Arc}\sin(\sin b) = \pi - b$ pour toute valeur $b \in \left[\frac{\pi}{2} , \pi\right]$.

La propriété d'imparité nous permet de dire que pour toute valeur $b \in \left[-\pi , -\frac{\pi}{2}\right]$ on a le résultat $\operatorname{Arc}\sin(\sin b) = -\pi - b$. Ainsi,

$$\operatorname{Arcsin}(\sin(x)) = \begin{cases} -\pi - x , & \forall x \in \left[-\pi , -\frac{\pi}{2}\right[\\ x , & \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right[\\ \pi - x , & \forall x \in \left[\frac{\pi}{2} , \pi\right] \end{cases}$$

et elle continue en oscillation entre les valeurs $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ pour toute valeur x de **R** avec une période de 2π.

Nous avons donc exposé quelques difficultés relatives à la définition des fonctions réciproques de fonctions de références et les choix possibles concernant leur présentation. Certaines définitions relèvent de la convention. Peu de manuels scolaires font état de ces choix. Or les quelques recherches en didactique menées sur le sujet font état de ce que l'apprentissage et la compréhension des élèves sont facilités par la présentation des alternatives possibles en termes de définitions. Des chercheurs se sont intéressés aux problèmes posés par l'enseignement de la notion de fonction réciproque, et certains font des propositions, soit en termes de concepts à travailler, soit en termes de contenus à proposer aux étudiants.

3. Quelques travaux de recherche sur la fonction réciproque

Les résultats des travaux que nous prenons en compte ici sont issus du milieu anglophone, étant donné que dans le milieu francophone il n'y a pas de travaux récents à propos de l'enseignement et/ou l'apprentissage de la notion de fonction réciproque.

Sans vouloir être exhaustifs, nous avons porté notre attention sur les références suivantes :

The inverse function: Prospective teachers' use of "undoing", par Ruhama Even en 1992 ;

Learning the concept of inverse function, par Draga Vidakovic en 1996 ;

Is subject matter knowledge affected by experience? The case of composition of functions, par Calin Lucus en 2006 ;
Understanding inverse functions: the relationship between teaching practice and student learning, par Ibrahim Bayazit et Eddie Gray en 2004.

3.1 Au niveau secondaire

Les travaux présentés ci-dessous portent sur l'expérimentation d'un enseignement qui utilise la notion de « défaisant » pour travailler le concept de fonction réciproque.

Dans son travail, R. Even fait l'hypothèse que regarder la fonction réciproque comme « défaisant » ce que la fonction « fait » aide à la compréhension du concept de fonction réciproque. Pour l'auteure, la notion de « défaire »est une idée informelle de la fonction réciproque, mais qui « capture l'essence de la définition ». Ses résultats de recherche montrent que presque la moitié des futurs enseignants semblent ignorer ou passer par-dessus cette signification de fonction réciproque, ce qui est illustré avec la tendance à calculer $(f^{-1} \circ f)(512,5)$ pour une fonction donnée, au lieu d'utiliser la signification conceptuelle de la fonction réciproque.

Pour R. Even cependant, limiter la conception de fonction réciproque à cette conception « naïve » de « défaire », peut amener les élèves à penser à tort, que toutes les fonctions ont une fonction réciproque. Ou bien, le fait que l'idée de « défaire » ne soit pas assez précise lorsque les fonctions sont plus complexes peut engendrer pour les élèves des confusions entre des fonctions, par exemple entre $f(x)=x^3$ et $g(x)=3^x$, , et/ou entre $f^{-1}(x)=(x)^{1/3}$ et $g^{-1}(x)=\log_3 x$. R. Even conclut que percevoir la fonction réciproque comme « défaisant » est puissant, mais ne l'est pas assez pour traiter tous les aspects du concept de fonction réciproque. Elle définit les notions de connaissances procédurales et connaissances conceptuelles entre lesquelles, de son point de vue, il faudrait davantage de connections. En effet, elle affirme qu'en général, la compréhension d'une idée inclut les deux types de connaissances : les procédurales et les conceptuelles, ainsi que les relations entre elles, car lorsque les concepts et les procédures ne sont pas connectés, on peut avoir une bonne intuition mais ne pas être capable de résoudre des problèmes, ou bien, générer des réponses mais ne pas comprendre ce qu'on a fait. Les notions de connaissances procédurales et conceptuelles semblent à rapprocher avec les aspects outil-objets des concepts mathématiques développés par R. Douady. R. Even mentionne le risque de penser que toute fonction a une fonction réciproque. Ainsi, pour éviter cette mauvaise compréhension, qui s'était aussi présentée d'ailleurs lors du développement historique de la notion, l'auteur propose d'introduire la condition que la fonction soit bijective. Elle porte donc une attention spéciale aux ensembles de définitions des fonctions. Nous avons vu sur les exemples de fonctions réciproques de références qu'en effet, ce point est à travailler.

3.2 Au niveau universitaire

En ce qui concerne les propositions d'enseignement pour le post-secondaire, nous évoquons les deux propositions les plus abouties.

C. Lucus s'intéresse aux connaissances d'enseignants « ordinaires » sur les connaissances préalables dont leurs étudiants ont besoin pour étudier la composition de fonctions et sur l'opération elle-même. Les enseignants qui ont participé à la recherche de C. Lucus donnent leur opinion sur ce qu'ils pensent nécessaire aux étudiants pour commencer l'étude de la composition des fonctions. De leur point de vue, les étudiants ont besoin d'être à l'aise avec la manipulation d'expressions algébriques, de connaître la définition de fonction ainsi que différentes représentations de ce concept et de pouvoir se servir de graphes dans le plan cartésien. En ce qui concerne l'enseignement de l'opération composition de fonctions, ils disent que c'est nécessaire d'insister sur le concept de fonction avec ses ensembles de définition et faciliter les calculs algébriques.

L'article de D. Vidakovic se focalise sur l'objectif de « découvrir » la manière dont le concept de fonction réciproque peut être appris. Pour cela l'auteur cherche une « décomposition génétique » du concept de fonction réciproque. Une « décomposition génétique » d'un concept mathématique consiste en une description des méthodes de constructions mentales possibles pour développer un schéma de ce concept.

D. Vidakovic construit une version préliminaire d'une « décomposition génétique » du concept de fonction réciproque pour la proposer à l'enseignement au niveau universitaire. Cette version décrit la suite d'étapes (très classiques) que les étudiants doivent effectuer pour apprendre le concept mathématique de fonction réciproque (D. Vidakovic, 1996, p.305) :

- Avoir déjà développé un processus ou un objet pour le concept de fonction.
- Coordonner deux fonctions ou plus en tant que processus, pour définir la composition de deux fonctions, notée $h=gof$.
- Utiliser le schéma d'une fonction construit précédemment et la composition de fonctions pour définir la fonction réciproque.
- Comprendre et appliquer le processus inverse pour des situations particulières.

Cependant, cette « décomposition génétique » n'ayant pas de nécessité intrinsèque mathématique dans les problèmes proposés, elle risque fort de ne pas être très efficace pour l'apprentissage des élèves.

D. Vidakovic suggère aussi de faire l'échange des ensembles de départ et d'arrivée de la fonction (et l'échange de l'axe des x avec celui des y dans la représentation graphique) en justifiant que cela peut éviter des problèmes de compréhension chez les étudiants pour définir et représenter graphiquement la fonction réciproque. Nous pensons que cela peut provoquer des difficultés puisque cette possibilité de faire l'échange indiqué est une particularité des fonctions définies de **R** dans **R**, et n'est pas valable dans des cas plus généraux. Nous pensons qu'il est insuffisant de ne donner que la représentation graphique de la courbe représentative de la fonction initiale, en indiquant la fonction initiale et la fonction réciproque sur le graphique par les chemins « d'aller et de retour ».

D. Vidakovic mentionne une autre référence dans laquelle il est suggéré que le concept de fonction réciproque devrait d'abord être expliqué aux étudiants dans le cadre théorique des ensembles, où l'ensemble de définition de la fonction f et l'ensemble de définition de sa réciproque f^{-1} sont des ensembles arbitraires avant de travailler avec des sous-ensembles de nombres réels. Ainsi, la fonction réciproque serait obtenue par l'échange de ces deux ensembles. D. Vidakovic mentionne que cette suggestion est donnée pour que les étudiants n'aient pas de problèmes pour réaliser que, dans la représentation graphique, cela veut dire un échange de l'axe des x avec l'axe des y.

Cependant, si l'enseignement mettait l'accent sur la symétrie par rapport à la droite $y = x$, qui n'est vraie qu'en dimensions 1 ou 2, cela pourrait constituer un obstacle d'origine didactique pour les dimensions supérieures où précisément cet aspect ne se « voit » plus. Il y a donc une certaine opposition entre la décision des instructions officielles françaises actuelles (qui finalement ne mettent plus l'accent sur la symétrie par rapport à la droite $y = x$, ni sur la condition bijective de fonctions) et les résultats des articles mentionnés, qui affirment l'efficacité de cet « échange » d'axes ainsi que la nécessité de certaines définitions formelles pour la compréhension du concept de fonction réciproque.

La « décomposition génétique » proposée par D. Vidakovic, ainsi que les résultats de déclaration des enseignants de l'étude de C. Lucus, sont relativement standards en France. Les travaux de R. Even, D. Vidakovic et C. Lucus, issus du champ de la psychologie, proposent des constructions théoriques pour analyser des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage qui sont assez éloignées des théories de didactique des mathématiques françaises. Les travaux de I. Bayazit et E. Gray, relatés ci-dessous, témoignent d'erreurs d'étudiants après deux enseignements différents.

3.3 L'influence de l'enseignement sur l'apprentissage

I. Bayazit et E. Gray étudient deux enseignements ordinaires différents. Leur article essaie d'expliquer la relation entre les pratiques d'enseignants et l'apprentissage des étudiants dans le contexte des fonctions et en particulier pour comprendre les fonctions réciproques.

L'un des professeurs a centré son enseignement sur la notion de « défaire » et son premier objectif a été de fortifier la compréhension des élèves sur la condition de bijection avant l'exposition formelle ; il veut créer des connections entre les différents concepts signalés au I, ainsi qu'entre représentations mathématiques. Il utilise de diagrammes de Venn, d'ensembles de couples ordonnés, de graphes et d'expressions algébriques. Pour lui les expressions algébriques, en particulier linéaires, ne sont pas productives pour expliquer l'essentiel d'une fonction réciproque, mais il exploite les formes algébriques de fonctions linéaires pour expliquer l'inversion d'opérations.

Pour le deuxième enseignant, l'enseignement est focalisé sur des habiletés algorithmiques et des acquisitions de règles de procédure. Il cherche à se baser sur les connaissances précédentes des élèves et à montrer des analogies avec des situations de la vie quotidienne pour encourager l'acquisition de ces habiletés de procédure chez les élèves. Il n'a intégré dans son enseignement ni les représentations graphiques cartésiennes ni les ensembles de couples, mais un exemple avec les diagrammes de Venn pour expliquer la nécessité de la condition de bijection.

A l'issue de ces deux enseignements, les étudiants sont testés. Les auteurs décrivent les erreurs des étudiants à deux questions posées : l'une pour tester la compréhension de la notion de « défaire » et la propriété de bijection, l'autre pour regarder l'habileté avec le concept de fonction réciproque dans une situation graphique.

Exemple 1
Considérer deux ensembles non vides, $A=\{a;b;c;d\}$ et $B=\{e;f;g\}$. Est-ce possible de définir une fonction de A dans B, disons f, telle qu'elle admette une fonction réciproque, disons f^{-1} ? Justifier la réponse.

Les auteurs signalent comme une erreur fréquente la mauvaise compréhension du concept de fonction car plusieurs étudiants ont répondu que ce n'est pas possible de définir une telle fonction puisque A et B n'ont pas d'élément commun.

Exemple 2
Le graphique de la fonction f est donné. Dessiner le graphe de la fonction réciproque

f^{-1} , dans l'espace cartésien donné, et justifier vos réponses.

Plusieurs erreurs d'étudiants sont rapportées par les auteurs et notamment le cas de certains étudiants qui effectuent une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. Cependant le lien entre le choix d'enseignement et les erreurs de certains étudiants n'est pas clairement mis en évidence. Nous attribuons ce résultat aux choix méthodologiques des auteurs. En effet, pour mesurer l'influence des choix d'enseignement sur l'apprentissage des étudiants il nous semble plus pertinent d'étudier dans le détail des processus de résolution de tâches mathématiques plutôt que de mesurer des performances de réussite.

Bayazit et Gray font l'hypothèse que l'enseignement d'expressions algébriques pourrait déplacer la centration sur la notion de « défaire » à l'idée d'une « opération inverse », qui remonte en allant de la fin au début, l'enchaînement des différentes opérations algébriques qui aboutissent à la définition de la fonction. Ils ajoutent que l'utilisation de plusieurs systèmes de représentations de la fonction réciproque peut provoquer une différence dans l'apprentissage des étudiants. Ils vont bien là dans le sens de Douady.

Les travaux de recherche français relatifs aux difficultés des étudiants avec la notion de fonction réciproque sont encore trop peu nombreux. Le vide didactique institutionnel français actuel ne permet pas de profiter des propositions d'enseignement trouvées dans les travaux de recherche issus du milieu anglophone et produits dans le champ de la psychologie.

Conclusion

Nous avons analysé les propositions savantes actuelles pour définir la notion de fonction réciproque puis étudié quelques exemples de difficultés survenant lors de l'étude de fonctions réciproques de référence. Des travaux précédents montrent que cette notion constitue un obstacle didactique. Nous avons présenté quelques propositions d'enseignement issues des recherches anglophones dans le champ de la psychologie et qui restent « classiques », du moins dans l'enseignement supérieur, par rapport aux propositions faites par les enseignants de ce niveau.

Ainsi l'article est une partie de l'étude de la transposition de la notion de fonction réciproque. Nous avons mis en évidence l'écart entre le savoir savant et le savoir à enseigner (phénomène de transposition classique, Chevallard, 1991). Cette étude s'inscrit dans un travail plus vaste sur la notion de fonction réciproque, travail que nous avons conduit afin d'explorer la manière dont les enseignants ordinaires se comportent au cours des enseignements faisant appel à cette notion.

Comme les propositions, fort rares, de la didactique des mathématiques françaises pour « enseigner » (franchissement d'un obstacle, Brousseau, 1998) dans ces contraintes ne sont pas parvenues jusqu'aux enseignants ordinaires, nous centrons nos études sur la manière dont les enseignants réussissent le miracle d'enseigner quand même !

Références

ARTIGUE M. (1996) Réformes et contre-réformes de l'enseignement de l'analyse au lycée (1902-1994), in B. Belhoste et al. (eds), *Les sciences au lycée – un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*, pp.197-217. Ed. Vuibert, Paris.

ARTIGUE M. (2003) Evolutions et perspectives de l'enseignement de l'analyse au lycée. *L'ouvert*, 107, pp.1-18.

BAYAZIT I. et GRAY E. (2004) Understanding inverse functions: the relationship between teaching practice and student learning. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 2, pp. 103-110.

BLOCH I. (2002) Un milieu graphique pour l'apprentissage de la notion de fonction au lycée, *Revue Petit x* n°58

BRONNER A. (1997) Les rapports d'enseignants de troisième et de seconde aux objets « nombre réel » et « racine carrée » . *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 17(3), pp. 55-80.

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD Y. (2002) Cours 3 : Ecologie et Régulation ; Thème 1 : Les praxéologies didactiques, in J.L. Dorier et al., *Actes de la 11e Ecole d'été de didactique des mathématiques*, La Pensée Sauvage Ed, Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1991) *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage Ed, Grenoble.

CHIOCCA C.M. (2002) The inverse numerical function concept and computer software learning. *Proceedings of the 2nd International Conference on Technologies and Mathematics (ICTM 2)*.

DOUADY R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 7(2), pp. 5-31.

EVEN R. (1992) The inverse function: Prospective teachers' use of "undoing". *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. Vol 23(4), pp.557-562.

ITARD J. (1984) *Essais d'histoire des mathématiques*. Librairie Scientifique et Technique, Paris.

LUCUS C. (2006) Is subject matter knowledge affected by experience? The case of composition of functions. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol 4, pp. 97-104.

MURILLO-LOPEZ (2008) *Etude d'une pratique ordinaire face à un obstacle didactique : la correction en classe de mathématiques dans le cas de la fonction réciproque,* Thèse, Université Paul Sabatier, Toulouse.

ROBERT A. (1998) Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 18(2), pp. 139-190.

ROGALSKI M. (2001) *Carrefours entre analyse, algèbre et géométrie*. Ed. Ellipses, Paris.

SCHNEIDER-GILOT M. (1991) Un obstacle épistémologique soulevé par des « découpages infinis » de surface et de solides, in *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 11, pp. 241-194

SCHWARTZ L. (1981) *Cours d'analyse*. Ed. Hermann, Paris.

TRABAL P. (1997) *La violence de l'enseignement des mathématiques et des sciences : une autre approche de la sociologie des sciences*. Ed. L'Harmattan, Montréal.

VIDAKOVIC D. (1996) Learning the concept of inverse function. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*. Vol 15(3), pp. 295-318.

YOUSCHKEVITCH A.P. (1981) Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIXème siècle in Fragments d'histoire des mathématiques, *brochure APMEP* n°41, pp.7-68.