L'EVOLUTION D'UN PROBLEME POUR CHERCHER EN CM2

Nicole BONNET
Professeur de mathématiques - IUFM de Dijon
Sylvie CLÉMENT-MARTIN
Professeure des écoles, maîtresse formatrice - Ecole Chevreul de Dijon

L'expérience que nous allons présenter a été le prélude à un Atelier de Pratique Pédagogique avec un groupe d'une dizaine de PE2 (professeurs stagiaires en deuxième année) à l'IUFM de Dijon. Cependant, cet article ne fait qu'évoquer le contexte de formation pour les PE2 ; il relate deux séances de classe mises en œuvre en CM2 par un maître formateur et le travail de ses élèves.

Nous avions fait le choix, de travailler sur la résolution de problèmes, et nous avons souhaité proposer aux élèves de CM2 et aux stagiaires, une autre forme du problème « *Des carrés et des triangles* » décrit dans les Documents d'accompagnement des programmes[1].

Un Atelier de Pratique Pédagogique sur les problèmes pour chercher

Présentation de l'atelier

Dans cette action de formation, les professeurs stagiaires apprennent par compagnonnage : l'enseignante met en œuvre, dans sa classe, une séance préparée en commun.
Les stagiaires sont invités à lire le document, et le débat organisé après l'observation de la séance permet de réfléchir ensemble et d'approfondir le thème. Il permet aussi d'élargir leurs connaissances sur les différents types de problèmes. Un dialogue s'engage également sur les « activités d'aide à la résolution de problèmes[2] ». Lors du débat, nous avons notamment mis en garde les stagiaires sur le fait qu'il existe différents types de problèmes qui permettent la mise en relation des savoirs. L'enseignant ne doit donc pas se focaliser sur les « problèmes pour chercher », mais les intégrer dans des situations d'apprentissage, sachant que, si on ne procède que par ce type de problèmes, la construction des connaissances ne sera certainement pas faite totalement.

---

[1] « Un épisode de recherche en actes » dans « Les problèmes pour chercher » Documents d'accompagnement des programmes – Mathématiques (2005), pages 7 à 14 SCEREN-CNDP.
[2] En référence aux articles de Grand N cités en bibliographie.

Ce travail s'effectue en référence au document d'accompagnement « *Les problèmes pour chercher* » qui distingue quatre fonctions de la résolution de problèmes :

- les problèmes pour apprendre : leur « *résolution vise la construction d'une nouvelle connaissance »*[3] ;
- les problèmes pour s'entraîner : « *destinés à permettre le réinvestissement de connaissances déjà travaillées, à les exercer » ;*
- les problèmes pour approfondir : « *plus complexes que les précédents, dont la résolution nécessite la mobilisation de plusieurs catégories de connaissances* » ;
- « *les problèmes pour chercher* » : « *centrés sur le développement des capacités à chercher … pour résoudre ces problèmes, les élèves ne connaissent pas encore de solution experte »* (s'il y en a une !) et l'apprentissage de celle-ci n'est pas un objectif visé.

Dans le débat, une question revient souvent : comment rétablir et/ou conforter une attitude positive des élèves face aux problèmes ? Les stagiaires évoquent alors la lassitude de ceux-ci face aux problèmes « traditionnels » proposés par les manuels. Ils considèrent que, si les enfants les résolvent, c'est souvent sans grande conviction, pour faire « leur métier d'élève », pour faire plaisir au maître et aux parents…
Une autre interrogation forte concerne les évaluations nationales annuelles et leurs résultats. Elles nous donnent des indices sur les performances en résolution de problèmes des élèves de l'école élémentaire. En 2004, le score moyen concernant la résolution de problème a été de 48,4 % ; il se situe nettement en dessous de celui des autres domaines. (Travaux géométriques 60,1 % ; numération et écriture des nombres 70,1 % ; traitements opératoires 68,6 % ; traitement de l'information 75 %).

Un élément de réponse concernant ces interrogations pourrait se trouver dans les I.O. de 2002. Elles induisent une évolution, notamment grâce à la promotion d'une nouvelle sorte de problèmes : les « problèmes pour chercher ». Elles renforcent l'utilisation des problèmes dans l'enseignement et insistent sur le fait que plus les connaissances seront rendues opératoires au travers de la résolution de problèmes, mieux elles seront acceptées des élèves et surtout construites de manière pertinente et durable. Il est aussi essentiel qu'elles prennent du sens et ne le perdent pas en cours de route.
Lors du débat avec les PE2, nous faisons également référence à des auteurs qui confirment cette approche, comme Roland Charnay : « *Dès leur plus jeune âge, les élèves doivent être confrontés à des pratiques « mathématisantes » : chercher, expliquer, argumenter, prouver, organiser…* » ; ou Jean Julo : « *C'est dans l'activité de résolution de problèmes que se trouve la source de la connaissance* ».

Utiliser des problèmes pour chercher

Pourquoi donner aux élèves des « problèmes pour chercher » ? Selon nos hypothèses de travail[4], il s'agit de :

- développer la capacité de l'élève à **faire face à des situations inédites ;**
- aider l'élève à prendre conscience de **la puissance de ses connaissances ;**
- valoriser **des comportements et des méthodes** essentiels pour la construction des savoirs ;

[3] Ces problèmes pour apprendre s'apparentent aux « situations-problèmes », au sens défini par R. Douady et repris notamment par Arsac, Germain et Mante dans « Problème-ouvert et situation-problème » - IREM de Lyon (1991).

[4] Le développement de ces hypothèses n'est pas l'objet de cet article.

- développer les **capacités argumentatives** de l'élève ;
- contribuer à **l'éducation civique** des élèves.

Nous retenons essentiellement cinq caractéristiques du « problème pour chercher » :
- il relève de situations proposées sous des formes variées ;
- les élèves peuvent facilement comprendre la situation et la tâche demandée, et s'y engager avec leurs connaissances antérieures ;
- le problème est « consistant » ;
- résoudre ce problème est un « défi » pour les élèves ;
- la validation de la solution est à la charge des élèves.

Même si celui-ci n'est pas le modèle prépondérant à l'école élémentaire, les stagiaires PE2 ont souvent tendance à penser leurs leçons par analogie à ce qu'ils ont vécu dans leur scolarité : le maître expose une notion puis les élèves résolvent des exercices d'application. Il nous semble que, ainsi, un enseignement classique apporte des réponses à des questions qui n'ont pas été posées.
Un enseignement qui débute par un problème se propose, à l'inverse, de donner l'occasion aux élèves de trouver des réponses, par des procédures personnelles, avant qu'on leur ait enseigné les connaissances qui permettent de le traiter plus efficacement.
Ainsi le problème qui va être proposé dans cet atelier n'aurait jamais pu l'être à l'école dans un enseignement « traditionnel » car les élèves du primaire ne peuvent apprendre à résoudre des systèmes de deux équations à deux inconnues[5].
Il s'agit donc de fixer un enjeu pour l'apprentissage, celui de devenir capable de résoudre les problèmes posés, avec les connaissances dont disposent les élèves.
C'est la fonction même des « problèmes pour apprendre », mais les « problèmes pour chercher » contribuent aussi à cet objectif[6].

Lors de la dévolution[7] d'un problème, outre le contrat didactique mis en place dans la classe, deux facteurs ne doivent pas être négligés. Il s'agit du rôle du contexte et de celui de la présentation du problème.

Si le contexte n'est pas suffisamment évocateur pour l'élève, ce dernier ne peut pas démarrer. Ainsi, il faut parfois proposer de simuler la situation, ce qui nécessite d'avoir prévu du matériel approprié, un jeu de question ou des aides écrites qui ne dénatureraient pas le problème en donnant des éléments essentiels à sa résolution…

---

[5] Dans le cas du problème posé, une résolution « experte » consisterait à résoudre un système de deux équations à deux inconnues, ce qui ne relève absolument pas des compétences attendues en fin de cycle 3 de l'école élémentaire.

[6] Le document d'accompagnement cité souligne d'ailleurs « *l'aspect réducteur de ces dénominations, puisque, dans tous les cas, l'élève mobilise des connaissances et se trouve placé en situation de recherche* ».

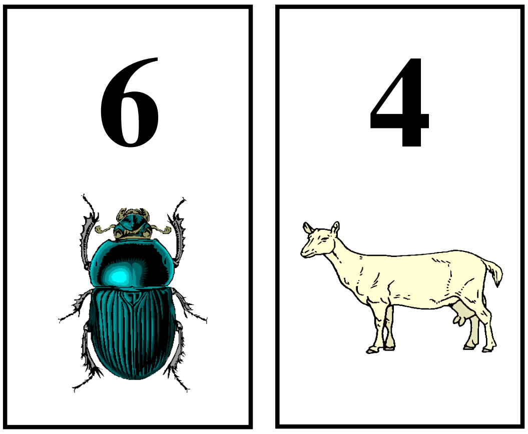
[7] Dans l'analyse du déroulement d'une leçon, on parle usuellement de la phase de dévolution qui généralement est la première dans la chronologie de son déroulement. Selon Guy Brousseau, « *Il ne suffit pas de "communiquer" un problème à un élève pour que ce problème devienne son problème et qu'il se sente seul responsable de le résoudre.* » ….« *La dévolution consiste, non seulement à présenter à l'élève le jeu auquel le maître veut qu'il s'adonne, (consigne, règles, but, état final…) mais aussi à faire en sorte que l'élève se sente responsable, au sens de la connaissance et non pas de la culpabilité du résultat qu'il doit chercher.* » C'est donc l'ensemble des conditions qui permet à l'élève de s'approprier la situation. Bien souvent, la consigne du maître ne suffit pas à réaliser la dévolution de la situation. Celle-ci fait intervenir des formulations des élèves, des exemples, le matériel lui-même (qui peut être implicitement porteur de son mode d'emploi), etc. La dévolution fait appel à la motivation des élèves : ils acceptent la situation que le maître propose.

Ainsi, dans le problème mis en situation dans cet A.P.P., le contexte est celui d'une situation de jeu courante, avec des cartes à jouer distribuées, des questions qui se posent à leur propos. Le jeu est au départ un peu mystérieux et suffisamment « dépaysant » pour que les élèves se sentent motivés.
Cet atelier va aussi permettre d'insister sur la présentation du problème qui, selon nous, a une réelle influence. Nous pensons que si le problème avait été proposé de manière traditionnelle avec un texte écrit au tableau ou bien distribué aux élèves sur des fiches photocopiées, leurs recherches, leurs démarches et leurs résultats n'auraient pas été identiques à ce que nous avons constaté dans cette expérimentation. Le jeu de cartes permet une entrée « active » dans le questionnement. Les élèves vont vivre une situation « théâtralisée », mais sans excès...

Le problème et sa mise en oeuvre

« Les chèvres et les scarabées »

Le problème que nous avons proposé est une adaptation du problème donné dans le document d'accompagnement des programmes déjà cité[8].
Le problème est le suivant : « *Connaissant le nombre de têtes et le nombre de pattes, il s'agit de trouver combien on a tiré de cartes chèvres et de cartes scarabées.* »



Exemples de cartes utilisées lors de la séance
(il en faut une vingtaine de chaque)

Par exemple : « *J'ai compté 20 têtes et 104 pattes. Combien ai-je de cartes « chèvre » et combien de cartes « scarabée » ?* »
Dans ce cas, la solution est 12 cartes scarabées et 8 cartes chèvres. Elle peut se justifier par deux égalités : 12 + 8 = 20 et 12 x 6 + 8 x 4 = 104 dont le maître comprend tous les implicites.
Lors de la préparation, après une brève réflexion, l'enseignante a affirmé : « *C'est facile, ils vont trouver tout de suite ! Mes élèves sont assez forts en calcul mémorisé ou écrit !* ». Malgré tout, elle a accepté de se prêter à l'expérience.

Ce problème permet de développer la culture mathématique des élèves, mais aussi de travailler sur le sens des écritures mathématiques.
Il se prête à une théâtralisation et l'enseignante s'est tout de suite sentie à l'aise dans le « jeu » de présentation avec des artifices (distribution des cartes après les avoir mélangées, collecte de celles-ci dans un chapeau haut de forme, mais aussi jeux de voix…)

[8] « *Le problème des triangles et carrés* » dans « *Les problèmes pour chercher* » pages 7 à 9.

Lors de la deuxième étape les élèves ont dû aiguiser leurs capacités à argumenter, à débattre, à ne pas se laisser influencer. Les mathématiques leur ont permis de grandir en futur citoyen qui ne s'en laisse pas conter par d'autres…

Fiche de préparation

La fiche de préparation de l'enseignante correspond aux colonnes 1 et 2 du tableau ci-dessous. Dans la colonne 3, nous avons inséré *a posteriori* des remarques faites dans l'action.

Fiche de préparation		**Remarques faites dans l'action**
Organisation	La classe est partagée en groupes de 3 ou 4 élèves. Il y a 7 groupes.	
Matériel	18 cartes « chèvres » et 18 cartes « scarabées » bien mélangées, des feuilles de brouillon, du papier-affiche, des feutres	
Modalité	Recherche individuelle puis collective	
Déroulement **Phase 1** **5 à 7 min**	Dévolution : « *Aujourd'hui, nous allons travailler à l'aide d'un jeu de cartes que voici. Sur les cartes qui représentent des chèvres est inscrit le chiffre 4 et sur les cartes qui représentent des scarabées est inscrit le chiffre 6. Pourquoi ?* » Déroulement : la maîtresse distribue trois cartes par groupes. Les élèves devront ensuite les déposer dans une boîte ouverte et initialement vide. Elle demande combien de cartes ont été distribuées. Elle se cache pour ne pas montrer les cartes et pour compter le nombre total de pattes des animaux. Elle a préparé la phrase au tableau : « J'ai au total … pattes et … têtes » ; La consigne suivante est : « *Qui peut me dire ce que l'on doit chercher ?* » Le problème est donc : « *J'ai au total 120 pattes et 21 têtes. Combien a-t-on tiré de cartes chèvres et de cartes scarabées ?* »	Les élèves trouvent rapidement qu'il s'agit du nombre de pattes des animaux. On se met d'accord là-dessus. Les élèves trouvent le nombre : « 3 fois le nombre de groupes » soit 21 cartes Elle trouve au total 120 pattes et 21 têtes. Après une brève discussion les élèves s'entendent : il faut chercher combien il y a de cartes « chèvres » et combien de cartes « scarabées » dans la boîte.
Phase 2 **5min**	Phase de recherche individuelle. Chaque enfant s'imprègne du problème et se lance dans quelques calculs	A ce stade, on perçoit bien la difficulté du contexte qui perturbe les élèves. Certains vont jusqu'à ajouter le nombre de pattes et le nombre de têtes. Un questionnement leur montre rapidement leur erreur. Ils sont désarmés face à ce problème peu habituel. Cependant, le plaisir de chercher vient de lui-même. Le problème est motivant pour les élèves

Phase 3 **20 min**	Phase de recherche en groupes Les élèves confrontent leurs idées au sein du groupe. Ils doivent se mettre d'accord et rédiger une affiche qui raconte leur recherche. Pendant ce temps, la maîtresse circule dans les groupes, étudie les différentes stratégies et identifie les difficultés rencontrées.	Les discussions vont bon train. Certains groupes trouvent très rapidement une solution, mais oublient une contrainte[9], ce qui fait qu'elle est invalidée. Les élèves apprennent à raisonner et à argumenter avec leurs pairs. Un groupe trouve tout de suite la solution, un peu par hasard. D'autres groupes font des ajustements. Ils se rendent compte que lorsque l'on remplace une « chèvre » par un « scarabée », on perd deux pattes (et inversement).
Phase 4 **10 min**	Mise en commun Chaque rapporteur vient présenter sa proposition. Toutes les affiches sont scotchées au tableau. La classe est invitée à faire des remarques sur les différentes productions.	Ici, dans cette classe de CM2, les procédures sont toutes calculatoires, aucun élève n'a fait de dessin ou de schéma spontanément[10]. (En CE2 pour le problème des « carrés et des triangles », les procédures par dessin sont nombreuses et très efficaces)
Phase 5 **5 min**	Validation et synthèse. La maîtresse fait émerger un doute : *« Est-ce bien la seule et véritable solution ? »* La vérification ultime se fait par la découverte des cartes qui se trouvent dans la boîte. Le comptage des différentes cartes est la preuve matérielle de la véracité de la solution mathématique trouvée.	Cette question déroute les élèves. Certains vont même jusqu'à affirmer qu'il y a sûrement d'autres solutions… **Une relance a été proposée, mais aucun calcul ne permet de trouver une égalité qui prenne en compte les deux contraintes**.

Analyse *a posteriori* :

Analyse

Il semble que l'habillage et la forme originale du problème aient perturbé les élèves. La prise en compte des deux contraintes (les « têtes et les « pattes ») a amené des confusions dans l'esprit d'élèves pourtant considérés habituellement comme « globalement bons ».
Dans un premier temps, certains pensent que ce problème possède plusieurs solutions. Le fait de dévoiler les cartes tirées n'est pas une preuve convaincante pour tous. Il y aurait une sorte de « magie » interne à la situation. Ce problème est donc efficace dans le sens où montrer les cartes n'est pas une preuve en soi. Il faut que les élèves soient plutôt

[9] Il s'est avéré judicieux que les élèves aient en main quelques cartes en début de séance. En effet, nous avons pu observer un groupe qui avait trouvé comme solution : « 20 chèvres ». Lors de la rédaction de cette solution, un élève du groupe s'est soudainement exclamé : « c'est pas possible car quand la maîtresse nous a distribué les cartes, on avait une carte « scarabée ». Il ne peut pas y en avoir zéro ! ».

[10] Il s'agit d'une classe dans laquelle de réels efforts ont été faits pour la mémorisation des tables de multiplication. Le fait de faire des schémas induit des procédures additives que ces élèves se sont interdites par effet de contrat didactique implicite.

convaincus de la force des mathématiques : c'est parce qu'il est impossible de trouver autre chose par le calcul qu'il n'y a qu'une seule solution.
Le débat final permet de clarifier la situation et les élèves ne se sentent pas bernés : il n'y a pas eu de tour de passe-passe. Les mathématiques leur ont permis de faire des hypothèses et aussi de mieux comprendre la situation.

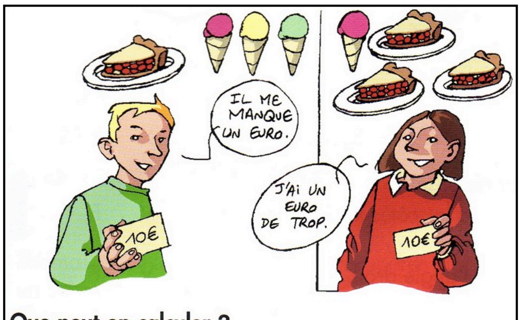
Pour les élèves plus faibles, le problème s'est révélé complexe en raison d'une fréquente perte de sens : ils font des opérations (additions, multiplications) mais les nombres sont abstraits et ne représentent pas forcément des « têtes » et des « pattes ». En particulier ils sont capables d'écrire une égalité mathématiques comme : (6 x 18) + (4 x 3) = 120, qui représente implicitement une écriture de la solution, mais la transcription en une phrase de conclusion en français est souvent difficile. Ils ne savent plus ce que représente le « 6 » et le « 18 » par exemple. Ils ont perdu le sens du problème. Le cheminement s'est fait dans une direction (des hypothèses vers une conclusion), mais ils ont des difficultés à décrypter cette conclusion et à revenir vers les « chèvres et les scarabées »
Ainsi un maître qui s'arrêterait sur des indices superficiels de résolution et considérerait l'égalité mathématique comme une fin en soi, priverait les élèves de compréhension et les laisserait dans la « magie des chiffres ». Il ne faut donc pas aller trop vite lors de l'institutionnalisation et ne pas rester dans l'implicite. C'est le retour au sens qui est fondamental.
Nous aurions pu amener des aides sous forme d'étiquettes[11] « chèvres » et « scarabées », autoriser ou suggérer des schémas, faire varier le nombre de cartes distribuées…

Intérêt du problème

Tous les élèves ont trouvé un résultat et ont pu en débattre. Ceux dont le résultat était erroné ont compris la nécessité de prendre en compte les deux contraintes et aussi de se demander à quoi se rapportent les nombres.
Sur le plan didactique, le problème se prête à une séance structurée en diverses phases (dévolution, phase de recherche en groupes, phase de débat, phase d'institutionnalisation).
Il est riche sur le plan mathématique (travail implicite sur un système de deux équations à deux inconnues) et permet une différenciation selon divers niveaux de cycle 3. Ainsi, nous avons mis en œuvre dans une classe de CE2 le problème « des carrés et des triangles » (combinaison linéaire de 3 et de 4), en ne distribuant que deux cartes par groupes (ce qui donne pour une classe répartie en 7 groupes, un nombre de « côtés » compris entre 42 et 56 pour 14 cartes distribuées).
Pour le problème des « chèvres et des scarabées », en distribuant quatre cartes par groupes nous aurions fait travailler les élèves sur des nombres compris entre 112 et 168 pour 28 cartes distribuées.

Autres propositions

Un problème qui semble « figé », comme celui présenté ci-contre[12], peut permettre :
- une théâtralisation intéressante avec du matériel en plastique et deux enfants jouant les rôles du garçon blond et de la fillette brune ;
- une phase de réinvestissement.



Que peut-on calculer ?

[11] Ces aides n'ont pas été jugées utiles par l'enseignante, mais elles le sont parfois pour certains élèves.
[12] Extrait du manuel « Maths+ » - CM2 – Editions SED.

Conclusion

La séance aurait pu s'arrêter là, mais l'étude des variables didactiques et de leurs effets nous a suggéré une idée : « *Si nous faisions inventer des problèmes de ce type aux élèves !* »

Création de problèmes du même type

Ecrire des problèmes : compte rendu de séance :

Tout d'abord, par un jeu de questions, l'enseignante a favorisé le rappel de la séance précédente sur le problème « des chèvres et des scarabées ».
Elle a alors présenté une affiche comportant des images qui vont servir de base de travail (annexe 1). Ces images ont été choisies par l'enseignante de façon à ce que des critères apparaissent :

- des points (5, 6, 8) pour les coccinelles,
- des roues (2, 3, 6) pour les véhicules,
- des pattes (2, 6, 8) pour certains animaux
- des ailes (2, 4) pour des animaux et des avions.

La consigne est la suivante : « *La dernière fois, nous avons travaillé avec un jeu de cartes qui était composé de 2 sortes d'images : des chèvres et des scarabées. Aujourd'hui vous allez inventer un problème qui ressemble à celui que nous venons de rappeler, en utilisant les images de l'affiche. Vous pouvez utiliser deux ou trois images. Vos énoncés seront proposés ultérieurement à vos camarades* ».
Cette dernière phrase de la consigne est très importante car lorsqu'on fait produire des énoncés de problèmes par les élèves, il convient de faire fonctionner complètement cette situation de communication et de donner réellement les problèmes à chercher à d'autres élèves. Les élèves travaillent par binômes.

Première phase de recherche

Deux groupes choisissent les images de manière « affective ». Le scorpion bleu est très joli ; il est fréquemment choisi.
Des groupes choisissent trois images ayant un point commun, mais ne prennent pas en compte la diversité du nombre d'éléments. Par exemple, ils choisissent l'avion, l'oiseau et la libellule pour le critère « ailes ». Mais l'avion et l'oiseau ont chacun deux ailes !
Un groupe se lance très vite dans la rédaction de l'énoncé. Les élèves choisissent des grands nombres pour produire un problème difficile.
Deux groupes commencent par faire des calculs, puis rédigent un énoncé basé sur deux images.
Quatre groupes commencent par faire des calculs, puis rédigent un énoncé basé sur trois images.
Deux groupes n'arrivent pas à se mettre d'accord sur un choix d'images.
Quelques enfants trouvent la tâche très difficile et ne produisent rien.

Première synthèse

Chaque binôme fait le point sur ses recherches. Pour aider les enfants en difficulté, nous rappelons comment a été conçu le jeu « chèvres et scarabées ». Nous explicitons de nouveau l'élément commun - les pattes - dont le nombre différent pour les chèvres et les scarabées a permis l'existence du problème.

On retient donc que « *il faut choisir des images ayant un point commun en quantité différente*. », ce qui conduit à énoncer les critères de choix possibles (points, roues, ailes, pattes). Dans cette phase, la maîtresse leur demande explicitement cette fois de « *chercher un problème avec trois images.* »
De manière totalement implicite, les élèves sont ainsi confrontés à un modèle mathématique (système de deux équations à deux ou trois inconnues).

Deuxième phase de recherche

Tous les enfants orientent leur choix vers des images possédant un critère commun. Quelques binômes restent cependant en difficulté car ils ne prennent pas en compte le fait que le nombre d'éléments correspondant au critère retenu doit être différent sur les images choisies. Les enfants plus avancés terminent la rédaction à partir de l'égalité du problème puis rédigent leur production sur une feuille.

Certains élèves ont encore rédigé un problème qui donne deux informations :

Le problème des roues d'Emilie et Laetitia

(9 x 6) + (13 x 2)

« *Un enfant a des camions et des avions miniature. Il en a 22 au total. Il a compté qu'il fallait 80 roues de rechange. Combien a t-il de camions et combien d'avions ?* »

D'autres, les plus nombreux, ont élaboré des problèmes qui donnent trois informations. En voici trois exemples recopiés sans ajouts ni retraits :

Le problème des roues de Rémi et Baptiste

« *Dans un paquet, il y a 3 sortes de cartes : avion à 2 roues, camion à 6 roues, tricycle à 3 roues. Il y a 20 cartes en tout. Combien y a-t-il de cartes de chaque sorte ?* »

Réponse des élèves : *6 x 6 = 36* *4 x 3 = 12* *10 x 2 = 20*

36 + 12 + 20 = 68

Il y a 6 camions, 4 tricycles 10 avions et 68 roues.

Le problème des pattes de Julien et Lorin

« *Un oiseau a 2 pattes, une coccinelle en a 6 et le crabe en a 8. En sachant qu'il y a 19 cartes dans le jeu et que l'on compte 110 pattes. Combien y a-t-il de crabes, de coccinelles et d'oiseaux ?* »

Réponse des élèves : *6 x 2 = 12* *3 x 6 = 18* *10 x 8 = 80*

Il y a 10 crabes, 3 coccinelles et 6 oiseaux.

Le problème des coccinelles de Pauline et Raphaël

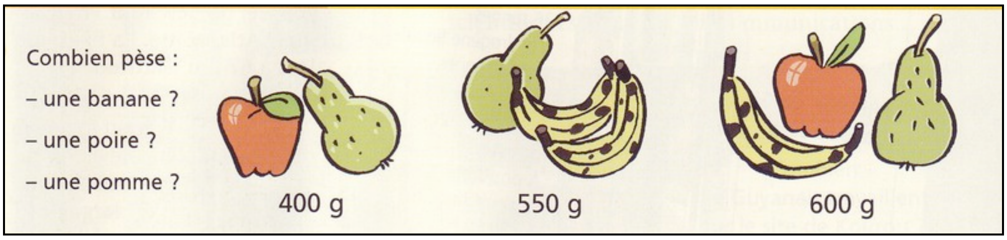
« *J'ai 118 points et 19 cartes. Combien ai-je de coccinelles à 8 points, de coccinelles à 5 points et de coccinelles à 6 points ?* »

Réponse des élèves : *(5 x 8) + (5 x 6) + (8 x 6) = 118*

J'ai 5 coccinelles à 8 points, 6 coccinelles à 5 points, et 8 coccinelles à 6 points.

Les problèmes inventés par les élèves sont bien plus complexes que ceux que l'on trouve habituellement dans les manuels. Cela est naturel, au vu du dispositif.
Ceux que nous avons trouvés dans les manuels de CM2 comportent souvent un système de trois équations à trois inconnues, mais une observation fine des images permet de déterminer une solution (la masse d'une banane dans l'exemple ci-dessous[13]). L'intention est donc toute autre et il nous semble bon de le souligner.

[13] Exercice extrait du manuel : « Pour comprendre les mathématiques » CM2. Editions Hachette

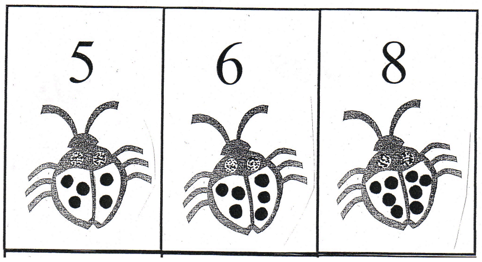


Les problèmes construits par les élèves ont « l'air de fonctionner ». En effet, ils les ont construits avec au départ une égalité mathématique correcte.
Par exemple pour le problème « des coccinelles », les élèves ont compté le nombre de points et le nombre de cartes correspondant. (Leur égalité de départ est $(5 \times 8) + (5 \times 6) + (8 \times 6) = 118$)
Cependant, le « mathématicien » sait que le système de contraintes est insuffisant pour aboutir à l'unique solution que les élèves rédacteurs ont écrite. En effet nous avons là un système de deux équations à trois inconnues. Ce qui donne potentiellement une infinité de solutions dans l'ensemble des réels et un nombre de solutions moindre dans l'ensemble des entiers naturels…

Une suite édifiante : renversement de situation et résolution d'un problème

Le problème

Une quinzaine de jours plus tard, nous avons décidé de poser « Le problème des coccinelles de Pauline et Raphaël » aux élèves de cette classe de CM2.
Le déroulement a été légèrement modifié par rapport à la séance précédente.
La dévolution se fait toujours par une expérience. Il y a des cartes de chaque sorte dans le paquet ; l'enseignante le montre clairement aux élèves. Elle ne leur dit pas combien il y en a de chaque sorte et cela aura une influence ultérieure. Mais, cette fois ci, la maîtresse sélectionne 19 cartes dans le paquet en faisant semblant de les choisir au hasard.



Les cartes étant retournées, les enfants ne sont pas conscients de cette petite « supercherie pédagogique ». Nous souhaitions ne pas tromper les élèves avec un « faux hasard ». Cette dévolution s'explique uniquement par le fait que nous voulions mettre en œuvre le problème inventé par les enfants, sans aucune modification.
La maîtresse pose alors oralement la question : « *J'ai 118 points. Parmi ces 19 cartes. Combien ai-je de coccinelles à 8 points, de coccinelles à 5 points et de coccinelles à 6 points ?* »
La séance s'organise alors avec une phase de recherche, une phase de mise en commun et une phase de validation par la découverte des cartes.

Les configurations possibles

Les solutions[14] au problème posé sont listées ci dessous.

[14] Le mot « solution » a été prononcé en classe, alors qu'il signifie « configuration possible » ou « configuration existante ». Dans toute la suite, le mot « solution » est pris dans ce sens. Ce n'est pas exactement la « solution » mathématique telle qu'on l'entend généralement.

- **J'ai 2 coccinelles à 8 points, 0 coccinelle à 5 points et 17 coccinelles à 6 points. (1)**
- J'ai 3 coccinelles à 8 points, 2 coccinelles à 5 points et 14 coccinelles à 6 points.
- J'ai 4 coccinelles à 8 points, 4 coccinelles à 5 points et 11 coccinelles à 6 points.
- **J'ai 5 coccinelles à 8 points, 6 coccinelles à 5 points et 8 coccinelles à 6 points. (2)**
- **J'ai 6 coccinelles à 8 points, 8 coccinelles à 5 points et 5 coccinelles à 6 points. (3)**
- **J'ai 7 coccinelles à 8 points, 10 coccinelles à 5 points et 2 coccinelles à 6 points. (4)**

Analyse

Les élèves ont cherché plusieurs solutions, après une relance de la recherche. Certaines étaient erronées, ne prenant pas en compte toutes les contraintes. Ainsi, les solutions de Raphaële et Quentin présentées en annexes 2 et 3 ont un nombre total de cartes erronées ; celle de Nicolas (annexe 4) correspond à un nombre de points inexact.
D'autres étaient correctes : la solution de Julien et la solution 2 de Quentin sont présentées en annexes 2 et 3.

Finalement, le collectif-classe a permis de faire émerger quatre solutions (celles numérotées et mises en caractère gras ci dessus). Les élèves affirment très rapidement, lors de la mise en commun, qu'il faut en choisir une seule, en effet, la maîtresse tient dans sa main une poignée de cartes qui ne peut correspondre qu'à une seule des solutions. Ils sont peut-être dans l'état d'esprit de la situation 1 où tous avaient été convaincus qu'il n'y avait qu'une seule solution. Il est donc naturel que les élèves affirment qu'il faut en choisir une seule, mais en réalité, il y a un conflit intellectuel car les élèves de CM2 sont aussi persuadés que les calculs numériques sont exacts.
La maîtresse les interroge alors et leur demande pourquoi certains pensent qu'il n'y a qu'une solution et d'autres qu'il y en a plusieurs. C'est le cœur du problème et un débat sera nécessaire.

Les quatre solutions numériques trouvées par les élèves sont écrites au tableau, et tous vérifient que ces solutions respectent les consignes (19 cartes et 118 points). La première solution (1) est éliminée rapidement car la maîtresse montre brièvement le jeu qu'elle a en main et réaffirme que celle-ci contient des coccinelles de chaque sorte.
Il reste trois solutions et la maîtresse propose un débat dont voici un extrait rédigé à partir d'un enregistrement audio.

Le débat

E[15] *: c'est bizarre, il ne devrait pas y avoir plusieurs solutions.*
M : pourquoi ?
E : parce que les cartes de la solution 3 ne sont pas les mêmes que celles de la solution 4.
M : oui. Qu'en pensez-vous les autres ?
E : il ne peut pas y avoir trois solutions car dans ton jeu il n'y a qu'un tas de 19 cartes.
M : oui, cependant, il y a trois solutions qui fonctionnent…alors ?
E : moi, je pense que c'est la solution (4) car il y a plus de coccinelles à 5 points et que c'est plus petit donc dans le jeu tu en as mis plus.

> (Cet élève sous entend que si la maîtresse a mis plus de coccinelles à 5 points dans le jeu, ces cartes ont plus de chances de sortir, le nombre de 10 lui paraît plausible.)

M : on a mis des coccinelles des trois catégories dans le jeu, mais on ne sait pas combien.
E : moi, je pense que les trois solutions sont bonnes mais il n'y en a qu'une seule qui a été tirée.

---

[15] E signifie « un élève ». Ce n'est pas forcément toujours le même et M désigne la maîtresse.

M : je suis d'accord avec toi, mais je voudrais que tu me dises ça d'une autre façon… c'est juste ce que tu as dit.
E : maîtresse, j'ai une idée : il pourrait y avoir une autre solution qui n'a pas été trouvée et qui serait la bonne.
M : peut-être…
E : il y a deux solutions qui sont un petit peu inversées : les solutions (2) et (3), ça doit être les bonnes.

L'élève a remarqué que, dans les solutions (2) et (3), les nombres de cartes sont respectivement 5, 6, 8 et 8, 6, 5…

M : oui, mais ce n'est pas pareil la répartition des cartes n'est pas la même. Dans la solution (2), il y a 8 cartes à 6 points et dans la solution (3), il y a 5 cartes à 6 points.
E : oui, mais il y a les mêmes chiffres. 5 x 8 = 40 et 8 x 5 = 40 ; 6 x 5 = 30 et 5 x 6 = 30…
M : oui, mais on veut les cartes qui ont été tirées là (elle montre les cartes) comment fait-on pour trouver le bon résultat ?

Finalement un élève affirme.
E : il faudrait connaître combien tu avais de cartes à 5 points et combien il en reste dans la pioche.
M : pourquoi ?
E : pour savoir combien il y en a dans ta main[16].
E : ça va pas, il y a trois choses à chercher et dans le problème, il n'y a que deux nombres.
M : avez-vous écouté ce que votre camarade vient de dire ?

S'en suit un silence, puis un élève reprend
E : moi, je crois que c'est la solution (2).
M : pourquoi ?
E : parce que c'est la première qu'on a trouvée.
E : parce qu'on était beaucoup à la trouver.
M : bon, on va vérifier.

Elle donne les cartes à un enfant qui compte le nombre de chaque sorte de coccinelles. Il énonce la solution. (Configuration (2)).
E : c'était le hasard si on a trouvé la bonne solution ?
M : oui, il y avait beaucoup de solutions et vous avez trouvé la bonne par hasard. Julien avait une idée pour franchir la porte du hasard. Redis ce que tu as dit tout à l'heure.
E : il faut que tu nous dises combien il y a de cartes de chaque en tout dans le jeu.
E : il ne faut que deux catégories de cartes.
M : non, on voulait en garder trois.
E : il faut savoir combien il y a de cartes en tout dans le jeu.
M : alors, par rapport à ce qu'on doit chercher 19 cartes et 118 points, il faudrait changer l'énoncé …
E : ça pourrait aider si on savait qu'il y a 5 cartes à 8 points dans le jeu.
M : vous pensez que ça aiderait ?

Tous les élèves répondent par l'affirmative.
Il semble *a posteriori* que le dispositif mis en place dans la première situation ne convienne pas tout à fait dans la seconde situation. En effet, il aurait peut-être fallu fabriquer matériellement toutes les configurations possibles et non pas dévoiler une seule configuration. Cela aurait évité l'impression de « magie » qui a résisté longtemps dans la classe. Mais nous ne savons pas si cela aurait clarifié la situation… Cela nous aurait peut-

[16] La maîtresse a conservé pendant le débat les 19 cartes dans sa main.

être sauvées d'un certain embarras dans le cas où les enfants n'auraient pas trouvé, parmi leurs solutions, la configuration qui s'est réellement produite.

Les débats ont été riches. Les élèves ont fait vivre leurs connaissances en argumentant. Les questions leur ont permis de progresser et de construire des outils. Les élèves ont réussi à expliciter le fait que le problème posé ne permettait pas de donner une solution qui correspondait à l'expérience. Il manquait une donnée : on a trois inconnues et seulement deux nombres. C'est un grand pas franchi du point de vue mathématique et cela « prépare l'avenir ».

Conclusion

Cette expérience nous a permis d'apporter une réponse possible à la question de départ : comment développer une attitude positive des élèves face aux problèmes ? C'est en leur donnant l'occasion d'utiliser leurs connaissances pour essayer, pour faire des tentatives qu'ils progressent.

Lors de ces deux séances, ils ont beaucoup appris : faire face à une situation nouvelle, la comprendre, utiliser ses connaissances, argumenter, débattre, avoir l'esprit ouvert et critique… Ce type de problèmes permet aussi de développer l'imagination des élèves, de les confronter à des situations atypiques. Les connaissances relatives aux opérations enseignées prennent alors du sens et l'enseignement des mathématiques est perçu comme utile !

De tels « problèmes pour chercher » développent une attitude scolaire différente de l'attitude traditionnelle : il ne s'agit plus de chercher parmi les dernières connaissances enseignées lesquelles vont pouvoir s'appliquer dans un problème, mais plutôt d'aborder le problème avec la compréhension de la situation effective à un moment donné et de le résoudre avec ses propres connaissances. Tous les élèves se prennent au jeu et même les plus faibles ont de bonnes idées.

Lors de cet atelier de pratique pédagogique, les élèves de cette classe de CM2 se sont sentis en situation de recherche. Le problème présentait un caractère de défi pour l'esprit. Les réponses trouvées les ont questionnés. La recherche et les solutions potentielles ont provoqué un débat scientifique.

Si nous avons tous, adultes et élèves, pris beaucoup de plaisir avec ces problèmes, cela ne signifie pas qu'il faille donner ce genre de « problème pour chercher » tout le temps lors de l'année scolaire. Des exercices, pour s'exercer et réinvestir, sont certainement utiles. De plus, il faudra être capable d'utiliser ses connaissances entraînées pour résoudre de nouveaux problèmes…C'est vers la variété qu'il convient de se tourner.

Références bibliographiques

CHARNAY, R., 2004. Faut-il enseigner les mathématiques à tous les élèves ? *Plot n°8*. APMEP.

CHARNAY, R., 2004. En mathématiques, l'utilisation des connaissances se manifeste à travers la résolution de problèmes. *Fenêtres sur cours, n° 262*, SNUipp.

CHARNAY, R., 1996. Mathématiques et problèmes. *Pourquoi des mathématiques à l'école ?* ESF.

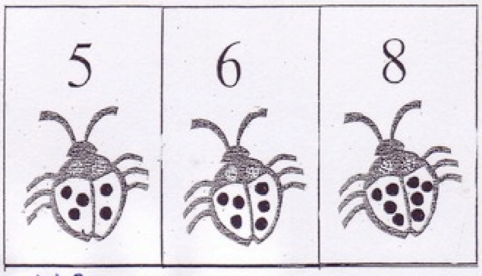
JULO, J., 2002. Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes. *Grand N n°69,* IREM de Grenoble.

BONNET, N., 2006. Mise en œuvre d'un problème pour chercher en CM2 : analyse et perspectives. *La feuille de vigne,* IREM de Dijon.

BOULE, F., Le rôle des problèmes dans l'enseignement des mathématiques » IREM de Dijon.

Annexe 1

Annexe 2



Prénom ……Raphaële…………

Problème :

Il y a ..19....cartes et la maîtresse a compté ..118....points au total sur les coccinelles

Je dois chercher :

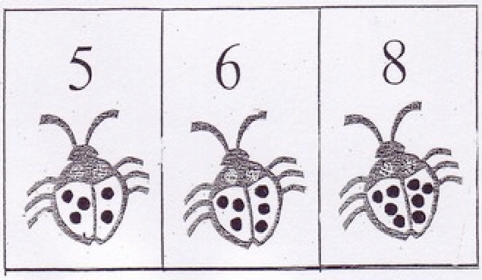
Je dois chercher le nombre de coccinelles a 5, 6, 8 points mélangés dans les 19 cartes en m'aidant du total des points.

Calcul :

1) 8 x 10 = 80   5x4 = 20   80+20 = 100

6 x 2 = 12   12+6 = 18   100+18 = 118

10 coccinelles de 8 points, 4 c de 5 p. et 14c de 6 p.



Prénom ...Julien…………………

Problème :

Il y a ..19....cartes et la maîtresse a compté ..118....points au total sur les coccinelles

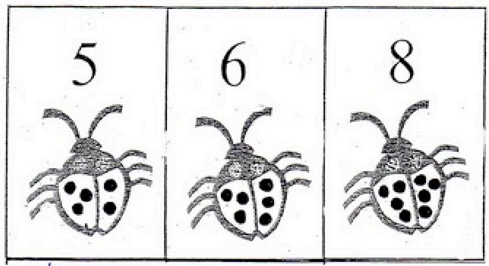
Je dois chercher :

Combien il y a de coccinelle à 5 à 6 et à 8 points

8c X 6 p = 48	8c X 5 p = 40
6c X 5 p = 30	6c X 8 p = 48
5c x 8 p = 40	5c X 6 p = 30
19c 118	19c 118

Annexe 3

Prénom … Quentin



Problème :

Il y a … 19 … cartes et la maîtresse a compté … 118 … points au total sur les coccinelles

Je dois chercher :

On doit chercher combien y a de carte de 5 points de 6 points
et de 8 points en tout avec 19 carte on doit trouver 118 points.

5x12 = 60

8x5 = 48

6cx3 = 18

20c 118 p

J'ai pris 12 cartes de 5 points, 5 cartes de 8 points et 3 cartes de 6 points.

8c x 6 = 48

6c x 5 = 30

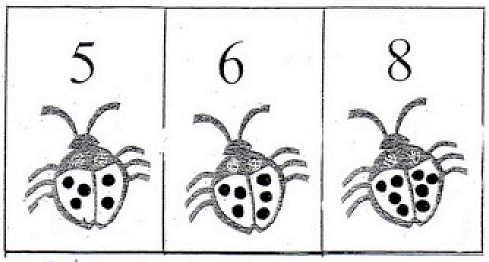
5c x 8 = 40

19c 118 p

J'ai pris 8 cartes de 5 points, 6 cartes de 8 points et 5 cartes de 6 points.

Annexe 4

Prénom Bastien [redacted]



Problème :

Il y a 19 cartes et la maîtresse a compté 118 points au total sur les coccinelles

Je dois chercher :

Le nombre de coccinelles à 5, 6 et 8 points

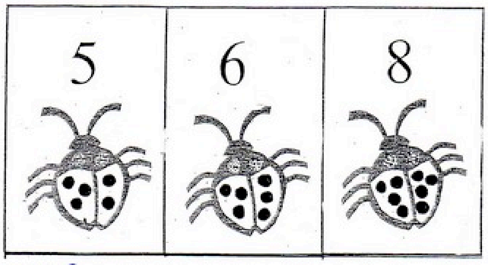
~~8c~~ 8p = 16 = 2 cartes de 8

16 x 2 = 32 = 4 cartes de 8

(9c x 8p) + (8c x 5p) + (6p x 1c) = 118 points et 18 cartes

c = carte p = point

Prénom Nicolas [redacted]



Problème :

Il y a 19 cartes et la maîtresse a compté 118 points au total sur les coccinelles

Je dois chercher :

Combien y-a-t-il de cocinelles à 8 points, à 6 points, à 5 points, en oulliant pas qu'il y a 19 cartes!

8p x 4c = 32 5p X 11c = 55 6p X 4c = 24 32 + 55 + 24 = 111 pts

4 + 11 + 4 = 19 cartes

8p + 6c = 48 6p + 7c = 42 5p X 6c = 30 48 + 42 + 30 = 120 pts

6 + 7 + 6 = 19 cartes