

USAGE DES INSTRUMENTS

ET DES PROPRIETES GEOMETRIQUES EN FIN DE CM2¹

Bernard OFFRE
Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN
Odile VERBAERE
IUFM Nord - Pas-de-Calais

Les attentes des programmes et des enseignants² relatives aux objets géométriques et à la figure changent tout au long de la scolarité de la maternelle à la fin du collège.

En sixième s'amorce un passage d'une géométrie où le contrôle des objets se fait par les instruments à une géométrie où ce contrôle se fait par des propriétés admises ou démontrées. Cependant, au cours du cycle 3 de l'école élémentaire s'effectue le passage qui nous semble tout aussi important, d'une géométrie où le contrôle des objets se fait essentiellement perceptivement, notamment par la vue et la manipulation à une géométrie où ce contrôle se fait par les instruments, porteurs de propriétés géométriques. Ainsi le document d'application des programmes 2002 du cycle 3 indique : « *L'objectif principal est de permettre aux élèves de se familiariser avec les objets du plan et de l'espace et de passer progressivement d'une géométrie où les objets et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par un recours à des instruments et par la connaissance de certaines propriétés* ».

¹ Ce travail se réfère à une recherche financée par l'IUFM Nord-Pas-de-Calais et réalisée par une équipe comprenant, outre les auteurs, R. Duval, C. Gaudeul, M. Godin et B. Keskesa.

Le présent article fait partie d'un ensemble produit par cette équipe et consacré à l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire.

Le premier, « Les changements de regard nécessaires sur les figures », rédigé par Raymond Duval et Marc Godin, paru dans Grand N n°76, présente la problématique générale de recherche de l'équipe.

D'autres articles porteront sur l'identification de variables des situations de reproduction de figures et l'usage didactique qu'il est possible d'en faire pour encourager l'utilisation des propriétés géométriques et faire évoluer le regard que les élèves portent sur les figures. Les variables didactiques concernent les figures à reproduire, les instruments disponibles, la règle du jeu de la reproduction, notamment par l'introduction de malus pour l'usage de certains instruments. Ces préoccupations rencontrent les intentions des nouveaux programmes de sixième qui, dans l'introduction à la partie « géométrie », mettent l'accent sur le développement des capacités à analyser les figures et à les construire.

² Ce qui, en théorie anthropologique du didactique, correspond au rapport institutionnel à ces objets.

Au cycle 2, on utilise principalement des gabarits ainsi que la règle, non graduée pour l'alignement et graduée pour les mesures de longueurs. Beaucoup de recherches se sont intéressées au passage à la géométrie déductive au collège, mais l'usage ordinaire des instruments de géométrie est assez peu interrogé dans les recherches³. Cependant, les difficultés dans la manipulation des instruments, y compris la règle, graduée ou non, sont importantes au cycle 3 (Favrat, 1991-1992). Or, c'est à travers l'usage du vocabulaire et l'utilisation des instruments de géométrie pour construire des figures ou vérifier des propriétés que l'on évalue souvent à ce niveau la connaissance que les élèves ont des objets géométriques, en faisant comme si cet usage était transparent.

Pour notre part, nous faisons l'hypothèse que les concepts géométriques, le vocabulaire, la maîtrise des instruments s'acquièrent et s'évaluent dans des activités qui les mettent en jeu simultanément et en imbrication avec des connaissances liées à la reconnaissance des propriétés visuelles des figures. Nous considérons donc que la production de figures géométriques ou le contrôle de leurs propriétés avec les instruments usuels demandent d'articuler la connaissance de ces propriétés géométriques et des connaissances sur les instruments (en particulier les façons de les utiliser pour qu'ils puissent rendre compte de ces propriétés). Autrement dit, l'usage des instruments usuels de géométrie par les élèves nécessite une certaine instrumentation (Rabardel, 1995), c'est-à-dire la construction par les élèves de schèmes gouvernant l'usage de ces instruments. C'est à cette question des interactions entre connaissance des propriétés géométriques et utilisation des instruments de géométrie, encore peu abordée dans les recherches, que nous nous intéressons dans le présent article.

Les évaluations à l'entrée en sixième nous ont paru pouvoir fournir un point de départ intéressant pour aborder le problème. Elles montrent chaque année des erreurs des élèves dans l'exécution de tâches simples de géométrie (voir par exemple Mul, 2000). De plus, des tâches dont la difficulté semble comparable donnent parfois des résultats assez différents. Par exemple, en 1999, dans un collège du Pas-de-Calais situé en REP, 52% des élèves traçaient correctement la perpendiculaire à une droite par un point extérieur alors que 45% seulement réussissaient pour un point B marqué par une croix sur la droite ; les pourcentages de réussite au niveau national étaient respectivement de 64,1% et 67,2%. L'année précédente, dans un autre collège de REP de la même région 92% des élèves terminaient correctement la construction d'un rectangle dont deux côtés étaient donnés (en position oblique) ; dans le même collège 90% des élèves reconnaissent des parallèles en position oblique alors que 52% seulement reconnaissent des droites perpendiculaires.

L'animation de stages de liaison école-collège à partir des résultats des évaluations à l'entrée en sixième nous a donné accès aux productions des élèves d'un certain nombre de classes de sixième et nous a convaincus que l'interprétation des productions des élèves et l'analyse des erreurs pour repérer des difficultés qui pourraient être prises en compte efficacement par les maîtres dans leur enseignement n'est pas chose facile. Il est difficile de savoir notamment si les élèves ont fait une erreur ou n'ont pas traité un exercice parce qu'ils ne comprenaient pas la question, qu'ils interprétaient mal ce qu'on attendait d'eux ou parce qu'il y avait une vraie difficulté d'apprentissage liée à l'acquisition des concepts en jeu ou à la maîtrise des instruments.

³ Mercier et Tonnelle (1991-1992) portent un regard historique sur la question ; les mêmes auteurs examinent aussi (Mercier et Tonnelle 1992-1993) dans les programmes et manuels du collège des types de tâches qui conditionnent cet usage mais ils n'étudient pas les productions des élèves.

Dans le cadre d'une recherche plus large relative à l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire, nous nous sommes donc intéressés aux évaluations nationales en géométrie et nous avons recherché des pistes plus précises d'interprétation aussi bien concernant les connaissances géométriques des élèves que leurs schèmes d'usage des instruments, en observant des élèves en train de résoudre ces exercices dans différentes conditions.

Les instruments concernés sont la règle graduée, l'équerre, le compas. L'observation devait pouvoir tenir sur une séance de classe ordinaire ou au plus une matinée, correction comprise. Nous avons donc décidé de nous limiter à quelques concepts en relation avec ces instruments : ceux d'angle droit et de perpendiculaire d'une part, de comparaison de longueurs, de distance et de cercle d'autre part. Nous avons choisi dans les cahiers d'évaluation six exercices⁴ mettant en œuvre ces notions de manières diverses et nous les avons proposés aux élèves.

Dans une première partie, nous décrivons le cadre général du travail et dans une deuxième, les résultats des observations ; dans une troisième partie nous tenterons d'en tirer quelques questions concernant l'enseignement de la géométrie au cycle 3 de l'école élémentaire et au début du collège.

Cadre général du travail

Usage des instruments

Les instruments qui nous intéressent ici sont la règle graduée, l'équerre et le compas du commerce. On attend des élèves qu'ils les utilisent d'une manière assez codifiée pour tracer les figures ou vérifier des propriétés géométriques (en lien avec la reconnaissance perceptive des figures) mais ces instruments ont en fait chacun plusieurs usages courants corrects que nous allons examiner, sachant que les élèves peuvent encore en trouver d'autres en détournant leur usage usuel pour les adapter à leurs fins dans un souci d'économie gestuelle ou conceptuelle. Par *économie gestuelle* nous entendons la limitation des gestes à accomplir pour un tracé ou la vérification de propriétés, par *économie conceptuelle*, nous entendons la limitation des connaissances à mettre en œuvre pour réussir la tâche entreprise. La distinction entre les deux peut être difficile à faire dans les faits : utiliser un seul instrument au lieu de deux peut représenter une économie gestuelle nécessitant des connaissances mais peut correspondre aussi à l'amalgame de deux notions ou à la confusion entre propriétés nécessaires et propriétés suffisantes. Nous reviendrons sur ce point ainsi que sur ce que nous pouvons entendre par ces termes en fin d'article.

La règle graduée est porteuse de la propriété d'alignement ainsi que d'un système d'unités permettant une mesure de certaines longueurs par lecture directe. Elle a essentiellement trois usages attendus :

- *outil de tracé* : elle sert à tracer des traits droits, soit pour relier des points déjà tracés, soit pour prolonger des traits droits déjà tracés, soit pour produire un tracé dans une direction donnée par un autre instrument auprès duquel on la place (équerre notamment).
- *outil de vérification du rectiligne* : elle sert à vérifier des alignements ou à en produire. Le constat de l'alignement peut ou non être suivi d'un tracé. La production de points alignés peut s'accompagner ou non du tracé de la droite.

⁴ Exercice 1 : 1999, exercice 2. Exercice 2 : 1995, exercice 30. Exercice 3 : 1996, exercice 15.

Exercice 4 : 1999, exercice 32. Exercice 5 : 1999, exercice 23. Exercice 6 : 1997, exercice 21.

- *outil de mesure* : elle sert à mesurer des longueurs et à reporter des longueurs comme écart entre deux graduations⁵.

Sur le plan technique, pour relier des points déjà tracés, il faut contrôler la coïncidence du bord de la règle avec ces points, et tracer avec la pointe de crayon (bien taillé) en contact avec le bord de la règle. Pour prolonger un segment, il faut d'une part en faire coïncider une partie avec le bord de la règle en laissant libre une autre partie du bord de la règle du côté où doit se faire le prolongement ; d'autre part tracer avec la pointe de crayon (bien taillé) en contact avec le bord de la règle.

La règle graduée est introduite dès le cours préparatoire et couramment utilisée tout au long du primaire, l'étude et l'utilisation de la graduation se faisant surtout en CE1 (pour les cm) et en CE2 (pour les mm). Une tâche fréquemment réalisée par les élèves, notamment pour tracer les figures usuelles, est de tracer un segment de longueur donnée. La technique alors souvent employée, qui permet une économie des gestes, est de combiner les deux fonctions de la règle graduée : on place convenablement la règle et on trace un trait qui va du zéro à la graduation correspondant à la longueur souhaitée. Cela correspond à une économie gestuelle : on réalise les deux opérations (tracé du support et mesure) avec un seul déplacement de la règle. Dans quelle mesure l'usage répété de cette technique, par ailleurs utile et souhaitable, contribue-t-elle à l'amalgame des concepts de segment, longueur et mesure ?

Les élèves lui trouvent aussi d'autres usages, notamment comme équerre, en utilisant directement le coin, puisque c'est un rectangle, ou en utilisant la graduation qui est perpendiculaire au bord et peut s'aligner sur une droite quand la règle est en plastique transparent comme c'est généralement le cas⁶.

L'équerre, dans l'usage attendu, sert essentiellement à tracer des perpendiculaires, des angles droits ou à les vérifier. Elle est ainsi porteuse de la propriété de perpendicularité. Cependant les équerres du commerce ont beaucoup d'autres propriétés : l'alignement bien sûr mais aussi un ou deux autres angles. D'ailleurs, dans l'usage scolaire, l'équerre sert aussi à tracer des parallèles, souvent en référence au théorème de la perpendiculaire commune, mais le parallélisme peut s'obtenir par la technique du glissement à partir de n'importe quel angle de l'équerre et cet usage est présent dans beaucoup de manuels du primaire. De plus, les équerres des élèves sont en général graduées sur un côté, ce qui fait qu'elles ont aussi les mêmes fonctions qu'une règle graduée. Ainsi, l'équerre usuelle cumule trois fonctions possibles : contrôler ou construire des angles droits (ou d'autres angles fixés), tracer des traits droits, mesurer et, en association avec une règle, tracer des parallèles.

Sur le plan technique, pour tracer ou vérifier des angles droits, l'équerre demande de contrôler deux directions, ce qui empêche en général de la placer correctement du premier coup et demande d'utiliser des déplacements. Son utilisation correcte est donc coûteuse en gestes. Par exemple, pour tracer une perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné, il faut bien placer un côté de l'angle droit sur la droite, faire glisser l'équerre en maintenant la coïncidence avec la droite jusqu'à ce que le deuxième côté de l'angle droit passe par le point donné (on utilise éventuellement une règle pour contrôler ce

⁵ Les reports de longueurs peuvent se faire avec une règle non graduée mais « informable » (Duval et Godin, 2005), c'est-à-dire une règle sur laquelle on peut reporter des informations, par exemple une règle non graduée en carton. Ici, nous considérons l'usage des instruments usuels.

⁶ D'ailleurs, on trouve dans le commerce des règles-équerres fondées sur ce principe. Elles sont parfois même porteuses d'autres informations, comme un rapporteur.

déplacement) et tracer selon ce deuxième côté. On comprend que les élèves cherchent des raccourcis. Les équerres transparentes du commerce permettent de tels raccourcis, notamment si l'on fait coïncider le trait de la graduation (0 de préférence) avec la droite à laquelle on veut mener une perpendiculaire. On peut ainsi, par un seul placement de l'équerre, en cumulant les trois fonctions, tracer un segment de longueur donnée perpendiculaire à un segment déjà tracé. Ce type de tâche est extrêmement courant dans les activités scolaires puisqu'il est à réaliser chaque fois que l'on construit un rectangle de dimensions données. Dans cette procédure, l'économie gestuelle s'accompagne d'une économie conceptuelle : on ne considère que les bords du rectangle, sans les droites qui les portent.

Le compas est un instrument de tracé pour les cercles et aussi un instrument de report et de comparaison de longueurs. Il matérialise la propriété de conservation des distances. Cependant, on peut attendre que les élèves le considèrent surtout comme un instrument de tracé puisque c'est dans ce type de tâches qu'ils y ont le plus souvent recours dès l'introduction du compas. Le cercle et le compas sont ainsi amalgamés et difficiles à dissocier. Par exemple, les travaux d'Artigue et Robinet (1992) ont montré qu'après un important travail sur le cercle visant à donner du sens à la définition en termes de centre et de rayon, les élèves de CE2 ne recourent pas au compas pour placer un point à distances données de deux points donnés. Il est encore rare en sixième que les élèves le fassent spontanément, sauf dans des procédures institutionnalisées comme la construction d'un triangle connaissant les longueurs des côtés.

Ainsi, les instruments usuels de géométrie, en plus des propriétés géométriques qui fondent l'usage qu'on veut institutionnaliser, possèdent d'autres propriétés géométriques, attestées ou non, que les élèves utilisent couramment dans les constructions géométriques des figures usuelles pour économiser les gestes (déplacements d'instruments, tracés) nécessaires pour ces constructions. Nous faisons l'hypothèse que l'usage répété de ces raccourcis peut conduire certains élèves à l'amalgame des propriétés en question.

Choix des exercices

Les programmes du cycle 3 de 1995⁷ définissent des activités à proposer aux élèves, un vocabulaire et des compétences attendues. Les compétences concernent la reconnaissance d'objets géométriques et de leurs propriétés ainsi que l'utilisation des instruments : règle, équerre, compas.

Nous avons choisi des exercices concernant d'une part la reconnaissance perceptive ou instrumentée d'angles droits et le tracé de perpendiculaires, d'autre part le tracé d'un cercle connaissant le centre et un point et la mise en œuvre de l'égalité des rayons d'un cercle. Les exercices sélectionnés comprennent éventuellement quelques tâches autres. L'identification de types de tâches nous permet de comparer leur exécution d'un exercice à l'autre ; nous récapitulerons les résultats par type de tâche après l'analyse par exercice.

Nous avons ainsi identifié sept types de tâches dans les exercices choisis, mis en œuvre dans des conditions diverses.

⁷ A l'époque des observations (2000), ce sont les programmes de 1995 qui étaient en vigueur. L'application des programmes de 2002 ne devrait pas changer le résultat de nos observations concernant les compétences que l'on peut attendre en géométrie en fin de cycle 3, en particulier à propos de la désignation. Nous y reviendrons dans la partie III.

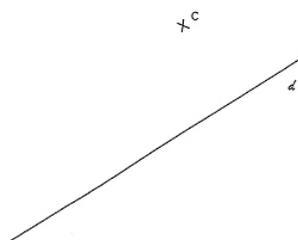
Type de tâche 1	Tracer une perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné, extérieur à la droite.
Type de tâche 2	Tracer un cercle de centre un point donné et passant par un point donné.
Type de tâche 3	Tracer un triangle dont les sommets sont trois points donnés.
Type de tâche 4	Reconnaître dans un nuage de points le centre d'un cercle dont des points sont donnés.
Type de tâche 5	Reconnaître et isoler une figure usuelle dans une figure complexe.
Type de tâche 6	Construire un carré dont deux côtés consécutifs sont donnés.
Type de tâche 7	Tracer un cercle circonscrit à un carré donné.

Analyse a priori des exercices choisis

Dans l'analyse des trois premiers exercices, on distinguera ce qui relève de la compréhension et du traitement de la tâche de ce qui relève de la manipulation technique des instruments. Ces éléments d'analyse ont un caractère général parce qu'il s'agit de tâches de tracé, très proches de l'application des définitions des objets géométriques et de l'usage institutionnalisé des instruments. Nous y retrouvons donc des difficultés connues et une partie de l'analyse précédente concernant l'usage de la règle, de l'équerre et du compas. Nous les présentons dans le cas de l'exercice 1 et n'indiquons que les compléments nécessaires pour les deux autres exercices. Pour les trois autres exercices qui proposent des types de tâches plus complexes, nous procédons à une analyse a priori plus classique, centrée sur les procédures et difficultés attendues puisqu'il n'y a rien de plus à dire sur les techniques d'utilisation des instruments.

Exercice 1 : Tracer la perpendiculaire à une droite donnée passant par un point extérieur à la droite

Ce premier exercice ne comprend qu'une tâche, du type 1. La figure fournie est très dépouillée, mais comprend des désignations. La consigne demande un tracé qui doit respecter deux conditions et mobilise la notion de perpendiculaire. L'instrument concerné est l'équerre.



Trace la droite qui est perpendiculaire à la droite d et qui passe par le point C .

Compréhension et traitement de la tâche

- *désignations des objets* : les élèves peuvent rencontrer un problème lié aux désignations par des lettres, par exemple ignorer que la lettre C désigne le centre de la petite croix qui se trouve à proximité ; de même pour la lettre d , il se peut qu'ils considèrent que d désigne l'extrémité du trait dessiné pour représenter la droite. Ce point concerne les quatre premiers exercices.
- *notion de perpendiculaire* : on peut attendre des erreurs au niveau de la notion de perpendiculaire qui pourrait être identifiée à la verticale (confusion bien connue des enseignants)
- *vocabulaire* : on peut attendre la confusion entre perpendiculaire et parallèle chez des enfants qui connaissent les deux notions mais confondent les mots.

Technique d'utilisation des instruments

- *placement de l'équerre* : placement d'un côté de l'angle droit le long de d et de l'autre côté passant par C . Pour réussir à respecter les deux conditions, il faut d'abord en réaliser une puis déplacer l'équerre de manière à conserver la réalisation de cette condition jusqu'à vérifier aussi l'autre condition. Si l'on fait d'abord passer un côté de l'équerre par le point C , il sera très difficile de conserver cette condition en déplaçant l'équerre. Les élèves qui utiliseraient cette stratégie risquent donc d'échouer. Si l'on place d'abord un côté de l'angle droit de l'équerre le long de d (i.e. du trait qui représente d), on peut conserver cette propriété en faisant glisser l'équerre le long de d ou d'une règle dont on a fait coïncider un bord avec la représentation de d .

- *compréhension de la phrase* : certains élèves peuvent avoir une lecture « en diagonale » de la consigne ; ils identifient dans la phrase la lettre C, la lettre d et construisent une relation qui n'est pas celle donnée par exemple « la droite qui passe par d et C » au lieu de « la droite qui est perpendiculaire à la droite d et qui passe par le point C ».

Pour cela, il faut maintenir la règle d'une main et faire glisser l'équerre de l'autre ou au moins garder le regard sur un bord de l'équerre qui glisse sur *d* et sur l'autre bord qui s'approche de C. Ici, la longueur des traits est suffisante pour que cette manipulation de l'équerre soit possible sans prolonger de traits⁸. L'équerre du commerce étant un triangle, la procédure adéquate demande donc d'abord d'identifier les côtés pertinents puis de s'occuper en même temps de ces deux côtés. On peut donc attendre des difficultés d'ordre technique dans l'utilisation de l'équerre.

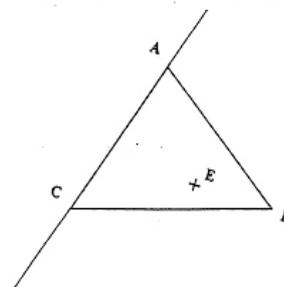
Exercice 2 : perpendiculaire et cercle

L'exercice comprend deux tâches à réaliser sur la même figure. Celle-ci fait apparaître un triangle « appuyé » sur une droite et un point E à l'intérieur de ce triangle.

La réalisation des tâches demandées demandera donc d'isoler la partie pertinente de la figure. Nous analyserons donc chaque type de tâche mais aussi l'exercice qui les rassemble.

On a commencé une figure. Complète cette figure en suivant les instructions :

- 1) Trace le cercle qui a pour centre le point B et qui passe par le point E
- 2) Trace la droite qui est perpendiculaire à la droite (AC) et qui passe par le point E



Compréhension et traitement de la tâche

Type de tâche 2 : tracer un cercle de centre donné et passant par un point donné, dans une figure complexe.

identification des points : Outre la désignation par des lettres, les points à utiliser sont représentés de deux manières différentes : E par une petite croix comme dans l'exercice 1 ; B par un sommet de triangle.

Type de tâche 1 comme l'exercice 1 mais dans une situation plus complexe : d'une part la droite est désignée par deux points, d'autre part il faut isoler la sous figure pertinente

Difficulté supplémentaire : le cercle et la droite que l'on doit tracer passent par le même point. Cela accroît la difficulté du deuxième élément tracé, aussi bien au niveau de l'identification des objets qu'au niveau du tracé : la droite si les élèves suivent l'ordre du texte, le cercle s'ils identifient dans la question 2 la même tâche que dans l'exercice 1 et commencent par celle-là.

Technique d'utilisation des instruments

Manipulation du compas : placer la pointe sèche sur un des points et l'y maintenir, la mine sur l'autre point, faire tourner le compas en laissant la mine sur le papier, sans changer l'écartement ni la position de la pointe sèche. Cela demande une habileté manuelle et une coordination visuelle, en principe acquises au CM2, du moins si le compas est de bonne qualité.

Utilisation de l'équerre : comme dans l'exercice 1 mais les éléments inutiles de la figure peuvent perturber le placement

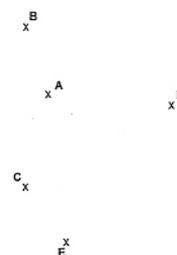
⁸ Si ce n'était pas le cas, cela ajouterait une difficulté supplémentaire qui n'est en général pas abordée à l'école

Exercice 3 : cercle et triangle

L'exercice comprend deux tâches de types respectifs 3 et 2 à réaliser sur la même figure qui, au départ, ne comprend que des points marqués par des croix.

On a placé cinq points A, B, C, D, E.

- 1) Trace le triangle EDB
- 2) Trace le cercle qui a pour centre le point C et qui passe par le point A.



Compréhension et traitement de la tâche

Type de tâche 3 : tracé du triangle

- reconnaître les points
- la notion de triangle ne devrait pas poser de problème à ce niveau.

Type de tâche 2 : tracé du cercle comme exercice 2 situation plutôt moins complexe puisque les points A et C sont représentés de la même manière.

Technique d'utilisation des instruments

Usage de la règle : bien placer sa règle pour tracer un segment reliant deux points (trois fois de suite). Chaque point est à utiliser deux fois

Utilisation du compas : comme exercice 2

Le cercle et le triangle se coupent et les points A et C qui servent à tracer le cercle ne sont pas utilisés pour le triangle mais sont proches du segment [BE]. Le premier élément tracé peut rendre plus difficile l'identification des éléments pertinents pour le tracé du second.

Exercice 4 : cercle et équidistance

C'est le type de tâche 4. Il n'y a pas de problème technique dans l'utilisation de l'instrument. Le problème réside plutôt dans la reconnaissance de la pertinence de l'instrument suggéré par le texte. Il s'agit pour cela de mettre en œuvre la définition du cercle comme ensemble de points équidistants du centre. Les points E, I, H peuvent être écartés par simple contrôle perceptif. Reste à choisir entre les points F et G. G paraît un meilleur candidat à l'œil. Le problème se ramène alors à un contrôle de l'égalité des distances GA, GB, GC, GD. Le fait de demander la vérification avec la règle graduée, qui est une indication pour s'intéresser aux distances, risque de perturber les élèves parce que la notion de cercle appelle plutôt le compas.

Les points A, B, C et D sont sur un même cercle. Le centre de ce cercle est l'un des points de la figure.
En utilisant ta règle graduée, trouve le centre de ce cercle.
Explique comment tu as trouvé.



Le centre du cercle est le point :

Explications :

.....

.....

On peut attendre que beaucoup d'élèves transforment la consigne en « trace un cercle dont le centre est un des points marqués et passant par A, B, C, D » et résolvent cette question par tâtonnement. Quand on trace le cercle de centre G passant par A, B, C, D, on constate qu'il passe aussi par I et que les autres points sont à l'intérieur de ce cercle.

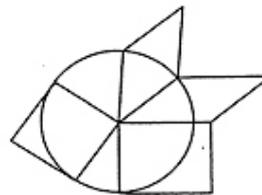
Exercice 5 : carré et losange

C'est le type de tâche 5 : reconnaître un carré et un losange dans une figure complexe. La présence du cercle permet d'identifier les figures par leurs propriétés sans recourir aux instruments à condition de procéder à une analyse fine qui demande une identification de

figures simples (quadrilatères, cercle) puis une déconstruction (Duval, Godin 2005) de ces figures de dimension 2 pour identifier les éléments de dimension 1 (côtés) pertinents.

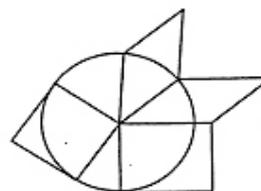
Une reconnaissance perceptive des angles droits et de l'égalité de longueurs en interaction avec les propriétés du cercle suffit alors pour répondre (en supposant que les intersections sont bien comme on les voit). Pour le losange, comme pour le carré, on reconnaît que deux côtés consécutifs ont même longueur parce que ce sont des rayons d'un cercle. Les angles droits et le parallélisme peuvent être reconnus à l'œil puisqu'on nous dit qu'il y a un carré et un autre losange. Pour le carré, il faut reconnaître des angles droits inclinés à 45° alors qu'un rectangle a des angles droits en position horizontale-verticale. C'est donc bien l'égalité des côtés consécutifs comme rayons du cercle qui va être déterminante pour reconnaître le carré comme le losange. Il faut noter que si l'élève n'a pas colorié le carré à la première question, il pourrait légitimement le colorier à la deuxième, sa réponse devant alors être considérée comme correcte (il a bien colorié d'autres traits dans ce cas, et ils forment bien un losange)⁹. Cela indiquerait cependant une difficulté à reconnaître un carré quand il n'est pas dans la position standard. Il n'y a aucune difficulté technique de manipulation des instruments puisqu'on peut répondre correctement sans utiliser aucun instrument. Nous avons choisi cet exercice justement pour distinguer si possible les moyens de reconnaissance utilisés par les élèves : reconnaissance purement perceptive, instrumentée ou par les propriétés.

a) Observe attentivement la figure suivante.



Repasse en couleur les traits de cette figure qui forment un carré.

b) Observe attentivement la figure suivante.



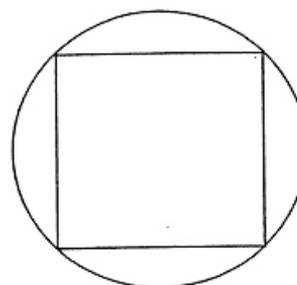
Repasse en couleur d'autres traits de cette figure qui forment un losange

Exercice 6

Il s'agit d'une reproduction de figure, avec certains éléments fournis. Le fait d'indiquer que deux côtés du carré sont déjà tracés incite les élèves à tracer d'abord le carré. Ils peuvent compléter la figure en traçant les diagonales du carré pour trouver le centre du cercle. On peut penser que ce sera la procédure majoritaire compte tenu de l'indication fournie et du fait que la figure constituée d'un carré et de ses diagonales est familière pour des élèves de CM2.

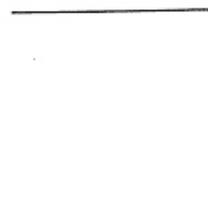
Une autre procédure consisterait à terminer le triangle rectangle, à prendre le milieu de l'hypoténuse pour trouver le centre du cercle, à tracer le cercle et à trouver le dernier sommet du carré en traçant l'autre diagonale du carré passant par le sommet connu et le centre du cercle.

Voici une figure composée d'un carré et d'un cercle.



Tu dois la reproduire, la construction est déjà commencée.

Deux côtés du carré sont déjà tracés.



⁹ Le codage des réponses des élèves ne prévoit pas vraiment ce cas puisque les deux questions constituent des items séparés. Cependant le coloriage du carré à la deuxième question est codé 2, soit réponse correcte non attendue.

Cette procédure est plus économique du point de vue des instruments puisqu'elle évite d'utiliser l'équerre mais semble moins probable que la première parce qu'il faut réaliser qu'on a tous les éléments pour tracer le cercle avant de terminer le carré. Elle est possible si l'élève pense à compléter la figure fournie en y ajoutant les diagonales du carré.

Il n'y a pas ici de difficulté conceptuelle dans l'utilisation des instruments pour des élèves de CM2 ; la seule difficulté à ce niveau consiste à déterminer le centre du cercle. Les difficultés techniques devraient être réduites aussi dans la mesure où la construction d'un carré est une tâche familière ; nous observerons cependant si les techniques utilisées par les élèves sont les mêmes dans une reproduction de figure que pour une tâche de tracé isolée.

Attentes concernant les difficultés des élèves

On peut classer les erreurs attendues en quatre grandes catégories :

- non compréhension de la consigne par méconnaissance du vocabulaire, des notations (par exemple l'usage des lettres pour désigner des objets géométriques n'est pas un objectif de l'école élémentaire ; pourtant des lettres sont utilisées dans les textes des exercices proposés aux évaluations), non compréhension de la structure de la phrase ;
- utilisation maladroite des instruments de géométrie : imprécision des tracés ;
- mauvaise mise en œuvre des instruments par méconnaissance des propriétés dont ils sont porteurs ;
- confusion au niveau du vocabulaire pouvant traduire ou non une difficulté au niveau des notions elles-mêmes.

L'interprétation en termes de difficulté conceptuelle ne peut se faire qu'à partir du croisement des symptômes concordants issus de l'observation des procédures utilisées par les élèves pour réaliser les différentes tâches.

Déroulement et résultats de l'observation de quelques élèves

Choix de la classe et des conditions de passation

Bien sûr, il n'était pas question de changer les conditions de passation des évaluations nationales à l'entrée en sixième. Nous avons donc choisi d'observer des élèves de CM2 en juin : on peut supposer que les connaissances mathématiques sont à peu près les mêmes mais l'observation se passe à la fin d'une période d'enseignement et non juste après les vacances qui peuvent entraîner certains oublis. Comme nous ne voulons pas comparer les résultats, mais comprendre les réactions des élèves, cerner les incompréhensions éventuelles, cette différence nous paraît mineure. Nous avons donc proposé ces exercices en juin 2000 aux 17 élèves de CM2 d'une classe de CM1-CM2 de la banlieue lilloise, selon un protocole nous permettant d'observer les comportements, les essais successifs, les erreurs commises et rectifiées, les hésitations, la gestion des instruments..., ce qu'une simple évaluation finale ne permet pas de percevoir. Nous avons dit aux élèves que nous nous intéressions à l'enseignement de la géométrie à l'école primaire, que nous voulions savoir ce que savaient faire des élèves de CM2 en fin d'année et que nous allions leur proposer une évaluation comme celle qu'ils auraient au début de la sixième. Cette présentation a eu un effet très motivant et les élèves se sont très bien investis dans les exercices proposés. L'observation a duré toute la matinée avec une interruption pour une récréation.

Description du protocole retenu

La classe est menée par un des membres de l'équipe de recherche que nous désignerons par C., en présence de l'enseignant qui n'intervient pas ; deux autres membres de l'équipe observent chacun un groupe de 4 élèves : *Benoît, Charlotte, Loumba et Marilène* pour l'un ; *Cédric, Jennifer, Mohammed et Marie-Laure* pour l'autre. Deux élèves, *Alison* et *Aurélie*, sont filmées par une caméra fixe. Ces élèves ont été désignées par la maîtresse comme représentant assez bien, à elles deux, de son point de vue, le niveau de cette classe.

Les élèves sont invités à sortir leurs instruments de géométrie : règle, équerre, compas, crayon bien taillé. Des instruments sont à leur disposition dans la classe pour ceux qui en ont besoin.

Dans une première phase qui dure environ vingt minutes, les élèves disposent de l'ensemble des six exercices et les résolvent individuellement à leur rythme, en consacrant à chacun d'eux le temps qu'ils désirent, avec la possibilité de revenir sur ce qui est déjà fait. Les productions sont relevées.

Dans une deuxième phase de vingt-cinq minutes, chaque exercice est repris et chaque élève fait une nouvelle production sur une feuille vierge, en respectant cette fois une synchronisation collective. La réalisation de chaque exercice est précédée d'une phase collective où les élèves sont invités à poser des questions sur tout ce qu'ils veulent. Les autres élèves peuvent intervenir et donner leur avis, mais il n'y a aucune validation de la part de l'enseignant ni des observateurs. Les productions sont ramassées dès que tous les élèves ont fini (ou au bout d'un temps suffisant).

La dernière phase consiste en une « correction » collective, exercice par exercice. Les élèves vérifient leur seconde production (*sans la corriger !*) à l'aide de transparents qui circulent dans la classe. Ils ont la possibilité de recommencer à nouveau individuellement un exercice dont ils ne sont pas entièrement satisfaits, à cause d'une erreur, d'un manque de précision ou d'une autre raison.

Analyse des procédures par exercice

Nous décrivons maintenant les productions et procédures de ces élèves en soulignant pour chaque exercice les évolutions d'une phase à l'autre. On trouvera en annexe 2 un récapitulatif de l'évolution des procédures de quelques élèves d'un exercice à l'autre et d'une phase à l'autre.

Exercice 1

Dès la phase 1, les productions sont dans l'ensemble correctes¹⁰. On trouve la plupart du temps le tracé du *segment* d'extrémités C et H (pied de la perpendiculaire) ou de la *demi-droite* d'origine H, c'est-à-dire que la perpendiculaire ne traverse pas la droite *d*. Par contre, l'observation des élèves « en action » montre une certaine diversité de procédures plus ou moins orthodoxes dans le maniement des instruments.

Alison place correctement l'équerre et trace directement [CH] (si on appelle H le pied de la perpendiculaire), hésite longuement avant de compléter avec le symbole de perpendicularité. Elle reproduit très vite le même tracé en phase 2.

¹⁰ Dans un collège de REP de la région, la réussite en septembre 1999 avait été de 52 % et l'échec de 40%

Charlotte utilise règle et équerre qu'elle dispose ainsi (fig 1). Elle ne peut donc arriver à la position correcte qu'en procédant par ajustements des deux instruments, par exemple en faisant glisser le tout le long de la droite d. La position relative de la règle et de l'équerre laisse ainsi libre le bord de la règle, ce qui permet de tracer la perpendiculaire jusqu'au point d'intersection.

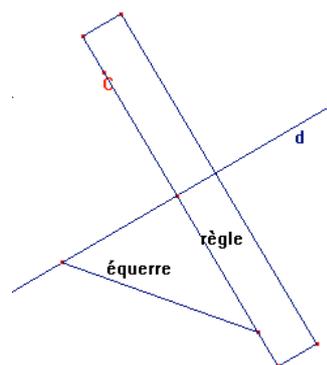


Figure 1

Aurélie dispose l'équerre (transparente) de la façon suivante en utilisant le 0 de la graduation, et trace un segment qu'elle prolonge dans un deuxième temps à la règle. (fig 2) L'équerre transparente est ici placée à l'envers (lors de son premier essai) ; elle la placera ensuite à l'endroit dans d'autres essais, mais toujours avec cette position du 0.

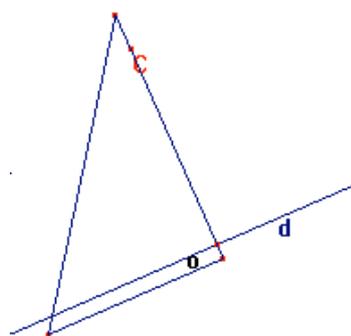


Figure 2

Mohammed tourne son équerre en plaçant l'angle droit en C et finit par tracer avec l'équerre un segment qui aboutit vers l'extrémité droite du segment représentant d.

Dans un premier temps, certains élèves confondent parallèle et perpendiculaire avant de revenir en arrière, soit en voyant ce qu'ont fait les voisins, soit à partir d'une autre question :

Benôit trace une parallèle à (d) de façon approximative, à la règle. Voyant les productions de ses voisins immédiats, il efface et trace cette fois de façon classique la perpendiculaire. Il ressent le besoin de vérifier à l'équerre que les trois autres angles sont également droits.

Cédric place bien sa règle perpendiculairement à la droite et prend des repères de points à la distance constante de d pour tracer la parallèle à d passant par C. Pour l'exercice 2, il trace correctement le cercle et à nouveau une parallèle puis il relit, corrige, revient sur l'exercice 1, efface et trace la perpendiculaire correctement. Il semble que c'est à la relecture seulement qu'il réalise le sens exact de la consigne et le fait qu'il revienne à l'exercice 1 permet de penser qu'il a bien repéré que c'était la même tâche dans les deux exercices.

Jennifer passe l'exercice 1, ne fait que le cercle dans l'exercice 2. Elle passe très vite sur tous les exercices. Elle revient au début quand elle a tout fini et trace une parallèle à la règle à vue d'œil pour l'exercice 1 comme pour l'exercice 2.

En phase 2, les élèves ne posent aucune question. Les procédures sont en général les mêmes que précédemment.

Benôit utilise cette fois la règle graduée, **Cédric** également selon la figure 3.

Jennifer trace à nouveau la parallèle.

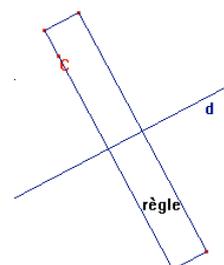


Figure 1

En phase 3, alors que les élèves vérifient leur seconde production avec le transparent, *Aurélie* pose la question (qui intéresse d'autres élèves) : « *doit-on obtenir la même longueur que sur le transparent ?* » Elle a tracé une droite qui dépasse C et H mais qui ne coïncide pas avec celle du transparent.

La correction est faite ensemble (construction du segment). Plusieurs arguments sont avancés par les élèves : « *Tant que c'est sur la même ligne c'est bon* » ; « *Tant que c'est sur la perpendiculaire, c'est bon !* » « *Une droite peut être représentée par un petit ou par un grand bout* ». Cependant, *Aurélie* va corriger au tableau et ne trace que le segment [CH]. Un autre élève propose de prolonger le tracé de l'autre côté de la droite initiale. Une discussion s'engage, concernant les autres angles pour conclure que si l'un est droit, les trois autres le sont aussi.

Un élève s'aperçoit qu'il a tracé une parallèle à la droite (« *le contraire !* »). Il recommence en n'utilisant que la règle plate (figure 3).

Exercice 2

Concernant la première question de cet exercice, dès la première phase, le tracé du cercle est souvent réussi¹¹ (*Benoît, Charlotte, Loumba, Marilène, Jennifer, Aurélie, Mohammed, Cédric*), mais *Charlotte* dessine une croix très précisément au sommet B du triangle ABC. *Marie-Laure* intervertit le rôle des points E et B et *Alison* dessine une croix à côté de la lettre B et la considère comme le centre du cercle à tracer !

Lors de la phase 2, une question concernant les notations est soulevée : « *Quand on dit le point, est-ce qu'il s'agit de la croix ou de la lettre ?* ». Après un bref débat entre les élèves, il est établi que, lorsque l'on évoque le point E, il s'agit de la croix voisine (ce que la plupart des élèves savaient). *Michaël* pose la même question pour le point B et c'est un autre élève qui lui répond que *B désigne la « pointe » du triangle* (il apparaît ici que ce sont deux difficultés différentes). *Marie-Laure* trace à nouveau le cercle de centre E passant par B puis, (après un coup d'œil sur le voisin ?) gomme et corrige. Cette fois, les productions relatives à la première question sont justes.

Lors de la correction en phase 3, après les explications des élèves, *C* met en valeur le fait que le point B est bien présent, qu'il est situé à la pointe de l'angle.

Concernant la deuxième question, pour la construction de la perpendiculaire à (AC) passant par E, on retrouve très logiquement en phase 1 des méthodes utilisées pour le premier exercice ; après un deuxième essai, les enfants vérifient leur production en phase trois avec le transparent et la plupart recommencent.

En phase 1, comme pour l'exercice précédent, *Alison* limite son tracé au segment et complète par le symbole de perpendicularité. *Charlotte* utilise à nouveau règle et équerre, mais vérifie ensuite son travail avec l'équerre uniquement. *Aurélie*, après avoir mesuré plusieurs fois les longueurs de [AC] et [EH]¹², utilise la règle plate en s'aidant des graduations pour construire la perpendiculaire. En phase 2, elle tracera directement la perpendiculaire par la même méthode.

Marilène commence par tracer (BE). Elle efface et joint E au milieu de [AC]. Lors du deuxième essai, elle fera l'inverse, en passant par un tracé correct qu'elle effacera ensuite. Elle avait réussi d'emblée l'exercice 1, ce qui laisse supposer qu'elle sait effectuer le tracé d'une perpendiculaire ; ici la droite est donnée par deux de ses points A et C et la figure est

¹¹ En 1995, au niveau national, le cercle est réussi à 81% et la perpendiculaire à 42,3% parmi lesquels seuls 16,9% ne limitent pas leur tracé à l'un des points.

¹² Si on appelle H le pied sur [AC] de la perpendiculaire à (AC) passant par E

plus complexe, comprenant notamment un point B sans rapport avec cette deuxième question. *Marilène* semble se croire obligée d'utiliser tous les points de la figure.

Benoît trace en phase 1 tous les segments possibles reliant les points « saillants » de la figure, A, C, E, B et les deux extrémités du trait qui représente la droite (AC), en phase 2 il ne trace plus que les segments joignant E aux points A et C (les points nommés dans la consigne). En phase 3, après avoir confronté son travail au transparent de « correction », il produit le bon tracé.

On voit ici que l'identification d'une droite désignée par deux points ne va pas de soi.

Jennifer, qui, en phase 1 comme en phase 2, a tracé une parallèle à (AC) passant par E, éprouve en phase 3 des difficultés à placer l'équerre : elle place l'angle droit en E.

Comme certains élèves en phase 3 placent encore l'équerre comme indiqué figure 2, le chercheur C qui mène la classe propose un autre modèle d'instrument, sans graduation que les enfants réfutent : « *ce n'est pas une équerre !* ». Suit alors la construction collective d'équerres en papier que les élèves semblent ne pas accepter comme telles. N'ont-ils jamais vécu cette situation pourtant présente dans la plupart des manuels de CE2 ? L'ont-ils complètement oubliée lorsqu'ils ont eu le loisir d'utiliser l'instrument du commerce, avec ses graduations, son aptitude à mesurer des longueurs, sa transparence ? Est-ce que dans les usages de l'instrument du commerce développés depuis le début du cycle 3, le lien avec le gabarit d'angle droit, propriété géométrique portée par l'équerre, s'est perdu ?

Exercice 3

Dès la phase 1 on ne remarque pas de problème particulier pour la construction du cercle¹³, même pour *Alison*, mais il faut cependant remarquer que contrairement à l'exercice précédent le point C est bien isolé et identifié (par la petite « croix » et non comme sommet d'un triangle).

Le tracé du triangle EDB est réussi d'emblée par *Charlotte*, *Loumba* et *Marilène*. D'autres hésitent un peu. Au moment des questions au début de la phase 2, Cédric demande : « *Pour le triangle EDB, faut-il faire seulement EDB ou faut-il faire aussi BE ?* ». Jennifer propose d'appeler le triangle EDBE. D'autres disent qu'on peut aussi tracer dans le désordre : « *BDEB ou...* » c'est-à-dire revenir au point de départ. Effectivement, lorsque l'on désigne un triangle par trois lettres seulement, le retour au premier est implicite, ce qui ne semblerait pas aller de soi pour les élèves. Le nom du triangle désigne clairement pour eux des instructions de tracé. On ne remarque rien de particulier concernant les nouvelles productions, si ce n'est une plus grande rapidité d'exécution.

Les deux élèves filmées réussissent également mais l'observation des films montre une utilisation étonnante de l'équerre, surtout dans le cas d'*Alison*.

Aurélie trace le triangle à la règle puis compare les angles du triangle avec l'équerre : elle semble chercher un angle droit en B puis en D et utilise un autre coin de l'équerre pour E.

Alison réussit aussi mais l'observation montre qu'elle change plusieurs fois d'instruments, entre la règle graduée et l'équerre et que l'usage de l'équerre semble induire des procédures particulières pour les tracés (voir description détaillée en annexe 2). Elle trace [DE] à la règle graduée, puis elle prend l'équerre, semble chercher à tracer des perpendiculaires si bien qu'on peut se demander si elle n'a pas en tête, à ce moment là, les consignes de l'exercice 2 : elle trace d'ailleurs le segment perpendiculaire à [DE] d'extrémités B et le pied de la hauteur qu'elle efface immédiatement. Pourtant, il semble bien ensuite qu'elle

¹³ Au niveau national en 1996, 87,4% des élèves tracent correctement le cercle et il y a 91% de réussite pour le triangle.

essaie de construire les autres côtés du triangle, toujours avec l'équerre mais l'angle droit de l'instrument la préoccupe et l'empêche de réussir : peut-être s'attendait-elle à trouver un angle droit en D¹⁴. Après échange de l'équerre pour la règle, la suite de la construction ne présente plus de difficulté. Elle ressent cependant le besoin de comparer finalement l'angle D du triangle avec l'angle droit de l'équerre pour constater qu'il n'est décidément pas droit. En phase 2, *Alison* utilise à nouveau l'équerre pour les tracés, apparemment toujours un peu perturbée par l'absence d'angle droit en D ; de plus, elle utilise le côté gradué pour tracer et cherche systématiquement à poser son équerre de manière à faire coïncider l'origine de la graduation et l'origine du segment à tracer.

Exercice 4

En phase 1, la plupart des élèves utilisent le compas malgré la consigne. Ils semblent ne pas comprendre le sens de la question¹⁵.

Cependant *Alison*, après avoir longuement observé la feuille, mesure les segments ayant G pour extrémité et répond correctement en disant que les rayons font 4 cm, sans produire aucun tracé.

Aurélie fait à plusieurs reprises un geste circulaire suivant tout ou partie de la ligne « extérieure » IABCDE... Elle trace les segments [IA] [AB] [BC] [CD] [DE] [EF] puis les efface. Elle refait ce geste circulaire lentement, décrit certains polygones avec le doigt redessine certains des segments précédemment effacés, les efface à nouveau, mesure [DE], le trace ainsi que [EF] et [AF]. A ce stade, le temps imparti est écoulé. Cette élève, très lente, semble avoir été pénalisée par des difficultés de lecture (voir en annexe 1 une description plus détaillée des observations la concernant).

Jennifer avait sauté l'exercice 4. Elle y revient tout à la fin. Elle commence par faire des essais avec le compas puis pose le compas, place un doigt en G et fait tourner un autre doigt. Elle recommence avec un doigt en F puis place la pointe sèche de son compas en G et trace un cercle passant par I (et donc aussi par les autres points). Elle n'utilise pas la règle graduée.

Cet exercice intrigue les élèves et, en phase 2, les questions sont nombreuses : « *Faut-il faire le cercle au compas ?* » « *Que vient faire dans un problème de cercle la règle graduée ?* » (*Aurélie*) « *Faut-il faire tous les segments ?* » ... Des avis divers sont exprimés : « *Il ne faut pas faire le cercle mais faire comme si on le faisait et voir si c'est la même longueur* ». « *Ils ne disent pas de le tracer* » ... « *Trouver le centre avec la règle graduée, mesurer !* », « *Les points A, B, C, D sont sur le cercle* » ; « *Il n'y a que 4 points, et le 5^{ème}, le E ?* », « *Et le I ?* » (*Jennifer*) « *Il y a des autres points qui ne sont pas dans le cercle* » (*Marie-Laure*)...

On remarque chez les élèves observés peu de changement dans la compréhension de l'exercice. Ainsi, pour cette deuxième production, *Aurélie* trace [AB], [BC], [CD] puis [DE] et efface ce dernier. Elle trace [AI], [IF] et [FD] et n'a pas le temps de faire autre chose.

En phase 3, la correction de cet exercice est longue car certains élèves ne perçoivent toujours pas le rapport qui peut exister entre un cercle et un outil comme la règle graduée.

¹⁴ La démarche d'Alison peut s'expliquer autant par l'analyse perceptive de la figure que par un effet de contrat : l'angle BDE est en effet proche d'un angle droit ; de plus les exercices précédents demandaient de tracer des perpendiculaires.

¹⁵ Dans un collège de REP de la région, en septembre 1999, 65% des élèves échouent et les autres s'abstiennent.

Le chercheur *C.* passe un long moment à préciser quelle était la tâche, à savoir trouver le centre du cercle mentionné et l'écrire, puis justifier en fournissant les explications demandées (c'est le premier exercice de la série où la tâche n'était pas une tâche de tracé). Après cela il propose de refaire ensemble l'exercice, sans recourir cette fois au compas ; ce n'est qu'après avoir, dans une démarche fortement guidée, mesuré des segments dont [GI], [GA], [GB], [GC], [GD], que les élèves acceptent que G soit le point cherché. Il faut cependant remarquer que le tracé du cercle est un moyen plus rapide et plus convaincant que la mesure avec une règle graduée, pour vérifier que G est bien le centre du cercle et même pour trouver le résultat. C'est la définition du cercle comme ensemble des points à égale distance d'un point donné que veut tester l'exercice. Peut-on dissocier cette connaissance de celle de l'usage du compas pour reporter des longueurs ? Il semble en tout cas qu'il soit difficile de dissocier l'idée de cercle de celle de compas.

Exercice 5

Comme nous l'avons dit dans l'analyse a priori, la reconnaissance du carré et du losange demande surtout de reconnaître des égalités de longueurs. La présence du cercle devrait « logiquement » permettre d'éviter la mesure de certains segments et de conclure rapidement, mais ce n'est pas le cas¹⁶.

En phase 1, *Alison* vérifie à l'équerre les quatre angles du rectangle et le repasse en couleur. Elle en mesure deux côtés consécutifs et efface le tracé. Elle mesure les quatre côtés du carré (malgré la présence du cercle) et colorie le contour avec application. Sa production est correcte mais elle ne vérifie pas les angles. Est-ce un oubli de sa part, a-t-elle remarqué visuellement qu'ils étaient droits ou bien se dit-elle que, puisqu'il doit y avoir un carré et que si ça n'est pas l'autre (le rectangle), c'est que c'est celui-là ?

Pour la deuxième partie de l'exercice, elle mesure les quatre côtés du losange, vérifie qu'un angle n'est pas droit, et en dessine le contour. Elle mesure les côtés du parallélogramme, vérifie qu'un angle n'est pas droit, puis reprend la mesure du plus grand des côtés mais en plaçant cette fois le bord de l'équerre à l'origine du segment et dessine le contour du parallélogramme.

Pour trouver le carré, *Marilène* vérifie un seul angle puis mesure les côtés avant de l'entourer. Est-ce grâce à une connaissance des propriétés caractéristiques ou à une perception visuelle ? Au vu de l'ensemble de ses comportements, nous pencherions plutôt pour la seconde interprétation.

On trouve chez les autres élèves des procédures semblables avec plus ou moins d'erreurs ; le rectangle est parfois perçu comme un carré ; le parallélogramme est toujours traité comme un losange. Sur les 10 élèves observés, 8 dessinent à la 2^{ème} question le losange et le parallélogramme ; en phase 2, les 10 le feront.

En phase 2 une question est posée : « *Est-ce qu'il faut repasser le losange complètement ou seulement une partie du losange ?* » (certains dessinent les côtés du losange, d'autres colorient également l'intérieur). Là encore, les productions sont les mêmes que précédemment, avec bien entendu les mêmes erreurs, dues aux méconnaissances des figures : oubli de la part de certains ? difficulté de reconnaissance des figures classiques lorsqu'elles appartiennent à une configuration relativement complexe ?

Alison repasse directement le losange et le parallélogramme, sans mesurer cette fois, puis le carré, sans vérifier l'égalité des côtés ni leur orthogonalité, vraisemblablement grâce à la mémorisation.

¹⁶ Dans un collège de REP de la région, en septembre 1999, pour le carré, 22% des élèves réussissent et 75% échouent ; pour le losange, il y a 30% de réussite et 65 % d'échec.

En phase 3, pour distinguer le carré du rectangle (exercice 5), les élèves n'utilisent toujours pas le cercle. Malgré le rappel de la définition, l'un d'eux déclare que le carré peut être plus grand dans un sens que dans l'autre (il parle du rectangle). Ce n'est que grâce à une série de questions bien orientées du chercheur C. que certains élèves arrivent à concevoir que l'usage du double décimètre n'était pas nécessaire pour répondre à la question et que l'on pouvait se référer aux rayons du cercle. Il semble bien clair ici que le contrat didactique comprend une justification des réponses par l'usage des instruments mais non par la référence à des propriétés connues des figures. Le rapport aux figures est bien le rapport pratique d'une géométrie instrumentée.

Exercice 6

Les enfants n'ont pas tous le temps d'aborder cette question en phase 1, les figures incomplètes ne comportant que le tracé du carré¹⁷.

Loumba trace approximativement le troisième côté du carré à la règle graduée, comme indiqué sur la figure 4.

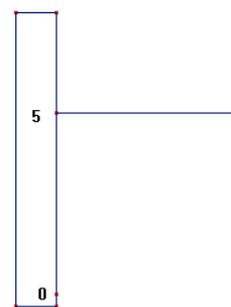


Figure 2

Marilène commence la reproduction du carré en plaçant l'équerre *approximativement* dans l'alignement du segment horizontal et en traçant *une partie* du troisième segment. (fig 5)

Elle le termine à la règle graduée, en reportant la bonne longueur, puis en joignant les deux extrémités pour dessiner le dernier côté. Le troisième angle droit ou la quatrième longueur ne sont pas vérifiés.

Elle obtient le centre du cercle en repérant le *milieu* « virtuel » d'une médiane du carré, à l'aide de la règle mais *sans la dessiner* effectivement, et trace le cercle approximativement.

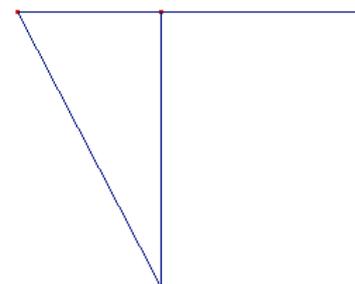


Figure 3

Aurélie trace le troisième côté à la règle ; l'angle droit semble reproduit sans outil particulier. Elle le *prolonge avec l'équerre graduée* pour qu'il ait bien la même longueur que sur le modèle. Elle termine ensuite le quatrième côté.

Elle met sa règle en position de diagonale du carré, repère le milieu de cette diagonale, enlève la règle puis marque le centre qu'elle avait repéré. Elle trace le cercle au compas et comme le cercle ne passe pas par les quatre sommets (le centre ayant une position approximative), elle efface tout.

Elle retrace le troisième côté à la règle graduée, en reportant la bonne mesure, termine le carré, trace le cercle (le centre étant porté approximativement) et ... efface à nouveau.

Cédric et Jennifer tracent d'abord le carré. Jennifer fait des essais pour trouver le centre. Cédric trace une médiane du carré et prend le milieu. Finalement Jennifer efface tout, refait le carré et trace les deux médianes.

¹⁷ Au niveau national en 1997, 63,6 % des élèves réussissent l'ensemble et 94,3% terminent le carré.

Alison trace le troisième côté du carré à l'aide de l'équerre, reporte la bonne longueur et complète en traçant le dernier côté. Elle en trace les diagonales, ce qui lui permet de déterminer le centre du cercle et de le construire.

Dès la phase 1, *Jennifer* et *Mohamed*, après avoir tracé le carré obtiennent le centre du cercle en traçant les deux médianes.

En phase 2, la difficulté majeure pour certains enfants reste, comme nous venons de le voir, la détermination précise de la position du centre du cercle. Une question est posée : « Faut-il faire le cercle ? » D'autres répondent « Oui ! Mais il faut trouver son centre ! » *Marie-Laure* : « Il faut trouver le point au milieu pour faire le cercle ». Une élève : « Quand je l'ai fait, ça n'allait pas parce que le cercle doit coller les coins du carré ; j'avais fait le carré d'abord et ça n'allait pas ». On peut remarquer que des élèves (notamment *Marilène* et *Aurélie*) situent bien le centre au milieu d'une diagonale mais sans se permettre de tracer cette diagonale qui n'apparaît pas sur le dessin à reproduire ; de ce fait leur détermination du centre est imprécise. Une règle du contrat de la reproduction de figures semble être de tracer le moins possible d'éléments qu'il faudra effacer ensuite.

Bilan par type de tâche

Type de tâche 1 : tracer par un point une perpendiculaire à une droite

Il y a peu de différence pour ce qui se passe dans l'exercice 1 et dans l'exercice 2. Il est vrai que la figure de l'exercice 2 n'est pas très complexe et que cet exercice apparaît juste après le précédent. Comme attendu, certains enfants confondent perpendiculaire et parallèle. D'autres interprètent perpendiculaire non comme une droite mais comme un segment qui joint le point à la droite, le plus souvent avec un angle droit, mais pas toujours. Les autres problèmes concernent le placement de l'équerre : certains élèves tentent de placer l'angle droit de l'équerre au point où doit passer la perpendiculaire ; d'autres utilisent le zéro de la graduation. Nous avons vu que les équerres du commerce sont porteuses de beaucoup d'informations, correspondant à des fonctions différentes. Elles peuvent avoir divers usages en classe, certains combinant plusieurs de ces fonctions. Nous reviendrons sur ce point dans la troisième partie à la lumière de ce qu'on peut trouver dans certains manuels scolaires concernant le tracé des parallèles. Il est à noter que l'utilisation de la règle graduée comme équerre ou l'utilisation "économique" de l'équerre semblent augmenter à mesure que la tâche se répète ou entre dans la réalisation d'une tâche plus complexe : par exemple *Cédric* et *Benoît* utilisent l'équerre dans la phase 1 et la règle graduée dans la phase 2. *Alison* utilise correctement son équerre dans les exercices 1 et 2 et utilise la graduation 0 quand elle trace un carré.

Types de tâche 2 et 3 : tracer un cercle connaissant le centre et un point ; tracer un triangle de sommets donnés

Mis à part les problèmes de désignation et d'usage de l'équerre comme instrument de tracé décrits plus haut, ces tâches ne soulèvent pas de problème particulier. La seule erreur observée est l'interversion du centre et du point du cercle pour le type de tâche 2.

Type de tâche 4 : reconnaître si des points appartiennent à un même cercle

Pour la plupart des élèves, le cercle est assimilé au tracé d'un compas et non à la distance au centre, en tout cas mesurée par une règle graduée. Inversement, nous ne savons pas si les élèves utiliseraient le compas pour reporter des distances. Néanmoins, il est connu que les élèves ne pensent pas à utiliser le compas pour trouver des points à distance donnée d'autres points (Artigue et Robinet, 1992).

Type de tâche 5 : reconnaître un carré et un losange dans une figure complexe

Même quand il est tracé, le cercle ne sert pas à vérifier l'égalité des longueurs : les élèves mesurent, se contentent de la perception ou ne tiennent pas du tout compte des distances. Les angles droits en position horizontale-verticale sont privilégiés par certains élèves. Il semble que le terme "losange" pose encore problème pour certains élèves ; même si on les voit mesurer les côtés, la majorité des élèves acceptent le parallélogramme comme un losange bien qu'il ne soit pas en position prototypique de losange. Est-ce parce que le parallélogramme a disparu des programmes ?

Type de tâche 6 : tracer un carré dont deux côtés consécutifs sont donnés

Les angles droits étant en position horizontale-verticale, beaucoup d'élèves reproduisent le carré à la règle graduée, en se servant éventuellement des graduations pour faire un angle droit.

Type de tâche 7 : tracer un cercle circonscrit à un carré

Quand le carré est tracé, le recours aux diagonales ou aux médianes est relativement disponible pour trouver le centre du cercle. Certains enfants cependant ne réalisent pas cette tâche.

Retour sur les questions soulevées

A l'issue de ces observations, nous tentons de tirer quelques conclusions sur le rapport que semblent entretenir avec la géométrie des élèves qui vont entrer en classe de 6^{ème}, tel qu'il apparaît dans ce genre de tâches isolées.

Usage des désignations

Une des difficultés qu'ont rencontrées les élèves est celle de l'usage des lettres pour désigner des points (« *Le point, est-ce la petite croix ou la lettre ?* ») et pour nommer des figures comme un triangle (« *le triangle, c'est EDBE* ») ; la dernière réflexion montre bien que les désignations sont pour eux des codages d'action à réaliser plus que des moyens de désigner des objets géométriques. Par ailleurs, certains élèves semblent ne pas considérer (ou repérer) le sommet d'un triangle ou d'un angle en tant que point, comme *Alison* qui trace une croix à côté de la lettre B au second item, pour matérialiser ce point B bien qu'il soit déjà matérialisé par le sommet de l'angle. Il est difficile de concevoir des tâches isolées comme celles des exercices 1 à 4 sans utiliser de désignation par des lettres. La discussion a montré que les élèves peuvent comprendre les usages de ces désignations par des lettres mais ils ne sont pas habitués à les utiliser parce qu'elles ne sont en général pas introduites à ce niveau. On risque ainsi dans les résultats des évaluations de sixième d'interpréter comme des difficultés conceptuelles sur les notions géométriques des erreurs ou des absences de réponse qui sont dues à une mauvaise compréhension de la question donnée dans une forme qui n'est pas habituelle pour les élèves. Cela soulève deux questions : celle de la place de ces types de tâches dans des évaluations en début de sixième et celle de l'introduction ou non de la désignation par des lettres de façon plus précoce, ce qui se trouve effectivement dans certaines classes, parfois même dès le CE1. Le document d'application des derniers programmes de cycle 3 recommande de n'introduire qu'avec prudence la désignation par des lettres ; la désignation d'une droite ou d'un segment à partir de deux points ((AB) ou [AB]) n'est pas exigible au cycle 3 ; on ne devrait donc plus les trouver dans les évaluations 6^{ème} ; nous verrons si les types de tâche qui les utilisent disparaissent aussi ou si on se limite à des désignations par une seule lettre.

Utilisation des instruments

Le compas est disponible pour tracer des cercles mais ne semble pas l'être pour reporter ou comparer des longueurs, pour beaucoup d'élèves, c'est encore un instrument un peu magique servant à faire des cercles « bien ronds ».

L'équerre graduée transparente peut être considérée comme un « macro-outil » puisqu'elle comporte un gabarit d'angle (et même trois !) ainsi qu'une règle graduée et qu'elle permet d'observer un dessin par transparence. Ces différentes fonctions peuvent perturber des élèves en phase d'analyse et de reproduction d'une figure avec laquelle ils ne sont pas bien familiers (cf *Alison* exercice 3, qui l'utilise pour mesurer des longueurs et qui, l'ayant en main, recherche des angles droits). Notons également le refus de considérer comme une vraie équerre, une équerre non transparente et ne possédant aucune graduation. Notons aussi que la transparence permet une procédure telle que celle représentée sur la figure 2 qui permet le tracé en une seule étape. On peut d'ailleurs se demander si certaines présentations des notions géométriques ne favorisent pas cet usage.

Ainsi, dans le chapitre sur les parallèles, dans la rubrique Découvrir, le manuel Math Livre-outil CE2, (Magnard, 1990 p.66-67) propose l'activité et le memento ci-contre.

Comment, avec une équerre du commerce, mesurer sur une perpendiculaire sans utiliser l'équerre comme sur la figure 2 puisque le 0 n'est en général pas sur le bord de l'équerre ? La procédure suggérée par le manuel ne peut se réaliser concrètement qu'avec une équerre en carton sur laquelle on peut écrire (mais ce n'est sans doute pas à ce type d'équerre que le manuel se réfère)

ou alors il faut repérer une graduation mais, dans les deux cas, cela ne correspond pas à une mesure de distance.

En feuilletant quelques autres manuels, nous avons constaté que d'autres procédures sont enseignées, notamment dans des plus manuels récents, tentant de relier instruments et propriétés géométriques et distinguant bien des étapes dans la manipulation des instruments. Une étude des usages des instruments suggérés par les manuels et des pratiques des enseignants serait indispensable pour compléter nos observations sur ce point et distinguer ce qui relève du contrat de ce qui relève de difficultés conceptuelles.

Economie gestuelle - économie conceptuelle

Dans le tracé effectif des figures, il est cependant difficile et contraignant d'utiliser plusieurs instruments consécutivement : l'équerre d'abord pour tracer un morceau de droite perpendiculaire à une droite donnée (ce qui permet de déterminer le support de cette perpendiculaire) puis la règle pour terminer la construction. Ceci pourrait expliquer les procédures telles que celle rencontrée figure 2 où l'on réalise un seul tracé en s'appuyant sur la transparence de l'instrument : on mesure et on fait l'angle droit en même temps. Avec l'instrument concret dont disposent les élèves, cette procédure permet une économie de gestes tout en permettant d'obtenir un tracé aussi satisfaisant que la procédure enseignée. Il semble que les élèves mettent en place des procédures économiques permettant d'obtenir des tracés satisfaisants à l'œil sans relier l'usage des instruments aux propriétés géométriques sous-jacentes. Les difficultés dans l'utilisation des instruments

2 Les deux droites ci-dessous sont-elles parallèles?
Pour cela, vérifie que leur écartement est partout le même.

POUR T'AIDER
Avec ton équerre, mesure l'écartement de ces droites en deux points différents.

Mémento

- Deux droites qui ne se rencontrent pas aussi loin qu'on les prolonge sont des droites parallèles.
- L'écartement entre deux droites parallèles est partout le même. On le mesure à l'aide d'une équerre.

semblent ainsi plutôt résider dans la capacité à isoler une propriété géométrique dont l'instrument est porteur que dans l'habileté motrice que réclame leur usage. Cela soulève la question de l'ambiguïté des objectifs des tracés aux instruments dans l'enseignement de la géométrie à l'école primaire et encore au début du collège. S'il s'agissait d'obtenir les tracés les plus satisfaisants possible sur le plan du dessin, on privilégierait des instruments performants qui limitent les déplacements et les tracés auxiliaires, sources d'imprécision, et permettent de respecter le plus de propriétés à la fois tout en gardant un caractère aussi universel que possible. On rechercherait ainsi aussi bien une économie gestuelle qu'une économie conceptuelle. Mais l'objectif principal de l'enseignement est de faire acquérir des connaissances aux élèves ; l'utilisation d'un instrument est ainsi pensée comme la manifestation d'une connaissance qu'on peut contrôler par cet usage même. Dans cette perspective, il est nécessaire que l'usage institutionnel de l'instrument corresponde le plus possible à la manifestation de cette connaissance et d'elle seule, ce qui suppose un usage codifié des instruments, lié à la (aux) propriété(s) qu'ils sont censés matérialiser. Les éventuelles économies gestuelles devront alors être justifiées par des propriétés contrôlables par l'usage codifié des instruments. Les économies conceptuelles ne peuvent être acceptées que si elles sont justifiées par des connaissances de niveau supérieur, déjà institutionnalisées. La vérification de connaissances géométriques à travers la production de figures suppose de pouvoir dire de quel point de vue on décide que la réalisation d'une figure est ou non satisfaisante. Nous reviendrons sur ce point dans le dernier paragraphe. L'utilisation de logiciels pourrait sans doute être une autre piste pour étudier certaines des questions que nous soulevons ici (Argaud, 1998).

Compréhension des notions

On note parfois encore dans les productions des élèves la confusion entre droites parallèles et droites perpendiculaires, concepts en général largement travaillés en primaire, souvent d'ailleurs dans le cadre d'une même « leçon » ou de « leçons » consécutives, et vus comme s'opposant l'un l'autre, « *le contraire !* ». On note aussi le besoin éprouvé par beaucoup de contrôler systématiquement après la construction d'une perpendiculaire à une droite, que les quatre angles sont droits, un peu comme s'il s'agissait d'un *rituel*, peut-être destiné à augmenter la fiabilité dans la manipulation des instruments.

La connaissance du cercle semble surtout globale : bon nombre d'élèves ne le voient pas comme ensemble de points à égale distance du centre puisqu'ils ne semblent pas relier la connaissance d'égalités de longueurs au fait que des points appartiennent à un cercle ; l'instrument utile quand il s'agit de cercle est le compas, ils ne voient pas de rapport avec une règle graduée. Il se peut que l'espace situé entre la pointe du compas et le crayon ne puisse pas être vu comme un segment que l'on peut mesurer tant qu'il n'est pas tracé. Il faut remarquer pourtant que certains élèves ont utilisé et mesuré la diagonale du carré sans la tracer. Il est vrai que les diagonales sont des segments bien identifiés dans le carré alors que les rayons sont tous équivalents ; on ne les trace que pour les définir ou quand ils jouent un rôle pour une autre construction. L'exercice 4 n'a pas été bien traité et le 5 encore moins puisque la présence des cercles n'a été d'aucun secours pour repérer des segments de même longueur ou de longueurs différentes, ceci indépendamment des connaissances relatives aux propriétés des quadrilatères particuliers et de celle de leur nom. Les élèves ont-ils eu l'occasion de rechercher des points à une distance donnée d'un point donné, de tracer des cercles avec une simple ficelle et de faire le lien avec l'utilisation du compas ? Les actuels documents d'application du cycle 3 suggèrent ces activités mais il reste à vérifier la place qu'elles prennent dans les manuels et dans les pratiques des maîtres.

Rapport à la tâche

La démarche des élèves dépend aussi de la complexité de la tâche. Dans le cas d'un exercice « élémentaire », les élèves utilisent parfois une démarche formelle qu'on leur a enseignée, procédure qu'ils abandonnent dans des situations plus complexes. Ainsi, lorsqu'il faut seulement construire une perpendiculaire, *Charlotte* (fig 1) utilise deux instruments comme elle l'a sans doute vu faire à un certain moment de son apprentissage, et ce n'est pas la seule de la classe. Par contre lorsque la tâche est plus complexe (exercice 2) ou que le vocabulaire est autre, par exemple lorsque le terme « perpendiculaire » n'est plus utilisé mais que l'on évoque le carré (item 6), la procédure est moins coûteuse ou alors l'équerre est utilisée de façon erronée (fig 5). De même, *Marilène* trace correctement dans l'exercice 1 la perpendiculaire à la droite d passant par le point C, mais elle échoue dans l'exercice 2 quand la droite est donnée par deux de ses points (A et C) et que de plus la figure comporte un point (B) sans lien avec la perpendiculaire attendue. Elle semble alors s'attacher à produire un tracé qui « prenne en compte » tous les points de la figure.

Les enfants pensent rarement (à moins qu'ils n'osent le faire ?) à faire des constructions annexes, préalables¹⁸. Par exemple, *Marilène*, dans l'exercice 6, ne trace pas la médiane de son carré mais la repère « visuellement » ainsi que son milieu, ce qui ne lui permet pas d'obtenir une figure qui la satisfasse. *Aurélie* procède de la même manière avec une diagonale du carré.

Une autre remarque mérite également d'être signalée : la figure juste pour le maître n'est pas toujours la figure juste pour l'élève : lors de la troisième phase, certains enfants recommencent leur travail à cause d'un écart avec le transparent de l'ordre du millimètre alors que la production nous semble tout à fait satisfaisante aussi bien du point de vue du résultat final que relativement aux procédures et instruments utilisés. Cela semble montrer que pour eux le seul moyen de validation vraiment fiable est la coïncidence matérielle avec le modèle dont ils visent une réalisation aussi parfaite que possible, même quand la tâche n'est pas finalisée par une réalisation matérielle qui la nécessiterait. C'est sans doute encore un effet du rapport pratique aux figures qu'ont les élèves mais il reste à vérifier s'il n'est pas encouragé aussi dans les tâches scolaires de géométrie par la faible distinction entre perfection de la réalisation matérielle et justesse de la procédure. Le document d'accompagnement des programmes sur espace et géométrie au cycle 2 aborde la question de l'écart entre la justesse de la production matérielle et la justesse de la procédure en disant qu'elle est constitutive des rapports entre la géométrie et la réalité qu'elle permet de décrire. Ce document reconnaît que la discussion de la marge de tolérance pour la superposabilité et la distinction des raisons de non coïncidence (erreur dans la méthode employée ou utilisation maladroite des instruments) sont difficiles au cycle 2 mais qu'il est important de les traiter au cycle 3. Nos observations ont eu lieu avant la parution de ce document d'accompagnement ; il faudrait vérifier si les pratiques actuelles intègrent ces distinctions et si cela change le rapport des élèves aux tracés en géométrie.

¹⁸ On retrouve là des observations déjà produites par de nombreux travaux (voir par exemple Berthelot et Salin, 1992).

Conclusion

Les observations confirment et précisent les difficultés attendues dans l'analyse a priori. Elles montrent que l'usage des instruments de géométrie ne va pas de soi et qu'une présentation ostensive ne saurait suffire pour que les élèves puissent acquérir des schèmes d'utilisation des instruments qui leur permettent de conjuguer maîtrise technique et utilisation à bon escient des propriétés géométriques. Pour se servir d'un instrument nouveau l'élève doit construire de nouveaux schèmes ou adapter ceux dont il dispose déjà. Nous faisons l'hypothèse qu'il cherche d'abord à adapter les schèmes dont il dispose et qu'il le fait dans les pratiques scolaires usuelles en recherchant à la fois une économie de gestes et une économie de connaissances. Les instruments étant susceptibles de plusieurs usages, l'économie de gestes pousse à combiner le plus possible d'usages du même instrument. L'économie conceptuelle pousse à utiliser en priorité les instruments les plus familiers, ceux qui servent le plus souvent. Ainsi nous avons pu voir des élèves qui, après avoir utilisé l'équerre pour tracer une perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné dans la phase 1, reviennent à la règle graduée pour produire le même tracé dans la phase 2 quand ils sont sûrs du résultat. De même, pour l'exercice 6 où il s'agit dans un premier temps de construire un carré, tâche extrêmement familière, les élèves font en général jouer trois rôles au même instrument, que ce soit l'équerre ou la règle graduée, ce qui évite d'en changer. C'est d'ailleurs ce que nous ferions nous-mêmes pour obtenir ce genre de tracé. Nous interprétons les difficultés résistantes des élèves dans l'utilisation des instruments, notamment de l'équerre, au début du collège par le fait que les élèves amalgament les différentes fonctions des instruments pour répondre de façon économique aux tâches qui leur sont proposées le plus souvent, alors qu'ils ne maîtrisent pas séparément chacune des fonctions. La place de la mesure dans les pratiques usuelles nous paraît contribuer à cet amalgame des différentes fonctions des instruments. La recherche que mène actuellement notre équipe vise à construire des situations viables dans les classes ordinaires et permettant de travailler séparément chacune des fonctions des instruments en liaison avec les propriétés géométriques qu'elles portent. Nous avons pour le moment principalement travaillé l'usage de la règle non graduée en lien avec la recherche d'alignement permettant de passer d'une vision des figures en termes de surfaces à une vision en termes de lignes délimitant ces surfaces et de points déterminant ces lignes. C'est l'objet d'un autre article en cours d'écriture.

Références bibliographiques

- ARGAUD H.C. (1998) *Intérêts et limites de l'environnement Cabri-géomètre en géométrie plane pour l'enrichissement de l'espace des problèmes et dans la constitution des milieux pour la validation dans des situations d'apprentissage à l'école élémentaire autour des relations de parallélisme, de perpendicularité et d'égalité*. Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- ARTIGUE M. & ROBINET J. (1992) Conceptions du cercle chez des élèves de l'école élémentaire, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 3/1, 5 - 64.
- BARTH C. et HUGUET F. (1997) *Documents pour la formation, tome VI*, p. 111-118, IREM Paris 7.
- BERTHELOT R. & SALIN M.H (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I.
- BOULEAU N. (2001) Reproduction de figures et géométrie en cycle 1 et 2. *Grand N* n°67, 15-32.
- CHEVALLARD Y. et Julien M. (1990-1991) Autour de l'enseignement au collège - première partie. *Petit x* n° 27, 41-76.
- DUVAL R. et GODIN M. (2005) Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N* n°76.
- DUVAL R., GODIN M., PERRIN-GLORIAN M.J. (2005) Reproduction de figures à l'école élémentaire in Castela C. & Houdement C. (eds) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques. Année 2004*, ADIREM et IREM de Paris 7, p. 5-89.
- FAVRAT J.F. (1991-92) Tracés aux instruments et raisonnements géométriques, *Grand N* n°49, 11-35.
- GOBERT S. (2001) *Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible, dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.
- MERCIER et TONNELLE (1991-1992) Autour de l'enseignement au collège - deuxième partie. *Petit x* n° 29, 15-56.
- MERCIER et TONNELLE (1992-1993) Autour de l'enseignement au collège - troisième partie. *Petit x* n° 33, 5-35.
- MUL A. (2000) *Enseignement de la géométrie du cycle 3 à la sixième. Des éléments du quotidien scolaire*. Thèse, Université Paris 7.
- RABARDEL P. (1995) *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains*, Armand Colin, Paris.
- SALIN M.-H. (2004) L'enseignement de la géométrie au cycle 3 : objectifs, contenus, articulation avec la sixième. *Bulletin de l'APMEP* n° 454, 729-736

ANNEXE 1 : Évolution des procédures de quelques élèves

L'observation des élèves montre qu'ils ne gèrent pas tous les tâches proposées de la même manière pendant la phase 1 qui reproduit les conditions de l'évaluation. Certains suivent l'ordre des exercices sans retour en arrière, d'autres suivent l'ordre des exercices mais reviennent en arrière pour corriger une erreur quand ils rencontrent une tâche similaire à une tâche déjà traitée, d'autres passent des exercices et y reviennent à la fin quand ils ont parcouru l'ensemble des tâches en traitant ce qui leur paraissait facile. Dans ce paragraphe, nous reprenons l'observation de quelques-uns des élèves en repérant leurs stratégies et éventuellement l'évolution des procédures. On peut remarquer aussi que les élèves observés ont été assez actifs dans la phase collective, soit que le fait d'avoir été observés leur donne de l'assurance, soit que la maîtresse a choisi pour l'observation des groupes d'enfants qui interviennent facilement.

Alison réussit plutôt bien la plupart des tâches proposées même si elle est un peu lente puisqu'elle aborde à peine l'exercice 6 (elle n'a le temps que de tracer un troisième côté pour le carré) : elle fournit des productions correctes dès la phase 1 pour les exercices 1, 3, 4, 5a. Pour l'exercice 2, elle ne comprend pas ce que désigne la lettre B ; en 5b elle colorie à la fois le losange et le parallélogramme. Il est donc d'autant plus intéressant de remarquer le problème qu'elle rencontre pour la désignation du point B ainsi que ses démêlés avec l'équerre dans l'exercice 3 alors qu'elle réussit plutôt bien et que, par ailleurs, elle place systématiquement le symbole de perpendicularité.

Aurélie est très lente et semble avoir des problèmes de lecture. Elle change souvent de procédure, mais à aucun moment elle n'utilisera l'équerre de la façon attendue pour tracer une perpendiculaire ni n'utilisera la règle graduée pour prendre des mesures dans l'exercice 4. On trouvera en annexe 2 une description détaillée de ses procédures.

Jennifer, dans la phase 1, passe l'exercice 1, ne trace que le cercle pour le 2, saute le 4 et revient sur les premiers exercices quand elle a tout fini. Dans la phase 1, elle a tracé des parallèles à l'œil et fait la même chose dans la phase 2. Elle n'utilise pas la règle graduée dans l'exercice 4 mais le compas pour tracer le cercle après avoir localisé le centre en simulant l'action d'un compas avec deux doigts. Dans la phase 3, elle a des difficultés à placer correctement l'équerre : dans l'exercice 2, elle place l'angle droit en E. Pour tracer le cercle de l'exercice 6, elle trouve la position du centre en prenant l'intersection des deux médianes du carré.

Cédric fait les exercices dans l'ordre dans la phase 1. Pour l'exercice 1, il trace d'abord une parallèle à d passant par C. Il fait de même dans l'exercice 2 mais, après relecture, corrige et revient sur l'exercice 1 pour tracer une perpendiculaire à d passant par C. Pour tracer une parallèle, il utilise la règle graduée comme équerre en plaçant des points à la même distance de d que C. Pour tracer la perpendiculaire passant par C, il utilise correctement l'équerre. Dans la phase 2, il trace directement des perpendiculaires, mais avec la règle cette fois. C'est lui qui, dans la phase 2, pose la question concernant le tracé du triangle EDB : faut-il aussi tracer BE ? Cela montre bien que, pour lui, les désignations concernent des tracés à réaliser et non des objets géométriques. Concernant le cercle de l'exercice 4, dans la phase 1, il joint les points et déclare (à l'œil) que G est le centre. Dans la phase 2, il trouve le centre du cercle de l'exercice 6 en traçant une médiane dont il prend le milieu.

Marilène ne semble pas avoir de problème de vocabulaire ; elle utilise l'équerre à bon escient, mais ne la place pas toujours correctement (voir exercice 6) et semble ne pas

pouvoir isoler dans une situation plus complexe la tâche de tracé d'une perpendiculaire à une droite passant par un point, qu'elle sait résoudre quand on la présente seule (voir exercice 2). Par ailleurs, elle semble ne pas s'autoriser des tracés supplémentaires, même quand cela serait indispensable pour obtenir un tracé précis, par exemple pour déterminer le centre du cercle à l'exercice 6.

ANNEXE 2 : Les procédures d'Alison dans l'exercice 3

Première production (5 minutes)

Alison trace le segment [ED] à la règle en utilisant le côté des graduations.

Elle prend l'équerre et la dispose de façon à tracer la perpendiculaire passant par A à ce segment, sans pour autant la tracer (est-ce une réminiscence des questions précédentes dont l'objet était la construction de perpendiculaires ?)

Elle passe à la deuxième partie de l'exercice, trace le cercle demandé, puis revenant à la première, trace la perpendiculaire à [ED] passant par B ... qu'elle efface immédiatement.

Elle dispose un côté droit de l'équerre (presque) dans le prolongement de [ED], angle droit en D, et la fait pivoter autour de D de façon à ce que le deuxième côté de l'angle droit de l'équerre passe par le point B (figures ci –contre). Elle pourrait donc tracer [BD] mais ne le fait pas. S'attendait-elle à trouver un angle droit en D ?

Abandonnant l'équerre, elle reprend la règle et trace toujours en utilisant le côté des graduations.

Elle prend à nouveau l'équerre, la place le long de [ED], angle droit en D, sans doute avec la même attente que précédemment.

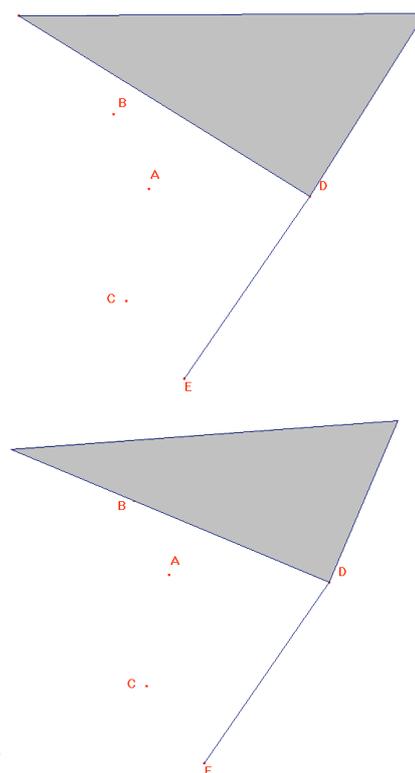
Elle fait tourner l'instrument et trace enfin [BD] avec l'origine des graduations en B, replace l'équerre le long de [ED] et semble constater que décidément l'angle D n'est pas droit.

Lors de la résolution de l'exercice (qui a duré 5 minutes), l'équerre s'est beaucoup déplacée sur la feuille à la recherche d'angles droits.

Deuxième production (1 minute 25 secondes)

Alison trace [BD] avec l'équerre, en mettant l'origine des graduations en B.

Elle dispose l'équerre le long de [BD], angle droit en D. Le deuxième côté de l'équerre ne passe évidemment pas par E. Alors Alison fait glisser l'équerre de sorte que l'origine des graduations vienne en D et que le deuxième côté de l'équerre passe par E. Elle trace ainsi le segment [DE] (figures ci-dessous).



Plaçant l'origine des graduations de l'équerre l'instrument comme une règle graduée.

Avant de traiter l'exercice suivant, l'élève cherche encore si certains angles du triangle ne seraient décidément pas droits.

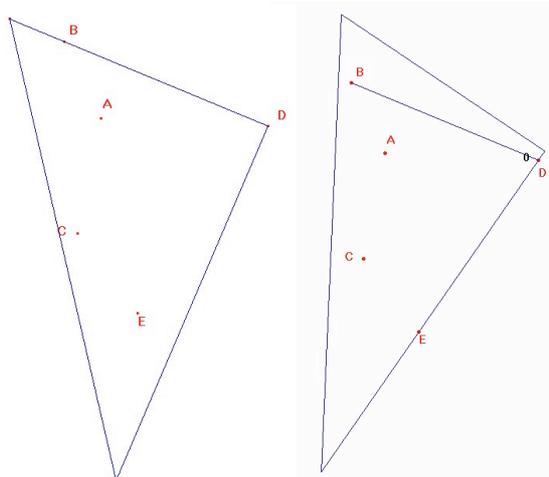
Commentaires

Dans cet exercice, il n'est nullement question de perpendiculaires. Pourtant quand Alison a l'équerre en mains, ses premiers essais consistent à chercher des angles droits et elle insiste assez longtemps dans cette recherche.

Il semble que l'instrument, relativement complexe, soit un obstacle au simple tracé d'un segment joignant deux points (ce n'est pas sa vocation première). Lorsqu'elle l'abandonne pour la règle, dans son premier travail, la difficulté n'existe plus.

Au cours de sa deuxième construction, lorsque [BD] est déjà représenté et qu'il faut tracer [DE], l'angle droit de l'équerre étant en D, elle fait glisser l'instrument de sorte que l'origine des graduations vienne en D et que le deuxième côté de l'équerre se place le long de [ED]. Alors seulement elle peut tracer [DE], mais en déplaçant le crayon à partir du "zéro". On a l'impression que pour tracer un segment il faille absolument placer le "zéro" à l'une des extrémités et dessiner dans le sens croissant des graduations jusqu'à l'autre extrémité de façon à ne pas dissocier tracé géométrique (trait droit) et mesure de ce segment, alors que ce n'était pas le cas avec l'utilisation de la règle (même si c'est le côté des graduations qui était utilisé).

On retrouve chez de nombreux élèves des difficultés de ce genre dans la construction d'une perpendiculaire à une droite passant par un point donné où tout se passe comme s'il fallait en une seule fois tracer la perpendiculaire et s'occuper de la longueur du segment joignant le point au pied de la hauteur.



ANNEXE 3 : Observation d'Aurélié

Aurélié prend beaucoup de temps pour découvrir le texte des consignes. Elle y revient souvent en suivant les phrases du doigt. Elle attache par ailleurs de l'importance à des paramètres qui peuvent sembler des détails : faut-il repasser le carré au crayon de couleur ou au stylo de couleur ?

Pour le tracé de la perpendiculaire dans l'exercice 1, elle utilise l'équerre, comme mentionné sur la figure 2, en plaçant le long de la droite d, non pas l'un des bords attendus de l'équerre mais le trait du « 0 » de la graduation. S'appuyant sur l'autre bord, elle trace un trait passant par C et s'arrêtant à d ; elle gomme puis sur un nouveau tracé, glisse l'équerre le long du trait qu'elle prolonge de l'autre côté de la droite d : elle semble s'interroger sur les limites à donner au tracé de la perpendiculaire. En phase 2 elle procède de la même manière en utilisant l'équerre et enchaîne cette fois le tracé de la demi-droite et son prolongement.

Dans l'exercice 2 elle abandonne l'équerre, et après avoir plusieurs fois mesuré à la règle graduée les segments [AC] et [EH], (si on appelle H le pied de la perpendiculaire à [AC]),

trace la perpendiculaire en se servant comme précédemment du trait « 0 » de la graduation. En phase 2, elle procède directement au tracé avec la règle graduée, en utilisant la même méthode. Pour l'exercice 3, Aurélie utilise la règle graduée et trace sans problème les segments [ED] et [BD], puis elle prend l'équerre qu'elle place sur le dessin puis repose comme si elle la trouvait inadaptée ; elle reprend la règle graduée pour tracer le 3^{ème} côté. Elle reprend alors l'équerre, cherche un angle droit en B puis en D et enfin pour l'angle E utilise un autre coin de l'équerre.

Pour l'exercice 4, en phase 1, Aurélie alterne mouvements circulaires de la main ou du doigt en suivant tout ou partie de la ligne ABCDEFG ...et tracés de lignes brisées fermées ; elle s'arrête au tracé ABCDEFA et déclare H comme centre du cercle, H étant des deux points intérieurs à son tracé, le plus au centre. En début de phase 2, c'est elle qui questionne le chercheur « *je ne comprends pas, on nous dit de faire un cercle et de nous servir d'une règle graduée...* ».un camarade précise « *non, on ne doit pas faire le cercle, on doit faire comme si on le faisait, il faut prendre la règle et mesurer d'un point à l'autre, ils ne disent pas de tracer le cercle ...* ». Cela n'empêche pas Aurélie de produire juste ensuite une ligne brisée commençant par ABCDF, elle produira plus tard un 3^{ème} dessin dans le même esprit ; à aucun moment Aurélie n'aura utilisé la règle pour prendre des mesures. Dans la phase 1, Aurélie n'a pas le temps de travailler les exercices 5 et 6.

Pour l'exercice 5, en phase 2, elle travaille par reconnaissance perceptive globale et sans utiliser aucun instrument pour l'exercice (a) repasse directement en couleur le carré et le rectangle, pour l'exercice (b) le losange et le parallélogramme.

Pour compléter le carré de l'exercice 6 elle utilise la règle graduée : à l'œil elle place la règle à la perpendiculaire et à l'extérieur du côté horizontal déjà tracé et n'utilise donc pas la graduation « 0 ». Elle procède de même pour produire le dernier côté. Elle prend ensuite l'équerre pour vérifier les longueurs de deux côtés consécutifs. Pour placer le centre du cercle elle commence par placer la règle graduée sur une diagonale de la figure modèle, la repose puis place à l'œil et de mémoire la pointe sèche du compas à l'endroit repéré comme le milieu, à partir de quoi elle ajuste l'écartement des branches. Elle place alors la pointe sèche au centre « estimé » du « carré » et bien sûr le tracé du cercle ne passe pas par les sommets. Elle gomme tout y compris les deux côtés et cette fois tente de placer le centre en utilisant la règle graduée qu'elle tente de poser en position de médiatrice des deux segments donnés. Cela ne convient toujours pas, elle gomme, recommence et n'aboutit pas.

Tout au long de cette séance Aurélie n'aura jamais la procédure attendue pour tracer une perpendiculaire : soit elle utilise l'équerre comme indiqué en figure 2 où c'est la graduation « 0 » qui porte la direction cherchée, soit elle utilise la règle graduée, mais sa procédure n'est pas stable : dans un premier temps elle utilise aussi la graduation « 0 » plus tard elle procède à l'œil pour une direction verticale. Elle utilisera l'équerre pour chercher des angles droits ... ou pour vérifier des égalités de longueur.