

LA QUETE DU *SENS* DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES : UNE ETUDE DE CAS AUTOUR DU THEOREME DE THALES EN FIN DE COLLEGE

Eric LAGUERRE
PRAG IUFM de Versailles
DIDIREM Université Paris 7

Résumé : cet article relève de la recherche d'un *sens* qu'il est possible de donner à un contenu mathématique dans l'enseignement secondaire. Nous proposons une réponse fondée sur l'activité et les conceptions des élèves en scrutant ce *sens*, en premier lieu, en dehors des mathématiques. En second lieu, cette quête s'effectue à l'intérieur des mathématiques enseignées par le biais des difficultés conceptuelles liées à la démonstration d'un théorème, de l'organisation mathématique et des mises en fonctionnement au niveau de la logique élémentaire qu'il permet et enfin par les tâches dont il assure la mise en oeuvre. Nous illustrons ensuite plus précisément ces pistes. Pour cela, nous construisons et mettons en place une situation d'apprentissage liée au théorème de Thalès au collège et à la mesure de distances inaccessibles dans le méso-espace.

Mots-clés : sens extérieur aux mathématiques, sens intérieur aux mathématiques, méso-espace, micro-espace, problématique pratique, problématique de modélisation, problématique géométrique, réalité, contexte, événement, artefact, modélisation, distances inaccessibles, théorème de Thalès.

Introduction

Le but de cet article est, dans un premier temps, de communiquer une réponse parmi d'autres possibles à la question du *sens* qu'un théorème peut prendre dans le cadre de l'enseignement secondaire. *A priori*, ce *sens* peut porter sur deux objets : un sens intrinsèque qu'un théorème peut prendre auprès des élèves et un sens lié à son enseignement.

Dans un second temps, nous donnons un exemple de construction d'une situation introduisant et justifiant le théorème de Thalès au collège. Cette situation n'est ni une situation problème (Douady 1986) ni une situation fondamentale au sens de Brousseau (1983) : elle n'est pas fondée sur des conceptions erronées ou des procédures correctes, source d'erreurs de la part des élèves ; d'autre part, elle n'organise pas intentionnellement un milieu didactique. L'indétermination des questions et des objectifs d'enseignement pour les élèves ainsi que l'existence de décisions qui font l'objet de transaction au cours de la mise en oeuvre nous incitent à opter pour le terme de situation d'apprentissage.

Deux questions sont alors travaillées à partir des deux éléments précédents. Nous cherchons à connaître tout d'abord l'intérêt que la situation élaborée peut avoir auprès des élèves et sur son adaptabilité à des séquences d'enseignement effectives en classe.

1. La recherche d'un *sens* qu'il est possible d'attribuer à un contenu mathématique dans l'enseignement

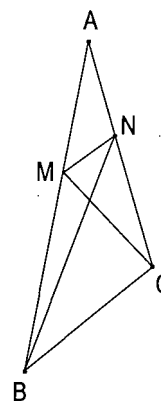
Nous formulons l'hypothèse qu'une connaissance prend d'autant plus de *sens* pour un individu qu'elle lui apporte un nouvel éclairage sur la discipline dont elle relève et participe ainsi, pour lui, de la structuration de cette matière tout en favorisant une meilleure appréhension du monde. Il s'agit d'une vision située à mi-chemin des approches empirique et structuraliste. Aussi, nous abordons la question du *sens* en mathématiques dans l'enseignement en termes de situation d'apprentissage, de contexte, d'événement et de structuration du savoir. Nous adoptons une démarche classique qui consiste à travailler sur l'épistémologie des mathématiques en jeu en lien avec le *sens* intérieur des connaissances mathématiques tout en essayant de nous appuyer sur une problématique de modélisation en cohérence avec les travaux antérieurs sur l'enseignement de la géométrie dans le cadre de la théorie des situations. Nous nous intéressons tout autant aux mathématiques à enseigner qu'à l'activité mathématique des élèves dans le cadre de dispositifs d'études.

1.1 Composante extérieure du *sens* en mathématiques

Dans le cadre des mathématiques savantes ou dans celui de la mise en place des mathématiques modernes au début des années soixante-dix, le savoir peut être considéré comme étant indépendant de toute mise à l'épreuve de la « réalité ». Nous pensons qu'il peut en être autrement pour les mathématiques élémentaires à enseigner de nos jours. Si nous supposons que leur *sens* peut être approché grâce à l'épreuve des faits extérieurs observables et de leur « modélisation » de la part des élèves, toute la question est alors de savoir, d'une part, de quels types de faits nous parlons et, d'autre part, de ce que nous entendons par « modélisation » dans le cadre de l'enseignement de la géométrie.

Berthelot et Salin (2001) apportent un premier élément de réponse dont nous tenons compte dans le cadre de l'analyse de la situation que nous élaborons. Ces chercheurs distinguent trois problématiques en géométrie que nous illustrons en nous aidant d'une figure permettant de démontrer le théorème de Thalès. ABC est un triangle avec M un point du segment [AB], N un point du segment [AC] de telle sorte que les droites (MN) et (BC) soient parallèles. A un certain niveau de la démonstration euclidienne, il est nécessaire de démontrer que les triangles ANB et AMC ont la même aire.

Trois méthodes peuvent se dégager.



Une première passe par la fabrication d'un gabarit d'un des triangles ou de l'imaginer pour tenter de recouvrir l'autre triangle à l'aide d'une superposition par découpage effectif ou par la pensée. Cette solution liée à la problématique pratique fait appel à la signification spatiale du concept d'aire, par superposition des objets et non à une connaissance géométrique. La réponse est cherchée par tâtonnement, par un ajustement au niveau de l'action sous le contrôle de la perception.

Il est aussi envisageable de mesurer sur le dessin la hauteur et la base de chaque triangle pour ensuite appliquer la formule de l'aire du triangle. Cette solution, qui relève d'une problématique de modélisation, correspond à une compréhension du problème dans laquelle les triangles sont matériels et elle s'appuie sur la figure comme milieu

objectif. La démarche établit un certain rapport entre le monde sensible et une modélisation dotée de règles propres. La solution est construite dans le modèle.

Une solution relevant de la problématique géométrique revient à remarquer qu'en adjoignant au triangle AMC le triangle MBC et au triangle ANB le triangle NBC on obtient le triangle ABC. Il suffit alors de démontrer que les deux triangles MBC et NBC ont la même aire, ce qui est vrai puisqu'ils ont même base et même hauteur. Cette méthode se fonde tout d'abord sur une appréhension discursive de la figure (Duval 1994), puis sur un concept géométrique de calcul d'aire.

Tout en tenant compte de cette approche, nous proposons de partir d'un sens plus général de la « modélisation du réel », celui d'une pratique d'enseignement.. Au premier abord, nous appelons *modélisation* la dialectique établie entre un contexte, les événements observés et leurs représentations respectives à travers diverses étapes qui correspondent à autant de modèles. Ces modèles sont construits en utilisant des artefacts matériels (supports, matériaux, objets, signes, ordinateur...) niveau des modèles informels, et des artefacts formels liés aux mathématiques (parallèles, rationnels...) qui font émerger des modèles formels.

A leur tour, les faits peuvent alors être scindés en « faits concrets ou palpables » (« Je vise cet objet du même endroit que toi. ») et en « faits mathématiques » (« Je conjecture que les rapports des mesures de ces longueurs sont égaux »). A partir d'un contexte tiré de la réalité et d'événements liés à ce dernier, un déplacement s'effectue de modèle à modèle pour créer une nouvelle interprétation de la réalité initiale ou une nouvelle réalité. *A priori*, nous pouvons dire qu'il y a modélisation lorsque nous passons d'un cadre interprétatif strictement verbal d'un fait « concret » détaché de toute autre référence que le langage commun « Je vise cet objet du même endroit que toi », à un autre cadre interprétatif par l'entremise d'artefacts qui servent de médiateurs sémiotiques (Bartolini Bussi 2008) dans le but de faire émerger une nouvelle compréhension de l'événement ou l'apparition de nouveaux événements « Les rapports des mesures de telles longueurs prises sur mon instrument de visée sont les mêmes que les rapports qui concernent ton instrument ».

La prise en compte du méso-espace, du micro-espace et des savoirs spatiaux géométriques dont ils relèvent, liés pour le premier à la vision de l'arpenteur pour le report de longueurs et la visée de face avec un instrument, et, pour le second, à l'approche de l'inventeur / bricoleur aidant à la représentation de cette action (Duval 2005), engendre le choix d'élaboration de notre situation d'apprentissage. Ainsi, dans le but d'introduire le théorème de Thalès, nous débutons par la question de la mesure de distances inaccessibles dans le méso-espace, en l'occurrence dans l'espace de la cour. Nous commençons par nous poser la question suivante : « Comment travailler de façon pratique dans le méso-espace pour parvenir à répondre à la question de la mesure de distances inaccessibles ? » Grâce à ce travail initial, l'objectif est alors de « modéliser » la situation dans un espace plus familier aux élèves, celui de la feuille de format A4. *In fine*, une application du théorème de Thalès qui se déroule effectivement dans le méso-espace est aussi envisagée. La composante extérieure dont nous considérons qu'elle participe à donner du *sens* à un théorème concerne ainsi la « modélisation » de la situation extérieure aux mathématiques, des questions qu'elle suscite et des réponses qui sont apportées. Il s'agit de traduire dans le micro-espace le contexte et les événements constatés dans le méso-espace et les réflexions qu'ils génèrent, dans le but d'émettre de nouvelles interprétations de ce contexte ou de faire apparaître de nouveaux événements.

Berthelot et Salin (2001) admettent que la problématique pratique est indispensable pour mettre en évidence la nécessité et l'économie d'une représentation

ultérieure. Pour ces auteurs, cette représentation doit aboutir à une anticipation des effets de l'action des élèves et doit permettre de justifier des conjectures qu'ils émettent. Ils ont établi que « *pour qu'une situation d'apprentissage soit efficace, il est nécessaire que la comparaison entre le but à atteindre et la réalisation ayant engagé les conceptions du sujet soit facile et rapide, afin qu'on puisse les mettre en cause et les modifier au cours de parties successives.* » Ils caractérisent ainsi de telles situations efficaces : les problèmes portent sur des objets petits, faciles à comparer et la réussite ou l'échec sont relativement aisés à mettre en évidence.

1.2 Composantes intérieures du sens en mathématiques

Ces composantes relèvent des activités attendues de la part des élèves, du fonctionnement même des mathématiques ou de pratiques d'enseignement.

Nous fondons notre réflexion, en premier lieu, sur l'idée générale que c'est en termes d'obstacles et de conceptions de la part des élèves qu'il est possible de poser le problème de la connaissance en mathématiques (Artigue 1990) et, en second lieu, sur les deux principales activités mathématiques existant dans l'univers scolaire qui ont été dégagées par Chevallard (1997) et qui sont, pour les élèves :

- l'établissement d'une technique relative à un type de tâches comme « démontrer que deux droites sont parallèles » grâce à la réciproque du théorème de Thalès,
- la légitimation de cette technique, en l'occurrence par l'intermédiaire d'un raisonnement par l'absurde.

Par rapport au premier type d'activité mathématique assumé par les élèves à un niveau scolaire donné, nous différencions, d'une part, les nouvelles techniques qui permettent d'accomplir une ancienne tâche résolue autrement auparavant et, d'autre part, les nouvelles tâches que permet de résoudre une technique. Certaines de ces mises en œuvre peuvent aussi donner lieu à un travail sur des mises en fonctionnement logiques élémentaires comme celles qui concernent les connecteurs propositionnels « et » « ou » et leur utilisation dans la contraposée, la réciproque ou au sein de la négation d'une proposition. Nous donnons un exemple un peu plus loin.

Pour ce qui est du second type d'activité, une démonstration assume le plus souvent la fonction de légitimation d'une technique. Mais elle permet parfois de confronter les élèves à des obstacles ou à leurs propres conceptions.

Par rapport à ces deux types d'activités du point de vue de l'élève, nous avons rajouté ci-dessus la pratique d'enseignement de « modélisation » mathématique d'une situation extérieure afin d'assurer le passage d'une problématique pratique à une problématique géométrique. Détaillons maintenant un peu plus ces diverses catégories.

a) Conceptions et difficultés

Du point de vue du fonctionnement même des mathématiques, les composantes intérieures se construisent aussi à partir des rapports qu'entretient un théorème avec les propriétés et les concepts nécessaires à sa démonstration et les obstacles épistémologiques qu'ils recouvrent. Mais parfois, les démonstrations permettent de mettre le doigt sur une difficulté qu'ont rencontrée les mathématiciens au cours de l'histoire, ce qui est le cas pour les nombres réels dans le cadre de la démonstration du théorème de Thalès, et sur des conceptions erronées qui ont persisté et qui se retrouvent dans certains cas chez les élèves.

Par exemple, nous avons montré que ces derniers pensent dans une large majorité d'une part, que deux segments ont toujours une commune mesure et, d'autre part, bien que $\sqrt{2}$ ait été introduit à l'aide de la diagonale du carré et que son irrationalité ait été démontrée en arithmétique, qu'il est toujours possible de mesurer exactement de façon pratique la longueur d'un segment quitte à changer d'unité. Seules les limites oculaires peuvent empêcher d'y parvenir. Aussi, pour eux, la démonstration du théorème de Thalès s'arrête au cas rationnel puisque le rapport des mesures de deux longueurs est forcément rationnel. De plus, les difficultés rencontrées chez les élèves au sujet de la mise en œuvre de ce théorème sont variées. Pourquoi certaines égalités de rapports seraient-elles légitimes et d'autres pas ? Pour comparer deux rapports de mesures de longueurs, il suffirait de les exprimer à l'aide de la même unité. Enfin, nous avons montré que des variables figurales précises, en particulier le type du dessin (gigogne ou papillon), son orientation et la distribution des mesures de longueurs, imprègnent l'application du théorème (Laguerre 2007).

b) Techniques pour résoudre un type de tâches

Tâches anciennes résolue par une technique nouvelle : le troisième point de la composante intérieure aux mathématiques du *sens* attribuable à un théorème, relève des tâches mathématiques anciennes que ce dernier permet de résoudre de façon nouvelle. Ainsi, le théorème de Thalès, au collège, permet aux élèves de calculer des longueurs dans le plan ou dans l'espace et d'établir des relations littérales.

Tâches nouvelles : toujours en pensant aux élèves, de nouveaux problèmes mathématiques non encore posés au niveau de la scolarité en question le sont dans le cadre de l'étude en cours. Pour le théorème de Thalès, cela concerne la constructibilité à la règle et au compas d'un point d'abscisse donnée sur une droite graduée, du partage d'un segment dans un rapport donné, de l'inverse d'un nombre, du produit de deux nombres, de la quatrième proportionnelle à trois nombres.

Mises en fonctionnement logique : cela concerne les connecteurs propositionnels « et » « ou » et leur utilisation par les élèves dans la contraposée, la réciproque d'une proposition ou au sein de négations. Ainsi, pour le théorème de Thalès : *Soient deux droites (d) et (d') sécantes en A. Si B et M sont deux points de la droite (d), C et N deux points de la droite (d') tous distincts de A, et si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors $AM/AB = AN/AC = MN/BC$ et les points A, B, et M d'une part A, C, et N d'autre part sont alignés dans cet ordre.* Si l'une de trois égalités précédentes est fausse alors soit les points A, B et M ou A, C et N ne sont pas alignés, soit les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.

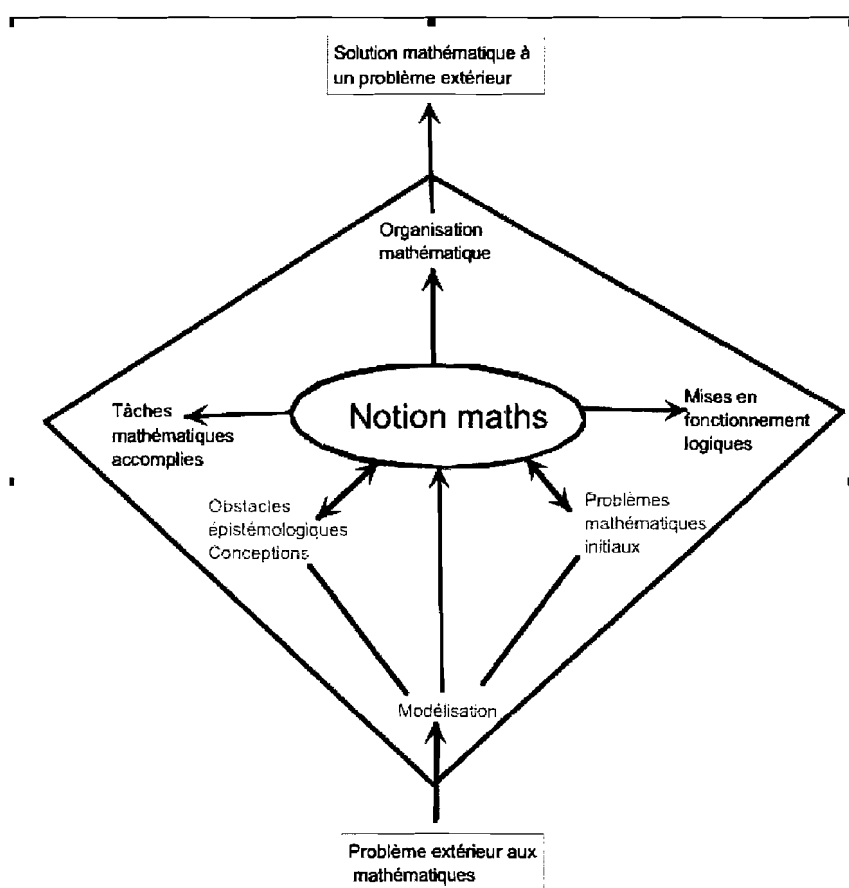
c) Organisation mathématique

Notre dernier point concerne tant les pratiques d'enseignement que le fonctionnement intrinsèque des mathématiques. Il est en rapport avec l'organisation mathématique construite autour d'un théorème (Chevallard 1999), l'apport qu'il engendre par la nouvelle structuration d'un cours qu'il permet, en particulier le nombre de notions et de propriétés qu'il permet d'introduire et de légitimer, ce qu'Artaud et Chevallard (2001) nomme les chaînes trophiques.

Si nous illustrons notre propos à l'aide du théorème de Thalès, nous pouvons dire qu'en amont, l'étude des racines carrées et plus particulièrement de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ telle qu'elle est envisagée dans le cadre de l'enseignement actuel de l'arithmétique

en classe de troisième, peut favoriser, chez les élèves, la mise en évidence de la carence d'une démonstration de ce théorème qui se limiterait au cas rationnel. Le but est de prendre conscience de la présence d'un obstacle sans forcément le franchir à ce stade de la scolarité. En aval, ce théorème permet d'introduire plus facilement et en leur donnant un fondement théorique de nombreuses notions comme les lignes trigonométriques, les applications linéaires et affines et la forme canonique de l'équation d'une droite. De plus, la dialectique ancien /nouveau peut être assurée par l'introduction, en classe de seconde, de l'objet homothétie. Le choix de la connaissance introduite à partir des différents points précédents s'effectue précisément sur la base d'une optimisation de l'organisation mathématique qu'elle favorise.

En conclusion de cette partie, le schéma ci-dessous explicite les relations qui peuvent exister entre les éléments de la composante intérieure et ceux de la composante extérieure qui facilitent l'accès au *sens* des mathématiques chez les élèves.



Une genèse possible du sens des mathématiques chez les élèves

Ainsi, en premier lieu, nous considérons que la composante extérieure du *sens* qu'il est possible d'attribuer à une connaissance mathématique en tant qu'objet (Douady 1986) peut être abordée par le biais de la pratique d'enseignement de la *modélisation* d'un contexte et d'événements extérieurs aux mathématiques qui soit vive pour les élèves et qui légitime l'introduction d'une notion. Cela participe de la mathématisation « horizontale ». Il nous resterait à déterminer un peu mieux ce que nous entendons dans le terme « *modélisation* ». L'élaboration et la mise en œuvre de notre situation d'apprentissage est l'occasion de préciser la signification de ce concept.

En second lieu, de façon interne aux mathématiques et toujours du point de vue objet mais indépendamment de ce qui précède, le *sens* d'un théorème peut aussi être approché par les problèmes ou les questions strictement mathématiques qui légitiment son introduction en le faisant apparaître aux yeux des élèves comme une solution nouvelle ou plus économique que celles auxquelles ils ont été précédemment confrontés. Ce sens s'incarne également dans les conceptions et les difficultés que cette connaissance soulève chez les élèves.

Du point de vue outil, le *sens* peut s'élaborer par l'intermédiaire, d'une part, des diverses tâches mathématiques nouvelles ou anciennes qu'un théorème permet de résoudre chez les élèves et les difficultés qu'elles soulèvent, et d'autre part, par le biais des mises en fonctionnement logique dont il favorise la compréhension. L'ensemble apparaissant d'autant plus légitime que cette connaissance permet une organisation mathématique plus structurée et participe ainsi à une mathématisation « verticale ». Cet aspect structurant peut être perçu, au départ, comme étant lié au fonctionnement du savoir mathématique strict mais il peut aussi constituer un point d'ancrage indéniable tant du point de vue de pratiques d'enseignement que de l'activité propre de l'élève qui assurerait une structuration personnelle de ses connaissances.

Nous allons à présent illustrer les composantes extérieure et intérieure du *sens* que nous pouvons attribuer à ce théorème. Il s'agit d'une ingénierie didactique qui a été mise en place avec des élèves de 4^{ème} et de 3^{ème} au cours de l'année 2002-2003 (Laguerre 2005). Son but est de trouver une solution mathématique à un problème posé initialement à l'extérieur des mathématiques.

2. Un exemple d'introduction et d'étude du théorème de Thalès

2.1 Objectifs généraux

En nous appuyant sur les obstacles épistémologiques en rapport avec les nombres irrationnels et la mesure des longueurs, sur des problèmes historiques rencontrés au gré de notre étude et sur les variables didactiques que nous avons mis en évidence en particulier celles liées au concept de typicalité appliqué aux registres figurés et numériques (2007), nous tentons de construire une situation caractérisée par trois aspects : le rapport à la réalité, les nombres réels et la proportionnalité.

a) *Le méso-espace, représentation et anticipation*

Notre analyse historique et didactique nous a conduit à prendre appui sur le *méso-espace* pour donner du *sens* aux connaissances spatio-géométriques de la façon suivante

- la possibilité de *mesurer des distances inaccessibles* dans le méso-espace liée à une problématique pratique déjà présentée dans le texte de Errard (1594)
- l'évocation de cette action à partir de la représentation des situations de ce domaine dans le *micro-espace*.

Le fait d'accompagner une situation de géométrie du méso-espace d'un dessin ramène immédiatement cette situation dans le micro-espace. Or, nous avons pu constater, aussi bien dans notre étude historique que dans une analyse des ouvrages actuels, que le passage des actions du méso-espace relevant d'une problématique spatiale à celles liées au micro-espace rattachées à une problématique géométrique, n'est jamais abordée (cf. aussi Laborde 1984).

Ayant postulé ce passage du méso-espace à celui du micro-espace de la feuille de papier, comme étant intéressant pour la construction d'une situation relevant de la géométrie, nous nous demandons : quelles situations conduisent à représenter un espace d'une certaine taille, le méso-espace, à l'aide d'un autre, de taille différente, le micro-espace ? En d'autres termes, en commençant un travail avec les élèves dans le méso-espace, comment rendre légitime et donc non formelle pour eux, une représentation d'un problème du méso-espace dans le micro-espace ?

Pour Berthelot et Salin (1992), il s'agit de situations « *dans lesquelles le sujet est soumis à des contraintes plus fortes que celles des actions micro-spatiales, contraintes l'obligeant à différer son action, et en anticiper les effets, c'est-à-dire celles dans lesquelles la problématique pratique ne suffit pas.* »

Enfin, au terme d'une étude, il semble important de savoir exploiter dans l'espace initial du problème, la solution géométrique obtenue dans l'espace de la feuille, ce que nous mettons également en œuvre.

b) Les nombres réels et la mesure des longueurs

Nous ne pensons pas qu'il faille construire l'ensemble de nombres réels au collège, mais des arguments plaident, au moins par honnêteté intellectuelle, pour le pointage de l'écueil qu'ils représentent au cours d'une amorce de la démonstration du théorème de Thalès. Pour un sujet aussi difficile qui demande du temps de maturation, il peut sembler légitime de l'aborder à de nombreuses reprises dans le cursus scolaire à partir de la classe de troisième.

Notre travail de recherche a permis de mettre en évidence les conceptions (citées précédemment) de la part des élèves de 3^{ème} sur la mesure des longueurs qui pourraient être contredites par une approche des nombres irrationnels comme considérer que deux segments sont toujours commensurables ou que la longueur de tout segment est toujours mesurable de façon pratique et que seules les limites oculaires peuvent éventuellement empêcher cette prise de mesure effective. Si, à l'école primaire, l'une des difficultés en géométrie est liée à l'amalgame qui est fait entre les notions de mesure, de grandeur et de nombre, au collège, le problème semble inverse. Les élèves font difficilement le rapprochement entre ces différents concepts. En troisième, les élèves ont accès à l'existence de $\sqrt{2}$ dans le cadre géométrique et arithmétique et à son irrationalité dans le cadre arithmétique et dans une moindre mesure en géométrie. Malgré cela, lorsque nous les interrogeons sur leurs conceptions au sujet de la mesure des longueurs, ils n'associent en aucune façon ce type de nombre aux questions posées ce qui peut paraître dommageable.

Le fait qu'une démonstration du théorème de Thalès ne puisse pas se réaliser de façon satisfaisante du point de vue théorique sans l'apport des *nombres réels* constitue un obstacle à la fois épistémologique et didactique. Ces nombres, sans envisager leur élaboration à ce niveau, permettraient au moins de pointer la difficulté qu'ils représentent dans le cadre d'une tentative de démonstration du théorème de Thalès ou de démonstration de la formule de l'aire du rectangle qui est parfois utilisée, par le biais de celle du triangle, pour justement démontrer le théorème de Thalès. Une prise de conscience progressive de l'insuffisance des rationnels pour démontrer de nombreux théorèmes et en particulier celui de Thalès est tout à fait envisageable.

c) La proportionnalité

Nous choisissons deux théorèmes qui font apparaître une proportionnalité interne et externe. Ce choix est fait à partir de deux justifications données plus loin. *Interne aux segments* : $AM/MB = AN/NC$; $AM/AB = AN/AC$; $BM/BA = NC/CA$. Ce théorème de la droite parallèle à un côté d'un triangle qui coupe les deux autres côtés en segments proportionnels n'est plus au programme de l'enseignement actuel. Nous proposons tout de même sa mise en oeuvre.

Externe aux triangles : $AM/AB = AN/AC = MN/BC$, ce qui correspond au théorème de Thalès actuel.

La première justification de ce double choix consiste à penser que l'illégitimité de certains rapports pourrait être mieux comprise par les élèves. Ainsi, cela est bien connu, ils écrivent souvent l'égalité : $AM/MB = AN/NC$ qui serait vraie si elle n'était associée au rapport MN/BC . De plus, la donnée de ces deux théorèmes permet de rendre congruentes (Duval 1988) un plus grand nombre de figures avec l'énoncé du théorème de Thalès.



En second lieu, cette double proportionnalité permet d'inscrire le théorème de Thalès au sein d'une organisation mathématique plus large et plus riche.

Décrivons maintenant la situation afin d'illustrer les différentes étapes possibles de prise de *sens* du théorème pour les élèves.

2.2 La situation d'apprentissage

Nous développons plus spécifiquement les séquences « expérimentale » et « modélisation / anticipation » en mettant en évidence les variables qui les composent et les objectifs didactiques poursuivis. En ce qui concerne les séquences « démonstration », « retour dans le méso-espace » et « fonctionnement logique », nous avons fait le choix d'être plus bref. Dans le cadre d'une conclusion intermédiaire, nous questionnons ces choix didactiques quant à leur viabilité à l'issue de quoi nous proposons un scénario transférable en classe.

Nous procédons tout d'abord à une analyse du milieu matériel à disposition des élèves dans la séquence « expérimentale » et dans la séquence « de modélisation et d'anticipation ». Une analyse *a priori* des séances qui composent ces deux séquences s'articule autour de trois points.

Tâches et scénario : Quel matériel est à disposition des élèves ? Quelles sont les tâches à accomplir ? Quelles sont les contraintes de la situation et ses variables ? De quelle problématique (pratique, géométrique ou de modélisation) la séance relève-t-elle ?

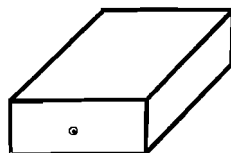
Objectifs : Que peut-on attendre de cette activité ?

Partage des responsabilités sous tâche par sous tâche : Quel est le partage *a priori* des responsabilités entre élèves et professeur pour chaque tâche et pourquoi peut-on attendre ce type de partage ? De quels moyens les élèves disposent-ils pour avancer ?

a) *Séquence expérimentale de visées dans le méso-espace*
 Séance « quinze lorgnettes »

Objectif, tâches et scénario

Matériel et organisation. La première séance de 50 minutes de cette séquence se déroule en extérieur (cf. schéma ci-après). Sur un tableau transportable, nous fixons horizontalement une mire blanche de 1 m de long et de 15 cm de large, constituée de deux morceaux de carton collés ensemble. Le milieu de cette mire est indiqué par un trait noir et les deux extrémités sont matérialisées de la même façon pour optimiser la visée. Quinze lorgnettes sont construites à partir de boîtes de récupération parallélépipédiques de longueur et de largeur différentes. Chacune est percée d'un petit trou centré qui permet la visée et, sur la face opposée, d'une fente occupant une largeur variable et dont le milieu est marqué par un morceau de ficelle fine. Ces lorgnettes servent à viser la mire *en faisant coïncider le milieu et les extrémités de leur fente avec ceux de la mire*. Elles ont été fabriquées de telle façon qu'à la fin de la séance, trois lieux de visées distincts apparaissent. *Celles qui ont en commun le lieu de visée ont leur longueur et la longueur de la fente proportionnelles*. Les élèves travaillent en binôme. Chaque binôme dispose d'une lorgnette et de son carton d'identification faisant apparaître un numéro.



Une lorgnette

Consignes. Les élèves doivent tout d'abord expliquer ce que signifie être bien en face de la mire avec les lorgnettes. Les membres des binômes visent successivement la mire et matérialisent sur le sol, à l'aide du carton d'identification, le lieu de visée qu'ils jugent correct. L'ensemble des élèves doit faire un constat à la fin de cette séance.

Contraintes. Les contraintes pratiques et spatiales de l'expérience sont de deux sortes : les lunettes doivent être horizontales et la visée doit se dérouler perpendiculairement au plan du tableau. Pour cela, les lignes tracées dans la cour servant à la course peuvent être utilisées. Cet artefact peut être proposé par l'enseignant.

Objectifs. Après avoir explicité les conditions de visée, le premier objectif est de constater l'obtention de trois tas de cartons et donc que les lorgnettes se différencient pas trois lieux de visée distincts (cf. schéma ci-après). Le second objectif est que les élèves se posent la question suivante sans disposer directement des mesures en question : « Pourquoi des lorgnettes différentes (en termes de mesure de longueurs) (par exemple *lorgnette 2* : mesure fente : 6,1 cm ; mesure longueur : 18,3 cm et *lorgnette 4* : mesure fente : 5,2 cm ; mesure longueur : 15,7 cm) peuvent-elles avoir le même lieu de visée ? » Cette expérience peut être aussi l'occasion de remettre en cause des idées déjà rencontrées telles que : *puisque je suis plus petit que mon camarade, pour viser avec la même lorgnette, je dois me rapprocher de la mire*. Le troisième objectif est de rapprocher le fait qu'il faille se mettre de face et donc perpendiculairement au tableau pour viser, de l'idée que la mire et la fente de visée sont alors « parallèles ».

Variables. Ce sont les dimensions et la forme de la mire et des lorgnettes. Ces dimensions ont été choisies de façon que la mire, de mesure fixe, soit juste vue à partir de lorgnettes et de façon que les visées se fassent dans de bonnes conditions. Trois paramètres peuvent alors être pris en compte pour conceptualiser le phénomène de visée, la longueur de la mire restant fixée : la distance qui sépare l'élève viseur du

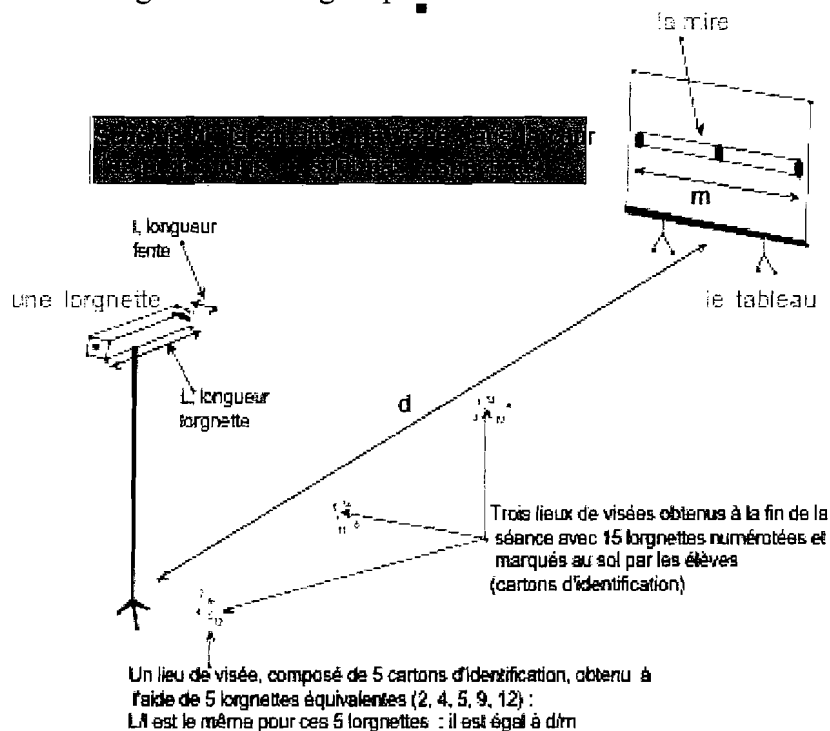
tableau, la longueur de la lorgnette et la longueur de la fente de visée. Afin de ne pas laisser les élèves emprunter des voies trop difficiles, ces trois paramètres ne doivent pas varier tous en même temps. Le choix des lorgnettes mises à la disposition des élèves n'est pas fait au hasard : pour les construire, nous avons joué sur les mesures de leur fente de visée et de leur longueur de façon à ce qu'elles se rassemblent en trois groupes caractérisés par trois distances de visée différentes. Les paramètres effectifs, qui ont servi à l'élaboration de ces trois familles de lorgnettes, sont donnés un peu plus loin.

Analyse didactique. Les décisions sont faciles à prendre, d'une part parce que voyant les éléments de la situation on peut corriger l'action au fur et à mesure et d'autre part parce que les élèves peuvent juger du résultat. Remarquons que pour cette activité, nous plaçons les élèves dans une problématique pratique puisqu'ils ont à contrôler des rapports spatiaux de manière empirique et contingente. Le problème porte sur de petits objets liés au méso-espace et faciles à comparer : les lorgnettes. La réussite ou l'échec des visées le sont également. Les deux conditions mises en évidence par Berthelot et Salin pour qu'une telle situation soit efficace sont donc bien remplies.

Partage des responsabilités sous tâche par sous tâche

Partage. Les élèves doivent trouver les conditions d'une bonne visée- en face et perpendiculairement. Le professeur doit expliquer, par un jeu de questions réponses, l'utilisation du réticule des lorgnettes par rapport au milieu de la mire, puis le fait que les extrémités de la fente et de la mire doivent coïncider. Les binômes s'observent mutuellement. À la fin de toutes les visées, les élèves constatent l'apparition de trois tas bien distincts de cartons d'identification des lorgnettes et proposent un paramètre qui les caractérise comme, par exemple, leur distance au tableau. Ils peuvent éventuellement formuler des hypothèses pour expliquer ce fait. De plus, ils doivent expliquer ce que signifie le fait de viser bien en face et la conséquence que cela a pour la mire et la fente.

Prévisions. Nous pouvons nous attendre à ce qu'ils ne proposent pas spontanément de mesurer la distance qui sépare chaque tas du tableau ou que des caractéristiques liées à la mesure d'autres longueurs n'émergent pas.



b) Séquence de représentation et d'anticipation dans le micro-espace (quatre séances)

Le but final de cette séquence est de savoir, sans se rendre dans la cour, si une mire pourrait être vue à l'aide d'une lorgnette dont on connaît les caractéristiques. Pour cela, une schématisation puis une modélisation des lorgnettes au cours d'une première séance est nécessaire. Une deuxième séance concerne une interprétation dans ce modèle de l'équivalence des lorgnettes. La troisième séance cherche à faire formuler par les élèves une conjecture au sujet de cette équivalence. Il s'agit ensuite d'anticiper de façon pratique et par le calcul une visée dans le micro-espace.

Séance de mise au point de la représentation plane des lorgnettes

Objectifs, tâches et scénario

Objectif. Aboutir à une schématisation puis à une représentation plane des lorgnettes et d'une visée.

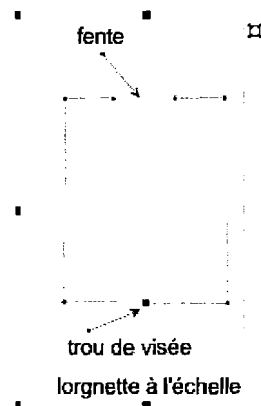
Organisation et matériel. Une phase collective est mise en place pour la schématisation puis un travail individuel, voire en binôme, pour la mise au point de la représentation des lorgnettes à l'échelle. Les élèves disposent de feuilles, de crayons à papier, de plusieurs doubles-décimètres et de calculatrices pour les deux phases.

Consignes. Il leur est tout d'abord demandé de produire un dessin générique d'une lorgnette. Ils doivent trouver ensuite comment représenter à l'échelle sur papier-calque chaque lorgnette. Chaque rectangle doit être ensuite découpé à l'échelle pour représenter la visée dans le micro-espace.

Contraintes. La situation de visée se déroule dans l'espace mais il s'agit d'un phénomène plan. Représenter la situation de l'espace dans le plan constitue un premier palier de modélisation qui constitue une contrainte pour les élèves. Une seconde contrainte est que, sur les schémas, le trou de visée et la fente doivent être centrés.

Analyse didactique. Les représentations à l'échelle doivent comprendre : un rectangle à l'échelle découpé dans du papier calque représentant longueur et largeur de la lorgnette, la fente représentée à l'échelle et correctement centrée et le trou de visée également bien centré.

Deux méthodes sont possibles pour centrer la fente sur la largeur de la lorgnette. L'une consiste à soustraire les deux longueurs, à diviser le résultat par deux pour obtenir la longueur qu'il faut enlever de chaque côté à la largeur de la lorgnette pour obtenir la position de la fente. Deux mesures sont alors à reporter à deux endroits distincts, ce qui augmente les risques d'imprécision. L'autre revient à placer le milieu de la largeur de la lorgnette, à diviser par deux la longueur de la fente pour la centrer à partir de ce milieu. L'échelle qui est utilisée pour modéliser cette situation est une variable importante. Un compromis a dû être trouvé entre le fait de représenter les lorgnettes de façon à ce qu'elles ne soient pas trop petites pour pouvoir les comparer et émettre des conjectures mais pas trop grandes non plus pour une question d'économie de papier calque. Aussi, nous avons choisi de représenter 4 cm sur les lorgnettes par 1,5 cm sur le papier.



Partage des responsabilités sous tâche par sous tâche

Partage. Les élèves proposent, dans un premier temps, un schéma faisant apparaître : un rectangle, les positions du trou de visée et de la fente pas forcément centrés. Ils doivent proposer des schémas qui sont discutés collectivement, mais dont un seul doit être retenu, le professeur pouvant prendre la main. En effet, face à ce problème de

modélisation inhabituel pour eux, des élèves de ce niveau vont difficilement retenir les éléments pertinents pour une schématisation. Dans un second temps, ils doivent trouver une méthode pour représenter à l'échelle les lorgnettes. Le choix des deux méthodes de centrage peut alors être proposé par le professeur, les élèves trouvant eux-mêmes la méthode la plus précise. Il s'agit d'une phase d'appropriation à la fois de la situation et de sa représentation schématique. Dans ce second temps, chaque binôme doit exécuter effectivement sur papier calque, trois représentations de sa lorgnette. Les calculs à l'échelle, la méthode de tracé et de centrage de la fente et du trou de visée sont à leur charge. La problématique demeure avant tout pratique.

Prévisions. Nous pouvons naturellement penser que les élèves seront tentés de schématiser la visée dans l'espace à trois dimensions. Ils risquent aussi de produire des schémas hybrides relevant à la fois du plan et de l'espace.

Séance de modélisation dans le micro-espace des visées

Objectifs, tâches et scénario

Objectifs. A partir d'une représentation des lorgnettes dans le micro-espace à l'aide des calques, le but de cette troisième séance est de matérialiser les visées des lorgnettes par leur champ et de se rendre compte de façon pratique de leur équivalence. Cette dernière apparaît par superposition des calques et par coïncidence des champs de visée des lorgnettes d'un même tas.

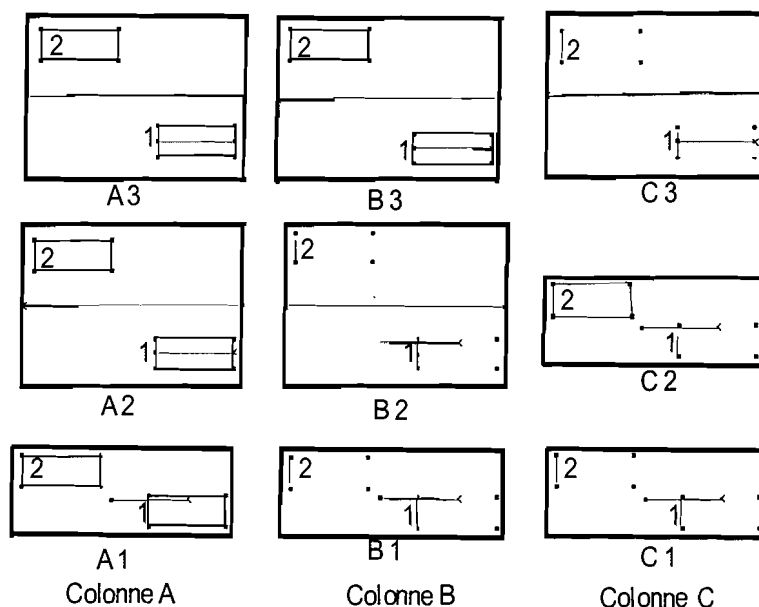


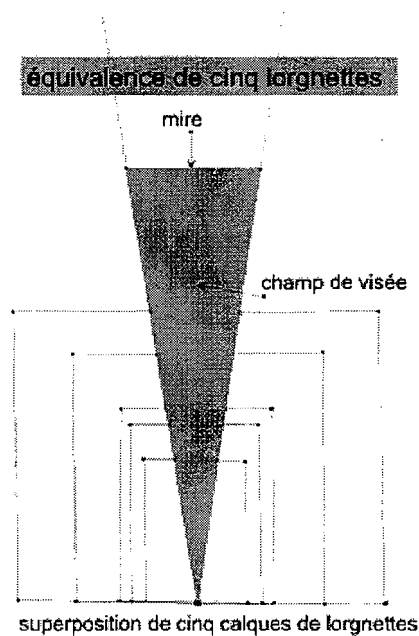
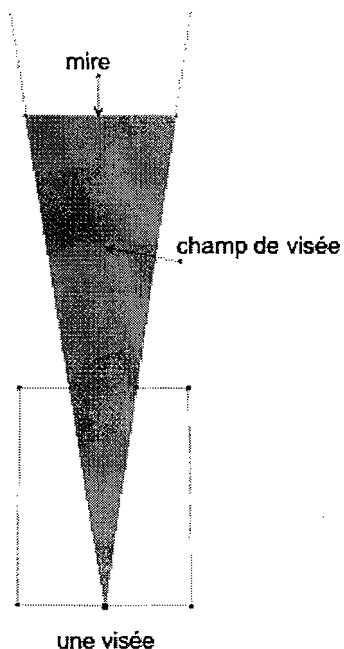
Figure. Organisation des tables dans la classe

Organisation et matériel. Le plan de l'organisation des tables est donné ci-dessus. Sur chaque table est placée une première feuille où apparaît un axe médian et sur laquelle les élèves superposent les lorgnettes. Une seconde feuille sert à la phase d'anticipation d'une visée du méso-espace dans le micro-espace. Les lorgnettes numérotées de chaque binôme sont rassemblées en fonction de leur champ de visée et sont placées sur les tables de la colonne A, B, ou C, réservée au tas correspondant.

Les élèves se retrouvent à un ou deux binômes par table. Chaque binôme de chaque groupe A, B, et C dépose un exemplaire de ses calques de lorgnette sur chacune

des trois tables de sa colonne. Ainsi, chaque lorgnette des trois tas mis en évidence dans la cour lors des visées, est représentée trois fois. Les trois tables de la colonne A comprennent chacune un exemplaire du jeu complet des cinq calques des lorgnettes 6, 7, 8, 11, 14, celles de la colonne B des lorgnettes 1, 3, 10, 13, 15 et celles de la colonne C des lorgnettes 2, 4, 5, 9, 12. Les élèves de chaque table ont à leur disposition un exemplaire des cinq lorgnettes du tas auquel appartient leur lorgnette.

Sont inscrites au tableau noir les différentes longueurs retenues par les élèves à la séance précédente, en face des trois colonnes de tables A, B, C. Nous les rappelons dans le tableau ci-après. L'organisation de la salle demeure telle de façon à ce que la séance suivante puisse se dérouler dans de bonnes conditions. Les élèves disposent de feuilles, de crayons à papier, de règles, et de rouleaux de scotch.



Consignes. Les élèves doivent positionner un calque correctement pour signifier une visée puis placer les autres calques de façon à percevoir dans le micro-espace l'équivalence.

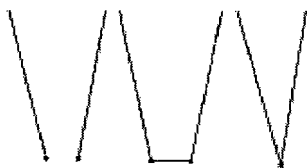
Numéro de lorgnette	1	2	3	4	5	6	7	8
Largeur y de la fente (cm)	2,75	6,1	1,55	5,2	6,4	2,55	4	3,5
Longueur z de la lorgnette	27,5	18,3	15,5	15,7	19,2	16	25	22
Largeur t de la lorgnette	19	11,5	13	9,5	7,5	13	9	14,5
Groupe d'élèves	B	C	B	C	C	A	A	A
Numéro de lorgnette	9	10	11	12	13	14	15	
Largeur y de la fente (cm)	7,7	1,8	3	4,2	2,5	1	1,3	
Longueur z de la lorgnette	23	18	19	12,7	25	12,5	13	
Largeur t de la lorgnette	8,5	12,5	12	9,5	9,5	13	9	
Groupe d'élèves	C	B	A	C	B	A		

Contraintes. Nous avons décidé d'utiliser des boîtes de récupération. Ainsi, les longueurs de chaque lorgnette nous étaient imposées ce qui nous a amené à percer les fentes au demi-millimètre près afin d'obtenir des approximations de rapports de mesures de longueurs acceptables.

Analyse didactique. De très nombreux paramètres sont présents dans cette situation et nous avons fait le choix de ne pas les laisser tous à la charge des élèves. Comme nous l'avons déjà indiqué, nous avons choisi d'imposer, *a priori*, sur les feuilles n°1 ci-dessus, la représentation d'une ligne médiane. Les opérations de visée supposent, pour être conceptualisées de la part des élèves, une représentation du trajet des rayons lumineux par l'intermédiaire d'une coupe. Cela nécessite de leur part de savoir imaginer des segments et des points qui ne sont pas matérialisés dans la réalité.

Partage des responsabilités sous tâche par sous tâche

Les élèves doivent être capables : d'utiliser correctement leurs calques pour représenter une situation de visée en respectant en particulier le positionnement du milieu de la fente et du trou de visée sur la ligne matérialisée ainsi que le parallélisme de la mire et de la fente, de visualiser l'équivalence des lorgnettes, en l'occurrence l'identité de leurs champs visuels. La problématique est de modélisation pour ce qui concerne la représentation plane des lorgnettes et de leur champ de visée et pratique pour ce qui est de la matérialisation de l'équivalence de ces lorgnettes dans le plan par superposition.



Représentations d'un champ de visée produites par les élèves.

Les champs de visée peuvent être représentés de diverses façons. Les élèves ont la responsabilité d'en choisir une sans qu'elle ne leur soit indiquée. La responsabilité totale des élèves par rapport à ces deux objectifs est rendue possible grâce à la séance qui précède et du fait que la superposition des calques met en lumière l'équivalence des lorgnettes.

La séance de conjecture au sujet de l'équivalence des lorgnettes

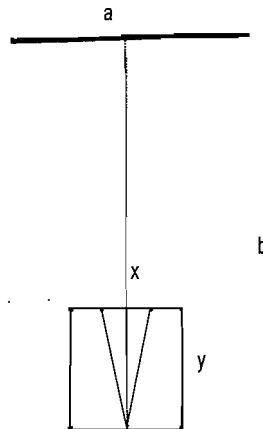
Objectifs, tâches et scénario

Objectif. Mise en évidence de la proportionnalité des longueurs et des fentes des lorgnettes équivalentes.

Organisation et matériel. Le matériel est celui de la représentation des visées. Les mesures données ci-dessus sont affichées au tableau ainsi que les distances dans le méso-espace des trois lieux de visée à la mire et la longueur de cette mire.

Consignes. Les élèves doivent tout d'abord trouver la proportionnalité des fentes et des longueurs des lorgnettes d'un même tas, puis l'égalité des rapports : $x/y = a/b$ c'est-à-dire longueur fente / longueur lorgnette = longueur mire / distance mire-viseur et, enfin, la proportionnalité de la longueur de la mire (a), de la fente (x), de la distance œil-mire (b) et de la lorgnette (y) c'est-à-dire $x/a = y/b$.

La proportionnalité des longueurs dites « latérales » peut être découverte grâce à la symétrie de la figure ci-après. Plus précisément, nous avons $x/a = y/b$ et donc $(x/2)/(a/2) = y/b$ et dans ce cas y et b deviennent des mesures de longueurs latérales.



Variables. Liées aux dimensions des lorgnettes.

Contraintes. Une contrainte didactique relève des mesures effectuées sur des dessins. Comment faire conjecturer par les élèves une situation de proportionnalité à partir de mesures faites dans la réalité ? Comment les élèves peuvent-ils être sûrs que les propriétés énoncées sont légitimes du fait de l'imprécision des mesures ? Comment négocier le passage d'une lecture faite dans la réalité à la figure ? Une autre contrainte, lors de cette phase de formulation est que deux élèves au sein d'un même binôme peuvent faire des lectures différentes et obtenir une forme de proportionnalité distincte. Pour pallier ces difficultés et pour que la situation puisse fonctionner, il est nécessaire de guider sans trop donner. Ainsi, les caractéristiques des lorgnettes d'un des trois tas sont telles qu'une remarque numérique peut être formulée aisément : le rapport des lorgnettes du groupe B est de $1/10$. Pour les groupes A et C rien de spécial n'est prévu. Les données numériques étant consignées sur le tableau noir, nous considérons que la formulation de la conjecture sera favorisée pour tous les élèves et pas uniquement pour ceux du groupe B.

Partage des responsabilités sous tâche par sous tâche

Partage. Le rapprochement entre largeur et longueur des lorgnettes est à la charge des élèves. La gestion des différentes propositions de proportionnalité ou de rapports de longueurs est par contre l'une des tâches importantes de l'enseignant : il faut transformer une explication pratique en conjecture qui, à son tour, doit être démontrée. La problématique est de modélisation. Une synthèse doit être proposée après d'éventuelles nouvelles contradictions émises au sein de la classe toute entière ; cette synthèse doit déboucher sur la connaissance à enseigner, c'est-à-dire sur le fait que des rapports sont invariants par parallélisme. Il est possible de prévoir une phase récapitulative, qui n'est pas tout à fait encore une phase d'institutionnalisation, afin de résumer les résultats qui sont constatés : proportionnalité fente/longueur lorgnette et distance au tableau/ longueur de mire.

Prévisions. Nous pouvons attendre de la part des élèves une difficulté au cours de la mise en évidence de la proportionnalité : le passage d'une longueur à une autre en multipliant par le même nombre peut ne pas être rattaché à la proportionnalité. Nous nous attendons aussi à ce que certains élèves proposent des rapports faisant apparaître la longueur et la largeur d'une lorgnette.

Séance d'anticipation d'une visée dans le micro-espace

Objectifs, tâches et scénario

Objectifs. Un premier objectif est que les élèves se représentent dans le micro-espace la visée de la mire à partir de trois lieux différents pour pouvoir anticiper le résultat de cette visée. Un second est d'anticiper par le calcul, la visée de la mire avec une lorgnette dont on connaît les dimensions.

Organisation et matériel. Les élèves demeurent regroupés comme précédemment. Pour la première phase, sur une feuille n°2 ont été placés trois points alignés, A, B, et C, de visée d'une mire, dont un est correct et correspond à une lorgnette sur papier calque jointe à la feuille. Une question d'anticipation prend place. Pour la seconde phase, les élèves doivent procéder à des calculs. Chaque groupe a la longueur, la taille de la fente de visée d'une nouvelle lorgnette n'appartenant à aucun des trois groupes précédents, ainsi que la longueur de la mire. Ils possèdent également une calculatrice.

Consignes : pour intégrer la mire au modèle, il faut changer d'échelle. On doit calculer la longueur de la mire à l'échelle 15/40. Ainsi, une mire prédécoupée de 37,5 cm est distribuée au moment opportun pour que les élèves se rendent compte de l'impossibilité du tracé du champ de visée. On doit ensuite simuler la visée d'une mire plus petite avec le calque d'une lorgnette à leur disposition, puis dire si, des points A, B, et C, la mire est vue correctement ou pas. La fin de la séance consiste à viser une mire de longueur connue à l'aide d'une lorgnette dont les dimensions sont également connues. Mais cette visée ne se fait pas dans la cour ni sur une feuille comme précédemment, les élèves doivent anticiper, par le calcul, la distance qui doit séparer la personne de la mire.

Contraintes. Pour simuler une visée à l'aide d'une lorgnette sur calque et de la mire représentées à la même échelle, il faudrait se mettre à plus de deux mètres. La mire ne peut donc pas être représentée à l'aide de la même échelle

Variables. La variable principale de la seconde manipulation est la distance du point de visée représenté sur la feuille. Nous avons choisi de prendre, à chaque fois un point de visée exacte, un point d'où la visée « déborde » de la mire et un dernier où la visée « mord » sur la mire.

Partage des responsabilités sous tâche par sous tâche

Partage. Pour une question de temps, l'expérimentateur prend en charge la visée de la mire représentée dans le micro-espace à l'aide de la même échelle que la lorgnette. Il demande aux élèves d'effectuer cette visée.

Dans la première phase, les élèves ont la responsabilité de trouver les conditions correctes de visée dans le micro-espace (seule la mire (a) est vue correctement), de visualiser et représenter, dans le micro-espace, la visée avec une lorgnette de trois endroits distincts. Au cours de la seconde phase, les élèves doivent calculer la distance de visée grâce aux conditions qu'ils viennent de trouver.

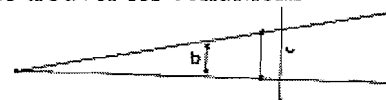


Schéma expliquant aux élèves comment doit se faire une visée exacte dans le micro-espace (a).

Prévisions. Nous pouvons nous attendre à ce que les élèves se rendent facilement compte que la mire ne peut pas être représentée avec la même échelle que les lorgnettes : il suffit de calculer la longueur de la mire et de tenter la visée pour s'apercevoir qu'il faut se reculer de plusieurs mètres.

Mais la problématique est de modélisation puisqu'il s'agit d'anticiper sur les réponses qui pourraient être obtenues par la visée, mais dont l'enseignant exige qu'elles soient trouvées dans le système symbolique du modèle de la situation élaboré par les groupes.

c) Séquence de démonstration du théorème

Nous sommes dans une phase de problématique géométrique dans laquelle la justification sert à la validation des conjectures. Comment peut-on être sûr que les rapports de mesures de longueurs trouvés comme étant égaux de façon pratique ($x/a = y/b$), abstraction faite des approximations liées aux lectures des mesures et aux calculs, sont effectivement identiques ? Que doit-on faire en mathématique pour pouvoir s'assurer de la véracité de propriétés observées sur un dessin dans le but de les utiliser ultérieurement ? La complexité de la démonstration fait que les élèves sont guidés du début à la fin de cette phase, le but étant d'asseoir théoriquement un théorème sans aller forcément jusqu'au bout de la preuve afin que de nombreuses autres propriétés ou notions puissent s'en déduire.

L'enseignant guide donc la démonstration du théorème de la droite parallèle à un côté d'un triangle qui coupe les deux autres côtés en segments proportionnels puis le théorème de Thalès : les étapes de ces deux démonstrations composées de plusieurs démonstrations intermédiaires sont détaillées aux élèves sous la forme de questions.

Le théorème de la droite parallèle à un côté d'un triangle qui coupe les deux autres côtés en segments proportionnels est démontré grâce au théorème des milieux. Ce dernier est démontré à partir des trois caractérisations du parallélogramme : quadrilatère convexe ayant deux côtés parallèles et de même longueur ; quadrilatère ayant les côtés parallèles deux à deux ; quadrilatère ayant les diagonales qui se coupent en leur milieu. Un résultat équivalent est prouvé dans le trapèze toujours à partir du théorème des milieux. Dans la suite, un côté du triangle est tout d'abord partagé en trois segments de même longueur et deux parallèles à un deuxième côté coupent le troisième en trois segments dont il faut prouver qu'ils ont la même longueur grâce aux deux théorèmes liés au triangle et au trapèze. Nous démontrons ensuite le résultat pour un partage en quatre, puis, dans deux cas génériques, pour un rapport AD/DB décimal ($6/10$) et rationnel ($5/12$). À partir de ces cas paradigmatiques, l'extension à tous les cas rationnels est effectuée.

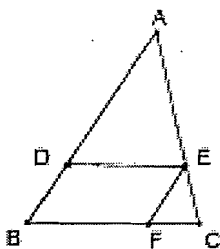
Au préalable, en début d'année, les élèves ont abordé l'irrationalité de $\sqrt{2}$ par l'intermédiaire d'une démonstration arithmétique fondée sur l'unicité de l'écriture décimale d'un nombre entier. Ils ont été mis en contact avec certaines insuffisances de l'ensemble des nombres rationnels en particulier pour comparer certaines longueurs.

Aussi, à ce stade de la démonstration du théorème de la droite parallèle à un côté d'un triangle, pour les élèves le procédé, utilisé dans le cas décimal et fractionnaire, de partage du segment $[DB]$ en parties égales dont un exemplaire est reporté un nombre entier de fois dans $[AD]$ n'est plus possible dans le cas où le rapport AD/DB est égal à $\sqrt{2}$. Nous partageons alors le segment $[BD]$ en n parties égales et nous reportons l'une d'entre elles autant de fois que nous le pouvons dans $[AD]$, m fois par exemple. Ainsi, nous obtenons $m/n \leq AD/DB < (m+1)/n$. Nous démontrons, avec ce qui précède, que le rapport AE/EC est encadré de la même façon, ce qui montre que nous pouvons rendre la différence $AD/DB - AE/EC$ aussi petite que nous voulons et nous admettons que cela signifie que : $AD/DB = AE/EC$.

La fin de la démonstration consiste à mettre en évidence et à démontrer le théorème de Thalès complet faisant apparaître trois rapports égaux.

Ainsi, grâce au théorème de la droite parallèle à un côté d'un triangle appliqué au triangle ABC et à la droite (DE) parallèle à (BC) ci-après, nous obtenons les rapports suivants : $AD/BD = AE/EC$; $AD/AB = AE/AC$; $BD/BA = CE/CA$. Mais si nous

construisons la parallèle à (AB) passant par E et coupant [BC] en F, nous pouvons appliquer ce théorème : $AE/AC = BF/BC$, soit encore $AE/AC = DE/BC$.



Dessin utilisé à la fin de la démonstration

Pour les élèves, l'apport de cette démonstration complexe est triple. Il réside d'abord dans les différentes étapes dans lesquelles les élèves travaillent en semi autonomie pour démontrer des résultats intermédiaires : théorème des milieux, théorème du trapèze, théorème de la droite parallèle à un côté d'un triangle dans le cas fractionnaire. Il relève également de la prise de conscience de l'insuffisance du cas rationnel. Enfin, dans une moindre mesure, l'intérêt réside dans l'achèvement de la démonstration, effectué par l'enseignant.

Le but est de distinguer les deux théorèmes « droite parallèle à un triangle » et de Thalès en montrant qu'ils se réfèrent à des formes de proportionnalité différentes. Nous faisons l'hypothèse que le double aspect de la proportionnalité déclenche chez les élèves une meilleure compréhension des égalités de rapports de mesures de longueurs en particulier celles qui sont légitimes et celles qui ne le sont pas. Nous avons montré par ailleurs (2007) que ce double aspect diminue les erreurs liées à des variables numériques prégnantes lors de sa mise en œuvre par les élèves pour le calcul de longueurs.

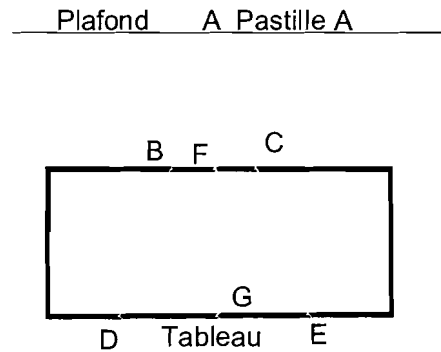
d) Séquence : retour dans le méso-espace

Une fois le théorème institutionnalisé, nous retournons dans le méso-espace pour trouver une réponse dans cet espace à la question initiale, comment calculer la mesure d'une distance inaccessible ? Nous proposons deux activités au cours d'une séance supplémentaire. Le but est d'élaborer une méthode pour calculer la hauteur du plafond.

Une pastille de couleur est placée au plafond, juste au-dessus du tableau. Deux élèves doivent viser le point par deux fois à l'aide d'une grande règle et tracer ces deux axes de visée en partant du bas et en prolongeant jusqu'en haut du tableau. Ils ont aussi la responsabilité de mettre en évidence une figure dans laquelle peut s'appliquer un des deux théorèmes précédents. Pour cela, ils doivent désigner les deux droites parallèles, ici (BC) et (DE) et le triangle en question ADE. Ils doivent trouver les trois longueurs qui peuvent être mesurées directement en l'occurrence BC, DE et FG. Une double application du théorème est nécessaire, la transitivité de l'égalité devant être utilisée.

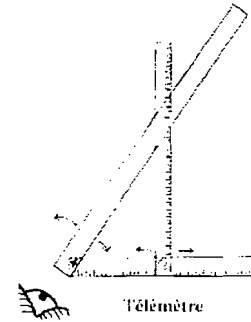
Nous avons $AB/AD = AF/AG$ et $AB/AD = BC/DE$ donc $BC/DE = AF/AG$ soit $BC/DE = (x - FG)/x$. Pour obtenir la hauteur du plafond, il suffit de rajouter à la longueur $x = AG$ la distance qui sépare le tableau du sol.

La dernière activité a également pour but de revenir dans le méso-espace pour apporter une solution pratique aux problèmes initiaux de mesure de distances inaccessibles dans cet espace, grâce à l'utilisation d'un télémètre.



Les pièces en bois peuvent être éventuellement conceptualisées, fabriquées et assemblées avec l'aide du professeur de technologie de la classe.

Le télémètre se compose de deux règles graduées en centimètres l'une horizontale et l'autre verticale et d'une troisième branche articulée avec la règle horizontale. La règle verticale peut glisser le long de l'horizontale. On doit faire coïncider l'extrémité de la règle horizontale avec le pied de l'objet visé et l'extrémité de la partie articulée avec le sommet. Pour déterminer la distance inconnue, on mesure en mètre la distance qui sépare le viseur de l'objet, par exemple 20 mètres, et l'on place la règle verticale sur la graduation 20 centièmes sur la règle horizontale.

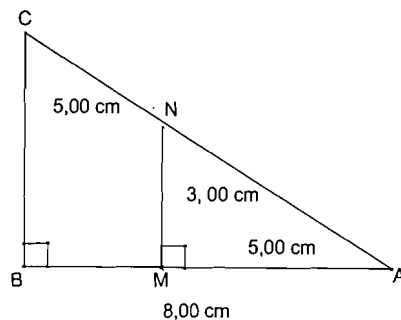


Le nombre de centimètres qui apparaît à l'intersection de la règle verticale et de la partie articulée donne, en mètres, la hauteur réelle cherchée.

e) Séquence fonctionnement logique

Dans la mise en œuvre effective de notre ingénierie, les élèves ont pu aborder la question de la différence entre un théorème et sa réciproque, ainsi que la notion de contraposée même si ce terme n'a pas été employé. Nous pouvons penser que ces concepts s'acquièrent progressivement au gré de l'étude de divers théorèmes. Au sujet du théorème de Thalès, les élèves ne comprennent pas pourquoi il leur est demandé de préciser l'alignement de points qui composent deux triplets, après avoir démontré que deux rapports sont distincts et surtout avant de conclure que deux droites ne sont pas parallèles.

Un travail prenant la forme en particulier de la résolution d'un exercice classique, a permis de proposer un premier élément de réponse à leur question. Les élèves devaient reproduire en vraie grandeur le dessin ci-après.



Il leur était ensuite demandé ce qu'ils pouvaient conclure, en le justifiant. Comme nous nous y attendions, un grand nombre d'entre eux a mécaniquement calculé séparément les rapports AM/AB et AN/AC et a conclu que les droites (MN) et (BC) n'étaient pas parallèles sans se rendre compte de l'incohérence de leur réponse avec le codage de la figure.

En guise de conclusion intermédiaire, nous pouvons nous interroger sur l'écologie possible au sein d'une classe ordinaire de l'ensemble des séquences partiellement décrit dans cet article, ou du moins autre que celle du concepteur qui les a élaborées. En premier lieu, de toute évidence et d'une façon générale, toutes les notions à un niveau scolaire donné, ne pourraient pas être enseignées en prenant appui sur une ingénierie aussi coûteuse en temps. Le choix pourrait se porter sur un chapitre du programme choisi de telle façon qu'il réponde au mieux au canevas des catégories précédentes. En particulier, le savoir sélectionné devrait générer le maximum de nouvelles connaissances sans que ces dernières ne soient forcément introduites à l'aide d'activités, ce qui constituerait finalement un gain de temps.

En second lieu, en ce qui concerne plus particulièrement le théorème de Thalès, pour que les situations chronophages décrites dans cet article soient transférables en classe, des choix peuvent être fait suivant des critères didactiques et cognitifs.

Pour aborder avec les élèves, d'une part, les deux approches spatiale et géométrique d'une situation et, d'autre part, les trois problématiques, pratique, de modélisation et géométrique, d'un intérêt indéniable, nous proposons de conserver la situation de mesures de distances inaccessibles utilisant les lorgnettes dans laquelle l'étude de l'objet dans le méso-espace est séparée de l'enseignement de la géométrie. Le travail sur théorème de Thalès peut alors se décliner de la manière suivante.

Séance 1. Une première séance de 50 minutes consiste, d'abord, à viser une mire composée d'une bande de papier de 1 mètre de long à l'aide de lorgnettes parallélépipédiques différentes pour ce qui est de leurs dimensions mais équivalentes, pour certaines d'entre elles, en ce qui concerne les lieux de visées. Le second objectif étant de remarquer que la mire et la fente sont parallèles.

Séance 2. La schématisation et la modélisation des lorgnettes participent d'une double modélisation, la première consistant à représenter des objets de l'espace dans le plan et la seconde relevant d'une représentation à l'échelle des lorgnettes.

Séance 3. Vient alors la modélisation, d'une part, des champs de visés et, d'autre part, de l'équivalence des lorgnettes par superposition de leurs calques. La difficulté est alors liée au fait que les trajets lumineux immatériels doivent être représentés.

L'intérêt didactique de ces trois séances réside en premier lieu dans le travail effectif dans le méso-espace inhabituel et, en second lieu, dans le réinvestissement de la proportionnalité qu'elles génèrent en particulier au sujet des représentations à l'échelle. L'apport cognitif relève de la modélisation de la situation d'apprentissage qui permet de passer du méso-espace au micro-espace.

Séance 4. Mise en évidence de la proportionnalité et démonstration guidée du théorème. Au niveau de la démonstration du théorème, seuls les deux cas de partages d'un côté du triangle en trois et quatre segments de même longueur pourraient être abordés. Il suffirait de signifier que la méthode se généralise pour tout rapport fractionnaire. Ayant préalablement mis en évidence des exemples de nombres irrationnels, le cas réel serait juste évoqué et admis en mettant en évidence le fait que dans ce cas, la démonstration demanderait à être complétée.

Séance 5. Retour dans le méso-espace pour réinvestir ce nouveau résultat pour le calcul de la hauteur d'un plafond.

Conclusion

L'objectif de cet article était, d'une part, de chercher ce qui peut faire *sens* en mathématique en général pour les élèves et, d'autre part, de proposer, à partir du théorème de Thalès, une illustration particulière de la réponse que nous apportons en nous appuyant sur le réel. Nous avons fondé cette étude sur l'idée que le sens en mathématique peut avoir une composante intérieure à cette discipline et une composante extérieure.

Cette étude montre que l'un des écueils importants de la situation d'apprentissage exposée est en rapport avec le fait que les modèles successifs qu'elle fait émerger ne sont pas réellement construits par les élèves.

Une question fondamentale est justement de savoir comment créer les conditions qui leur permettraient de faire évoluer, s'ils en possèdent, leurs propres modélisations sans qu'elles ne soient toutes imposées par l'enseignant comme c'est le cas dans notre travail en particulier en ce qui concerne les représentations planes des lorgnettes, des champs de visée et de leur équivalence par superposition.

À cet endroit, le cadre théorique du Domaine Didactique d'Expérience (Boero), dont nous n'avons pas connaissance lors de l'élaboration et la mise en place de notre ingénierie, peut constituer une piste de réflexion non négligeable. Nous pouvons dire que cette question de « modélisation » est apparue après coup dans notre recherche.

Le cadre des DDE est relatif aux relations complexes qui se développent à l'école entre le contexte interne de l'élève (ses conceptions, ses schémas), le contexte interne de l'enseignant (ses conceptions, ses objectifs éducatifs), et le contexte externe (signes, objets, contraintes physiques). Pour une prise en compte de cet outil fondamental dans notre travail d'élaboration et de mise en place d'une situation d'apprentissage, nous devrions revenir sur notre recherche qui n'a pas permis et ne permet pas de mettre en évidence le contexte interne en particulier au sujet de la représentation que les élèves (l'enseignant) pourraient se faire de la situation. Il faudrait creuser, par exemple, le résultat qui est que la représentation spontanée des élèves est plutôt une schématisation dans l'espace. Cette reprise demanderait un approfondissement que nous n'avons pas entrepris mais qui ouvre une nouvelle piste de recherche.

Références bibliographiques

ARTAUD M. & CHEVALLARD Y. (2001) Processus de régulation dans la constitution de routines professorales (atelier). In *Actes de la 11^{ème} Ecole d'été de Didactique des Mathématiques. La Pensée Sauvage. Grenoble.*

ARTIGUE M. (1990) Epistémologie et didactique. *Recherche en Didactique des Mathématique Vol n°10.2.3 La Pensée Sauvage, Grenoble.*

BARTOLINI BUSSI M. G. & MARIOTTI M. A. (2008) Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom : Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective, in *L.English et al. (eds.), Handbook of International Research on Mathematics Education (2nd edition), Mahwah, N.J. : Lawrence Erlbaum Associates.*

BERTHELOT R. et SALIN M.H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire.* Thèse Université Bordeaux 1. LADIST.

BERTHELOT R. et SALIN M.H. (2001) L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ? *Petit x n°56*.

BROUSSEAU G. (1983) Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques. Vol 4.2. Grenoble. La Pensée Sauvage.*

CHEVALLARD Y. (1997) Familiale et problématique, la figure du professeur. *Recherche en Didactique des Mathématiques Vol n°17.3 La Pensée Sauvage, Grenoble.*

CHEVALLARD Y. (1999) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *Analyse des pratiques des enseignants et didactique des mathématiques. IREM de Clermont-Ferrand.*

DOUADY R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherche en Didactique des Mathématiques. Vol. 7-2. La Pensée Sauvage. Grenoble.*

DUVAL R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives. Vol n°10. IREM de Strasbourg.*

ERRARD I. (1619) *La géométrie et pratique d'icelle*. Michel Daniel. Paris. (1594).

LABORDE C. (1984) Exposé sur la géométrie, recueil des textes et comptes rendus de la 3^{ème} école d'été de didactique des mathématiques et de l'informatique. *LSDIMAG, Université J. Fourier, Grenoble.*

LAGUERRE E. (2005) *Une ingénierie didactique pour l'apprentissage du théorème de Thalès au collège*. Thèse de Doctorat. Université Paris VII Denis Diderot.

LAGUERRE E. (2007) Figures archétypes, figures prototypes et leurs effets dans la résolution de tâches. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Vol 12. IREM de Strasbourg.*