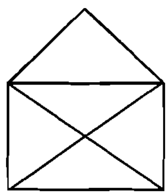
À PROPOS DU THÉORÈME D'EULER ET DES PARCOURS EULÉRIENS DANS LES GRAPHES

Léa Cartier
Institut Fourier
ERTé Maths à modeler

Résumé : Nous proposons dans cet article de traiter un problème classique de théorie des graphes, la recherche de parcours eulériens. Cette question peut sembler très connue, les « ponts de Königsberg » par exemple, sont présents autant dans l'enseignement qu'en vulgarisation des mathématiques. Ils semblent contenir une modélisation sous forme de graphe qui va de soi, pourtant deux types de graphes apparaissent régulièrement dans les classes. Des éléments de preuve l'accompagnent souvent, pouvant faire croire que la résolution du problème est simple. Or, le travail de preuve que l'on peut entreprendre avec un tel sujet n'est pas trivial et un travail mathématique conséquent peut avoir lieu à l'occasion de sa présentation en classe. Nous montrerons dans cet article des éléments sur l'article fondateur d'Euler sur ce problème, en particulier sur le fait qu'Euler n'a pas prouvé le théorème qu'il a proposé, des pistes pour le présenter en classe, les difficultés qui peuvent alors émerger et les mathématiques qu'il permet d'aborder, que ce soit en option de Terminale ES ou dans d'autres classes.
Mots-clés : didactique des mathématiques, preuve et modélisation, théorie des graphes, graphes eulériens, théorème d'Euler, ponts de Königsberg

Introduction



En fréquentant l'école, qui n'a pas rencontré des petits problèmes du type : « Tracer cette enveloppe sans lever le stylo et sans repasser deux fois par le même trait » ? Que le problème ait été posé par l'enseignant ou a fortiori entre élèves, la question peut sembler anecdotique, et la réponse tout autant. Si le problème est souvent classé dans les sections "casse-tête" ou "récréations mathématiques" des manuels scolaires, les mathématiques sous-jacentes appartiennent cependant à un domaine à part entière : la théorie des graphes. Celle-ci, introduite dans les programmes de Terminale ES, fait partie des mathématiques discrètes, domaine qui s'est récemment beaucoup développé, notamment parce qu'il est une source importante de modèles en sciences sociales et en informatique. Les objets manipulés ayant la même nature discrète que ceux rencontrés en arithmétique, théorie des groupes ou probabilités, les raisonnements mis en œuvre ont une certaine parenté avec ceux utilisés dans ces domaines.

Mais l'élément le plus important à nos yeux est le caractère compréhensible d'un grand nombre de « problèmes combinatoires », ce qui permet une entrée facile dans une véritable démarche scientifique : question, expérimentation, conjecture, preuve, réfutation [14]...

14 Pour approfondir ce sujet, voir ROLLAND (1999) et GRENIER, PAYAN (1998).

Le problème que nous venons d'évoquer en est un exemple. Dans ce cadre, une autre formulation du même type de problème est celui des "ponts de Königsberg". Ce problème a été formulé par Euler[15] comme suit :

À Kœnigsberg, en Prusse, il y a une île *A* appelée le Kneiphof, entourée d'un fleuve qui se partage en 2 bras, comme on peut le voir sur la *figure 1*, mais les bras de ce fleuve sont garnis de 7 ponts *a, b, c, d, e, f, g,* et l'on proposait cette question sur ces ponts : Une personne peut-elle s'arranger de manière à passer une fois sur chaque pont, mais une fois seulement ?

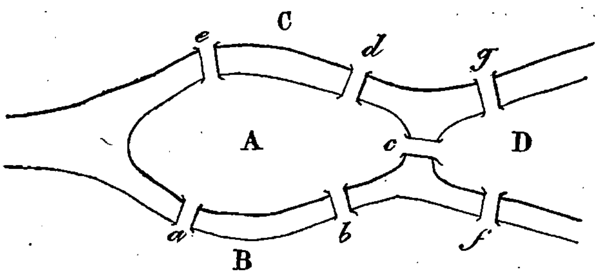


Figure 1

Les uns affirmaient que cela était possible ; d'autres niaient, d'autres en doutaient ; mais personne ne pouvait prouver.

Ce problème semble incontournable lors d'une présentation de la théorie des graphes. Il semble que tout article généraliste[16], manuel scolaire[17], voire exposition[18] traitant de théorie des graphes propose ce problème, et sa résolution par Euler est présentée comme étant à l'origine de cette discipline.

Nous traiterons dans cet article à la fois la résolution historique du problème de recherche de parcours eulérien dans un graphe, et la pertinence de ce problème dans l'enseignement, dans l'option mathématique de terminale ES ou dans d'autres classes. Nous présenterons en ce sens une séance en classe de seconde dans l'option « démarche scientifique » sur un problème de ce type, ainsi que deux autres extraits de séances en cycle II et auprès d'étudiants de PLC1.

---

15 Vous trouverez l'article original d'EULER L. (1736) à cette adresse :
, sa traduction en français par COUPY E. (1851), texte retranscrit dans l'ouvrage de COGIS O., ROBERT C. (2003) ou une traduction plus tardive dans LUCAS (1882).

16 La liste des articles évoquant le problème des ponts de Königsberg serait bien trop longue à citer ici, retenons, par exemple, le numéro hors série 12 de la revue Tangente, consacrée entièrement à la théorie des graphes. Vous pouvez aussi faire un test sous Publimath (base de données bibliographiques sur l'enseignement des maths). Les expressions « graphes eulériens » ou « parcours eulériens » mènent l'un à deux l'autre à trois références, les « ponts de Königsberg » à dix-neuf.

17 C'est le cas par exemple de tous les manuels mathématiques de terminale ES contenant la spécialité mathématique depuis 2002 que nous avons consultés. Le problème des parcours eulériens dans un graphe fait certes partie du programme, mais pas le traitement d'un parcours des ponts de Königsberg.

18 Citons pas exemple celle produite par le Centre Sciences et le Comité Européen de l'année mondiale des Mathématiques, exposition accompagnée d'objets à manipuler.

1. La résolution historique par Euler

En 1736, Euler publie un article, dont il nous reste aujourd'hui la trace sous la forme d'un "théorème d'Euler", traitant de l'existence d'un chemin passant par toutes les arêtes d'un graphe donné. Nous suivrons Euler à travers cet article pour revenir ensuite aux termes utilisés, à leur représentation ou plutôt à la modélisation à l'aide de graphes.

Pour replacer le problème dans le contexte de l'époque, les standards de démonstration, les termes utilisés par Euler, la façon très exemplifiée de traiter un problème mathématique, ne sont plus les nôtres. Cet article semble à la lecture, et en le comparant à d'autres articles du même auteur, être la résolution d'une sorte de casse-tête et l'illustration de ce qu'est la géométrie de position[19] définie par Leibniz et traitant de problèmes « dont [...] la solution ne [dépend], ni de la détermination de grandeurs, ni du calcul de quantités ». Problème relativement marginal au sein de l'impressionnante quantité de travaux majeurs publiés par Euler, son traitement le serait-il également ?

1.1 La modélisation d'Euler

Reprenons la *figure 1* représentant les ponts de Königsberg. Dans cette version originale du problème, Euler propose une modélisation qui consiste à désigner chacune des berges par une lettre majuscule, les ponts par une lettre minuscule et à étudier l'existence de listes d'une taille donnée de lettres majuscules. Par exemple, la liste CABD peut correspondre à un parcours de la berge C à la berge A par le pont *e*, puis de A vers B par le pont *a*, puis de B vers D par *f*.

L'impossibilité de passer deux fois par le même pont se traduit par l'impossibilité qu'une liste comporte plus de fois la séquence XY ou YX qu'il n'existe de ponts entre les berges X et Y. Pour illustrer cette règle, les séquences AD et DA, par exemple, ne peuvent pas exister conjointement dans une liste solution au problème des ponts de Königsberg, étant donné qu'il existe un seul pont entre A et D. ADA, DAD, AD...DA, AD...AD, DA...DA ou DA...AD ne peuvent être sous séquences d'une liste solution.
Pour Euler, une solution est une liste comportant exactement une lettre de plus qu'il n'y a de ponts, et répondant aux contraintes précédentes.

Euler propose une règle pour répondre au problème général des promenades sur des ponts :

> S'il y a plus de deux régions auxquelles conduisent un nombre impair de ponts, vous pouvez affirmer avec certitude qu'un tel passage est impossible. Mais si l'on est seulement conduit à deux régions par un nombre impair de ponts, le passage est possible, mais en commençant sa course par l'une ou l'autre de ces deux régions. Enfin, s'il n'y a aucune région à laquelle on soit conduit par un nombre impair de ponts, alors le passage pourra avoir lieu, comme on le désire, et en commençant sa marche par telle région qu'on voudra.

Si on se hasarde à une "traduction" de ce paragraphe, on pourrait écrire que :

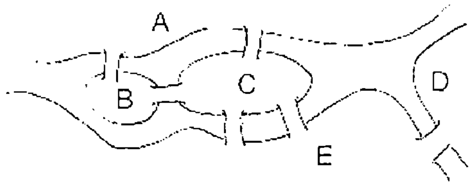
> Un parcours eulérien est possible si, et seulement si, deux régions au plus ont un nombre impair de ponts y conduisant. Si deux régions ont un nombre impair de ponts y conduisant, le parcours commencera par l'une de ces deux régions.

19 Géométrie « de situation » ou « de position », selon les traductions.

Le parcours de chaque pont de Königsberg, où à chacune des 4 régions conduit un nombre impair de ponts, est donc impossible. Quant à la détermination explicite d'une promenade, si elle est possible, Euler en dit, en conclusion de l'article :

> [...] qu'on néglige par la pensée, autant de fois qu'on peut le faire, 2 ponts conduisant d'une région à une autre ; par cette abstraction, le nombre des ponts se trouvera généralement de beaucoup réduit ; qu'on cherche alors, ce qui sera facile, la course demandée pour les ponts qui restent, et cela trouvé, les ponts enlevés par la pensée ne troubleront pas beaucoup le résultat obtenu, comme il est aisé de le voir avec un peu de réflexion ; et je crois inutile d'insister davantage pour trouver la marche qu'on devra suivre pour répondre à la question proposée.

Une première remarque est que d'une façon générale, on ne peut pas "négliger" deux ponts conduisant d'une région à une autre, deux "ponts parallèles", au risque de "déconnecter" les différentes parties de la promenade



Configuration avec ponts parallèles

Une promenade respectant les règles d'Euler est possible ici, en partant de D ou de E, deux régions auxquelles mène un nombre impair de ponts. Si on "néglige par la pensée" en les enlevant les ponts parallèles, c'est-à-dire les deux ponts entre C et E, le parcours n'est plus possible : il n'y a plus de chemin entre la région D et les régions A, B, C. Cela ne « troublera pas beaucoup le résultat obtenu » à la condition que l'on puisse et que l'on sache « recoller » les différentes promenades effectuées dans chacune des régions ainsi déconnectées. Pour reprendre les termes d'Euler, on peut « négliger par la pensée, autant de fois qu'on peut le faire, deux ponts conduisant d'une région à une autre », *dès lors que trois ponts au moins relient ces deux régions.*

Mais outre ce détail, il est surtout étonnant de constater dans cette conclusion qu'Euler ne voit pas de nécessité d'écrire une stratégie générale de résolution, ou bien un algorithme permettant d'exhiber un parcours répondant à la question qu'il se posait. Cela est-il réellement « aisé avec un peu de réflexion » ? Si la configuration comporte moins de quinze ponts (ce qui est le maximum dans les exemples donnés par Euler dans cet article), sûrement ; si les ponts sont une centaine, le « peu de réflexion » pourrait être quelque peu systématisé. Il semble à la lecture de l'article que ce problème est de l'ordre des "récréations mathématiques" et que ce n'était pas la résolution algorithmique du problème qui était visée par son auteur.

1.2 La preuve d'Euler

Comment prouver la *conjecture* : « Un parcours eulérien est possible si, et seulement si, deux régions au plus ont un nombre impair de ponts y conduisant » ?
Euler propose au cours de son article plusieurs pistes. Il évoque l'application d'une méthode exhaustive, mais la rejette immédiatement :

Mais ce mode de solution, à cause du si grand nombre de combinaisons, serait trop difficile et trop laborieux, et ne pourrait même plus s'appliquer dans les autres questions où il y aurait beaucoup plus de ponts.

Euler propose et montre en outre une propriété (que l'on retrouve pour les graphes) :

Je remarque d'abord que la somme des nombres de ponts écrits à côté de chaque lettre A, B, C, D,..., est double du nombre total des ponts ; la raison en est que dans le calcul qui donne tous les ponts conduisant à une région donnée, un pont quelconque est compté deux fois, c'est-à-dire que chaque pont est rapporté à l'une et l'autre des deux régions qu'il joint.

Dans un graphe non orienté, c'est-à-dire un ensemble de points, nommés sommets, reliés entre eux par des traits nommés arêtes, cette propriété est une propriété sur la somme des degrés des sommets d'un graphe. Elle s'énonce : *La somme des degrés des sommets d'un graphe est le double du nombre d'arêtes.* (Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont il est une extrémité).

De son théorème, Euler démontre un sens de l'équivalence, le sens classique c'est-à-dire : *Pour qu'un parcours eulérien soit possible il faut que 0 ou deux régions aient un nombre impair de ponts y conduisant.* Sa démonstration repose sur le nombre de lettres nécessaires dans une liste pour que celle-ci soit solution :

Si le nombre de ponts est p, la solution est une liste de $p + 1$ lettres majuscules répondant aux contraintes décrites précédemment. Si i_R ponts conduisent à une région R, le nombre de fois où son nom apparaîtra dans la liste est égal à :
- la moitié des ponts y conduisant plus 1 si ce nombre est impair, c'est-à-dire $(i_R+1)/2$
- la moitié s'il est pair, et que le parcours ne commence ou ne termine pas par cette région, i.e. $i_R/2$
- la moitié plus un sinon, c'est-à-dire $(i_R/2)+1$.

Sachant de plus que la somme des ponts conduisant à chaque région est égale à $2p$, on obtient la conclusion désirée, c'est-à-dire qu'il est nécessaire que 2 régions au plus soient de degré impair pour qu'un parcours soit envisageable. En effet on doit avoir :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{R \\ i_R \text{ pair}}} \frac{i_R}{2} + \sum_{\substack{R \\ i_R \text{ impair}}} \frac{i_R+1}{2} \leq p+1 \\ \sum i_R = 2p \end{cases}$$

ce qui n'est possible qu'à la condition où deux régions au plus aient un nombre impair de ponts y conduisant.

On peut remarquer aussi que la nécessité de "connexité" de la configuration de ponts et de régions n'est pas évoquée dans cette règle. Cette absence résulte sûrement de la genèse même de la question : implicitement on peut toujours se déplacer entre les différentes régions d'une même ville. On s'interroge alors sur l'existence d'une promenade eulérienne.

La connexité va donc ici de soi, ce qui ne sera pas le cas pour une "promenade" dans un graphe comme nous le verrons plus tard.

Reste maintenant la preuve de la réciproque, soit : si une configuration de ponts et de berges est telle que soit 0, soit 2 régions ont un nombre impair de ponts y conduisant, alors une promenade passant par tous les ponts est possible. À mon sens[20], cette preuve ne fait pas partie de l'article qu'Euler publie à ce moment-là. La preuve complète du problème de parcours dans un graphe « sans répétition et sans interruption » sera apportée par Carl Hierholzer (1873), plus de 100 ans plus tard, indépendamment de l'article d'Euler sur les ponts de Königsberg, dont il n'avait a priori pas connaissance. La représentation du problème des ponts de Königsberg par un graphe apparaîtra quant à elle en 1892 grâce à W.W. Rouse Ball.

1.3 Recherche de parcours hamiltonien

Maintenant que nous savons que les ponts de Königsberg ne peuvent être parcourus tous une et une seule fois, qu'en est-il d'un parcours des berges une et une seule fois ? Si nous traduisons cela en terme de graphes, *existe-t-il un chemin ou un circuit passant par tous les sommets d'un graphe* ? Ce type de parcours a été appelé hamiltonien en référence à Sir W. R. Hamilton, mathématicien, physicien et astronome, qui s'intéressa à un problème de ce type au 19$^{\text{ème}}$ siècle. Il proposait de chercher un chemin sur les arêtes d'un dodécaèdre passant une fois et une seule par chacun de ses sommets et revenant au sommet de départ.

Ce problème est difficile, on ne connaît pas de critères simples sur la structure du graphe pour déterminer l'existence d'un parcours hamiltonien.

2. Problème et résolution par la théorie des graphes

2.1 Éléments de théorie des graphes

Voici quelques éléments de théorie des graphes, qui permettront de modéliser puis de résoudre le problème des ponts de Königsberg, et plus généralement les problèmes de parcours eulériens.

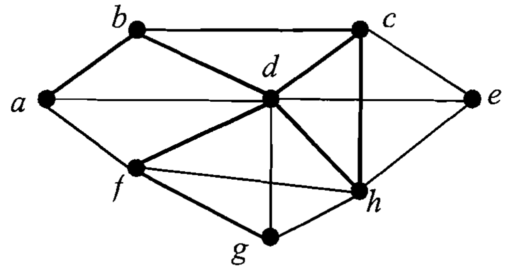
Un *graphe non orienté* est un ensemble de points, nommés *sommets*, chaque paire de sommets étant reliés ou non par des traits, nommés *arêtes*[21]. Cette définition est non formelle, mais elle permet de se représenter ce qu'est un graphe, représentation qui nous suffira pour le problème qui nous occupe. Le *degré d'un sommet* d'un graphe est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet. Deux sommets reliés par une arête sont dits *adjacents*.

Un *parcours* dans un graphe est une séquence de sommets du graphe reliés 2 à 2 par une arête. On parlera de sommet de départ pour le premier sommet de la séquence, sommet d'arrivée pour le dernier. Un *circuit* (ou parcours fermé) est un parcours pour lequel les sommets de départ et d'arrivée sont confondus, si ce n'est pas le cas on parlera de *parcours ouvert*. Un *parcours eulérien* dans un graphe est un parcours contenant toutes les arêtes du graphe une et une seule fois.

20 Mais cet avis est largement partagé par les mathématiciens, de Lucas (1882) à Charles Payan (aujourd'hui) en passant par Wilson (1986).

21 Si l'on relie les points par des flèches, ou *arcs*, alors le graphe est dit *graphe orienté*.

Le vocabulaire utilisé pour décrire les parcours dans les graphes varie selon les ouvrages, on trouvera par exemple les termes de chemin ou de cycle, plutôt que parcours et circuit.



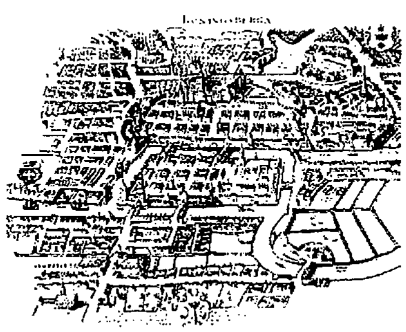
$\{a, b, d, c, h, d, f, g\}$ est un parcours dans le graphe.
Le sommet d est de degré 7.

Un graphe est dit *connexe* si pour tout couple de sommets du graphe il existe un parcours dans le graphe les reliant. Tout graphe peut être vu comme une union disjointe de composantes connexes, union réduite à un élément si le graphe est connexe.

2.2 Modélisation du problème

2.2.1 Les ponts de Königsberg

Reprenons maintenant le problème du parcours des ponts de Königsberg dont voici une représentation[22] :

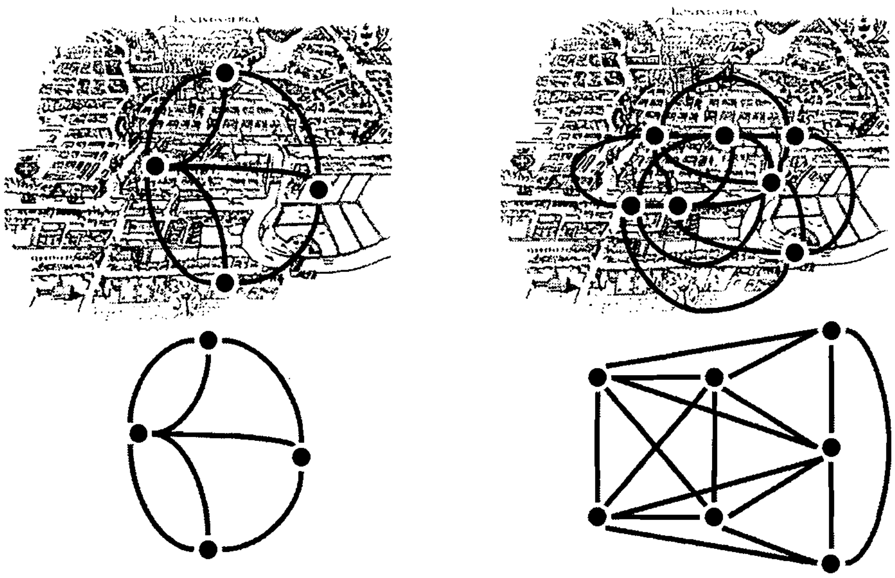


Il s'agit de déterminer s'il est possible de se promener dans cette ville en passant une et une seule fois par chacun des 7 ponts.

La première question qui peut se poser est celle de la *modélisation de la situation par un graphe.* On a donc une rivière, un ensemble de 7 ponts et 4 berges (une île, une presqu'île et deux berges proprement dites).

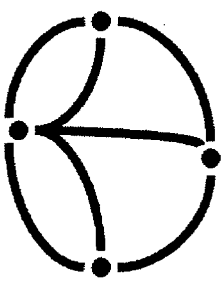
Deux représentations différentes sous forme de graphes sont possibles :
- Les sommets peuvent être les berges, et les arêtes les ponts.
- Les sommets peuvent être les ponts et les arêtes les berges communes.

22 Ce plan a été dessiné en 1652 par Merian Erber.

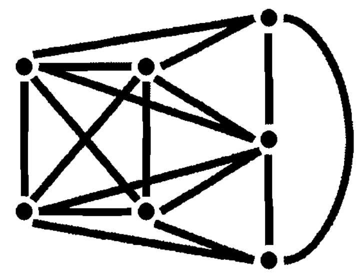


Reste maintenant à « traduire », puis à résoudre la question posée pour chacune de ces représentations.

Dans cette première représentation, que nous qualifierons *d'eulérienne*, trouver dans la ville un parcours passant par chaque pont une fois et une seule, revient à trouver dans le graphe un parcours passant par chaque arête une fois et une seule. La question devient donc : « Trouver un parcours eulérien dans le graphe. » La réponse est fournie par le théorème d'Euler : l'imparité des degrés des 4 sommets implique l'absence de chemin eulérien dans le graphe. En effet, si l'on considère un sommet du graphe de degré impair, il devra être un sommet de départ ou d'arrivée du parcours, ce qui n'est pas possible ici.



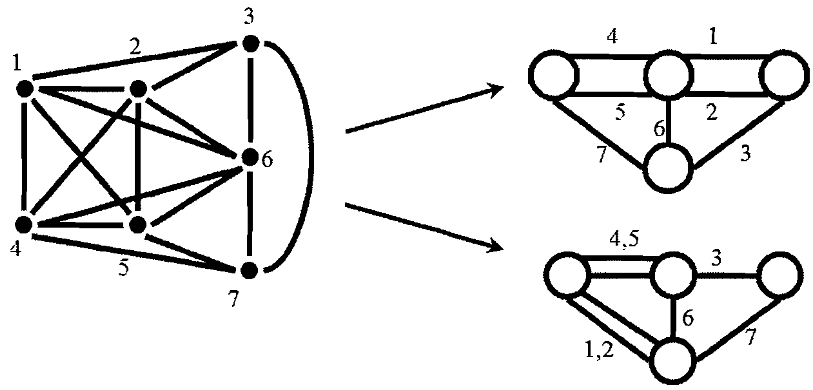
Dans cette seconde représentation[23], que nous nommerons *hamiltonienne*, les ponts étant les sommets, on recherche un parcours passant une fois et une seule par chacun des sommets du graphe. Ce problème est une version simplifiée du problème dit du voyageur de commerce[24], ou de recherche de parcours hamiltonien dans un graphe. On trouve facilement plusieurs parcours hamiltoniens dans ce graphe, mais ces chemins ne correspondent en fait pas à des parcours dans la ville.



En effet, même si cette dernière représentation peut permettre de répondre à un certain nombre de questions (par exemple y'a-t-il des ponts « parallèles » dans la ville ?[25]), elle ne permet pas de revenir à la situation de départ, ce « retour », n'étant pas unique.

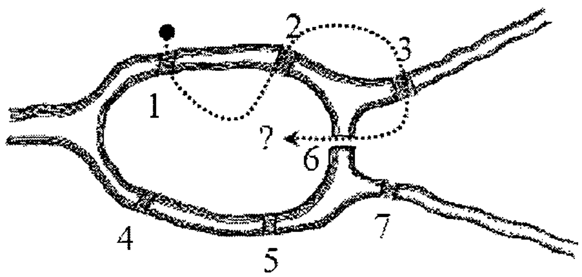
23 Notez que dans cette représentation, certaines arêtes n'ont pas été tracées. En effet, lorsque deux ponts sont « parallèles », on devrait avoir des arêtes doubles. Nous avons fait ce choix pour rester le plus proche des graphes effectivement tracés par les élèves.
24 Le problème dit du voyageur de commerce est de minimiser la longueur d'un parcours passant au moins une fois par chacun des sommets d'un graphe dont les arêtes ont des longueurs pouvant être différentes.
25 Il est possible de retrouver les ponts « parallèles » dans la ville en observant qu'en superposant deux sommets du graphe, toutes les arêtes de ces sommets « contractés » coïncident.

Voici deux exemples de tels « retours »[26] :

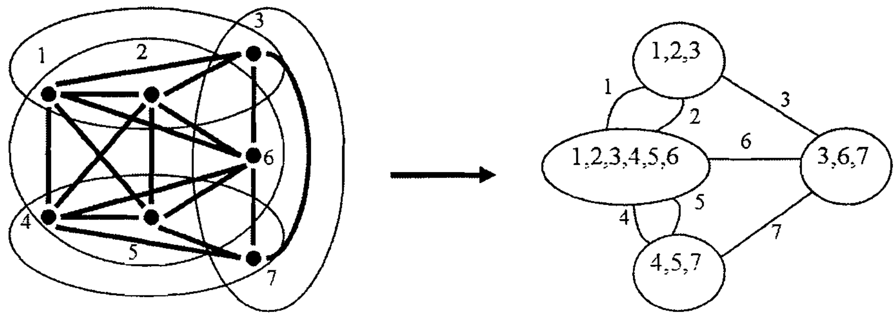


La transformation du graphe de gauche en un graphe de droite (obtenu ici par tâtonnement) est difficile. Il n'y a pas unicité des graphes obtenus, ce qui ne poserait pas de problème si ces graphes avaient les mêmes propriétés de parcours. Mais, *le premier graphe n'admet pas de parcours eulérien, alors que le second en admet un !*

Que se passe-t-il lorsque on trouve un parcours hamiltonien dans un graphe correspondant à une représentation « hamiltonienne » (graphe de gauche) ? Prenons par exemple le parcours 1236754. Ce parcours correspond bien à un parcours hamiltonien dans le graphe, les 7 sommets ayant été parcourus. C'est lorsque l'on revient au dessin de la ville de Königsberg que les questions se posent.



On peut commencer le parcours 1236, mais la suite n'est plus possible. La résolution du problème avec cette représentation demanderait un ajout d'informations consistant par exemple à entourer les ponts ayant des berges communes, puis à indiquer les ponts permettant le passage entre ces différentes berges, ce qui complique considérablement la lecture du graphe et peut finalement revenir à la première représentation.



Nous avons donc deux représentations sous forme de graphes, tout aussi « naturelles » l'une que l'autre, mais la première peut permettre l'aller-retour de la

26 Pour les deux graphes de droite, si l'on choisit de représenter chacune des sept arêtes par un sommet, et une arête entre deux sommets adjacents, on retrouve le graphe de gauche.

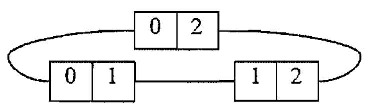
situation au modèle et la résolution du problème posé, alors que la seconde, ne permettra que difficilement l'un ou l'autre.

2.2.2 Les dominos

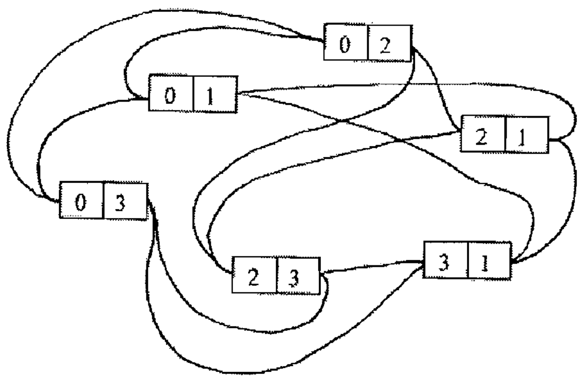
Dans le même ordre d'idée, il existe un problème appelant spontanément une représentation « hamiltonienne ». Ce problème est contenu dans le document d'accompagnement des programmes de la Terminale économique et sociale de l'option mathématiques[27]. Ce problème s'intitule « les dominos » et s'énonce ainsi :

> Peut-on aligner tous les pions d'un jeu de domino suivant la règle du domino ? On commencera par étudier la question avec un jeu dont les dominos comportent les chiffres jusqu'à *n*, pour *n*=2,3,4.

Prenons *n*=2 et cherchons à modéliser le problème. Une première idée pourrait être de dessiner les dominos[28] et de relier ceux qui peuvent aller ensemble. Comme chaque domino a un sens, on peut relier les côtés du domino qui « vont ensemble » :



Un alignement de dominos est une chaîne traversant un domino, passant par un trait, retraversant un domino, etc. Pour *n*=2 on se rend compte que la suite (0-1, 1-2, 2-0) correspond à un alignement correct des trois dominos. Pour *n*=3 le schéma se complique et on a du mal à trouver un chemin correspondant aux contraintes précédentes.

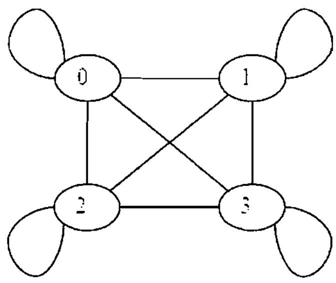


Il n'y a pas de perte d'informations avec ce dessin. Par contre, le nombre de « traits » devient important quand *n* grandit, et il devient vite difficile à lire et interpréter.

Une autre représentation consiste à utiliser un graphe où chaque sommet est un domino et chaque arête correspond à la possibilité d'aligner deux dominos. Ce graphe comprend moins d'informations que le schéma précédent, c'est une représentation « hamiltonienne » du problème qui pose le même type de difficulté que pour les ponts de Königsberg. C'est pourtant la représentation qui sera le plus présente si le problème des dominos est proposé à des élèves ayant une connaissance des graphes et sans indication de représentation.

27 L'option mathématique de la Terminale ES est le seul lieu où des éléments de théorie des graphes sont enseignés en France. Le document d'accompagnement des programmes est disponible à l'adresse suivante : http://eduscol.education.fr/D0015/graphes.pdf

28 Nous ne faisons pas figurer les « dominos doubles » qui peuvent toujours s'intercaler après coup dans l'alignement de dominos.



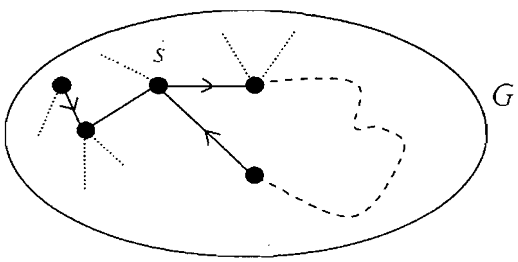
Si on représente chaque chiffre par un sommet, et chaque domino par une arête, le problème se ramène à la recherche d'un parcours eulérien dans le graphe ainsi construit. Voici, par exemple cette représentation pour n=3 (les boucles correspondent aux « dominos doubles »). Mais il faut bien voir que cette représentation n'est pas la plus « naturelle » qui soit. Il en en effet assez rare dans les problèmes classique de graphes que les sommets ne représentent pas des entités matérielles, alors que les arêtes en représentent. *Il n'existe à ma connaissance aucun autre problème présent dans les manuels de Terminale ES amenant à ce type de représentation.* Lorsque ce problème est posé de cette façon, sans indice particulier sur la manière de construire le graphe ou de traiter le problème, les professeurs que j'ai interrogés parlent tous de l'absence de cette représentation « eulérienne » du problème.

2.3 Preuve du théorème d'Euler

Il est relativement simple de prouver que, pour qu'un graphe connexe admette un parcours eulérien fermé, il faut que tous ses sommets soient de degré pair. La preuve de la réciproque est plus difficile, et peut être traitée par différentes approches (par récurrence ou maximalité). Nous proposons ici ces preuves, ainsi que des éléments intermédiaires de réflexion mathématique qui, s'ils ne sont pas exhaustifs, permettront, nous l'espérons, de prendre un certain recul sur ce problème.

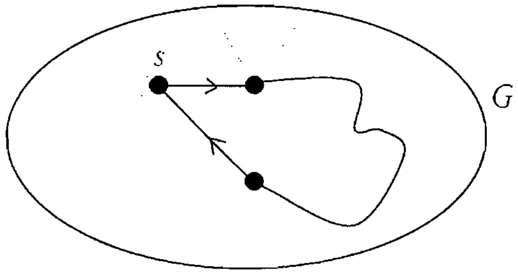
L'élément clé des parcours de graphes est la connexité. On ne peut pas parcourir l'ensemble des arêtes d'un graphe, si celui-ci n'est pas connexe[29] (autrement dit « en un seul morceau »). Cela semble aller de soi, pourtant dès qu'un graphe est « grand », la question de déterminer s'il est connexe ou non devient non triviale car la réponse n'est plus forcément visuelle. Cette nécessité de connexité du graphe apparaît aussi lors de la recherche effective d'un parcours eulérien. Lorsque l'on cherche un tel parcours, on cherche de façon intuitive à parcourir le graphe « sans le casser », c'est-à-dire sans déconnecter ses différentes parties. Cette idée de conservation de la connexité peut mener, mais de façon laborieuse, à un algorithme de parcours que nous ne donnerons pas ici.

Prenons un graphe connexe dont tous les sommets sont de degrés pairs. Une propriété qui nous sera indispensable par la suite est qu'un tel graphe contient au moins un chemin fermé. On peut s'imaginer se promener dans le graphe en partant d'un sommet quelconque. En entrant dans le sommet suivant, son degré étant au moins deux, on pourra en ressortir, et ainsi de suite jusqu'à revenir en un sommet s déjà rencontré.



29 Un parcours eulérien étant un parcours des arêtes du graphe, quelques sommets isolés ne changeront pas son existence.

Nous obtenons un chemin fermé dans le graphe en ne conservant que les arêtes parcourues « entre s et s ».



2.3.1 Le nombre de sommets de degré impair est pair

La somme des degrés des sommets d'un graphe quelconque est le double du nombre d'arêtes de ce graphe. La somme des degrés est donc un nombre pair. Nous pouvons en déduire que le nombre de sommets de degré impair d'un graphe est pair. Il n'existe en particulier pas de graphe ayant un seul sommet de degré impair.

2.3.2 Il faut que deux sommets au plus soient de degré impair

Soit G un graphe connexe. Démontrons qu'un parcours eulérien est possible seulement si deux sommets au plus (c'est-à-dire 0 ou 2 sommets) sont de degré impair.

Plaçons-nous en un sommet quelconque du graphe. Parcourir le graphe amènera à "entrer" puis "sortir" de ce sommet jusqu'à ce que toutes les arêtes partant de ce sommet soient parcourues. Si ce sommet est de degré impair, alors il faudra que ce sommet soit une extrémité du parcours sinon au moins une arête incidente à ce sommet ne sera pas suivie. Pour qu'un parcours eulérien existe dans le graphe, il est donc nécessaire que deux sommets au plus soient de degrés impairs. Si le graphe comporte plus de deux sommets de degré impair, alors aucun parcours eulérien ne sera possible.

Démontrons maintenant qu'il suffit de montrer la condition réciproque sur un graphe dont tous les sommets sont de degré pair pour le prouver pour un graphe ayant deux sommets de degré impair.

Supposons que nous ayons montré qu'un graphe ayant tous ses sommets de degré pair soit un graphe eulérien. Soit G un graphe connexe dont deux sommets, s_1 et s_2, sont de degré impair. Construisons une arête entre ces deux sommets. Leur degré est maintenant pair, ainsi que tous les autres sommets du graphe. Il existe un parcours eulérien fermé dans ce graphe, ce parcours étant fermé il peut commencer en n'importe quel sommet et terminer par l'un de ses voisins, il peut par exemple commencer en s_1 et terminer par l'arête s_2s_1. Il suffit maintenant de supprimer cette arête fictive entre s_1 et s_2 pour obtenir un parcours eulérien ouvert dans le graphe[30] qui commence en s_1 et se termine en s_2.

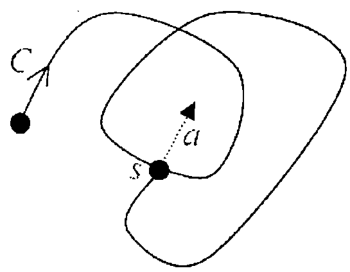
Démontrons maintenant que la condition de parité de tous les degrés d'un graphe suffit à garantir l'existence d'un chemin eulérien fermé dans le graphe.

30 Il se peut qu'il existe déjà une arête entre s_1 et s_2, il est donc possible que l'on transforme par cette opération le graphe simple en un graphe multiple, c'est-à-dire pouvant comporter plus d'une arête entre deux sommets. Mais les preuves proposées fonctionnent dans le cas de multigraphe, cela ne pose donc pas de difficulté particulière.

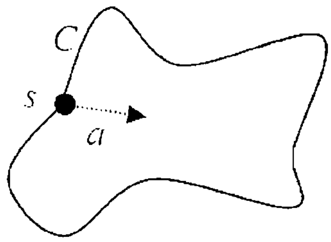
2.3.3 Une preuve par maximalité

Soit *G* un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair. Prenons *C* le plus grand parcours dans *G*. Si *C* contient toutes les arêtes de *G*, alors le problème est résolu. Sinon, *G* contient au moins une arête de plus que *C* et nous avons deux cas possibles :

- *C* est ouvert. Les sommets à l'extrémité de *C* sont donc de degré pair dans *G* par hypothèse, mais de degré impair dans *C*. Il existe donc dans G une arête incidente *a* à *s* qui n'a pas été parcourue dans *C*. On peut donc l'ajouter à la suite du parcours de *C* qui n'est donc pas le plus grand parcours dans *G*, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de maximalité de *C*.



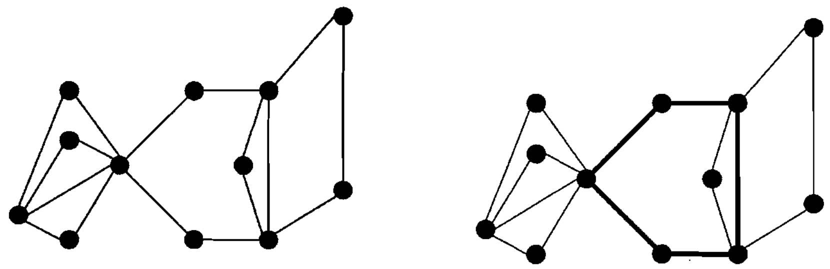
- *C* est fermé. Par connexité on peut commencer le parcours à partir d'un sommet quelconque. Par connexité de *G*, il existe dans *C* un sommet *s* interceptant une arête *a* non couverte par *C*. Choisissons ce sommet comme sommet de départ du parcours. Alors *C* commençant et se terminant en *s* peut être prolongé par l'arête *a*. *C* n'était donc pas le grand chemin dans *G*, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de maximalité de *C*.



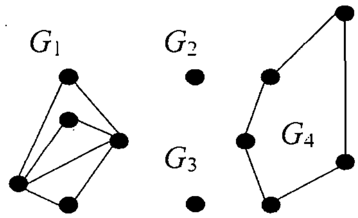
Le plus grand parcours *C* dans *G* contient donc toutes les arêtes de *G*, c'est un parcours eulérien.

2.3.4 Une preuve par récurrence

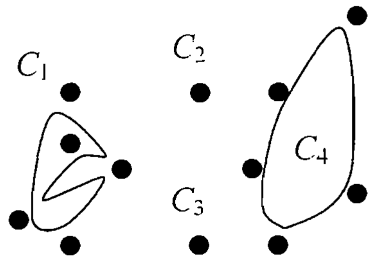
Démontrons, par récurrence sur le nombre d'arêtes, que tout graphe *G* connexe dont tous les sommets sont de degré pair admet un cycle eulérien. Si *G* ne contient pas d'arête alors il admet un cycle eulérien. Sinon tous les sommets de *G* sont de degré égal ou supérieur à 2. Il existe donc un parcours fermé *C* dans *G*.



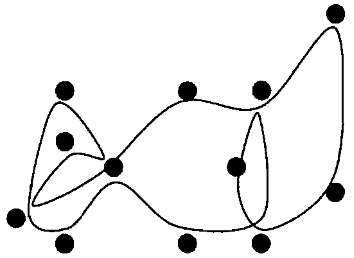
Ôtons les arêtes de *C* du graphe *G*. Nous obtenons un graphe partiel *G'* dont tous les sommets sont de degré pair et formé d'un ensemble de composantes connexes G_i.



Chaque composante connexe G_i de *G'* a un nombre d'arêtes strictement plus petit que celui de *G*. Tous les sommets de G_i sont de degré pair et, par induction, G_i contient un parcours fermé C_i contenant toutes les arêtes de G_i (notons que G_i et donc C_i peuvent ne contenir aucune arête).



Reste à reconstruire le graphe G à partir des ces composantes connexes. Pour cela parcourons C, lorsque nous rencontrons un sommet s appartenant à G_i ajoutons à notre parcours C le parcours C_i si celui-ci n'a pas déjà été parcouru. Nous obtenons alors un parcours eulérien fermé dans G ce qu'il nous fallait démontrer.



3. Construction et résultats de séances en classes

Nous analysons ici des séances de classe en cherchant à mettre en lumière les difficultés qui se sont posées sur les parcours eulériens dans un graphe. La façon dont nous avons proposé ces problèmes a été sensiblement la même dans les différents niveaux. Les élèves et les professeurs stagiaires ont travaillé par groupes de 3 ou 4. Les enseignants et nous-même sommes restés observateurs du travail des élèves, ne répondant qu'aux difficultés techniques qui se posaient, mais n'intervenant pas dans le processus de résolution du problème. Ces phases en groupe ont été suivies de mises en commun où les arguments des uns et des autres ont été débattus. Cette organisation convient particulièrement aux présentations de nouveaux concepts mathématiques. Une séquence en classe incluant une recherche sur les *parcours dans les musées* suivie de *parcours dans les graphes* nous parait une bonne introduction à la théorie des graphes.

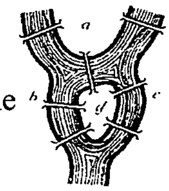
3.1 Un extrait de séance à l'IUFM

Nous avons proposé le problème des ponts de Königsberg à trois groupes de PLC1[31], en changeant le nom de la ville par son nom actuel. La séance comportait ensuite d'autres problèmes de théorie des graphes, comme la coloration et le couplage. Les étudiants, organisés en petits groupes, devaient pour chaque exercice préparer un transparent afin de pouvoir expliquer leur démarche aux autres groupes.

31 Année de préparation au concours de professeur de mathématique au collège et au lycée.

Ponts de Kaliningrad

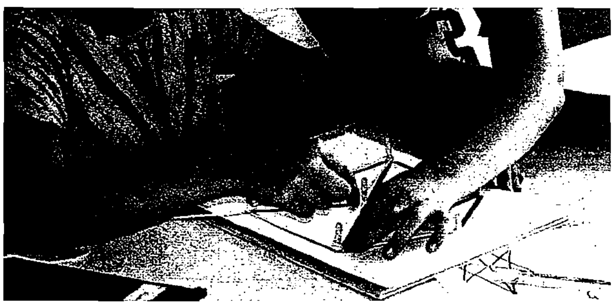
Les habitants souhaitent faire une promenade passant une et une seule fois par chaque pont. Vont-ils y parvenir ?



Ce problème étant relativement classique, nous ne nous attendions pas à ce qui s'est passé. Les étudiants avaient au moins, pour la grande majorité, une représentation du graphe comme « ensemble de points reliés ou non par des traits », et le nom de la séance (« introduction à la théorie des graphes ») laissait à entendre que l'on devait utiliser un graphe pour modéliser le problème. Tous les étudiants ont effectivement utilisé un graphe, mais plus d'un sur trois a utilisé une *représentation hamiltonienne*[32] du problème. La question de la modélisation, du choix de modèles est donc ici cruciale : on ne peut pas considérer que la représentation eulérienne « va de soi ». En construisant une séance attendant une modélisation par un graphe, il peut être bon de regarder quelles représentations peuvent apparaître, et comment passer de l'une à l'autre comme nous l'avons vu dans le paragraphe 2.2.

3.2 Un extrait de séance à l'école primaire en cycle II

Nous avons proposé la recherche de parcours eulériens dans les graphes à l'école primaire. Nous avons utilisé des plateaux de bois dans lesquels sont fixées des chevilles et sur lesquels peuvent être installées des feuilles perforées présentant divers graphes. La question posée était de savoir s'il était possible de suivre les dessins de graphes avec une ficelle sans passer deux fois sur le même trait. Des feuilles reproduisant ces graphes ont aussi été distribués pour que les élèves puissent prendre des notes facilement. Les élèves ont travaillé en groupes de trois ou quatre pendant environ trois quarts d'heure.

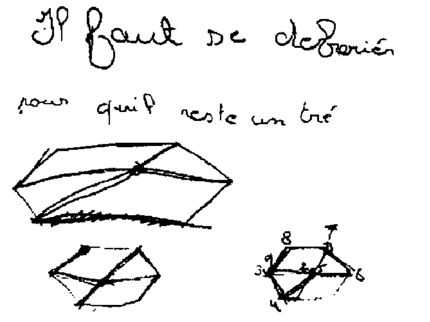


Dans un temps aussi court avec des élèves de cet âge, nous ne nous attendions certes pas à la résolution générale du problème. Les difficultés de manipulation n'ont finalement pas été importantes. Nous ne donnerons ici que les points forts.

Tous les groupes ont ressenti la nécessité de consigner leurs résultats par écrit, en inscrivant, sur les dessins de graphes, à partir de quels sommets il leur paraissait possible ou non de commencer un parcours eulérien. Puis, ces notations étant jugées insuffisantes, ils ont trouvé des méthodes pour noter les parcours réussis et vérifier que ceux-ci correspondaient bien à des parcours eulériens, par exemple en numérotant les sommets dans l'ordre de parcours, et en hachurant au fur et à mesure les arêtes parcourues. Dans l'un des groupes, une idée forte est émise : lors du parcours, il faut

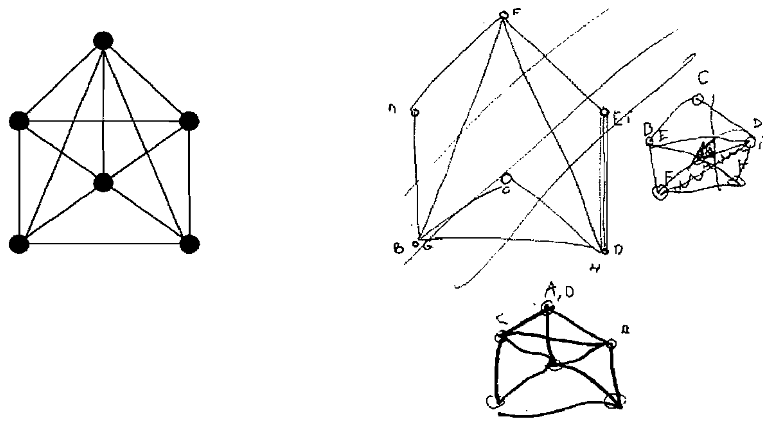
32 Voir paragraphe 2.2

toujours se débrouiller pour ne pas laisser d'arêtes isolées, pour qu'il reste des arêtes que l'on peut (ou pourra) parcourir.



« Il faut se débrouiller pour qu'il reste un trait. »

On a pu constater de réelles difficultés chez les élèves pour reproduire les graphes, lorsque les feuilles mises à leur disposition étaient épuisées.



Graphe et des tentatives de reproduction : l'ordre des lettres correspond à un ordre de parcours du graphe, convention que les élèves de ce groupe ont adopté d'eux-mêmes.

Il semble que, dans un premier temps au moins, les élèves n'ont pas de stratégie pour ce type de reproduction de figure.

Hormis cette difficulté, beaucoup d'idées ont été débattues dans les groupes et la séance a été riche de propositions et de conjectures. La principale de ces propositions a été que le point de départ du chemin était important dans la résolution du problème. Certains groupes ont formulé l'idée qu'à un parcours commençant au point A et finissant au point B, correspond un parcours « identique » commençant en B et terminant en A. La symétrie a été utilisée pour éviter de recommencer une recherche à partir d'un sommet dont on connaissait le parcours à partir d'un sommet symétrique (ou supposé tel). Dans un groupe, l'idée de parité a été proposée, mais le temps n'a pas permis de savoir si celle-ci était une « tentative creuse » ou l'amorce d'une vraie recherche. Dans les problèmes de mathématiques discrètes que nous proposons, nous avons toujours au moins un élève qui proposera l'idée « c'est parce que c'est pair ! » ou bien « c'est parce que c'est premier ! » comme si ces phrases étaient le sésame de la résolution de tout problème de mathématiques, même sans avoir « compté » quoi que ce soit. Dans le problème qui nous intéresse la parité est en effet la clef, reste à voir où et en quoi elle entre en jeu dans le problème. Il nous semble donc primordial que cette étape soit à la charge de l'élève et non induite par l'enseignant. Une simple réponse de type « pourquoi ? » de l'enseignant peut suffire à « relancer » le travail de l'élève.

3.3 Séances au lycée en option sciences

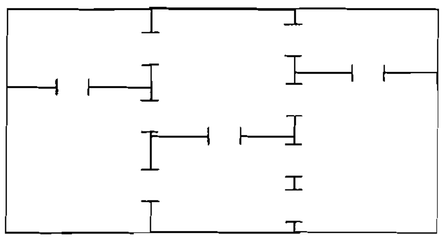
Nous avons proposé en option sciences au lycée de Cluses (Haute-Savoie) deux séances sur les parcours eulériens dans un graphe. Le but était de voir comment les élèves pourraient s'investir dans ce problème, et quelles seraient les conjectures et les preuves qu'ils pourraient établir. Le travail s'est effectué par groupes de trois ou quatre élèves. Après avoir présenté les consignes, nous exposerons succinctement le déroulement de séances. Nous vous proposons, en annexe de cet article, des fiches reprenant ces problèmes dont la présentation a été modifiée.

3.3.1 Présentation des problèmes

Dans chaque groupe étaient fournies successivement quatre feuilles contenant le plan d'un musée. L'ordre des feuilles et l'orientation des musées étaient différents selon les groupes pour éviter les « transmissions » d'un groupe à l'autre. Voici un exemple de feuille :

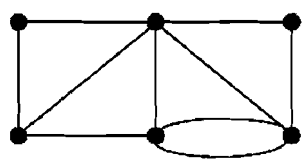
Au musée (1)

Voici le plan du musée de la ville d'Izis :



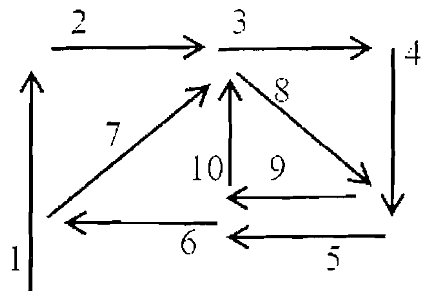
Un visiteur se promène et se rend compte qu'il peut choisir un itinéraire passant une seule fois par chaque pièce.
Mais peut-il trouver un chemin passant une seule fois par chacune des portes ?
Peut-il trouver un circuit passant une seule fois par chacune des portes ?
(Un circuit est un chemin qui revient à son point de départ.)

Ce problème est équivalent au problème de recherche eulérien dans un graphe dans lequel chaque pièce est un sommet et chaque porte entre deux salles une arête entre deux sommets. Pour le plan ci-dessus on obtient ce graphe :

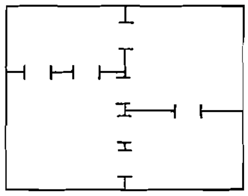


Seuls deux sommets du graphe étant de degré impair, il existe un chemin dans le graphe partant de l'un de ces sommets et arrivant à l'autre.

Voici un exemple[33] de tel parcours :



Un plan particulier a été distribué à l'ensemble des groupes. Ce plan correspond en fait au même graphe que celui des ponts de Königsberg. Il n'existe donc pas de parcours eulérien de ce musée.



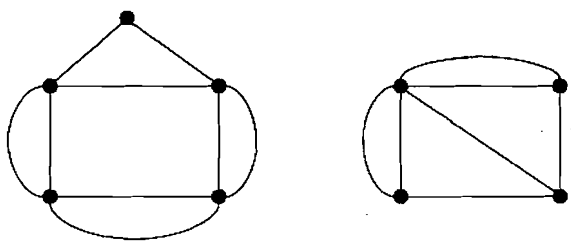
La présentation, dans un premier temps, de musées[34] plutôt que de graphes, nous semblait justifiée par deux raisons principales. L'idée d'entrée/sortie d'une pièce est « naturelle » et peut être réinvestie directement dans une preuve. Il n'y a pas nécessité d'introduire d'éléments nouveaux, même si le vocabulaire (en particulier le terme de circuit) doit être précisé.

Dans une deuxième séance, nous avons proposé le même travail avec des graphes. Nous voulions voir si les conjectures établies lors de la première séance pourraient être « traduites » et réinvesties lors de la seconde séance. Nous avons proposé deux « petits » graphes permettant de se familiariser avec ce nouvel objet, puis deux « grands graphes ». Vous remarquerez que les énoncés sont sensiblement les mêmes pour les musées et les graphes, le but étant un réinvestissement rapide des conjectures de la première séance.

Avec des graphes (1)

Voici deux graphes composés de points, appelés sommets, reliés ou non par des traits, appelés arêtes.

Pour chacun des graphes, existe-t-il un chemin, ou un circuit, qui passe une seule fois par chacune des arêtes ? Expliquez pourquoi.

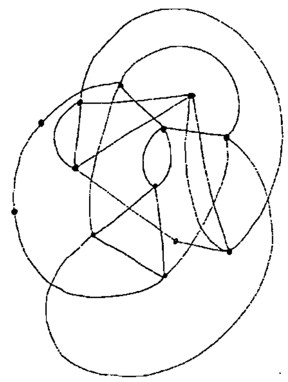


33 Ce parcours n'est pas unique, seuls les sommets de départ et d'arrivée sont fixés.

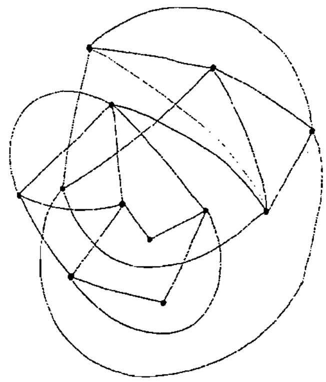
34 Nous avons choisi de présenter des musées pour lesquels le nombre de portes par pièces paraît plus réaliste que pour d'autres bâtiments.

L'énoncé n'a pas été répété sur les deuxième et troisième feuilles distribuées. La consigne orale était de répondre aux mêmes questions, toujours en prenant des notes sur les conjectures et les raisonnements.

Avec des graphes (2)



Avec des graphes (3)



Ces deux derniers graphes ont été choisis pour déstabiliser les conjectures émises dans les groupes. Le graphe (2) n'est pas connexe. Il n'existe donc pas de chemin dans le graphe bien que tous ses sommets soient de degré pair. Le graphe (3) comporte un isthme, c'est-à-dire une arête qui relie deux composantes connexes. Si l'isthme est parcouru avant que l'une des composantes connexe ne le soit complètement, alors l'ensemble des arêtes du graphe ne pourra être suivi, bien que cela soit possible, le graphe étant connexe, et deux sommets seulement étant de degré impair.

3.3.2 Les conjectures avec les musées

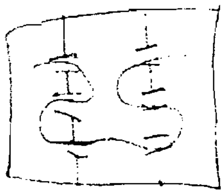
Nous avons demandé à chaque groupe d'écrire ses conjectures au fur et à mesure de la séance. Voici par exemple celles émises par un groupe, qui pour nous, attestent de la bonne dévolution du problème et de la richesse du travail fourni par les élèves :

> « Si toutes les pièces ont un nombre pair de portes, alors on peut faire un circuit passant par toutes les portes (mais pas de chemin qui ne revient pas à son point de départ).
> Si un musée comporte uniquement deux pièces ayant un nombre impair de portes (l'une sert à l'arrivée, l'autre de départ), on peut faire un chemin mais pas de circuit passant par toutes les portes.
> Si un musée comporte plus de deux pièces ayant un nombre impair de portes on ne peut ni faire de chemin, ni de circuit passant par toutes les portes. »

- Si toutes les pièces ont un nombre pair de portes, alors on peut faire un circuit passant par tt les portes (mais pas de chemin qui ne revient pas à son pt de départ)
- Si un musée comporte uniquement 2 pièces ayant 1 nbre impair de portes (l'une sert à l'arrivée, l'autre de départ) on peut faire un chemin mais pas de circuit passant par toutes les portes
- Si un musée comporte plus de 2 pièces ayant 1nbre impair de portes, on ne peut ni faire de chemin, ni de circuit passant par tt les portes.

Voici une synthèse des conjectures établies dans les différents groupes : « Le nombre de salles avec un nombre de portes impaires est pair », « s'il y a deux salles avec un nombre pair de portes alors on peut faire un chemin », « pour qu'un chemin existe il faut qu'il y ait plus de salles avec des portes paires que de salles avec des portes impaires », « plus il y a un nombre de salles au nombre de portes impaires important, plus il est difficile d'établir un chemin ». D'autres conjectures ont été établies dans les différents groupes, mais les élèves ont remarqué qu'elles étaient équivalentes aux précédentes.

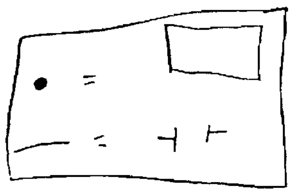
Des contradictions entre conjectures ont été remarquées rapidement par les élèves qui ont cherché comment les lever, le plus souvent en essayant de prouver que les conjectures contradictoires avec les leurs étaient fausses. Le temps a malheureusement manqué, pour qu'un débat sur les conjectures et sur leurs éventuelles contradictions, soit mené. Ce débat a en fait commencé à l'initiative de l'un des groupes qui a proposé un contre-exemple à la conjecture « pour qu'un chemin existe il faut qu'il y ait plus de salles avec des portes paires que de salles avec des portes impaires » :



Ce contre-exemple comprend deux salles avec un nombre impair de portes et une seule salle avec un nombre pair de portes, et pourtant il existe un chemin.

3.3.3 Les conjectures avec les graphes

Lors de la séance suivante, les conjectures sur les musées ont été transcrites pour les graphes en un temps record dans quatre groupes. Un cinquième groupe n'a pas fait le rapprochement. Voilà un exemple de légende (sommet pour pièce, arête pour porte) qui a été ajouté dans un groupe :



Le graphe non connexe a été vu par les élèves comme un « piège ». Ils ont pour la plupart considéré la question comme « existe-t-il un chemin (ou un circuit) dans chacune des composantes connexes du graphe considéré », et ont donc considéré que le premier grand graphe comportait deux circuits. Certains sont allés plus loin dans cette interprétation de l'énoncé : on ne peut pas se satisfaire du décompte global du nombre d'arêtes par sommet. En effet, si le graphe possède plusieurs composantes connexes, il faut faire le décompte du nombre d'arêtes par sommet pour chacun de ces « morceaux » de graphe. Sinon on pourrait avoir plus de deux sommets de degré impair et pourtant des chemins dans chacune des composantes connexes du graphe.

Quelques élèves ont affirmé que les sommets de degré deux ne « servaient à rien », qu'on pouvait les enlever ou en ajouter autant que l'on voulait sur chacune des arêtes sans que le parcours ne soit modifié.

Le graphe (3) n'a pas déstabilisé les élèves, certains ont emprunté l'isthme « trop tôt » dans leur recherche de parcours, mais après un « retour arrière » ils ont surmonté la difficulté sans qu'elle ne remette en cause leur stratégie.

3.3.4 Argumentations des élèves et bilan des séances

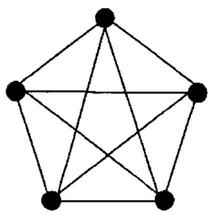
Plusieurs arguments ont été proposés par les élèves pour défendre leurs conjectures. L'un d'eux a par exemple défendu la nécessité de parité ainsi : « si tu entres, tu dois sortir, donc sauf au début ou à la fin, le nombre de portes par pièces doit être pair ». Cet argument a été débattu et accepté dans tous les groupes.

Lors de la première mise en commun des conjectures, seul un groupe a proposé l'idée de parité du nombre de salles avec des portes impaires. Son argument était que chaque porte est « comptée » deux fois, une pour chaque pièce où elle mène. Si on ajoute une porte entre deux pièces, ces deux pièces vont changer de parité ; de même si on enlève une porte entre deux pièces, les deux pièces vont changer de parité, donc le nombre de salles avec des portes impaires est pair. (Cet argument est en fait le cœur d'une induction à laquelle il manque un cas de base).

Le fait que la condition de parité des degrés suffise à garantir l'existence d'un chemin dans le graphe n'a pas été argumenté, ni même questionné. Loin d'être déstabilisés par nos tentatives d'introduction de graphes non connexes ou avec isthme, certains élèves ont ajouté la connexité dans leurs hypothèses, d'autres ont modifié la question devenue « existe-t-il un chemin dans chaque composante connexe du graphe ».

Une différence notoire entre les deux séances a été l'utilisation de dessins pour se convaincre ou convaincre ses voisins de la véracité ou non d'une conjecture. Les dessins de musées ont été relativement peu nombreux, alors que les élèves ont couvert des feuilles entières de graphes. La facilité de la recherche d'exemples et de contre-exemples grâce aux graphes me semble prouvée par le nombre impressionnant de graphes dessinés par les élèves par rapport aux quelques musées.

L'équivalence entre la représentation sous forme de musées ou sous forme de graphes est devenue une évidence dans les groupes. Pourtant les musées sont représentés par des graphes particuliers, les graphes planaires (c'est-à-dire des graphes qui peuvent se dessiner sans que leurs arêtes ne se croisent). Voulant leur faire remarquer que cette équivalence posait question, je demandai aux élèves à quel musée correspondait ce graphe, non planaire :



La réponse a été rapide : « c'est un musée avec des tunnels ou des ponts » !

Si ces séances étaient à refaire, nous proposerions des graphes plus « grands », plus complexes, car visiblement les procédures des élèves n'ont pas été remises en cause.

Conclusion

La recherche de parcours eulériens dans un graphe, ou les tracés de figures sans lever le stylo sont devenus des problèmes classiques dans l'enseignement et en vulgarisation des mathématiques. Pourtant des questions nous semblaient rester ouvertes : « Comment ne pas masquer l'importance du choix du graphe pour modéliser les problèmes ? », « Quel travail de modélisation proposer ? », « Comment proposer le problème pour que condition nécessaire et condition suffisante soient différenciées pour les élèves ? ». Pour cette dernière question nous pouvons imaginer que ce problème n'est pas le plus idéal pour faire travailler cette différence. Mais que se passerait-il pour des élèves ayant auparavant suivi des activités portant sur un travail entre condition nécessaire et condition suffisante ? Une autre piste serait de proposer ce problème en demandant une résolution algorithmique. On pourrait par exemple demander aux élèves d'écrire une procédure pour trouver un chemin eulérien dans un graphe qu'ils ne peuvent pas voir, un autre élève appliquant cette procédure sur des graphes bien choisis.

Une activité autour de la recherche de parcours eulériens dans les graphes, tel que l'ensemble proposé en annexe, nous parait bien adaptée à une introduction des graphes en classe. Nous proposons dans les pages suivantes, des fiches avec des dessins de musées et graphes pour les élèves.

Bibliographie

BALMAND L. (1998) *Etude d'un objet combinatoire : Le graphe. Une analyse écologique et rapports d'enseignants à l'objet mathématique.* Mémoire de DEA. Université Joseph Fourier, Grenoble et Lyon 1.

COGIS O., ROBERT C. (2003) *Théorie des graphes : Au-delà des ponts de Königsberg – Problèmes, théorèmes, algorithmes,* Vuibert.

COUPY E. (1851) Solution d'un problème appartenant à la géométrie de situation par Euler, *Nouvelles annales de mathématiques*, tome 10, 1851, pp 106-119.

EULER L. (1736) Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 8, pp 128-140.

FLEURY G., COGIS O. (2002) *Graphes à deux voix*, APMEP.

GRENIER D., PAYAN C. (1998) Spécificité de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 18(1) pp 59-100.

HIERHOLZER C. (1873) Über die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren, *Mathematische Annalen 6*, pp 30-32.

LUCAS É. (1882) *Récréations mathématiques - Tome 1 - Les traversées. Les ponts. Les labyrinthes*, Gauthier-Villars, Paris. (Ce document est accessible sur le site de la Bibliothèque Nationale de France à l'adresse suivante : http://gallica.bnf.fr/)

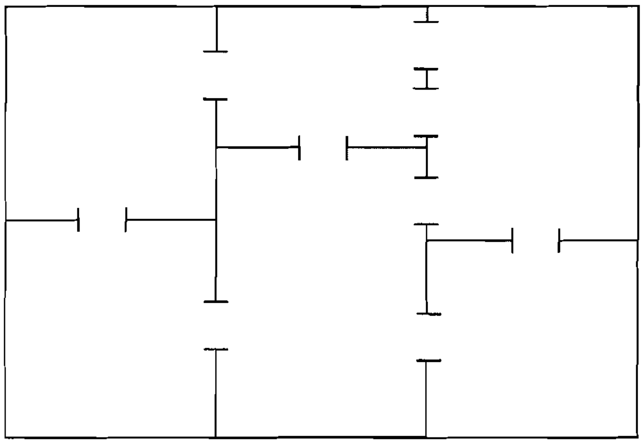
ROLLAND Julien (1999) *Pertinence des mathématiques discrètes pour l'apprentissage de la modélisation et de l'implication* Thèse de l'université J. Fourier, Grenoble.

ROUSE BALL W.W. (1892) *Mathematical recreations and problems of Past and Present times*, Macmillan, Londres.

WILSON R. J. (1986) An eulerian trail through Königsberg, *Journal of graph theory*, Vol. 10, pp 265-275.

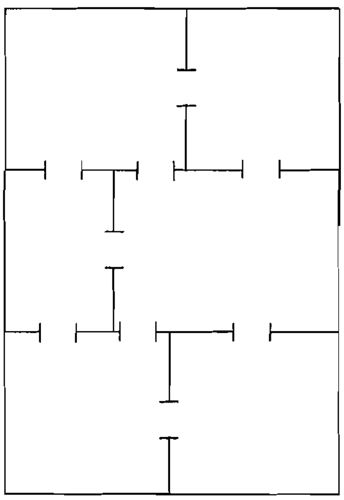
AU MUSÉE

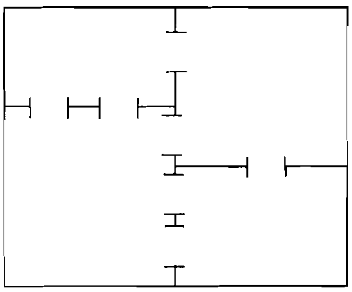
Voici le plan d'un musée :

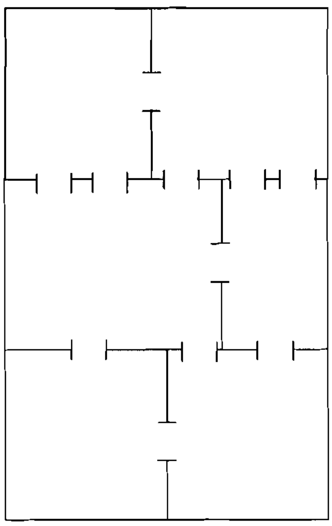


Un visiteur se promène et se rend compte qu'il peut choisir un itinéraire passant par chaque pièce.
Mais peut-il trouver un chemin passant une seule fois par chacune des portes ?
Peut-il trouver un circuit[35] passant une seule fois par chacune des portes ?

Et dans ces musées-là ?



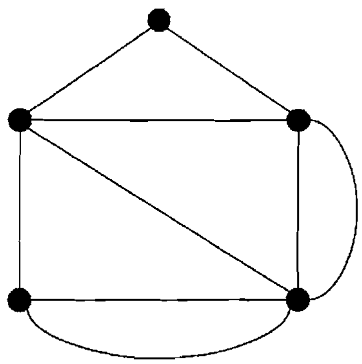


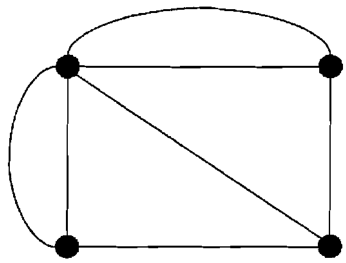


35 Un circuit est un chemin qui revient à son point de départ.

Avec des graphes

Voici deux graphes composés de points, appelés sommets, reliés ou non par des traits, appelés arêtes.
Pour chacun des graphes, existe-t-il un chemin, ou un circuit, qui passe une seule fois par chacune des arêtes ? Expliquez pourquoi.

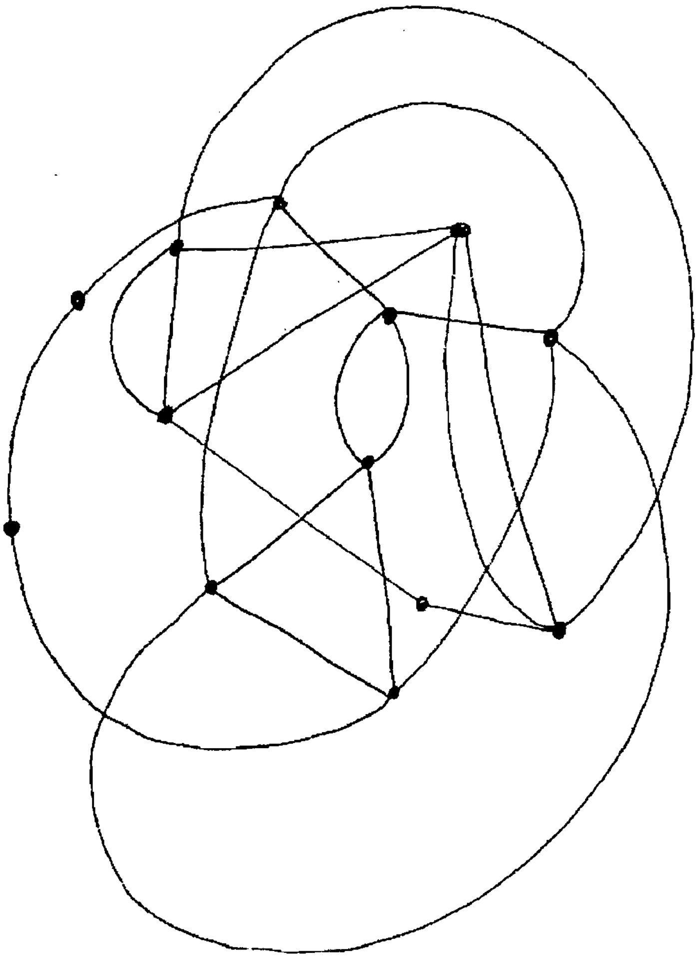




À quelle(s) condition(s) peut-on tracer un graphe en passant une et une seule fois par chacune de ses arêtes ?

Avec des graphes

Existe-t-il un chemin, ou un circuit, qui passe une seule fois par chacune des arêtes de ce graphe ? Expliquez pourquoi.



Avec des graphes

Existe-t-il un chemin, ou un circuit, qui passe une seule fois par chacune des arêtes de ce graphe ? Expliquez pourquoi.