LA MULTIPRÉSENTATION,

UN DISPOSITIF D'AIDE A LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES[1]

Jean Berky NGUALA
IREM des Antilles et de la Guyane, section Guadeloupe
Equipe DIDIREM Paris 7

Résoudre des problèmes est une partie délicate et complexe de l'apprentissage des mathématiques. Dans le contexte de l'école primaire, au cycle 3, le domaine « Exploitation de données numériques » recouvre l'ensemble des problèmes dans lesquels les nombres et le calcul interviennent comme outils dans le traitement. Dans ma pratique[2], je constate que les performances des élèves restent faibles. Les résultats des évaluations nationales, dans cette partie, montrent des notes catastrophiques. Par exemple, pendant l'évaluation 6ème en 2000 en Guadeloupe, il y a eu 27 % de réussite en résolution de problèmes numériques. Ces échecs à répétition, ainsi que la place centrale qu'occupe la résolution de problèmes dans l'appropriation des connaissances mathématiques, nous poussent à réfléchir davantage aux aides à apporter aux élèves pour leur permettre de résoudre des problèmes.

Cet article se réfère d'une part à des aides existantes et à l'aide à la représentation des problèmes comme la définit Julo (1995, 2002) en développant des visions de psychologie cognitive et, d'autre part, sur le thème choisi, aux champs conceptuels de Vergnaud (1991).
Nous parlerons d'abord des aides. Puis, nous présenterons notre expérimentation (hypothèses, analyses préalables…). Enfin nous analyserons des copies des élèves.

Les aides à la résolution de problèmes

Il existe des aides pédagogiques centrées sur le traitement de l'information, sur les questions, sur la production d'énoncés de problèmes, sur la lecture compréhension des énoncés, etc.

---

[1] Cet article est un élément d'un travail de recherche en cours, sous la direction de Catherine Houdement et Bernard Parzysz (Equipe DIDIREM Paris 7). Il décrit une expérimentation dont les conclusions pourraient enrichir la réflexion des professeurs sur l'aide à la résolution de problèmes.

[2] Jean Berky NGUALA est enseignant spécialisé du 1er degré, formateur en formation continue en Guadeloupe.

Sur le traitement d'informations, les activités sont diverses ; il s'agit notamment de chercher des informations sur des supports variés (cartes, tableaux, etc.), de trier des informations, de repérer l'information manquante pour pouvoir résoudre un problème, de déduire ou d'inventer les informations, de les mettre en ordre dans un énoncé de problème ou de supprimer les données inutiles. Les activités sur les questions regroupent : le tri des questions (celles auxquelles on ne peut pas répondre, celles où la réponse est donnée et celles qui nécessitent un calcul ou des calculs), l'identification de la question d'un énoncé de problème sur une liste, l'invention d'une ou plusieurs questions pour un même énoncé de problème, etc. Enfin, la production d'énoncés de problèmes est souvent proposée comme aide : produire un énoncé de problème en utilisant des étiquettes à remettre en ordre, reconstituer plusieurs énoncés de problèmes à partir de leurs éléments séparés et mélangés ou en rédiger un. Ces aides sont, en général, issues de l'intelligence artificielle et transposées sans étude didactique ou cognitive. Houdement (1999), par exemple, a mis en évidence leur limite du point de vue de l'anticipation mathématique. Concernant d'autres pistes d'aides, Brissiaud (1984), Fayol (1990) et Bolon (1992) proposent la formulation et la re-formulation des énoncés de problèmes. Vergnaud (1981, 1997) regroupe les problèmes en différents « ensembles » ou classes[3] ; il encourage l'enseignement qui explicite et qui favorise l'utilisation de formes symboliques susceptibles d'une part, de clarifier les ressemblances et les différences entre problèmes et, d'autre part, de faciliter l'identification des relations et des raisonnements en jeu dans chaque catégorie.

Nouvelle aide envisagée

Julo (1995, 2000, 2002) a développé des aides, qu'il appelle aides à la représentation, qui permettent à l'élève de ne pas stagner trop longtemps dans des impasses et de parvenir à la réussite. Elles ne contiennent pas d'indices sur la solution, n'orientent pas vers une procédure de résolution et ne suggèrent pas une modélisation du problème posé. Nous exploiterons la multiprésentation que Julo (1995) a définie comme le fait de proposer simultanément trois problèmes ayant les mêmes caractéristiques[4] - même structure mathématique, mêmes nombres (même réponse numérique), même syntaxe, les informations arrivant dans le même ordre avec la même organisation énonciative -. Seuls les contextes[5] varient. Il a travaillé sur la proportionnalité avec des élèves en difficulté scolaire au collège et de jeunes apprentis. Ils avaient déjà appris la notion au moment de l'expérimentation. Le principal intérêt que Julo (1995) trouve dans la multiprésentation, c'est d'être très peu directive au niveau du processus de résolution lui-même et de ne concerner à l'évidence que l'activité de représentation. Que signifie se représenter un problème ? Quel est le contenu de la représentation ? Comment se construit la représentation de problème ? C'est ce que nous allons évoquer ensuite.

Se représenter un problème

La caractéristique première du terme « représentation » est certainement sa polysémie (Denis, 1994). Giordan et de Vecchi (1994) en ont relevé différents qualificatifs et plusieurs synonymes. Pour eux, la représentation est une construction intellectuelle momentanée, qui permet de donner du sens à une situation, en utilisant les connaissances stockées en mémoire et/ou les données issues de l'environnement, dans le but *« d'attribuer*

[3] Voir page 49 l'exemple correspondant à la proportionnalité simple.

[4] Nous dirons que ces trois problèmes sont « ressemblants ».

[5] Le contexte d'un problème est son « habillage », ce qui est donné dans le problème. Voir le point suivant.

une signification d'ensemble aux éléments issus de l'analyse perceptive ». Pour Richard (1990), construire une représentation, c'est comprendre. Il distingue plusieurs processus de construction des représentations qui sont autant de sens du mot « comprendre » :

- la construction d'une représentation par particularisation d'un schéma[6],
- la construction d'une structure conceptuelle,
- la construction d'un modèle particularisé de situation,
- la construction d'une interprétation par analogie avec une situation connue.

Sur le plan cognitif, notre mental crée des modèles de son environnement dont il infère par la suite des comportements (Richard, 1984).

Comprendre quelque chose, d'après Julo (1995), ce serait d'une manière ou d'une autre, construire une représentation de cette chose. Cette construction est inséparable de la représentation. D'après lui, il existe nécessairement des liens étroits et une dynamique commune entre la manière dont on cherche la solution et la manière dont on interprète le problème, entre les procédures et les stratégies que l'on élabore et la représentation que l'on se construit, entre les connaissances qui vont servir à agir et celles qui vont servir à comprendre le problème. La représentation du problème est donc le résultat d'une véritable activité mentale mettant en œuvre tout un ensemble de processus chargés de traiter les informations du problème. Sa spécificité est dans l'existence d'une tâche, associée à l'objet que l'on doit se représenter.

Le contexte sémantique est l'ensemble de ce qui est donné dans le problème. Ses différents supports possibles sont les situations vécues dans le cadre scolaire, l'évocation de la réalité ou les mathématiques (quand il s'agit d'un problème qui relève des mathématiques). Pour construire la représentation du problème, il faut interpréter son contexte sémantique. Nous parlerons d'effet de contexte pour désigner l'influence que peut avoir une variation de contexte sémantique sur la résolution de problème.

Julo distingue, dans la représentation de problème, trois processus : le processus d'interprétation et de sélection, le processus de structuration (la représentation forme un tout cohérent qui se structure) et le processus d'opérationnalisation (qui donne un passage à une action effective, notamment dans les calculs et tracés, ou mentale pendant les déductions). La structuration est renforcée lorsqu'on demande aux élèves de verbaliser leurs actions de résolution, de se représenter le problème sous forme d'images mentales. Julo développe l'idée que ces processus sont simultanés et interagissent. Nous notons qu'il ne s'intéresse pas uniquement aux dessins accompagnant le problème, mais bien plus aux représentations mentales qui peuvent être relayées par des représentations écrites (outils de modélisation).

Dans cet article, nous nous appuyons sur les représentations au sens de Julo, conformément à ses hypothèses sur la construction d'une mémoire des problèmes qui nous permettrait de savoir traiter un nouveau problème, proche de ceux gardés en mémoire. C'est ce que nous développons dans le paragraphe suivant.

Les schémas de problèmes

Julo (1995, 2002) souligne l'existence de processus spécifiques, processus cognitifs, composés d'un versant **opératoire** et d'un versant **représentationnel** appelé schémas de problèmes, à la base de la résolution de problèmes. Ces schémas, qui renvoient à la notion

[6] Ici le mot schéma désigne un dessin générique comportant les relations essentielles entre les différents éléments du problème ; il n'a donc pas le même sens que celui que lui donne Julo dans « schémas de problèmes » comme cela est précisé dans le paragraphe suivant.

d'invariant opératoire, sont des structures de la représentation qui permettent à l'élève de reconnaître qu'un tel problème relève d'un modèle déjà rencontré et de s'engager rapidement dans une procédure de résolution. Ils permettent donc de mobiliser ou pas les connaissances pour traiter les situations proposées. Cet accès aux connaissances et à l'instanciation des procédures en résolution de problèmes n'est pas évident, même chez les élèves qui en ont une bonne compréhension et une bonne pratique. Julo privilégie la diversité des formes d'organisations en mémoire afin d'améliorer la maîtrise d'un ensemble donné de problèmes. L'élève se crée, progressivement, lui-même, ses propres schémas de problèmes. Vergnaud (1997) utilise des représentations symboliques comme une aide à la catégorisation, un support pour l'activité cognitive et un support pour l'élaboration de la procédure de résolution. Julo (2002) y voit un avantage et un risque dès lors qu'on suppose que ces schémas de problèmes pourraient être formés selon une logique très différente de celle mise en œuvre dans un tel apprentissage. Pour lui, ce support devrait être provisoire pour permettre à l'élève de construire ses propres représentations mentales et d'élaborer des procédures indépendantes de celles qui sont induites par ces schémas.

Notre hypothèse de travail, suivant en cela Julo, est que les élèves puissent construire, eux-mêmes, les éléments qu'ils pourront réutiliser dans d'autres problèmes, c'est-à-dire une mémoire de « schémas de problèmes ». L'apprentissage à la résolution de problèmes passe par l'apprentissage de schémas de problèmes.

Notre expérimentation

Des hypothèses

L'objectif principal de l'expérimentation est d'évaluer l'apport de la multiprésentation, à propos du domaine mathématique de la proportionnalité.

Dans cet article, nous relatons une expérimentation au cours moyen de l'école primaire sur la 4ème proportionnelle. Notre choix se porte donc sur la pertinence de la multiprésentation et nous émettons l'hypothèse suivante : la variation de contexte influe favorablement[7] sur les performances de résolution de problèmes ayant les mêmes caractéristiques, chez certains élèves parmi ceux qui ont le plus de difficultés dans le domaine considéré. Ces élèves interprètent mieux la nature[8] de la tâche demandée en présence de trois contextes du même problème.

Nous pensons que la conjonction de trois problèmes « ressemblants » constitue un milieu pour que l'élève reçoive une rétroaction (Margolinas, 1993). Nous cherchons à provoquer une interaction entre l'élève et la série d'énoncés de problèmes similaires. Nous supposons que ces trois problèmes, présentés simultanément à l'élève, l'aident à la validation des solutions et que le problème de la série qui est le mieux compris - celui relatif au contexte le plus familier par exemple - l'aide à valider la résolution du problème le moins compris.

Composition de groupes

Pour cette première expérimentation (2000-2001), nous avons travaillé avec 3 CM1 et 3 CM2 d'effectifs respectifs 25, 24, 23, 24, 24 et 22 élèves, soit 142 élèves au total.

---

[7] Le fait de résoudre simultanément trois problèmes ressemblants permet à certains élèves de mieux sélectionner des informations de certains énoncés et donc de mieux les résoudre.

[8] Ici, le calcul de la valeur de 4ème proportionnelle est la nature de la tâche que nous avons demandée aux élèves.

L'expérimentation consiste en la passation de trois épreuves différentes par trois groupes d'élèves différents (pour pouvoir faire des comparaisons sur leur réussite), mais suffisamment proches quant à leur niveau.

La première épreuve consiste en une multiprésentation avec choix : les enfants ont à résoudre un seul problème parmi trois. La consigne donnée étant : « *On te propose trois problèmes. Tu les lis et tu choisis celui que tu veux résoudre.* »
La deuxième épreuve est une présentation simple : chaque élève n'a qu'un problème à résoudre. La troisième épreuve est une multiprésentation sans choix : les élèves doivent résoudre les trois problèmes.

Cette expérimentation nécessite 3 groupes équilibrés de niveau « presque similaire ». Nous avons déterminé ce niveau en tenant compte des notes des contrôles continus, en classe, en résolution de problèmes, surtout en recherche de la $4^{ème}$ proportionnelle[9]. Nous avons donc trois groupes pour les trois modalités et dans chacun d'entre eux, il y a des élèves des trois niveaux A, B et C. Les trois groupes comptent respectivement 49, 48 et 45 élèves.

Choix des problèmes et des nombres

Selon Vergnaud (1991, 1997), il existe quatre structures de problème liées à la proportionnalité simple.

Si M_1 et M_2 sont les deux grandeurs en présence (le nombre d'objets et les prix correspondants, par exemple.), il existe un réel k et donc une fonction linéaire f, définie par $x \rightarrow kx$, qui les met en relation.

M_1	M_2
x	f(x)
y	f(y)

Tableau 1 : relation quaternaire en proportionnalité simple.

Ces structures de problème sont les suivantes :
- Celle qui correspond à la multiplication : x = 1, f(1) et y sont donnés. On cherche f(y).
- Celle qui correspond à la division partition : x = 1, y et f(y) sont donnés. On cherche f(1).
- Celle qui correspond à la division quotition : x = 1, f(1) et f(y) sont donnés. On cherche y.
- Celle qui correspond à la quatrième proportionnelle : x et f(x) sont donnés, x est différent de 1. Suivant la troisième donnée, on peut chercher y ou f(y).

Le choix des problèmes

Nous avons choisi des énoncés de problèmes de proportionnalité simple, sans grande difficulté lexicale, écrits avec des phrases courtes, dans le cadre arithmétique avec des nombres entiers petits. De plus, les deux grandeurs proportionnelles en jeu sont de nature différente. La tâche demandée à l'élève est de calculer la valeur de la $4^{ème}$ proportionnelle. Nous rappelons que ce sont trois problèmes « ressemblants ».

[9] Si N est la note de l'élève, celui-ci est affecté dans le niveau A si $N \geq 14$, dans le niveau B si $10 \leq N < 14$ et dans le niveau C sinon.

1. L'anniversaire de Stéphanie (problème S_1)

Stéphanie prépare une boisson avec du sucre et des oranges pour son anniversaire.

Pour 7 oranges, il faut 12 morceaux de sucre. Elle utilise 35 oranges.

Combien lui faut-il de morceaux de sucre pour réussir son mélange ?

2. Les briques de Léa (problème S_2)

Léa empile des briques identiques d'un jeu de construction.

Avec 7 briques, on obtient une hauteur de 12 cm. Léa empile 35 briques.

Quelle hauteur obtient-elle ?

3. Les pains au chocolat de Pierre (problème S_3)

Pierre veut acheter des pains au chocolat dans une pâtisserie.

7 pains au chocolat coûtent 12 francs. Pierre veut 35 pains au chocolat.

Combien va-t-il payer ?

A priori, nous pensons que selon la familiarité de l'élève avec le contexte, le problème peut lui sembler plus ou moins facile à résoudre. Les contextes tels que l'achat (prix, en général, proportionnel à la quantité achetée, problème S_3), mélange pour faire une boisson (consommation, nombre de morceaux de sucre proportionnel au nombre d'oranges, problème S_1), sont à notre avis familiers aux élèves. Volontairement, nous avons aussi glissé un contexte moins familier : le problème S_2 « Les briques de Léa ». La mesure, en centimètre, de la grandeur « hauteur des briques » peut être également une difficulté liée à ce contexte. A priori, les élèves le choisiront moins et auront plus de difficultés à le résoudre. Nous nous attendons donc à ce que les problèmes S_1 et S_3 soient bien compris et mieux résolus. Nous laisserons les problèmes S_1 et S_2 en 1ère ou en 2ème position sur nos séries. Le problème S_3, avec le contexte que nous considérons le plus familier (Les pains au chocolat de Pierre), restera toujours en dernière position.
Ces trois problèmes relèvent du tableau de proportionnalité suivant :

M_1	M_2
7	12
35	?

Tableau 2 : représentation du problème

Concernant le choix de nombres, nous avons choisi 35 (multiple de 7) et 12. Les élèves de cours moyen de l'école primaire pourront facilement utiliser le rapport scalaire 5 (de 7 à 35) qui est un entier, ce qui rend les calculs à effectuer relativement simples. D'autre part, avec ces trois nombres, il sera difficile de trouver la réponse en utilisant le coefficient de proportionnalité qui permet de passer de tous les termes de la première suite à leurs images dans la deuxième suite. En effet, ce coefficient est $\frac{12}{7}$ qui est un nombre rationnel non décimal. Nous avons choisi des nombres qui simplifient les calculs pour ceux qui utilisent la procédure scalaire.

Les procédures attendues des élèves

Etant donnée la similarité, déjà évoquée plusieurs fois, de ces 3 problèmes proposés, nous décrirons les procédures par rapport à l'énoncé S_3 .

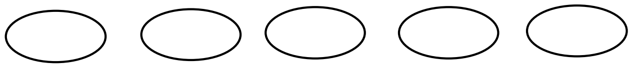
Procédure (P_0) : Utilisation de la linéarité additive

(mise en œuvre de la « première propriété de linéarité » : $f(x+y) = f(x) + f(y)$) sous des formes diverses)

Cette classe de procédures peut correspondre aux raisonnements suivants :

- 7 pains au chocolat coûtent 12 F
  14 pains au chocolat coûtent 24 F
  21 pains au chocolat coûtent 36 F
  28 pains au chocolat coûtent 48 F
  35 pains au chocolat coûtent 60 F

- Différents dessins et schémas peuvent également illustrer ces calculs :



12 F 12 F 12 F 12 F 12 F

Procédure (P_1) : passage par l'unité (dans un tableau, par une phrase…)

Nombre de pains au chocolat	Prix en francs
7	12
1	1,7
35	35x 1,7

Tableau 3 : procédure avec passage à l'unité

Le choix du nombre rationnel non décimal $\frac{12}{7}$ complique les calculs liés à cette procédure. Nous n'attendons pas beaucoup de raisonnements similaires pendant notre expérimentation. Cette procédure P_1 est également appelée « règle de trois ». Il se pourrait que les élèves utilisent une approximation décimale de $\frac{12}{7}$ (par exemple 1,7) pour leur calcul, notamment si la calculatrice est disponible.

Procédure (P_2) : utilisation d'un rapport scalaire

Nombre de pains au chocolat	Prix en francs
7	12
35	60

Tableau 4 : utilisation d'un rapport scalaire

Il s'agit d'utiliser la deuxième propriété de linéarité en cherchant à passer directement de 7 à 35 par un rapport scalaire (ici en multipliant par 5).

Procédure (P_3) : utilisation du coefficient de proportionnalité

Comme nous avons une situation de proportionnalité, il existe un coefficient multiplicatif permettant de passer de tous les termes de la première suite à leurs images dans la seconde suite. Ce coefficient k est tel que $7k = 12$ et donc $k = \frac{12}{7}$. Là encore, les élèves pourraient utiliser une approximation décimale de $\frac{12}{7}$, notamment à l'aide d'une calculatrice.

Les procédures qui suivent sont peu usuelles au cycle 3 dans la mesure où elles ne sont ni naturelles, ni enseignées à ce niveau. Par conséquent, **nous ne les attendons pas** pendant notre expérimentation.

Procédure (P_4) : utilisation des rapports égaux

On utilise la propriété des suites proportionnelles qui se traduit par l'égalité des rapports entre nombres correspondants des deux suites. Si on appelle x le terme inconnu (jusque là désigné par ?), nous pouvons écrire : $\frac{35}{7} = \frac{x}{12}$. Il suffit de résoudre cette équation pour trouver la quatrième proportionnelle « 60 ».

Procédure (P_5) : « les produits en croix »

La propriété des suites proportionnelles, dite des produits en croix, permet d'écrire directement : $7 \times x = 35 \times 12$, c'est-à-dire $7x = 420$. Il suffit de résoudre cette équation comme dans (P_3) ou en utilisant une multiplication à trous.

Procédure (P_6) : utilisation d'un graphique

Cette démarche exploite l'alignement avec l'origine des points associés aux couples formés par les éléments correspondants de deux suites proportionnelles. Sur un graphique dont l'axe des abscisses représente le nombre de pains au chocolat et celui des ordonnées les prix en francs, on place le point P associé au couple (7, 12). On trace la droite (OP). On cherche ensuite le point de la droite d'abscisse 35. L'ordonnée de point fournit la solution du problème. Cette méthode ne fournit souvent qu'une valeur approchée du résultat.

Protocole de passation

Le maître de la classe est présent et veille au travail des élèves. Il ne donne aucune indication concernant les consignes ou la résolution de problèmes. L'expérimentateur prend la classe en charge durant le temps de la séance (environ 30 minutes).

Mise en projet des élèves (2 minutes)

L'expérimentateur explique aux élèves qu'ils ont à résoudre trois problèmes qui sont sur une même feuille. Ils doivent d'abord bien lire les trois énoncés avant de commencer leur résolution.

Rupture des contrats usuels à la classe (3 minutes)

Nous attirons l'attention des élèves sur le fait que les problèmes ne seront pas notés et qu'ils ont le droit de faire des ratures. Nous leur demandons de répondre sur la feuille que nous allons leur donner, de ne pas effacer mais de barrer si besoin, afin de mieux nous renseigner sur leur manière de trouver. Nous insistons sur le fait que tous les moyens pour trouver sont autorisés : nous disons qu'ils peuvent dessiner, faire des schémas et tableaux, écrire comme ils veulent sans nécessairement faire des calculs « classiques », etc.

Distribution des copies et explication des consignes (5 minutes)

Voici la partie commune de la consigne que nous proposons oralement aux élèves en multiprésentation sans choix :

- *Il faut bien lire les énoncés et les comprendre avant de commencer la résolution.*
- *Réfléchis bien avant d'écrire un calcul.*
- *Tu peux utiliser tout ce qui peut t'aider à comprendre.*
- *Ecris tous les calculs que tu veux faire sur la feuille où se trouve l'exercice.*
- *N'oublie pas d'écrire la réponse à la question posée. »*

Cette consigne est précédée par la phrase suivante[10] :
Pour la multiprésentation sans choix : « *La série que tu as contient 3 problèmes que tu vas essayer de résoudre. Avant de commencer, suis bien les consignes de travail suivantes.* »
Pour la multiprésentation avec choix, « *On te propose 3 problèmes. Tu les lis et tu choisis celui que tu veux résoudre* ».
Les élèves lisent donc la consigne pendant quelques minutes, ils posent éventuellement des questions. Nous ne répondons pas aux questions concernant la résolution de problèmes.

Résolution des problèmes

Nous prévoyons vingt minutes au maximum, pour résoudre les trois problèmes et sept minutes pour les élèves qui vont résoudre un seul problème. Les élèves écrivent directement et uniquement sur la feuille d'énoncés. L'expérimentateur observe le comportement et les mouvements des élèves. Si un élève sollicite des informations complémentaires, on ne lui donnera aucun élément de réponse ni d'information susceptible d'orienter sa réponse. Si un élève annonce qu'il ne comprend pas l'exercice, on lui suggéra de relire l'énoncé et de répondre comme il pense.
A la fin de la résolution, l'expérimentateur relève, sur la copie de chaque élève concerné, les motivations (les raisons de choix) par rapport au problème choisi.

L'analyse après expérimentation.

Procédures correctes utilisées par les élèves

Selon nos prévisions, les procédures ont été variées, comme en témoigne le tableau suivant. Dans cette première expérience, les élèves maîtrisent en général les techniques opératoires. Nous avons trouvé 8 % d'erreurs de calcul sur l'ensemble des 232 procédures observées. Nous décrirons d'abord les « bonnes » procédures, puis nous reviendrons sur les stratégies erronées au point suivant. Nous précisons que le critère réussite correspond à l'instanciation d'une procédure correcte permettant de résoudre le problème même si dans l'exécution subsistent des erreurs de calculs.

Procédures « correctes »	Fréquence en % de la procédure par rapport à l'ensemble des 91 « bonnes » procédures
Procédures P_0 (linéarité additive)	17 % (16 sur un effectif de 91)
Procédures P_2 (rapport scalaire avec phrase ou tableau)	8 % (7 sur un effectif de 91)
Procédures P_2 (rapport scalaire avec des opérations posées (division de 35 par 7 et multiplication)	71 % (64 sur un effectif de 91)
Procédure P_3 (coefficient de proportionnalité)	1 % (1 sur un effectif de 91)
Procédure P_1 (valeur de l'unité)	3 % (3 sur un effectif de 91)

Tableau 5 : Taux de procédures correctes par rapport à l'ensemble des procédures réussies

[10] Dans cette première expérimentation, nous n'avions pas accordé d'importance à l'ordre de présentation des problèmes sur la feuille qui peut effectivement influencer leur ordre de résolution.

Exemples de procédures P_2 utilisant le rapport scalaire avec un tableau

Anne-Sophie

nombre d'orange	7 x5	35
nombre de sucres	12 x5	60

Il lui faut pour 35 oranges 60 morceaux de sucres

Ici, l'élève s'aide d'un tableau et passe de la deuxième colonne à la troisième en multipliant 7 et 12 par 5. Intuitivement, les élèves peuvent dire : « *Comme on a multiplié 7 pains au chocolat par 5, il faut également multiplier 12 francs par 5* » ou « *Quand on achète 5 fois plus de pains au chocolat, on paie 5 fois plus cher* »
En plus de la première stratégie décrite ci-dessus, 71 % (64 sur 91) des procédures ''justes'' utilisées combinent la division 35 : 7 = 5 (ou 7 x ? = 35) puis 12 x 5 = 60. Ils ont, indirectement, calculé d'abord l'opérateur scalaire 5. Nous classerons ces procédures dans celles qui exploitent le rapport scalaire par des opérations posées (P_2).

Eolas

$$\begin{array}{r|l} 35 & 7 \\ -35 & 5 \\ \hline 00 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 \\ \times\ 5 \\ \hline 60 \end{array}$$

Il faudra 60 morceaux de sucre.

Trois élèves ont essayé de calculer la valeur unitaire : procédure P_1 « le passage par l'unité. » Malheureusement pour les élèves, ce nombre est rationnel non décimal et ils n'ont pas pu calculer correctement $\frac{12}{7}\text{x}35$. Deux élèves ont essayé de le calculer à partir de l'approximation du rationnel $\frac{12}{7}$ par 1,7. Le troisième n'a pas su diviser 12 par 7. Conformément à notre critère de réussite, nous avons validé leur résolution.

CATALAN 11ans

un pain au chocolat coûte 1,7F

$$\begin{array}{r|l} 12 & 7 \\ 50 & 1,7 \\ 1 & \end{array}$$

Il va payer 59 4F

$$\begin{array}{r} 1,7 \\ \times\ 35 \end{array}$$

Primaël

Le prix d'un pains au chocolat 12 | 7
en F 12 : 7 = 1,7
50 | 1,7
2

Le prix des 35 pains est en F : 35 x 17 = 425 F

Les additions ou soustractions réitérées (P_0) représentent 17 % des procédures réussies :

Olivia

Les 35 pains au chocolats coûten 60 F

7 → 12
7 → 12
7 → 12
7 → 12
7 → 12
35 60F

Alexia

7 oranges, 12 sucres
14 oranges, 24 sucres
21 oranges, 36 sucres
28 oranges, 48 sucres
35 oranges, 60 sucres

Il lui faut 60 sucres morceaux de sucre.

Camille

① 35 − 7 = 12 morceaux

28 − 7 = 24 morceaux

21 − 7 = 36 morceaux

14 − 7 = 48 morceaux

7 − 7 = 60 morceaux

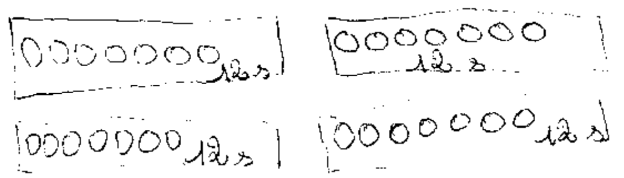
0

Il lui faut 60 morceaux de sucre pour mieux réussir son mélange.

7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35 et 12 + 12 + 12 + 12 + 12 = 60. Des élèves ont exprimé ces additions à l’aide des schémas similaires à celui–ci.

Priscilla

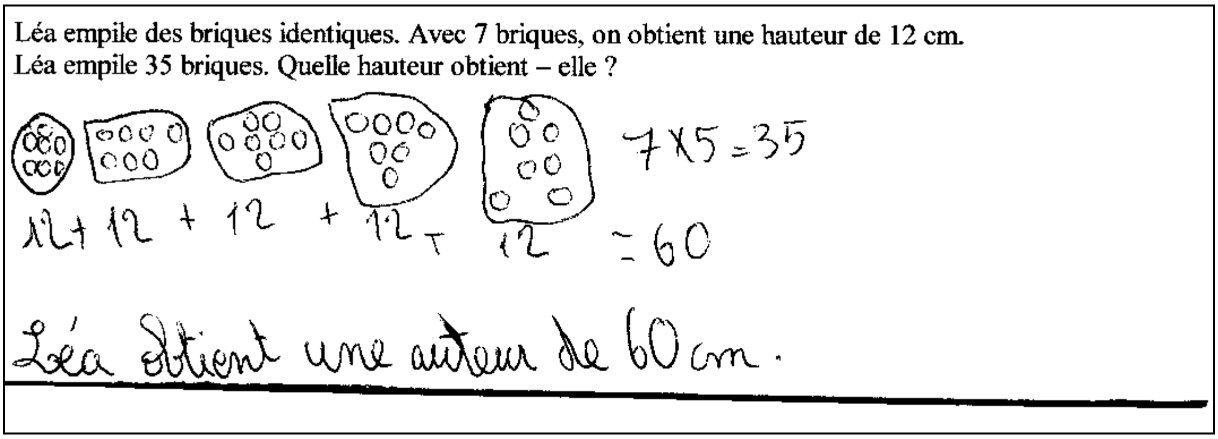
② Pour son anniversaire, Stéphanie prépare une boisson avec du sucre et des oranges : pour 7 oranges, il faut 12 morceaux de sucre. Elle utilise 35 oranges. Combien lui faut – il de morceaux de sucre pour mieux réussir son mélange ?



$$\begin{array}{r} 12 \\ \times \quad 5 \\ \hline 60 \end{array}$$

Il lui faudra 60 sucres.

Dimitri


Léa empile des briques identiques. Avec 7 briques, on obtient une hauteur de 12 cm.
Léa empile 35 briques. Quelle hauteur obtient – elle ?

7X5 = 35

12 + 12 + 12 + 12 + 12 = 60

Léa obtient une auteur de 60 cm.

Analyse selon les modalités de présentation

Nous rappelons que 49 élèves de CM (24 CM2 et 25 CM1) ont eu à résoudre un de 3 problèmes de la série dans une situation de **multiprésentation avec choix** (Julo, 1995). Les résultats obtenus sont ensuite comparés avec ceux de la population de 48 élèves de cours moyen (24 CM1 et 24 CM2) qui n'ont eu à résoudre que l'un des trois problèmes en situation de **présentation simple**. Enfin la résolution des 3 problèmes a été proposée à 45 écoliers (22 CM2 et 23 CM1) en situation de **multiprésentation sans choix** (Julo, 1995).
Le **critère que nous appelons réussite** correspond à l'instanciation d'une procédure correcte permettant de résoudre le problème même si dans l'exécution subsistent des erreurs de calculs (par exemple, une mauvaise approximation de $\frac{12}{7}$).

Cas de la multiprésentation avec choix

Nous regroupons dans le tableau qui suit les choix des élèves par problème et leur réussite au problème quand ils l'ont choisi. Nous ajoutons un taux de réussite global du problème pour indiquer quel est le problème le mieux réussi si on laisse les élèves choisir.

Multiprésentation avec choix	Choix	Réussite au problème choisi	Réussite globale par problème
problème S_1 L'anniversaire de Stéphanie	21 % (10 sur un effectif de 49)	70 % (7 sur un effectif de 10)	14 % (7 sur un effectif de 49)
problème S_2 Les briques de Léa	18 % (9 sur un effectif de 49)	25 % (4 sur un effectif de 9)	8 % (4 sur un effectif de 49)
problème S_3 Les pains au chocolat de Pierre	61 % (30 sur un effectif de 49)	60 % (18 sur un effectif de 30)	37 % (18 sur un effectif de 49)

Tableau 6 : Taux de choix de chaque problème

Le choix des élèves

Nous remarquons que plus de 3 écoliers sur 5 préfèrent résoudre le problème S_3 des « pains au chocolat » bien qu'il soit volontairement placé en troisième position sur la liste d'énoncés. Nous faisons l'hypothèse que plus un contexte est familier, plus le problème est choisi. Les deux autres problèmes sont choisis globalement de la même façon. Nous avons aussi constaté que le problème S_2 « Les briques de Léa » est essentiellement traité lorsqu'il est placé en première position sur la liste.

Les raisons du choix

La raison du choix d'un problème par l'élève a-t-elle un impact sur la réussite du problème ? Les raisons de choix d'un problème, que nous avons recueillies, sont variées. Nous avons repéré des stratégies de choix différentes.

Essai de résolution dans l'ordre de la feuille

La première place notamment du problème S_2, semble avoir beaucoup influencé le choix des élèves. « *J'ai voulu faire le premier. Je l'ai lu en premier. Je l'ai compris. Je l'ai fait.* » raconte Colas qui a bien résolu le problème S_2. Onicka (choix du problème S_1 situé en 2ème position, non réussi) a procédé par élimination « *Je n'ai pas compris les deux autres problèmes* ». Il serait intéressant dans l'avenir de proposer les trois problèmes aux élèves sur trois feuilles différentes.

Choix d'un problème qui plaît par le contexte

« *J'aime les briques* » dit Régis pour expliquer son choix du problème S_2 situé en 1ère place (résolution réussie en utilisant la procédure P_1 « passage par l'unité »). Adrina affirme : « *J'ai choisi cet exercice parce que je voulais savoir le nombre d'oranges* » (choix du problème S_1 situé en 2ème position, non réussi). « *C'est ce que je voulais faire* » précise Gaëlle (choix du problème S_3, non réussi). Sidoine signale qu'il « *vaut mieux de travailler avec des euros* » (choix du problème S_3, réussi).

Repérage d'une stratégie possible ou d'une stratégie déjà pratiquée

Lydia a trouvé le problème S_3 « *mieux* », raison pour laquelle elle l'a choisi. Dans ses explications, elle rajoute « *on peut faire des tableaux et des multiplications* ». Cet élève a réussi sa résolution en utilisant la procédure P_2 « propriété de linéarité avec scalaire dans un tableau ». Pour Harmonie dont la résolution est également validée (procédure P_2 « propriété de linéarité avec des opérations posées »), c'est le problème S_1 qui était « *mieux* ». Samar « *voyait comment faire* ». Quant à Baptiste, elle précise qu'elle a choisi le problème S_3 puisqu'elle va souvent à la pâtisserie. « *Ma mère me donne souvent des problèmes comme ça quand j'achète des choses* » rajoute-elle. Elle a bien résolu son problème en utilisant la procédure P_2 « propriété de linéarité avec scalaire dans un tableau ». Romaric parle « *du choix logique* » (problème S_3 réussi, procédure P_2 « propriété de linéarité avec des opérations posées »).

Repérage de la ressemblance des problèmes

C'est le cas d'Emilie (choix du problème S_3, réussi) ou de Claudy (choix du problème S_1, réussi). Ces deux élèves ont bien vu la ressemblance de trois problèmes proposés et ont précisé « *ils sont pareils* ». Ils ont utilisé respectivement la procédure P_2 « propriété de linéarité avec scalaire dans un tableau » et la procédure P_2 « propriété de linéarité avec des opérations posées »).

Notre analyse rapide montre que ces raisons variées de choix du problème n'influent pas forcément sur la réussite. Si l'élève choisit un problème parce qu'il est le premier sur la liste ou parce que son voisin l'a aussi choisi, ce choix n'explique pas une meilleure réussite. S'il le choisit parce qu'il lui semble facile, ou parce qu'il savait le faire (l'élève a repéré que les problèmes sont « ressemblants » ou une stratégie possible ou une stratégie déjà pratiquée), le choix du problème explique une meilleure réussite. Si l'élève choisit un problème qui plaît par le contexte, l'effet de cette raison sur la réussite est à discuter notamment si son choix est basé seulement sur le fait d'aimer beaucoup les oranges et ne pas aimer les pains au chocolat !

La réussite par problème

Quand ils sont choisis, le problème S_1 de l'anniversaire de Stéphanie et le problème S_3 des pains au chocolat de Pierre sont réussis de façon quasi équivalente (échoués à plus de 30 %).

La réussite globale

Le problème S_3 préféré des élèves (30 sur un effectif de 49, soit 61 %) est également le problème le plus réussi globalement (18 sur un effectif 49, soit 37 %).

Cas de la présentation simple

Présentation simple	Réussite
S_1 L'anniversaire de Stéphanie	38 % (6 sur un effectif de 16)
S_2 Les briques de Léa	25 % (4 sur un effectif de 16)
S_3 Les pains au chocolat de Pierre	38 % (6 sur un effectif de 16)

Tableau 7 : Taux de réussite en % en situation de présentation simple.

Nous constatons qu'en modalité de présentation simple, pour chaque problème (quelle que soit la familiarité de contexte), les taux de réussite sont inférieurs ou égaux à ceux en multiprésentation avec choix.

Le problème S_2 « Les briques de Léa » est le problème le moins bien réussi par rapport aux deux autres problèmes S_1 et S_3, qui réalisent le même taux de réussite. Etant donné que ces problèmes sont « ressemblants » et que seul leur contexte sémantique diffère, ces résultats nous montrent l'influence du contexte aussi bien dans la compréhension que dans le traitement du problème.

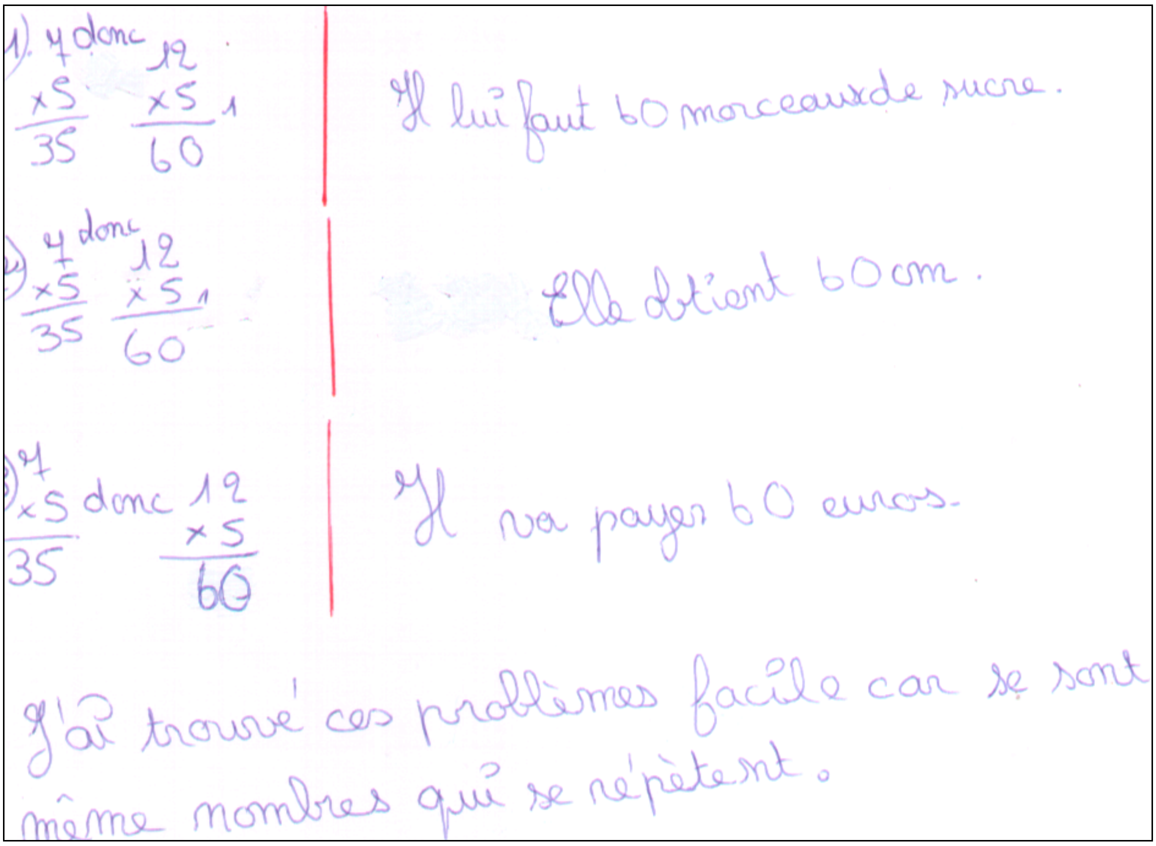
Nous émettons comme hypothèse, déjà signalée par d'autres auteurs, qu'à compétences mathématiques égales, certains contextes sémantiques pourraient « ralentir » l'entrée des élèves dans la résolution de problèmes, ce qui pourrait avoir des répercussions sur la représentation que le sujet se construit ainsi que dans son action.

Cas de la multiprésentation sans choix

Multiprésentation sans choix	Réussite
3 bonnes résolutions	16 % (7 sur un effectif de 45)
2 bonnes résolutions seulement	13 % (6 sur un effectif de 45)
1 seule bonne résolution	31 % (14 sur un effectif de 45)
Au moins 1 bonne résolution	60 % (27 sur un effectif de 45)

Tableau 8 : Taux de réussite en fonction du nombre de problèmes correctement résolus.

Concernant la réussite à au moins un problème, il y a 60 % de réussite. 7 élèves sur 45 ont résolu correctement les 3 problèmes ; de plus ils ont utilisé la même procédure de résolution. Ont-ils reconnu qu'il s'agissait du même type de problèmes trois fois de suite ? Ces élèves disaient que les problèmes étaient pareils, les nombres se répétaient, etc. Ce qui nous laisse dire que ces sept élèves ont reconnu que ces problèmes étaient « ressemblants » et qu'ils pouvaient se résoudre avec la même procédure comme dans l'exemple ci-dessous.



1) 7 donc 12
×5 ×5
35 60

Il lui faut 60 morceauxde sucre.

2) 7 donc 12
×5 ×5
35 60

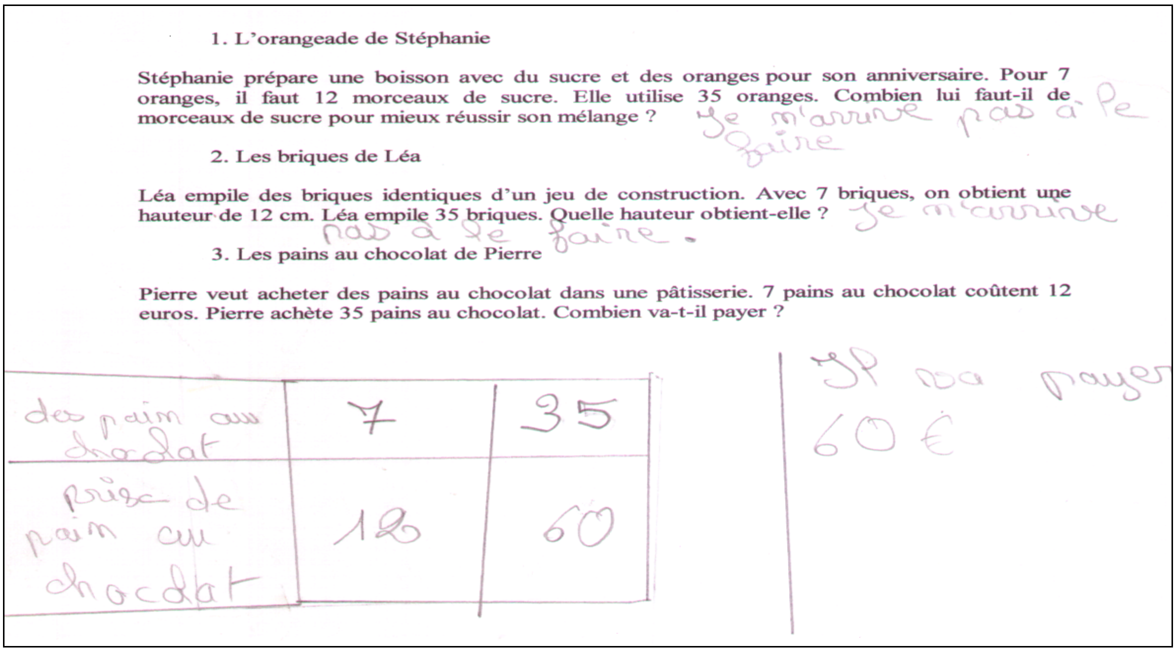
Elle obtient 60 cm.

3) 7
×5 donc 12
×5
35 60

Il va payer 60 euros.

J'ai trouvé ces problèmes facile car se sont même nombres qui se répètent.

L'exemple qui suit nous montre qu'un élève peut ne se représenter qu'un seul problème parmi les trois « ressemblants ».



1. L'orangeade de Stéphanie

Stéphanie prépare une boisson avec du sucre et des oranges pour son anniversaire. Pour 7 oranges, il faut 12 morceaux de sucre. Elle utilise 35 oranges. Combien lui faut-il de morceaux de sucre pour mieux réussir son mélange ? Je n'arrive pas à le faire

2. Les briques de Léa

Léa empile des briques identiques d'un jeu de construction. Avec 7 briques, on obtient une hauteur de 12 cm. Léa empile 35 briques. Quelle hauteur obtient-elle ? Je n'arrive pas à le faire.

3. Les pains au chocolat de Pierre

Pierre veut acheter des pains au chocolat dans une pâtisserie. 7 pains au chocolat coûtent 12 euros. Pierre achète 35 pains au chocolat. Combien va-t-il payer ?

des pain au chocolat	7	35
prise de pain au chocolat	12	60

Il va payer 60 €

Quatorze élèves ont pu résoudre un problème sur trois. Par la suite, il serait intéressant d'observer le comportement de ces élèves. Est-ce qu'après avoir résolu un problème ressemblant, quel qu'il soit, ils reviennent sur les autres qu'ils ne savaient pas résoudre ?

Comparaison de trois épreuves

Pour pouvoir comparer les trois modalités, nous avons introduit une cinquième colonne dans le tableau qui mesure un taux moyen de réussite. Ce taux évalue le pourcentage d'élèves ayant réussi au moins à un problème dans chacune des modalités.

Elèves ayant réussi **Modalités**	« L'anniversaire de Stéphane »	« Les briques de Léa »	« Les pains au chocolat de Pierre »	Au moins un des 3 problèmes
Présentation simple	38 % (6 sur 16)	25 % (4 sur 16)	38 % (6 sur 16)	33 %[11] (16 sur 48)
Multiprésentation Avec choix	70 % (7 sur 10)	44 % (4 sur 9)	60 % (18 sur 30)	59 %[12] (29 sur 49
Multiprésentation Sans choix	38 % (17 sur 45)	29 % (13 sur 45)	38 % (17 sur 45)	60 % (27 sur 45)

Tableau 9 : Taux pondérés de réussite à au moins un problème pour chacune des modalités.

En considérant **la réussite par problème**, en **multiprésentation sans choix**, dans tous les cas, le pourcentage de réussite aux problèmes est au moins égal à celui de la présentation simple. En considérant ensuite **la réussite à au moins un problème**, la multiprésentation sans choix paraît plus intéressante. La stimulation de l'activité de la représentation a bien fonctionné chez certains élèves. Un problème est mieux réussi par beaucoup d'élèves lorsqu'on leur propose trois « ressemblants » à résoudre.

Quant à la **multiprésentation avec choix**, elle donne de meilleures performances par problème que la présentation simple. Cette modalité permet au maximum d'élèves de réussir au moins un des problèmes « ressemblants », donc d'une manière ou d'une autre, ils commencent à s'approprier la structure mathématique sous jacente. Cela semblerait dire que si on laisse choisir les élèves, ils réussissent mieux les problèmes qu'ils choisissent. Ce constat nous permet d'émettre l'hypothèse selon laquelle les élèves reconnaîtraient le contexte qui leur permet de mieux réussir puisque, lorsqu'ils choisissent les problèmes à résoudre, ils réussissent mieux que lorsqu'on leur impose un problème. Ce résultat obtenu conforte les hypothèses de Julo (1995). Peut-être existe-t-il un effet psychologique : les élèves qui ont choisi sont plus sûrs d'eux et du coup, ils réussissent mieux.

[11] Ce taux représente la moyenne pondérée de taux de réussite de chaque problème en présentation simple.

[12] Ce taux représente la moyenne pondérée de taux de réussite.

Conclusion

Nous avons expérimenté, sur des problèmes de recherche de 4ème proportionnelle, un autre type d'aide inspiré de Julo (1995) : la multiprésentation. Il s'agit de présenter simultanément différents problèmes « se ressemblant » aux élèves. Notre expérimentation a concerné, en 2000-2001 6 classes de cycle 3 soit 142 élèves de cours moyen répartis en 3 groupes de niveaux « presque similaires » de 49, 48 et 45 élèves. Nous avons observé que le problème dont le contexte semble le plus familier (Le pain au chocolat de Pierre) a toujours été mieux résolu.

Pour chaque problème, les élèves l'ont mieux réussi lorsqu'ils l'ont choisi dans une liste de trois problèmes « ressemblants » (multiplication avec choix) que lorsqu'il était présenté seul. Ces résultats nous permettent d'émettre l'hypothèse selon laquelle les élèves reconnaîtraient le contexte qui leur permet de mieux réussir puisque, lorsqu'ils choisissent les problèmes à résoudre, ils réussissent mieux que lorsqu'on leur impose un problème. En considérant la réussite à au moins un problème, la multiprésentation sans choix paraît également très intéressante. La stimulation de l'activité de la représentation a bien fonctionné chez beaucoup d'élèves. Nos résultats en multiprésentation (avec ou sans choix) à l'école primaire, rejoignent les conclusions de Julo au collège : un problème est mieux résolu s'il est dans une liste de problèmes ressemblants, que l'on impose à l'élève d'en résoudre un seul choisi ou tous. La mise en place de la multiprésentation doit s'accompagner d'une réflexion pédagogique et didactique notamment dans les analyses préalables (formulation de la consigne, temps de passation, production des problèmes ressemblants, ordre de présentation de problèmes, etc.) afin d'éviter toute influence qui pourrait fausser les résultats au niveau de l'apprentissage espéré.

Tout au long de cet article, nous nous sommes interrogés sur la possibilité d'amener plus d'élèves à la réussite en intervenant seulement sur le processus de représentation du problème. La situation expérimentale montre que la multiprésentation est pertinente. Très peu directive dans le processus de résolution lui même, elle met en évidence l'activité de la représentation et permet de créer des conditions aidant certains élèves plus faibles à réussir dans la résolution d'un problème donné. Nous pensons qu'il n'existe pas de méthodologie générale de résolution de problèmes (Houdement 1999, Mercier 1994, etc.) : chaque élève recourt à sa propre mémoire de problèmes c'est-à-dire à ses propres « schémas de problèmes » (Julo, 1995). Ainsi, il crée progressivement ses propres représentations qui lui permettront de reconnaître que tel problème relève de tel schéma déjà rencontré et de s'engager rapidement dans une procédure de résolution.

Ces résultats pourront-ils se transférer à l'enseignement ? Le fait de faire choisir les élèves semble améliorer leur réussite. Comme les aides à leur apporter doivent être diversifiées sur une longue période, nous proposons une variante du dispositif qui pourrait être également intéressante. Il s'agit de présenter aux élèves plusieurs problèmes « ressemblants » (plus de 3) et de leur en laisser choisir au moins deux, ceci afin qu'ils aient l'occasion de faire deux fois la même chose sans forcément le voir. C'est dans cette voie que nous nous engageons sur d'autres classes de problèmes.

Références bibliographiques

Boeler J., 1993, Encouraging the transfer of « school » mathematics to the « world » through the integration of process and content, context and culture, *Educational Studies in Mathematics*, 25, 341-373.

Brissiaud R., 1984, La lecture des énoncés de problèmes, in *: Comment font-ils ? L'écolier et le problème de mathématiques*, Paris, INRP.

Brousseau G., 1989, Le contrat didactique : le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 9.3,* pp 309-336.

Denis M., 1994, *Image et Cognition*, Paris, PUF 2ème édition.

De Vecchi G. et Giordan A., 1994, *L'enseignement scientifique. Comment faire pour que ça marche*, Nice, Z'éditions.

Fayol M., 1990, La résolution des problèmes additifs et sa genèse, dans *L'enfant et le nombre*, Editions Delachaux et Nestlé, Neuchâtel, pages 149-184.

Hersant M., 2001, *Interactions didactiques et pratiques d'enseignement, le cas de la proportionnalité au collège*, Thèse de l'université Paris 7.

Houdement C., 1999, Le choix des activités pour la « résolution de problèmes », *Grand N* n°63 pages 55-76.

Julo J., 1995, *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques, un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*, Ed. P.U.R

Julo J., 2000, « La proportionnalité à travers les problèmes », *Rapport d'évaluation*, Publication de l'I.R.E.M. de Rennes.

Julo J., 2002, Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ?, *Grand N* n°69, pages 31-52.

Levain J.P., 1997, *Faire des maths autrement, développement cognitif et proportionnalité*, Ed. L'Harmattan, Espaces théoriques.

Margolinas C., 1993, De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques, *Recherche en didactiques des mathématiques*, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Mercier A., 1994, Le manque théorique dans l'enseignement des pratiques algébriques en France, *in Actes SFIDA 3*, Nice.

Perrin-Glorian M.J., 1999, Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 19.3,* pages 279-322, Ed. La Pensée Sauvage.

Presseau A., 2000, Analyse de l'efficacité d'interventions sur le transfert des apprentissages en mathématiques, *revue des sciences de l'éducation*, Vol. XXVI

Richard J.F., 1984, La construction de la représentation d'un problème, *Actes de la IIIème école d'été de didactique*, Orléans.

Richard J.F., 1990, *Les activités mentales. Comprendre, raisonner, trouver des solutions*, Editions A.Colin.

Tardif J., 1999, *Le transfert des apprentissages*. Montréal, Les éditions Logiques.

Vergnaud G., 1981, *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Ed. Peter Lang.

Vergnaud G., 1990, La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 10 2-3, pages 133-170, Ed. La Pensée Sauvage.

Vergnaud G. dir, 1997, Résolution de problèmes, *Le Moniteur de mathématiques cycle 3* Fichier pédagogique Editions Nathan.