UNE SEQUENCE SUR LES PROBLEMES ADDITIFS AU CYCLE 2
LE CAS DES COMPARAISONS DE MESURES

Martine FLOC'H
Maîtresse Formatrice – IUFM de Créteil – site de Livry - Gargan
Nathalie PFAFF
Professeur de mathématiques – IUFM de Créteil– site de Livry - Gargan

Cet article présente une séquence sur les problèmes additifs et plus particulièrement sur les problèmes de comparaison de mesures, réalisée en début d'année scolaire, dans une classe de CE1 de 22 élèves, dans une école classée ZEP en Seine-Saint-Denis. La présentation de cette séquence n'aurait pas d'intérêt en soi si elle n'était accompagnée des résultats des élèves (avant et après la séquence) et de l'analyse des facteurs qui ont permis une forte progression. Mais, avant de la présenter, nous revenons rapidement sur les différents types de problèmes additifs (ou soustractifs) dont la comparaison de mesure fait partie ; cela permettra de préciser les difficultés inhérentes à cette classe de problèmes.

Les grands types de problèmes additifs ou soustractifs.

Plusieurs typologies de problèmes additifs et soustractifs ont été proposées, dont certaines ont été fort bien synthétisées par Fayol (1990). Elles se sont toutes accordé sur le fait que la distinction entre les classes de problèmes ne provient pas de l'opération en jeu (addition contre soustraction) puisque beaucoup de problèmes peuvent se résoudre en utilisant soit l'une soit l'autre, mais bien de la structure même du problème. Les différentes typologies se retrouvent sur beaucoup de points. Aussi, nous ne reviendrons que sur celle de Vergnaud (1981) qui distingue six classes de problèmes, les deux dernières n'intervenant que très rarement à l'école élémentaire[1]. De plus, à l'intérieur de chaque classe, l'ensemble des problèmes se décompose en plusieurs types selon la place de l'inconnue.
Ces six classes de problèmes sont les suivantes.

Transformation de mesure

Une transformation additive ou soustractive s'opère sur une mesure pour aboutir à une nouvelle mesure. (La mesure est, par exemple, le nombre d'éléments d'une collection, autrement dit son cardinal).

---

[1] Cette classification a été présentée dans le numéro 38 de la revue Grand N (1986 - G.Vergnaud - *Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques : un exemple, les structures additives* –). On la retrouve aussi dans le Moniteur de Mathématiques, fichier pédagogique à destination des enseignants écrit sous la direction de G.Vergnaud – Nathan 1997.

Trois classes de problèmes peuvent être définies :
- l'état initial et la transformation sont connus. La recherche porte sur l'état final ;
- l'état initial et l'état final sont connus. La recherche porte sur la transformation ;
- l'état final et la transformation sont connus. La recherche porte sur l'état initial.

Dans chaque cas, la transformation peut être positive (cf : gagné) ou négative (cf : perdu).

> *Exemple : Jean a gagné 5 billes à la récréation ; il en a maintenant 12. Combien en avait-il avant ?*

Composition de mesures

Les compositions de mesures concernent deux (ou plus) mesures qui sont réunies.

Deux classes de problèmes se définissent :
- les deux états initiaux sont connus ; la recherche porte sur la réunion des deux états ;
- un des deux états initiaux et la réunion des deux états sont connus ; la recherche porte sur l'autre état initial.

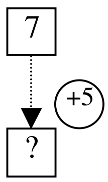
> *Exemple : Jean a 12 billes, 5 agates et des pures. Combien a-t-il de pures ?*

Comparaison de mesures

La comparaison de mesures met en jeu deux mesures qui sont comparées l'une à l'autre. La différence essentielle avec la transformation de mesure réside dans le fait que deux mesures simultanées de deux objets différents sont en jeu alors que dans la transformation, deux mesures successives d'un même objet interviennent.

Trois classes de problèmes peuvent être définies :
- une mesure et la comparaison entre les deux sont connues ; la recherche, qui porte sur l'autre mesure, s'effectue dans le sens de la comparaison ;

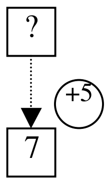
> *Exemple : Paul a 7 billes. Jean a 5 billes de plus que Paul. Combien Jean a-t-il de billes ?*



La flèche en pointillé représente la comparaison entre les deux mesures. Celles-ci sont placées l'une en dessous de l'autre pour symboliser leur simultanéité. Ce schéma permet de différencier la comparaison de mesures de la transformation de mesure. (Dans la symbolisation de cette dernière, les mesures seront situées l'une à côté de l'autre et reliées par une flèche en trait plein pour représenter la transformation de l'une aboutissant à l'autre.)

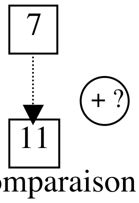
- une mesure et la comparaison entre les deux sont connues ; la recherche qui porte sur l'autre mesure, s'effectue dans le sens inverse de la comparaison.

> *Exemple : Paul a 7 billes. Paul a 5 billes de plus que Jean. Combien Jean a-t-il de billes ?*



- les deux mesures sont connues ; la recherche porte sur la comparaison ;

> *Exemple : Paul a 7 billes. Jean a 11 billes. Combien Jean a-t-il de billes de plus que Paul ?*



Dans chaque cas, la comparaison peut être positive (« de plus que ») ou négative (« de moins que »).

Composition de transformations

Cette classe de problèmes concerne plutôt les élèves de cycle 3. Elle concerne la recherche d'une transformation lorsque deux transformations successives s'effectuent. Plusieurs transformations successives s'opèrent sur une mesure mais celle-ci n'est pas donnée. Le problème concerne les transformations.

> *Exemple : A la première partie de billes, Paul a gagné 7 billes. A la seconde partie, il en a perdu 4. Combien Paul a-t-il gagné de billes en tout ?*

Deux types de problèmes peuvent être définis :
- les deux transformations successives sont connues ; la recherche porte sur la transformation totale ;
- l'une des deux transformations successives et la transformation totale sont connues ; la recherche porte sur l'autre transformation.

Transformation sur une relation

Cette classe de problèmes se distingue de la transformation de mesure par le fait que la transformation peut porter sur un état relatif.

> *Exemple : Ce matin, à 7 heures, le thermomètre indiquait une température de –5°C. A 16 heurs, la température est de 3°C. De combien la température s'est-elle élevée entre 7 heures et 16h ?*

Compositions de relations

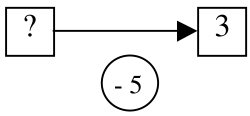
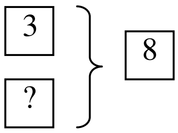
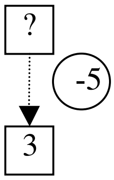
Cette classe de problème diffère de la composition de mesures parce qu'elle concerne des états relatifs.

> *Exemple : Paul doit 6 billes à Henri mais Henri lui en doit 4. Combien Paul doit-il de billes à Henri ?*

Le cas de la comparaison de mesures

Des études ont montré que cette classe de problèmes se révèle beaucoup plus complexe pour des élèves de cycle 2 que les classes « transformation de mesure » et « composition de mesures ». En effet, la compréhension des termes « plus que » et « moins que » employés dans les problèmes de comparaison s'acquiert difficilement. De plus, certaines recherches s'effectuent dans le sens contraire de la comparaison, ce qui génère une erreur fréquente chez les élèves de cycle 2 qui associent le terme « plus que » à l'addition et le terme « moins que » à la soustraction.
Il en ressort que le taux de réussite pour cette classe de problèmes est nettement plus faible que pour les deux autres classes, comme le montrent Riley, Greeno et Heller cités par Fayol (op. cit.).

Le tableau ci-dessous indique le taux de réussite, d'après Riley et al., pour un exemple de chacun des trois types. Les exemples ont été choisis de façon à être comparables au niveau des opérations et des nombres en jeu.
Le très faible taux de réussite pour l'exemple cité pour la comparaison de mesures montre qu'à nombres et opération identiques, la transformation de mesure est une situation beaucoup plus simple pour les élèves de cycle 2.

Type de problème	Exemple	Réussite en CP	Réussite en CE1
Transformation de mesure 	*X avait des billes. Il en a donné 5 à Y. Maintenant X a 3 billes. Combien avait-il de billes ?*	39%	70%
Composition de mesures 	*X et Y ont ensemble 8 billes. X a 3 billes. Combien Y a-t-il de billes ?*	39%	70%
Comparaison de mesures 	*X a 3 billes. Il a 5 billes de moins que Y. Combien de billes a Y ?*	6%	35%

Présentation de la progression et de la situation[2]

Compte tenu de ces résultats, nous avons donc choisi de travailler plus spécifiquement sur les comparaisons de mesures. L'objectif de la séquence, composée de quatre séances (sans compter l'évaluation diagnostique et l'évaluation finale) consiste à résoudre, par des procédures personnelles, des problèmes de comparaison de mesures. Notre progression a été construite à partir des taux de réussite montrant une hiérarchie dans les différents types de problèmes de comparaison de mesures. Ainsi, la première séance a pour objectif de comprendre les termes « plus que » et « moins que », mais sans confrontation avec un problème de recherche. A la deuxième séance, les élèves recherchent une mesure dans une comparaison de mesures, la comparaison s'effectuant dans le sens de la recherche. La troisième séance a pour objectif de rechercher la comparaison. La quatrième séance met les élèves devant le cas le plus difficile : la recherche d'une mesure lorsque celle-ci s'effectue dans le sens contraire de la comparaison. Enfin, une dernière séance vise à reprendre les trois cas de recherche possibles.
Toutes les séances se basent sur le même contexte. La situation est présentée à la première séance sous forme de jeu à deux.
Aux séances suivantes, les élèves ne jouent plus, mais complètent des feuilles de score analogues à celles qui ont été introduites dans le jeu de la première séance.

A la première séance, chaque joueur dispose d'un paquet de cartes. L'un possède un paquet de 20 cartes rouges numérotées de 6 à 15 (deux cartes par nombre), l'autre un paquet de 12 cartes bleues sur lesquelles est inscrit : « *x de plus que le joueur 1* » ou « *x de moins que le joueur 1* », x prenant les valeurs de 1 à 6 (une carte pour chaque nombre). De plus, le binôme reçoit un lot de 40 jetons dans une boîte ouverte et une feuille de score pour eux deux. Les nombres ont été choisis de façon à ce que les difficultés de calcul n'empêchent pas la résolution du problème.
Le joueur possédant le tas de 20 cartes rouges tire en premier une carte de son paquet. Il prend autant de jetons que le nombre indiqué par la carte qu'il a tirée. Le joueur possédant le tas de 12 cartes bleues tire, ensuite, une carte de son paquet. Celle-ci lui indique le nombre de jetons

[2] La présentation détaillée de cette séquence est à paraître dans Fénchel, Pfaff (2005).

qu'il doit prendre en référence (en plus ou en moins) à celui du premier joueur. Il prend ainsi le nombre total de jetons. Après chaque partie, on compare le nombre de jetons des deux joueurs pour déterminer le gagnant (celui qui en a le plus) et mettre ainsi en évidence le rôle de la seconde carte tirée dans le résultat de la partie. La feuille de score est complétée au fur et à mesure des parties comme le montre l'exemple ci-dessous.

Feuille de score			
	Nombre de jetons du premier joueur (point rouge)	Carte tirée par le second joueur (point bleu)	Nombre de jetons du second joueur (point bleu)
1ère partie	***13***	***5 de moins que le joueur 1***	***8***
2ème partie			
3ème partie			
4ème partie			
5ème partie			

Dans cette phase, aucun calcul n'est nécessaire. En effet, le premier joueur ayant pris le nombre de jetons indiqué par sa carte, le second joueur peut prendre le même nombre de jetons que le premier joueur puis reprendre en plus le nombre de jetons indiqué par sa carte ou rendre ce nombre. Cette phase sert à comprendre le contexte (situation, feuille de score) qui servira pour les calculs dans les séances suivantes ; elle permet de faire acquérir le sens des termes « *de plus que* » et « *de moins que* ».
Certains groupes abandonnent rapidement le recours aux jetons pour compléter directement la feuille de score au fur et à mesure des cartes tirées alors que d'autres groupes utilisent les jetons pendant toute la séance.

Un binôme d'élèves en grande difficulté a besoin de plusieurs parties pour comprendre le jeu. A leur deuxième partie, Id tire la carte rouge indiquant qu'il doit prendre 7 jetons. Il prend 7 jetons en les dénombrant un par un et sa voisine Ko lui dit de remplir la feuille de score, ce qu'il fait correctement.
Ko tire ensuite une carte bleue lui indiquant de prendre 5 jetons de plus que le premier joueur. Elle hésite avant de prendre des jetons et finalement prend 9 jetons puis encore un. Lorsque l'enseignante lui demande quelle carte elle a tirée, Ko répond « *5* » sans préciser « *de plus* » ou « *de moins* ».

7	5 de plus **que le premier joueur**

Avec l'aide de l'enseignante, Ko comprend qu'elle doit prendre d'abord 7 jetons comme Id, mais veut ensuite prendre 2 jetons de plus, comme à la première partie. Une élève d'un autre groupe vient l'aider en lui expliquant qu'elle a tiré la carte « *5 de plus que le premier joueur* » donc qu'elle doit en prendre 5 de plus que Id. Ko recompte ensuite le tout en dénombrant de un en un pour compléter la feuille de score.

Les feuilles de score complétées permettent à l'enseignante de repérer les groupes qui ont fait de mauvaises interprétations des termes « *plus que* » et « *moins que* » ou des erreurs de calcul pour les traiter individuellement. En effet, pendant que le jeu, l'enseignante consacre du temps à certains binômes pour les aider à lire les cartes, contrôler que le premier joueur prend le nombre de jetons indiqué par sa carte, revenir sur la signification de la carte tirée par le second joueur.

L'objectif des séances suivantes consiste à résoudre un problème de comparaison. Les séances sont toutes construites sur le même principe. Les élèves ne disposent plus des cartes, ni des jetons mais peuvent s'aider en écrivant sur l'ardoise. Ils reçoivent des feuilles de score dans lesquelles il manque une information. Les nombres choisis ne dépassent pas 20 pour que les difficultés de calcul ne soient pas un handicap à la réussite aux exercices.
A la deuxième séance, les élèves complètent le nombre de jetons du second joueur (le nombre de jetons du premier joueur et la carte tirée par le second joueur sont indiqués). Ils recherchent la mesure « dans le sens de la comparaison ». Autrement dit, ils effectuent le calcul induit par le terme utilisé dans la carte bleue tirée. (Une addition si la carte indique « de plus que » et une soustraction si la carte tirée indique « de moins que ».)
Dans la feuille de score de la troisième séance, la carte tirée par le second joueur n'est pas indiquée (les deux autres informations sont données). Il s'agit, dans ce cas, de déterminer la comparaison connaissant les deux mesures.
A la quatrième séance, les élèves recherchent la carte tirée par le premier joueur, c'est-à-dire la mesure mais dans « le sens inverse de la comparaison ». Ici, l'opération à utiliser n'est pas celle directement induite par le terme de comparaison indiquée sur la carte bleue tirée. Ainsi, si la feuille de score indique que le second joueur a tiré la carte « *5 de plus que le premier joueur* » et qu'il dispose de 12 jetons, le nombre de jetons du premier joueur ne se calcule pas à partir de 12 + 5.
La dernière séance propose une feuille de score où il manque une information à chaque partie ; l'information manquante étant soit le nombre de jetons du premier joueur, soit la carte tirée par le second joueur, soit son nombre de jetons. A chaque séance, la mise en commun sur les feuilles de score complétées fait ressortir les différentes réponses. Après discussion sur la pertinence ou non des réponses données, les jetons servent à valider la seule bonne réponse possible.

Progrès des élèves

Une évaluation diagnostique (une semaine avant le début de la séquence) et une évaluation finale (une semaine après la fin de la séquence) ont permis de se rendre compte des éventuels progrès des élèves.
Les deux évaluations comportent les mêmes exercices. Les élèves répondent sur la feuille comportant les énoncés des exercices, sachant qu'une grande place leur est laissée pour qu'ils puissent avoir recours à des dessins ou des schémas s'ils le souhaitent. Par contre, ils ne disposent d'aucun autre matériel que la feuille et un stylo. Tous les exercices sont lus par l'enseignante et repris par quelques élèves pour que les problèmes de lecture ne soient pas un obstacle à la résolution.
Trois exercices sont proposés. Le premier porte sur le calcul de la mesure « dans le sens de la comparaison », le deuxième sur le calcul de la comparaison et le dernier sur la mesure « dans le sens inverse » de la comparaison. Le contexte des exercices ne reprend pas tout à fait celui des séances sur lesquelles la comparaison a été travaillée puisque les situations portent sur des billes et non sur des jetons et que, de plus, elles sont énoncées sous forme de texte. Ainsi, nous souhaitions savoir si les élèves avaient progressé sur les situations de comparaison et non pas uniquement sur la situation du jeu de cartes.

Le tableau ci-dessous permet d'apercevoir les progrès dans deux des trois exercices et de constater une régression dans le deuxième exercice, mais l'analyse des erreurs montrera qu'en fait cette baisse dans le taux de réussite n'est pas due à une régression.
Les progrès les plus importants ont eu lieu sur le troisième exercice (mesure « dans le sens inverse » de la comparaison) puisque le taux de réussite passe de 29% à 77%. Le taux de réussite à l'évaluation diagnostique correspond globalement aux taux de réussite de 6% en CP et 35% en CE1 cités précédemment pour un exercice du même type. Le progrès se manifeste aussi dans les procédures utilisées puisqu'à l'évaluation diagnostique, 16 élèves tentaient de schématiser au moins l'un des trois exercices alors qu'ils ne sont plus que 6 élèves à faire appel au dessin à l'évaluation finale.

Exercice		Evaluation diagnostique	Evaluation finale
1. Vincent a 9 billes. Karim a 3 billes de plus que Vincent. Combien Karim a-t-il de billes ?	$\boxed{9} \xrightarrow{+3} \boxed{?}$	14 réussites (67%) 7 échecs (33%) 1 absent	21 réussites (95%) 1 échec (5%)
2. Mohamed a 11 billes. Eric a 5 billes. Combien Eric a-t-il de billes de moins que Mohamed ?	$\boxed{5} \xrightarrow{+?} \boxed{11}$	12 réussites (57%) 9 échecs (43%) 1 absent	9 réussites (41%) 13 échecs (59%)
3. Jérémie a 12 billes. Il a 4 billes de moins que Philippe. Combien Philippe a-t-il de billes ?	$\boxed{?} \xrightarrow{-4} \boxed{12}$	6 réussites (29%) 15 échecs (71%) 1 absent	17 réussites (77%) 5 échecs (23%)

L'analyse des productions des élèves, non seulement à l'évaluation finale, mais aussi aux différentes séances de la séquence permet de pointer quelques facteurs ayant permis ce progrès significatif.

Facteurs ayant permis l'évolution dans le troisième exercice

Nous retenons principalement trois facteurs :
- le rôle de la manipulation ;
- le contexte inchangé sur l'ensemble des séances ;
- la non institutionnalisation d'une procédure particulière.

Le rôle de la manipulation

Dans cette séquence, la manipulation revêt deux formes, citées dans les documents d'application de mathématiques.

- **Elle permet de proposer un contexte compréhensible aux élèves** ; contexte à partir duquel des problèmes pourront être proposés. Les élèves peuvent ainsi s'engager dans le problème puisqu'ils comprennent la tâche. « *Le travail mathématique est évidemment un travail de l'esprit, mais celui-ci, en particulier à l'école élémentaire, s'exerce souvent à partir de questions posées sur des objets ou sur des expériences. [...] Il faut cependant se*

convaincre que ce n'est pas la manipulation d'un matériel qui constitue l'activité mathématique, mais les questions qu'elle suggère. »[3]
Ainsi, à la première séance, les élèves disposent du matériel et effectuent plusieurs parties ce qui permet à l'enseignante de s'occuper particulièrement des binômes pour lesquels la signification des termes « plus que » et « moins que » pose un problème. A l'issue de cette séance, tous les élèves savent remplir leur feuille de score en utilisant les jetons. Il est à noter que certains groupes abandonnent les jetons lors des dernières parties de la séance pour compléter la feuille de score. Sans consigne particulière, ils utilisent le calcul qu'ils considèrent plus économique que la manipulation avec les jetons.

- **Elle prend un rôle de validation d'une réflexion**. Le matériel sert à vérifier les calculs effectués. « *Ce n'est pas la manipulation elle-même qui constitue l'activité mathématique, mais les questions qu'elle suggère et l'activité intellectuelle que doivent développer les élèves pour y répondre lorsque le matériel n'est plus disponible.* »[4].« *Il convient ainsi de bien distinguer les tâches de constat ou d'observation, qui invitent l'élève à lire une réponse sur le matériel, des tâches d'anticipation qui lui demandent d'élaborer, de construire par lui-même une réponse dont il pourra ensuite vérifier la validité en revenant à l'expérience.* »[5]
  A partir de la deuxième séance et à toutes les séances suivantes, les jetons n'interviennent qu'au moment de la mise en commun pour vérifier les résultats énoncés par certains élèves et présentés au tableau. Cette phase permet d'analyser les erreurs effectuées. Elle revêt une importance cruciale car elle permet de reprendre les calculs effectués par les élèves en les expérimentant. A la deuxième séance, les résultats montrent qu'avant la mise en commun, la compréhension du contexte dans la première séance ne suffit pas à tous les élèves pour progresser. Néanmoins, pour certains, la première séance leur a permis de réussir les exercices sans manipulation alors qu'ils échouaient à l'évaluation diagnostique.

Exercice	Evaluation diagnostique	Séance 2 avant la mise en commun	
Calcul d'une mesure, la recherche s'effectue dans le sens de la comparaison.	14 réussites (67%) 7 échecs (33%) 1 absent	16 réussites pour les 5 parties 1 réussite pour 4 parties (une erreur de calcul mais le raisonnement est juste)	(77%)
		1 réussite pour 4 parties (une erreur où l'élève calcule 3 de plus au lieu de 3 de moins 4 échecs (plus de deux erreurs)	(23%)

L'enseignante favorise les discussions lors des mises en commun. Par exemple, à la séance 2, elle propose, à l'ensemble de la classe, 15 comme résultat à la partie indiquée dans le tableau ci-dessous. Ce résultat provient d'une des feuilles de score qu'elle a relevées.

[3] Document d'application des programmes de mathématiques, Cycle 2 p. 11 – SCEREN (2002)
[4] Programmes de l'école élémentaire p.102 – CNDP (2002)
[5] Document d'application des programmes de mathématiques, Cycle 2 p. 11 – SCEREN (2002)

Feuille de score			
	Nombre de jetons du premier joueur (point rouge)	Carte tirée par le second joueur (point bleu)	Nombre de jetons du second joueur (point bleu)
3ème partie	***12***	***3 de moins que le joueur 1***	

Dès l'énoncé de ce résultat, beaucoup d'élèves exclament leur désapprobation. L'enseignante interroge une élève qui l'a donné sur sa feuille de score. Celle-ci répond qu'elle n'est pas d'accord mais elle ne peut argumenter. D'ailleurs, plus aucun élève ne se dit d'accord avec ce résultat. Les désapprobations exprimées très fort par les autres ont dû les faire douter de leur réponse ou pour le moins les conduire à ne pas oser l'assumer. L'enseignante donne la parole à une élève qui avait fait une erreur de calcul. Celle-ci explique que le second joueur a tiré « *3 de moins que le premier joueur* » alors, « *en fait, on enlève 3, ça fait 8* ». Là encore, beaucoup d'élèves répliquent immédiatement pour dire « *9* », mais l'élève persiste en répétant « *8* ». L'enseignante engage ainsi la discussion sur les procédures possibles pour trouver le résultat : « *mettre 12 dans sa tête et enlever 3* » ; « *compter à reculons avec ses doigts* » ; « *dessiner 12 jetons et en effacer 3* »…

Le contexte inchangé sur l'ensemble des séances

Sur les 5 élèves échouant à la séance 2 avant la mise en commun, 3 élèves ne donnent pas l'impression de progresser au fil des séances. A la dernière séance, qui reprend les trois types d'exercices, deux de ces élèves se trompent sur les 5 parties et le troisième sur 4.
Pourtant, parmi ces trois élèves, deux réussissent deux des trois exercices de l'évaluation finale. Nous pensons que le contexte inchangé pendant cinq séances rendant possible la vérification, après les calculs, avec le même matériel, permet à ces élèves de progresser. Tous les élèves n'ont pas le même rythme d'apprentissage et modifier souvent le contexte crée un obstacle supplémentaire pour les élèves moins rapides ; ils doivent en effet s'approprier un nouveau contexte tout en découvrant une nouvelle procédure. L'un de ces élèves s'aide d'un dessin à l'évaluation finale ce qu'il ne faisait pas à l'évaluation diagnostique. Un autre fait appel à une opération qu'il écrit explicitement.
La dernière mise en commun a été particulièrement centrée sur les élèves en difficulté. Les résultats de l'évaluation finale, proposant un contexte différent, montre que travailler sur le même contexte dans le temps de l'apprentissage n'empêche pas un transfert ensuite, quand le problème utilise un contexte différent.

Toutefois, deux nuances méritent d'être précisées :
- des situations telles que « *la boîte jaune* » (Ermel CE1), utilisant des contextes différents, sont régulièrement travaillées ;
- la mise en commun s'est focalisée sur les procédures mises en jeu, le contexte n'étant que le prétexte à la découverte de ces procédures.

« *Tout apprentissage se fait dans la durée, suppose du temps, du temps pour construire les concepts, du temps pour les apprivoiser, en connaître les diverses propriétés et du temps pour en éprouver l'efficacité, pour traiter de nouvelles situations. Cette idée du temps qu'il faut laisser au temps d'apprendre n'est pas toujours insuffisamment prise en compte dans l'enseignement.* » (Charnay, 1996)

La non institutionnalisation d'une procédure particulière

Si la mise en commun a porté essentiellement sur les procédures effectuées, elle n'a pour autant fait ressortir aucune procédure comme plus efficace qu'une autre. En effet, les élèves étaient en voie de compréhension des problèmes de comparaison de mesures ; aussi, il aurait été prématuré, pour beaucoup d'entre eux, d'institutionnaliser une procédure au détriment d'autres. Ces élèves n'auraient pu s'approprier cette procédure encore trop « experte » pour eux (en reprenant les termes de Vygotski (1937), on dirait que la procédure est hors de leur zone de proche développement).

Par exemple, certains élèves ont eu besoin de l'ardoise pour schématiser les jetons à toutes les séances. Ainsi, ils dénombraient de un en un le résultat à déterminer à partir de leur dessin. Les procédures utilisées à l'évaluation finale montrent que les élèves n'emploient pas tous les mêmes. Certains font un dessin (ils représentent les billes) ; d'autres schématisent (ils s'aident de croix schématisant les billes) ; d'autres calculent avec leurs doigts ; enfin, certains inscrivent une opération.
Quatre élèves notent l'opération 12 + 4 = 16 au troisième exercice alors que celui-ci incite fortement à la soustraction dans sa formulation (*exercice 3 : Jérémie a 12 billes. Il a 4 billes de moins que Philippe. Combien Philippe a-t-il de billes ?*). Il est à remarquer que, parmi ces quatre élèves, un fait partie des élèves en échec jusqu'à la cinquième séance.

Les progrès considérables à cet exercice laissent perplexe devant la régression au deuxième (calcul de la comparaison). L'analyse de ce dernier permet de comprendre cet état de fait.

Facteur ayant provoqué la chute des réussites dans le deuxième exercice

Les résultats globaux des réussites et des échecs au deuxième exercice (9 réussites ; 13 échecs) ne rendent pas compte des raisonnements des élèves (*exercice 2 : Mohamed a 11 billes. Eric a 5 billes. Combien Eric a-t-il de billes de moins que Mohamed ?).*

En fait, les erreurs sont plus souvent dues à une mauvaise compréhension de la question, ou plus exactement à une réponse juste mais ne répondant pas exactement à la question. De plus, la question soulève des ambiguïtés sur ce que l'on peut considérer comme réponse juste.
En effet, la question est formulée ainsi : « *Combien Eric a-t-il de billes de moins que Mohamed ?* ». Quatre élèves répondent simplement 6, sans préciser 6 de moins. Ces réponses ont été considérées comme justes puisque la question précise déjà qu'Eric a moins de billes que Mohamed. Quatre élèves répondent : « *Eric a 6 billes* ». Ici, leurs réponses par rapport à la question posée ne permettent pas de savoir s'ils considèrent qu'Eric a 6 billes en tout ou 6 billes de moins que Mohamed. Nous les avons classées en tant qu'erreurs, mais le doute subsiste. Deux élèves, classés aussi dans les échecs, raisonnent correctement, mais rédigent leur réponse par rapport à Mohamed en disant que Mohamed a 6 billes de plus qu'Eric. Ils ne répondent pas tout à fait à la question bien que leurs réponses soient exactes.
Pour quatre élèves, une ambiguïté subsiste puisqu'ils répondent que Mohamed a 6 billes sans préciser de plus que qu'Eric. Ces réponses ont été classées comme incorrectes, mais seule, une explicitation orale aurait permis de connaître la représentation des élèves. Une élève répond qu'Eric a 5 billes de moins. A-t-elle fait une erreur de calcul ou a-t-elle repris le nombre de billes d'Eric ? Le choix des nombres très proches ne permet pas de conclure. Enfin, deux réponses d'élèves (15 et 16) ne prêtent pas à confusion, elles sont inexactes.

Les progrès dans les deux autres types d'exercices nous laissent penser que les élèves n'ont pas régressé dans le deuxième exercice comme on pourrait le penser avec le seul constat des scores mais que la formulation de l'énoncé est à revoir. On pourrait ainsi le libeller sous la forme : « *Mohamed a 13 billes. Eric a 5 billes. Eric a-t-il plus ou moins de billes que Mohamed et combien ?* »

Conclusion

L'identification des différentes classes de problèmes relatives aux structures additives permet à l'enseignant de diversifier les types d'exercices proposés afin d'engager une véritable démarche de résolution de problème chez les élèves. Comme le dit Vergnaud (1994), « *un champ conceptuel bien analysé est une mine pour le choix des situations à proposer aux élèves, et pour les aides susceptibles de leur être apportées.* »[6] En effet, proposer toujours des exercices du même type risque d'induire chez les élèves un automatisme dans la résolution qui bloque, ensuite, toute réflexion sur un problème nouveau. A ce titre, les exercices de comparaison de mesures doivent être proposés au cycle 2, à côté des exercices de transformation de mesure ou de composition de mesures qui sont souvent privilégiés car ce sont ces exemples qui viennent en premier pour caractériser l'addition ou la soustraction. Toutefois, la comparaison de mesures étant plus délicate à acquérir pour les élèves, il est important d'être attentif aux situations proposées : celles-ci doivent permettre aux élèves de s'engager dans le problème puis de progresser dans la résolution. La séquence présentée montre que la construction d'une situation est primordiale pour qu'il en soit ainsi, mais qu'elle n'est pas suffisante. Quelques facteurs tels que le rôle de la manipulation, du contexte, des synthèses et mises en commun et l'articulation de ces différents éléments sont à prendre en compte.

Il reste ensuite à envisager le réinvestissement de ces connaissances dans des problèmes du même type, dans lesquels les nombres plus grands ne permettent plus la manipulation ou bien pour lesquels le texte de l'énoncé, en langue naturelle, conduit de façon moins immédiate à la représentation du problème.

[6] VERGNAUD G.(1994) : p. 187

Références bibliographiques

CHARNAY R. (1996) : *Pourquoi des mathématiques à l'école ?* - ESF

FAYOL M. (1990) : *L'enfant et le nombre* - Delachaux et Niestlé

FENICHEL M., PFAFF N. (à paraître octobre 2005) : *Donner du sens aux mathématiques. Tome 2*. - Bordas

VERGNAUD G. (1981) *L'enfant, la mathématique et la réalité* - Peter Lang

VERGNAUD G. (1994) : *Les quatre opérations de l'arithmétique sont-elles quatre ?* - Enseigner, apprendre, comprendre. Les entretiens Nathan. Actes IV. Nathan

VYGOTSKI L. (1937) : *Pensée et langage*. - La Dispute 3ème édition 1998