UN « PROBLEME OUVERT » EN 6ème

POUR LANCER UN DEFI A DES CLASSES DE CYCLE 3

Marcel COMBÈS
Professeur de mathématiques - Coordonnateur REP
Collège Marthe Lefèvre - Saint-Quentin (Aisne)

Depuis quelques années, nous travaillons dans le cadre d'une action liaison école-collège autour du concours KANGOUROU. Nous proposons aux élèves de dernière année de cycle 3 de concevoir, sous la responsabilité de leurs enseignants, des exercices typés Kangourou (QCM avec 5 propositions). Confiés aux élèves de 6ème du collège, ils sont triés suivant leur degré de difficulté. Enfin, vingt-quatre d'entre eux sont choisis par les conseillers pédagogiques de circonscription et les coordonnateurs REP. L'épreuve définitive est alors mise en page. Tous les élèves de CM2 du secteur sont ensuite accueillis au collège, au mois de janvier, pour passer cette épreuve à blanc du concours Kangourou.

Lors d'une réunion préparatoire, début octobre, les évaluations nationales corrigées, saisies et analysées sont l'occasion pour les enseignants de repérer des points précis sur lesquels il serait intéressant d'avoir des exercices à intégrer à ce concours. Parallèles et perpendiculaires y sont malheureusement à l'honneur.

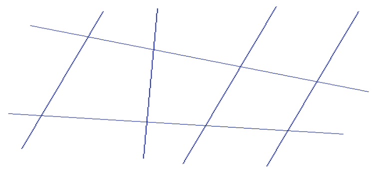
Des exercices et des résultats à exploiter

Les trois premiers exercices présentés en annexe 1 ont été proposés par des classes de CM2 dans le cadre de cette action. Les deux premiers furent retenus pour l'épreuve de janvier 2003 (résultats joints pour les deux REP de Saint-Quentin participant au projet).
Les taux de réussite aux deux exercices retenus montrent que les compétences "*reconnaître deux droites perpendiculaires* " ou "*reconnaître des droites parallèles*" ne sont encore pas maîtrisées. Parfois, il y a confusion entre les deux mots, mais de manière générale ce sont les relations entre objets géométriques qui ne sont pas ancrées sur des **représentations perceptives** correctes. Pour favoriser l'ancrage de celles-ci, on peut utiliser par exemple le dessin de deux droites perpendiculaires sur papier-calque ; de même, l'utilisation simultanée d'un faisceau de nombreuses droites parallèles entre elles sur transparent peut avoir un objectif similaire et favoriser la différenciation des deux concepts.

La relation entre objets géométriques apparaît toutefois dans le vocabulaire utilisé dans le troisième exercice (non retenu pour l'épreuve) ; on s'y intéresse en effet à des "*paires de* *droites*". Le deuxième exercice retenu pour l'épreuve, proposé tel quel par une classe de CM2, est toujours source de beaucoup de discussions informelles autour de l'interrogation suivante : " *Une droite peut-elle être parallèle à elle-même ?* " Lors de l'épreuve 2004, le premier exercice portait à nouveau sur le dénombrement de droites parallèles (dans un faisceau de six droites).

Combien y a-t-il de droites parallèles ?

A / 1 B / 2 C / 3 D / 4 E / 5



Son faible taux de réussite pose toujours la même interrogation.

Répartition des réponses	A	B	C	D	E	NR	Total
REP 2	28	48	**19**	5	4	2	106

L'aspect relationnel du parallélisme (implicite dans l'énoncé) semble faire défaut à un quart des élèves qui répondent qu'une seule droite est parallèle. Pour les 48 élèves ne percevant que deux droites parallèles sur la figure, plusieurs hypothèses peuvent être envisagées :
- l'aspect relationnel du parallélisme est figé quantitativement : on ne peut avoir que deux droites parallèles entre elles comme on ne peut avoir que deux droites perpendiculaires entre elles (on se restreint évidemment au plan géométrique) ;
- la notion de parallélisme de droites est associée à celle de droites «équidistantes» et les trois droites de la figure ne sont pas parallèles car les distances d'une droite à l'autre ne sont pas les mêmes.

L'utilisation de logiciels de géométrie dynamique doit permettre de déstabiliser ces représentations incomplètes ou erronées et favoriser une représentation plus cohérente. Toutefois, si l'on ne dispose pas de tels logiciels, différentes activités sont susceptibles de faire évoluer ces représentations. Par exemple, en activité de recherche, on peut demander aux élèves de résoudre le problème suivant :

Une figure est constituée de vingt droites.
Si on choisit au hasard deux de ces droites,
on constate qu'elles sont ou parallèles ou perpendiculaires.
Combien de figures différentes peut-on avoir ?

C'est ce problème que j'ai proposé aux élèves de deux de mes classes de 6ème au cours de l'année scolaire 2003/2004. Il a été ensuite proposé dans des classes de cycle 3 dans le cadre d'une action école-collège centrée sur des défis mathématiques.

Résolution du problème dans une classe de 6ème

Il a été proposé en cours d'année, bien après l'apprentissage sur les notions de points, de droites et de directions de droites. Les deux activités présentées en annexe 2 et 3 illustrent le travail proposé aux élèves pendant cet apprentissage.

Les consignes de travail ont été les suivantes :
- rechercher individuellement la solution pendant 10 minutes ;
- se regrouper avec son voisin pour échanger et continuer la recherche à deux ;

- lorsque le défi est résolu, réaliser une affiche présentant la recherche menée, la solution trouvée et sa justification ; aucune figure ne devra être représentée.

Pendant la recherche, mon rôle a consisté à négocier la validation ou l'invalidation des productions des élèves ou des groupes d'élèves, en leur demandant par exemple de vérifier à l'aide des outils (équerre ou modèle de droites perpendiculaires sur transparent) la perpendicularité de certaines droites tracées, ou en sollicitant des connaissances travaillées mais insuffisamment ancrées telles que la distinction sur un dessin entre droite et segment. Le recentrage sur les différentes contraintes de la question posée (*La figure tracée est-elle constituée de droites ? En a-t-on 20 ? Deux d'entre elles étant choisies, sont-elles parallèles ? perpendiculaires ?*) leur permettait d'appréhender au fur et à mesure de leur travail ce que pouvait être une figure solution possible du problème.

Voici quelques unes des premières productions individuelles :

- un quadrillage constitué de 10 droites « horizontales » et 10 droites « verticales » (3 ou 4 élèves) pas forcément équidistantes (à aucun moment et dans aucun groupe, le problème de l'équidistance n'a été soulevé) – *figure 1 - ;*
- une série de 19 droites, parallèles entre elles, coupées par une droite perpendiculaire (1 élève) – *figure 2* - ;
- un « quadrillage » constitué d'une série de 10 parallèles et d'une autre série de 10 parallèles dans la direction perpendiculaire à la première (1 élève) – *figure 3* - ;
- 10 paires de droites (ou segments ?) perpendiculaires entre elles (5 à 6 élèves) – *figure 4* - .
- des productions similaires à la dernière mais avec un mélange de paires de droites « horizontales » et « verticales » et de paires de droites « inclinées », non forcément perpendiculaires entre elles, proposées par certains élèves en grande difficulté.

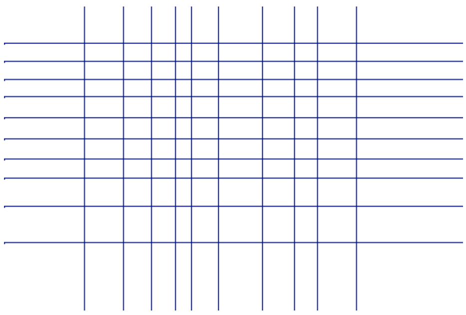


figure 1

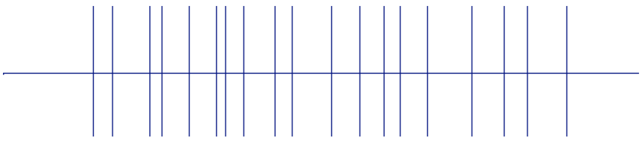


figure 2

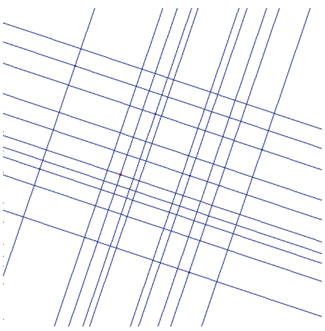


figure 3

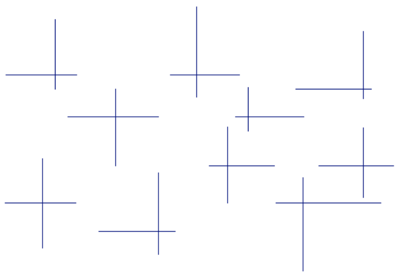
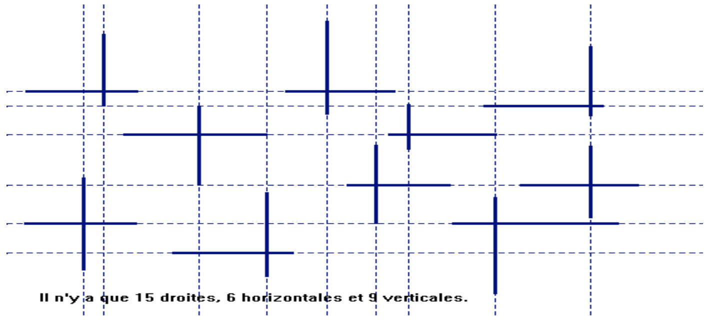


figure 4

Dans le cas de la figure 4, l'invalidation par le prolongement des traits et le recomptage des droites a permis à ces élèves d'envisager d'autres solutions possibles comme, par exemple, 6 droites « horizontales » et 14 droites « verticales ».

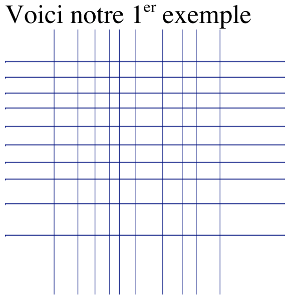


La mise en commun «locale» a amené certaines paires d'élèves à changer de cadre et à transformer le problème géométrique en un problème numérique : « *Comment faire 20 en ajoutant 2 nombres entiers ?* ». Pour ces groupes, à partir de cet instant, le défi était relevé. Il ne leur restait plus qu'à rester vigilant pour passer l'obstacle de l'équivalence de 19 + 1 et 1 + 19 dans le contexte géométrique du défi.
Les groupes les plus avancés ont eu le temps dans cette première séance de réaliser leurs affiches. Le plus souvent, seule l'explicitation de la solution était présente, la description de la démarche n'apparaissait pas. Dans certains groupes, la relecture de la troisième consigne (écrite au tableau) - *« Lorsque le défi est résolu, réaliser une affiche présentant la recherche menée, la solution trouvée et sa justification. Aucune figure ne devra être représentée »* - a permis l'amélioration du contenu de l'affiche. A la demande des élèves jugeant le schéma utile pour s'expliquer, cette troisième consigne a dû être aménagée, en autorisant au moins une figure pour illustrer la première partie de leur recherche.

Voici quelques productions finales :

<table>
<tr>
<td>Les 11 réponses des 20 droites sont
20 droites 0 droite
19 droites 1 droite
18 droites 2 droites
17 droites 3 droites
16 droites 4 droites
15 droites 5 droites
14 droites 6 droites
13 droites 7 droites
12 droites 8 droites
11 droites 9 droites
10 droites 10 droites

On a commencé par faire les dix droites verticales et dix droites horizontales et on a trouvé que 15 droites verticales et 5 droites horizontales n'est pas pareil que dix droites verticales et dix droites horizontales</td>
<td>V = Vertical
H = Horizontal
Solution : Il y a 11 solutions possibles car on peut mettre
19 H + 1 V
18 H + 2 V
17 H + 3 V
16 H + 4 V
15 H + 5 V
14 H + 6 V
13 H + 7 V
12 H + 8 V
11 H + 9 V
10 H + 10 V
20 H
on ne peut pas continuer car en géométrie, il n'y a pas de sens.

Au début , on a fait 10 V et 10 H puis 15 V 5 H . Puis on s'est rendu compte qu'en géométrie faire l'inverse c'est la même chose.</td>
<td>Au début de notre recherche, nous avons fait des droites horizontales et verticales.
Voici les résultats :
10 et 10 | 15 + 5
11 et 9 | 16 + 4
12 et 8 | 17 + 3
13 et 7 | 18 + 2
14 et 6 | 19 + 1
| 20 + 0
Voici notre 1er exemple

Tous les exemples que nous avons faits font au total 20.</td>
</tr>
</table>

Les différentes productions (complètes ou non) ont été reprises lors de la séance suivante dans le but d'obtenir un support définitif pour le défi à envoyer aux classes de cycle 3.
Les obstacles liés aux termes de direction de droites ont été relevés : les termes « horizontal » et « vertical » ne relèvent pas des mathématiques mais de la physique (le fil à plomb).
Les élèves ont estimé qu'il avait été difficile pour eux d'expliquer sans s'aider d'un dessin et que cela le serait d'autant plus pour leurs camarades de CM2. Il est vrai que cette contrainte avait été imposée pour solliciter un minimum d'écrits de la part des élèves (souvent très difficile à obtenir) et envisager un début de narration de recherche. Aussi, ont-ils décidé de modifier la consigne en proposant d'abord la recherche d'une solution.

Enoncé du défi proposé aux classes de CM 2

Une figure est constituée de 20 droites. *Chaque fois que tu en choisis deux au hasard,* *elles doivent être ou parallèles ou perpendiculaires.* *Trace une telle figure* *puis* ***trouve le nombre de figures différentes qu'on peut avoir.***

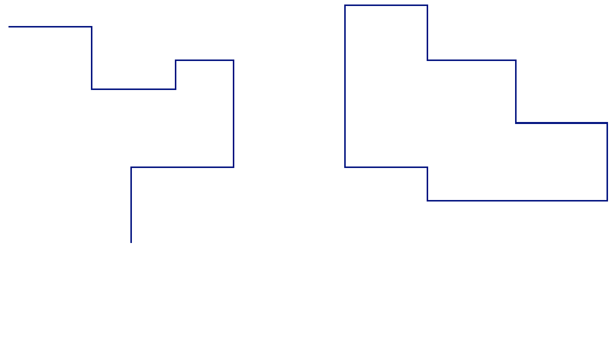
Enfin, une généralisation du problème a été envisagée. J'ai demandé de compléter les phrases suivantes, en justifiant oralement les réponses données:

« Pour 20 droites, il y a 11 solutions. »
« Pour 40 droites, il y a …. solutions. »
« Pour 10 droites, il y a …. solutions. »
« Pour 100 droites, il y a …. solutions. »
« Pour 21 droites, il y a …. solutions. »
« Pour 47 droites, il y a …. solutions. »

Cela a permis aux élèves d'être confrontés à une situation de « non proportionnalité» et pour certains élèves d'expliciter une formule telle que *«Il suffit de prendre la moitié du nombre de droites puis d'ajouter 1 »* dont il a fallu trouver une adaptation dans le cas d'un nombre impair de droites.

Résolution du problème dans une classe de CM2

Les classes de Cycle 3 ont reçu le défi au mois d'avril 2004. Les élèves de la classe de CM2 de l'école Henri Arnould ont eu l'occasion de relater le déroulement de leur recherche lors d'une séance que j'ai co-animée avec leur instituteur au mois de juin.
La recherche s'est déroulée sur une période assez longue et par séances de durée variable en fonction des idées qui émergeaient et des interrogations qu'elles suscitaient.
Les premiers dessins proposés par les élèves ont été des lignes brisées ouvertes ou fermées :



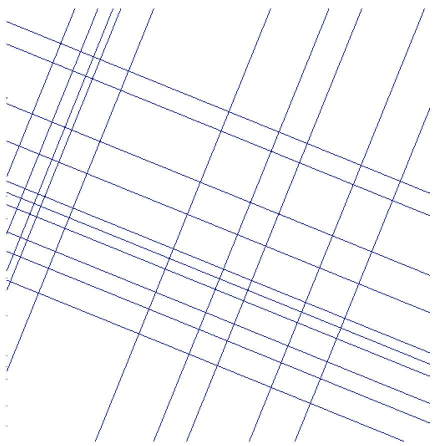
Le souci de validation d'une solution d'un problème par un retour à l'énoncé, pratique installée par l'enseignant de la classe, fit apparaître deux questionnements :

- ***les lignes fermées sont bien des figures mais les lignes non fermées sont-elles des figures ?***
- ***les figures trouvées sont-elles effectivement composées de droites ?***

La première interrogation, à laquelle les élèves ont donné une réponse positive pour ne pas fermer la recherche, permet d'envisager l'hypothèse de la présence d'un lien chez les élèves de cycle 3 entre le terme « figure » et les termes désignant des formes particulières « triangle », « carré », « rectangle », ….
Pour répondre à la seconde interrogation, certains élèves ont proposé d'essayer de résoudre le problème à l'aide de GEOPLAN, logiciel de géométrie dynamique auquel ils avaient été initiés au cours de l'année scolaire[1]. Cette proposition fut retenue et mise en oeuvre.

Lors de la séance, le seul obstacle rencontré (et prévisible) fut la nécessité de créer un nombre suffisant de points pour construire les vingt droites. Cet obstacle franchi avec plus ou moins de détermination (création de nombreux points, puis création des droites pour certains élèves ou création des points au fur et à mesure des besoins pour d'autres), les élèves ont rapidement produit des figures satisfaisant aux contraintes du problème posé en utilisant la commande de création de lignes droites parallèles ou perpendiculaires. L'objectif de l'enseignant étant de trouver une solution au défi, les différents choix des élèves, bien qu'observés, n'ont été ni relevés ni analysés.

Une nouvelle solution au problème posé apparut alors ; les élèves la désignèrent par le terme «quadrillage» et prirent ensemble la décision d'intégrer ces « quadrillages » dans la notion de figure.



Les premières solutions envisagées, invalidées par cette nouvelle figure, furent modifiées en remplaçant les segments par des droites (par prolongement). Cela mit en évidence que certaines droites portaient plusieurs segments. Il y avait donc parfois moins de droites que de segments. La nécessité, comme dans la classe de 6ème, de compléter la figure par de nouvelles droites permit d'envisager la version numérique de ce problème « *Combien de façons d'obtenir 20 en ajoutant 2 nombres entiers ?* ».
Par contre, contrairement à la classe de 6ème, l'écartement des droites fut une variable prise en compte dans la proposition finale. Pour certains élèves, changer l'écartement des droites

[1] Le logiciel GEOPLAN avait été utilisé au cours du 3ème trimestre 2002/2003 pour résoudre un conflit engendré par un exercice de comptage de droites parallèles et ayant soulevé le questionnement suivant : « une droite peut-elle être parallèle à elle-même ? ». Au cours de l'année scolaire 2003/2004, des animations pédagogiques ouvertes aux enseignants de cycle 3 de la ZEP ainsi qu'aux enseignants du collège ont été mises en place ; elles furent bien sûr accompagnées d'une initiation des élèves à ce logiciel .

faisait changer la figure ; d'autres estimant que la figure était la même puisqu'il y avait le même nombre de droites.
La classe proposa donc deux solutions au défi :

Solution 1	*Il y a 10 figures possibles*[2] *:*	
	1 droite	*et 19 droites perpendiculaires à cette droite*
	2 droites parallèles	*et 18 droites perpendiculaires à ces droites*
	3 droites parallèles	*et 17 droites perpendiculaires à ces droites*
	4 droites parallèles	*et 16 droites perpendiculaires à ces droites*
	5 droites parallèles	*et 15 droites perpendiculaires à ces droites*
	6 droites parallèles	*et 14 droites perpendiculaires à ces droites*
	7 droites parallèles	*et 13 droites perpendiculaires à ces droites*
	8 droites parallèles	*et 12 droites perpendiculaires à ces droites*
	9 droites parallèles	*et 11 droites perpendiculaires à ces droites*
	10 droites parallèles	*et 10 droites perpendiculaires à ces droites*
Solution 2	*Il y a une infinité de solutions si on prend en compte l'écartement des droites.*	

Analyse comparative des deux recherches

La recherche n'a pas été gérée de la même façon en cycle 3 et en 6ème, en particulier en raison des contraintes de gestion du temps, obligatoirement différentes dans ces deux niveaux. Cependant, certains points méritent d'être relevés.

L'évolution du concept de figure

Dans la classe de cycle 3, une figure est initialement une figure fermée et limitée. Le souci de validation de la solution trouvée par un retour à l'énoncé permet au fur et à mesure de la recherche d'ouvrir les perspectives à la figure ouverte puis à la figure illimitée. L'objet géométrique élémentaire ayant ces deux caractéristiques est la droite.
Dans la classe de 6ème, ces possibilités pour une figure semblent déjà présentes.

Parmi les hypothèses susceptibles d'expliquer ce fait, deux semblent envisageables :
- **La place de l'utilisation des logiciels de géométrie** dans les situations d'apprentissages. En effet, comme le montrent les activités citées en annexe, ces élèves de 6ème ont une pratique « régulière » de tels logiciels. De plus, c'est bien ce support qui a permis aux élèves de cycle 3 d'envisager des solutions satisfaisantes et de faire évoluer leurs premières « idées ».
- Les activités de reproduction, de construction ou de description sont beaucoup plus centrées à l'école sur les figures usuelles fermées. Au collège, **le passage d'une géométrie de perception et d'une géométrie instrumentée à une géométrie de déduction** s'opérationnalise en particulier à travers les propriétés relatives des directions de droites et privilégient ainsi l'objet « droite ».

La présence du conflit segment / droite

Quel que soit le niveau de classe (cycle 3 ou 6ème), la distinction conceptuelle de ces deux objets géométriques n'est pas encore disponible chez tous les élèves. Au même titre que

[2] La onzième solution (0 ; 20) ne sera avancée par un élève que lors de la séance co-animée de présentation de la recherche. Sa validité sera argumentée par un autre élève par la présence du mot « ou » dans l'énoncé.

l'utilisation de l'outil informatique, de telles situations favorisant l'émergence du conflit permettront la stabilisation et la structuration des connaissances des élèves jusqu'à leur hiérarchisation. Nous sommes bien ici sur une connaissance en cours d'acquisition qui se doit d'être travaillée régulièrement tout au long de la scolarité au collège. Ainsi, au cycle central, le travail sur les hauteurs dans un triangle ayant un angle obtus contribuera à cette structuration. Il en est de même de l'activité des points cachés présentée en annexe 2.

Le lien géométrique - numérique de la situation

Quelle que soit la classe, dès que plusieurs figures convenables ont été validées comme solution du problème, leur description analytique (prise en charge sans consigne particulière par les élèves) leur a permis de transférer la situation dans le domaine numérique : « *Quelles sont toutes les sommes de deux nombres ayant pour valeur 20 ?* »
La difficulté, explicite dans la description du travail de la classe de cycle 3, à envisager la somme de 20 et 0 a été aussi présente dans la classe de 6ème.
Nous pouvons aussi remarquer qu'un retour à la situation géométrique donne un sens particulier à la commutativité de l'addition. En écrivant sur leur affiche « *puis on s'est rendu compte qu'en géométrie faire l'inverse c'est la même chose.* », ce groupe d'élèves a voulu indiquer que les directions « physiques » qu'ils avaient privilégiées dans leur recherche et dans leur compte-rendu n'avaient guère d'importance. Il leur manquait certainement un terme tel que « *direction* » pour exprimer leurs résultats sous une forme du type « 10 droites dans une direction et 10 droites dans la direction perpendiculaire». C'est évidemment le concept de « direction de droites» qui s'amorce ici.

Le problème ouvert comme situation de remédiation

Le terme « problème ouvert » a été introduit par une équipe de l'IREM de Lyon[3] pour évoquer une catégorie de problèmes destinés à mettre en route, avec les élèves, une démarche scientifique : faire des essais, conjecturer, tester, prouver.
Elle propose la définition suivante :

Un problème ouvert est un problème qui possède les caractéristiques suivantes :

- *l'énoncé est court ;*
- *l'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de questions intermédiaires ni de questions du type «montrer que » ; en aucun cas, cette solution ne doit se réduire à l'utilisation ou l'application immédiate des derniers résultats présentés en cours ;*
- *le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité ; ainsi, peuvent-ils prendre facilement " possession " de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre- exemples.*

Cette situation de recherche possède les caractéristiques de ce type de problème. Pendant les séances relatives à cette recherche, la grande majorité des élèves ont été actifs.

Même si la situation n'était pas en lien avec un objectif notionnel directement lié aux programmes d'enseignement et à la progression annuelle, celle-ci a permis :

- à certains élèves, d'opérer efficacement un changement de cadre pour solutionner un problème ;

[3] Arsac, Germain et Mante, (1991) : *Problème ouvert et Situation-problème*.- IREM de LYON

- à d’autres, de faire émerger certains obstacles encore présents (confusion sur le dessin entre droite et segment, non maîtrise de la notion de perpendicularité, prépondérance du schéma proportionnel ….).

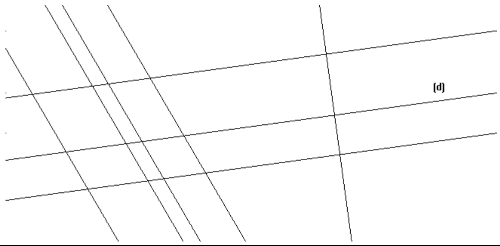
Elle a aussi conduit les enseignants à :
- repérer des acquis ;
- permettre aux élèves d’expliciter en situation l’état de certaines de leurs connaissances et donc remédier « en direct » ;
- faire évoluer la représentation chez l’élève de ce qu’est « faire des mathématiques ».

Ainsi, confronter ses élèves à des problèmes ouverts s’avère être un acte pédagogique pertinent. C’est un moyen de différenciation d’apprentissage, avec un support identique pour tous les élèves d’une même classe.

Annexe 1

Combien de droites te semblent perpendiculaires à la droite (d) ?

A aucune
B 1 droite
C 2 droites
D 3 droites
E 4 droites

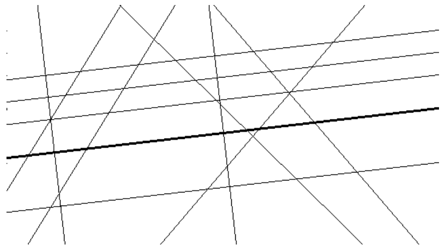


:

Répartition des réponses	A	B	C	D	E	NR	Total
ZEP 1	**7**	**41**	**19**	**30**	**17**	**11**	**125**
ZEP 2	**6**	**31**	**21**	**20**	**6**	**7**	**91**

Combien y a-t-il de droites parallèles à la droite tracée en gras ?

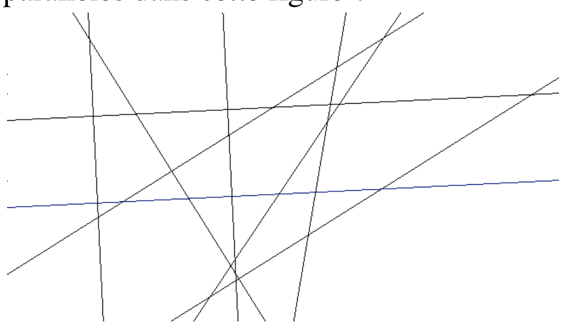
A 2 droites
B 3 droites
C 5 droites
D 6 droites
E 7 droites



Répartition des réponses	A	B	C	D	E	NR	Total
ZEP 1	**22**	**30**	**34**	**6**	**11**	**22**	**125**
ZEP 2	**16**	**20**	**29**	**8**	**10**	**8**	**91**

Combien y a-t-il de paires de droites parallèles dans cette figure ?

A 8 paires
B 7 paires
C 5 paires
D 3 paires
E 2 paires

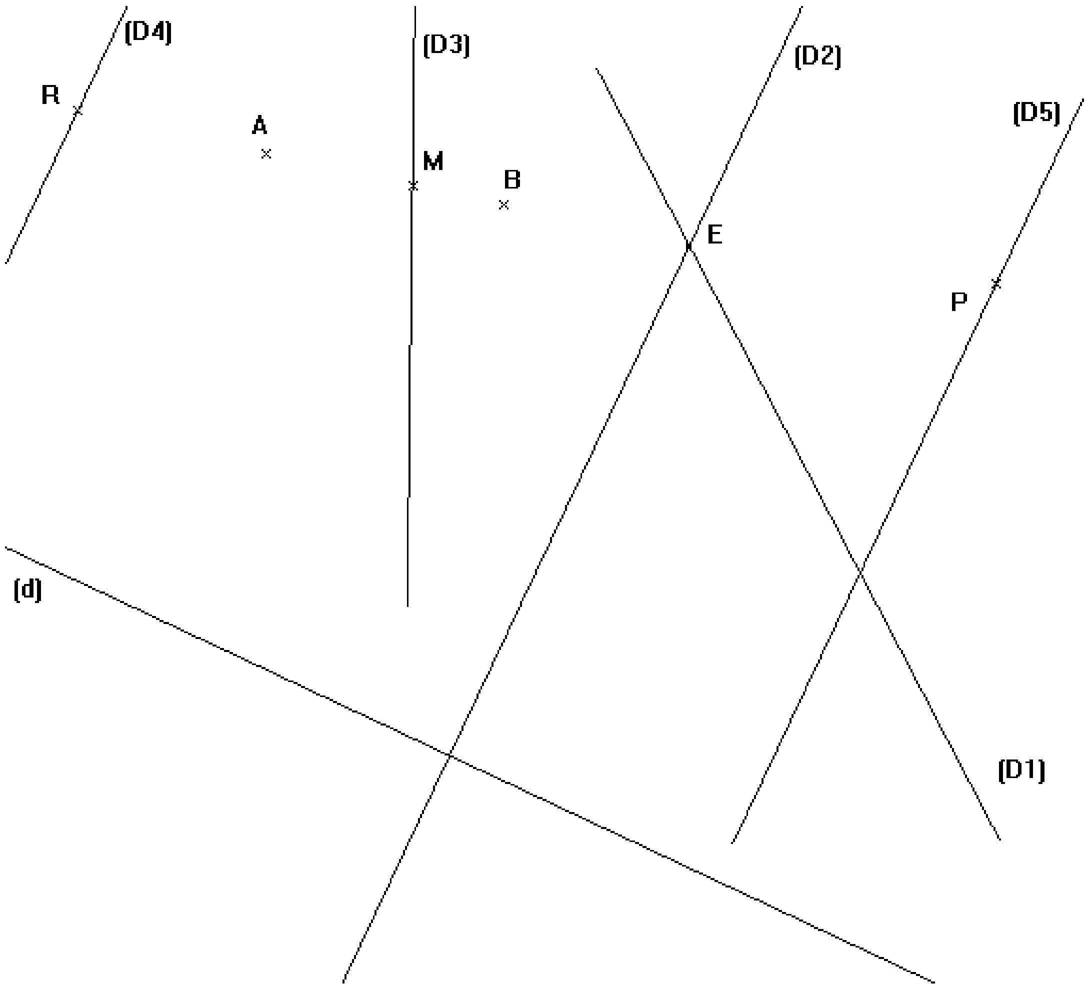


Annexe 2

LES DEUX POINTS CACHES

Voici quatre indices pour te permettre de trouver le premier point caché.

- il est nommé (indice 1)
- il est aligné avec les points A et B (indice 2)
- il est sur une des droites dessinées perpendiculaires à la droite (d) (indice 3)
- il n'est pas le point d'intersection des droites (D_1) et (D_2) (indice 4)



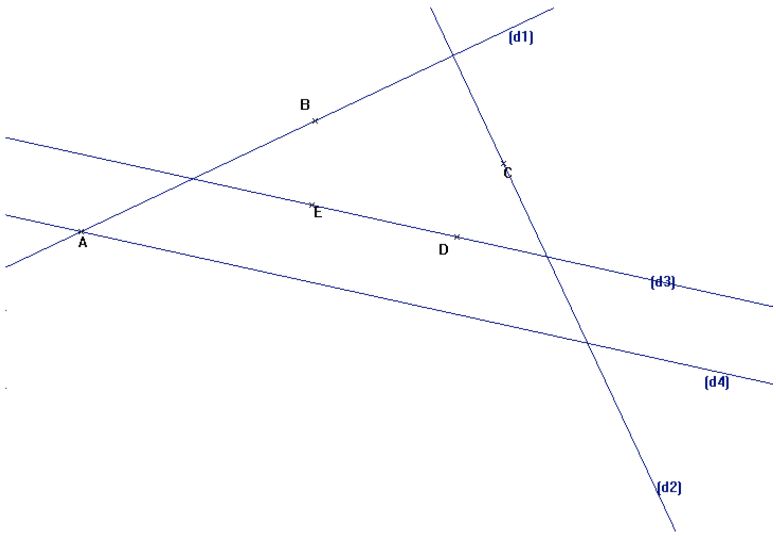
Voici les cinq indices qui vont te permettre de trouver le 2ème point caché

- Il n'est pas nommé (indice 1)
- Il n'est pas aligné avec les points A et B (indice 2)
- Il est sur une des droites dessinées perpendiculaires à la droite (d) (indice 3)
- Il est sur la droite (D1) (indice 4)
- Il n'est pas sur la droite (D5) (indice 5)

Quand tu l'auras trouvé, tu le nommeras L.

Annexe 3

1°) Observer et décrire la figure géométrique ci-dessous



2°) Reproduire en respectant les relations observées ci-dessus les quatre droites (d1), (d2), (d3) et (d4) pour chacune des configurations des points A, B , C, D et E de la feuille annexe.

3°) Que se passe-t-il si les cinq points A, B, C, D et E sont alignés ?

Représenter la situation dans le cadre vide de la feuille annexe

4°) Rechercher des configurations des cinq points A, B, C, D et E pour lesquelles seules 2 droites sont confondues.

5°) Construire sur GEOPLAN une telle figure géométrique.

Rechercher les configurations de points qui donnent 2, 3 ou 4 droites confondues.

Feuille annexe (*à agrandir au format A4*)