CONDITIONS NECESSAIRES A L'USAGE DES DESSINS EN GEOMETRIE DEDUCTIVE

Sophie GOBERT
IUFM Pays de La Loire
CREN Université de Nantes

Résumé : Dans cet article nous tentons d'expliciter des connaissances sous-jacentes à l'articulation du visuel et du géométrique. Le propos s'appuie sur une reprise des liens entre « figure » « dessin » et « référent », et sur leur catégorisation. Cet aspect, d'ordre épistémologique, est mis en regard du travail didactique de l'enseignant pour ses choix d'énoncés d'exercices ou de problème en géométrie.
Mots clés : géométrie, dessins, figures, type de problème, mode de validation, conversion, traitement, nécessité, conjectures.

Rappelons le constat fait depuis longtemps par les enseignants de collège et de lycée, et confirmé comme phénomène inhérent à l'apprentissage de la géométrie par de nombreuses recherches en didactique des mathématiques : un grand nombre d'élèves ont un rapport contingent à la géométrie, en particulier aux dessins qui servent de milieu de travail à cette discipline. Ils considèrent les dessins comme des objets de l'espace sensible et rencontrent des difficultés à construire un discours allant au delà de ce qui se voit d'un point de vue perceptif ou instrumenté. Cette prégnance du voir sur le savoir concernant des propriétés de géométrie fait obstacle à l'entrée de ces élèves dans le débat mathématique que constitue la pratique de la démonstration.

Nous proposons dans cet article de poser quelques éléments d'analyse permettant aux enseignants, en amont de la mise en œuvre d'une activité, de cerner des conditions a priori déterminant fortement l'émergence de ce phénomène ou au contraire sa moindre apparition. Nous appuierons nos propos sur deux travaux présentés dans la revue Petit x permettant chacun d'envisager des objets d'étude différents. Les conditions portant sur l'usage des dessins dans le choix d'un énoncé d'exercice seront examinées à la lumière de l'article « Différents types de dessins dans les activités d'argumentation en classe de 5$^{\text{ème}}$ » de S. Coppé, J-L. Dorier et V. Moreau. Les conditions portant sur l'usage des dessins dans l'enchaînement didactique des tâches proposées aux élèves le seront à partir de l'article « Engager les élèves dans une réelle activité mathématique » du groupe IREM d'Aquitaine constitué de A. Berté, J. Chagneau, C. Desnavres, J. Lafourcade, M-C. Mauratille et C. Sageaux. Ces articles comportent suffisamment d'éléments génériques pour les prendre comme supports principaux de notre argumentaire[1].

[1] Pour une plus grande facilité d'écriture et de lecture nous noterons par la suite ILY le groupe d'auteurs constitué par Coppé, Dorier et Moreau de l'IUFM de Lyon, et IAQ de l'IREM d'Aquitaine.

Nous tenterons de dégager des conditions portant sur trois points déterminants du travail des élèves : la lecture des images spécifiques que sont les dessins utilisés en géométrie, la formulation des énoncés de problèmes de géométrie, et les usages de l'environnement spatio-graphique pour la construction de problèmes de géométrie. Ces aspects constitueront les trois parties de l'article, la première et la seconde prendront appui sur l'article d'ILY, la troisième sur celui de IAQ. Nous ne rendrons compte que des principaux éléments de ces travaux utiles à notre étude et renvoyons bien sûr le lecteur aux deux articles pour considérer la richesse plus large des analyses et commentaires de leurs auteurs. La conclusion permettra une mise en évidence des continuités ou des ruptures provoquées par les analyses exposées dans la façon d'appréhender un aspect de l'enseignement de la géométrie au collège.

Il est important au préalable de clarifier selon quelle orientation, modélisante ou discursive, nous envisageons de parler de géométrie. La première se caractérise par un usage des objets et des relations de la géométrie comme des modèles pour résoudre des problèmes spatiaux. La seconde se caractérise par un usage des objets et des relations de la géométrie comme sujets d'un discours organisé selon des règles de déduction et de non contradiction pour créer de nouveaux objets de la théorie. Notre intérêt se polarisera sur le second aspect, et dans ce cadre de la géométrie discursive, appelée parfois théorique ou déductive, nous réfléchirons à l'usage des dessins dans les énoncés et dans les tâches proposés aux élèves. Cette même problématique portant sur l'enseignement de la géométrie comme modèle pour résoudre des problèmes spatiaux fera l'objet d'un autre article. En référence aux cadres actuellement en usage dans ce champ d'investigation notre intérêt concerne ici le travail en géométrie II (Houdement, Kuzniak 1999) et nous utiliserons les notions de problématiques « pratique » et « géométrique » (Berthelot, Salin 2001) pour qualifier des types de rapports entretenus par un individu (élève) à un énoncé ou une tâche à effectuer.

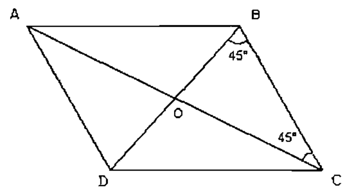
Par ailleurs Laborde et Capponi (1994) ont apporté un éclairage fondamental pour distinguer l'usage des termes « dessin » et « figure » en géométrie : « En tant qu'entité matérielle sur un support, le dessin peut être considéré comme un signifiant d'un référent théorique (objet d'une théorie géométrique ...). La figure géométrique consiste en l'appariement d'un référent donné à tous ses dessins, elle est alors définie comme l'ensemble des couples formés de deux termes, le premier terme étant le référent, le deuxième étant un des dessins qui le représente ; le deuxième terme est pris dans l'univers de tous les dessins possibles du référent. Le terme de figure géométrique renvoie dans cette acception à l'établissement d'une relation entre un objet géométrique et ses représentations possibles. [...] » (p168). Par la suite nous utiliserons ces mots « dessin », « figure » et « référent » selon cette signification.

1. Conditions sur la lecture d'images

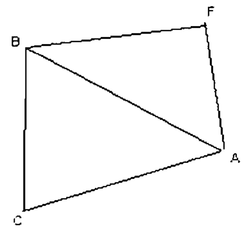
Cette partie développe des éléments d'analyse a priori de lecture d'image pour considérer des conditions nécessaires et fondamentales dans l'apprentissage de l'usage des dessins en géométrie. Elle utilise les supports et les constats exposés par ILY autour de l'utilisation des « dessins faux » dans les manuels, dont voici quelques éléments.

Après avoir clarifié différentes natures de dessins utilisés dans plusieurs manuels de 5ème, ILY s'intéresse en particulier aux « dessins faux » et « dessins à main levée » apparus assez récemment dans les ouvrages de collège et de plus en plus utilisés dans les exercices proposés aux élèves. Il interprète cet usage comme une nouvelle piste dans l'étude de la problématique dessin/argumentation caractérisée depuis longue date par la difficulté prégnante de nombreux élèves à entrer dans un rapport argumentatif aux figures de géométrie. Une partie de l'étude porte sur l'analyse de travaux d'élèves à propos des deux exercices suivants :

<u>Enoncé 1</u>
En utilisant les indications portées sur la figure à main levée, dire quelle est la nature du parallélogramme ABCD. Justifier la réponse.



<u>Enoncé 2</u>
Sur la figure ci-dessous dessinée à main levée, ABC et ABF sont des triangles équilatéraux. Quelle est la nature du quadrilatère AFBC ? Justifier la réponse.



Les indicateurs considérés par les auteurs sont : la réponse donnée ; l'utilisation du dessin (lecture et/ou codage du dessin ; construction d'un nouveau dessin) ; les types d'arguments utilisés (propriétés non appropriées, confusion hypothèse/conclusion, déduction) ; le type de contrôle des propriétés déclarées (recours à la perception, usage d'instrument, usage d'un raisonnement). L'analyse porte sur les productions écrites d'une soixantaine d'élèves, et des bandes vidéo de certains d'entre eux travaillant en binôme dans une salle voisine.

ILY conclut : « Nos expérimentations fournissent des indices laissant penser que cet outil [les dessins faux] pose des difficultés et ne permet pas le passage à une géométrie théorique pour de nombreux élèves. Visiblement, plusieurs élèves en effet, n'arrivent pas à gérer la contradiction entre leur perception et les propriétés annoncées dans l'énoncé. Ce décalage perturbe aussi bien leur analyse perceptive que théorique. [...] La question du rapport entre dessin et argumentation n'évolue donc guère par rapport à la situation classique. » (p35) Ce bilan reste vrai pour les deux exercices. Une différence est cependant remarquée : très rares sont les dessins volontairement réalisés par les élèves pour le premier énoncé, tandis qu'ils sont plus fréquents pour le second.

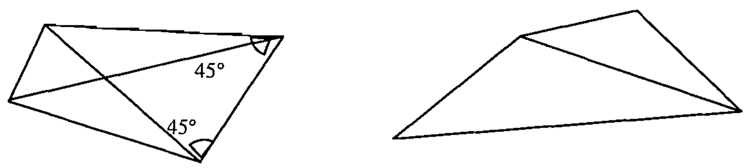
Nous souhaitons montrer, dans les paragraphes suivants, comment *ce constat peut s'expliquer a priori*, en se basant sur les caractéristiques des dessins et de leur lecture, et comment il est certain que ce type d'exercice ne peut pas faciliter l'entrée des élèves dans une démarche d'argumentation.

1.1. Une confusion de fond

ILY définit ce que les auteurs des manuels consultés nomment « dessins faux » : « Ces dessins sont tracés à la règle mais ne respectent pas certaines indications ou dimensions [ou « des propriétés de parallélisme ou d'angle droit »]. Ces dessins sont souvent codés, mais la représentation graphique ne respecte pas nécessairement ces codages. » Le dessin de l'énoncé 1 montre un codage d'angles avec des mesures identiques, sans donner à voir cette propriété de manière ostensive. Le dessin de l'énoncé 2 donne à voir deux triangles ayant un côté commun dont les côtés ne sont visiblement pas isométriques alors que le texte mentionne cette relation comme donnée de l'exercice.

Or ces dessins présentent également d'autres propriétés visuelles « à l'apparence» géométriques. Le dessin 1 en effet donne à voir un parallélogramme et ses diagonales ; le dessin 2 donne à voir un angle droit formé par deux côtés d'un des triangles, propriété géométrique non mentionnée par l'énoncé.
Cette « apparence » des dessins ne relève pas de la définition de « dessin faux » prise pas ILY et pourtant elle entretient une confusion voire une méprise pour celui qui les regarde. La confusion existe aussi pour celui qui tente de clarifier la problématique dessin/argumentation, et qui cherche à comprendre les difficultés des élèves observés par ILY en fonction du premier ou du second élément de « fausseté ».

Pour clarifier cette ambiguïté nous pourrions redéfinir la notion de « dessin faux » comme un dessin où n'apparaissent pas perceptivement des propriétés géométriques données par l'énoncé, et ne faisant pas apparaître non plus de manière ostensive des propriétés à l'apparence géométrique non données par l'énoncé.
Par exemple, les dessins ci-dessous peuvent être considérés comme des « dessins faux » associés aux énoncés 1 et 2 sans induire la prégnance visuelle des dessins 1 et 2.



Ces dessins ne présentent pas de propriété perceptivement géométrique ; pour le premier la présence d'un codage marque la donnée d'une propriété géométrique, fonction remplie par le texte pour le second dessin. Ces dessins correspondent à la définition que donne ILY des « dessins faux », sans être des cas particuliers pour lesquels d'autres propriétés visuelles viennent surcharger leur lecture. Comment les élèves appréhenderaient-ils alors les exercices proposés ? Nous n'en avons pas d'information.

Cependant il serait intéressant de comparer les résultats d'ILY et ceux que l'on obtiendrait selon le même protocole en choisissant les dessins proposés ci-dessus. Nous pensons qu'a priori un plus grand nombre d'élèves, tout en restant dans une problématique pratique, aura des réponses plus justes et des arguments plus proches d'arguments géométriques considérés dans une logique déductive. Pour argumenter de ce propos, et clarifier les analyses ultérieures, des rappels et précisions sont maintenant nécessaires.

1.2. Retour sur des généralités

i) Propriétés

La donnée d'une propriété géométrique d'une figure de géométrie peut se faire selon trois modalités différentes : par un texte dans le registre du langage avec du vocabulaire et des expressions spécifiques ; par un codage sur un dessin, le codage étant par convention un énoncé figuratif d'une propriété géométrique ; ou par invariance dynamique d'un dessin quel que soit le mouvement dans un environnement de géométrie dynamique, c'est un axiome de construction de ce type de logiciels. Une propriété géométrique donnée selon l'une de ces modalités sera appelée selon l'habitude *propriété géométrique.*

Accordons nous sur quelques termes de vocabulaire : *les informations visuelles* d'un dessin (associé à un référent géométrique) sont les éléments perceptibles à la vue. Certaines d'entre elles, *les informations spatiales*, correspondent à des attributs du dessin en tant qu'objet spatial dans l'environnement graphique : orientation, place dans la feuille, taille, mesures de longueurs ... D'autres attributs peuvent donner à voir des relations modélisables géométriquement comme le parallélisme, la perpendicularité, les isométries de longueurs ou d'angles, les axes de symétrie ... qui correspondent ou non aux propriétés géométriques du référent. Nous les appelons *des informations géométriquement signifiante.*

Les informations visuelles non spatiales d'un dessin rattaché à un référent géométrique peuvent alors se catégoriser de la manière suivante : géométriquement signifiante et associée à une propriété géométrique du référent (cas noté SP) ; géométriquement signifiante et non associée à une propriété géométrique du référent (NSP); non géométriquement signifiante et associée à une propriété géométrique de la figure (NSP) ; non géométrique signifiante et non associée à une propriété géométrique du référent.(NSNP).

Voici une illustration sous forme d'un tableau en prenant exemple sur une configuration de deux segments perpendiculaires ou non.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Figure
{(référent ; dessins)}</td><td colspan="2">REFERENT</td></tr>
<tr><td>P
« Deux segments
perpendiculaires »</td><td>NP
« Deux segments
sans propriété spécifique
de perpendicularité »</td></tr>
<tr><td rowspan="2">D
E
S
S
I
N</td><td>S
Information
géométriquement
signifiante</td><td>Cas SP
ANALOGIE Vu/Su</td><td>Cas SNP
CONFLIT Vu/Su</td></tr>
<tr><td>NS
Information
non géométriquement
signifiante</td><td>Cas NSP
CONFLIT Vu/Su</td><td>Cas NSNP
ANALOGIE Vu/Su</td></tr>
</table>

ii) Connaissances

Pour reprendre le vocabulaire utilisé par B. Parzysz et F. Colmez (1993) à propos des dessins d'objets de l'espace, nous dirons que les informations géométriquement signifiantes relèvent du VU, les propriétés géométriques relèvent du SU, et un conflit Voir/Savoir existe dans les cas SNP et NSP. Pour qu'un individu puisse gérer un rapport géométrique avec les dessins utilisés, c'est-à-dire maîtriser les articulations entre le VU et le SU, il doit mettre en œuvre trois connaissances (au moins) rarement explicitées et cependant fondamentales dans l'apprentissage de l'usage des dessins en géométrie :

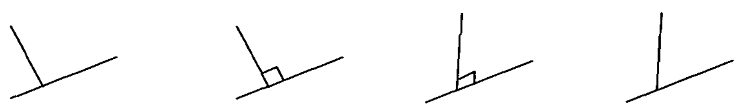
- La première concerne la compréhension de la distinction entre « un référent » et « la diversité des dessins pouvant le représenter ». Ceci détermine la compréhension de ce qu'est une figure en géométrie.

- La seconde concerne les modalités d'information d'une propriété géométrique rappelées ci-dessus : *une propriété géométrique est donnée par un texte, ou par un codage sur un dessin, ou par l'invariance dynamique d'un dessin.*

- La troisième concerne la catégorisation des propriétés proposée également ci-dessus : *une information géométriquement signifiante d'un dessin peut ou non correspondre à une propriété géométrique ; et réciproquement une propriété géométrique d'un référent peut être représentée ou non par une information géométriquement signifiante d'un dessin.*

Ces trois connaissances sont fondamentales pour gérer l'articulation du visuel et du géométrique. Elles doivent être complétées par un autre aspect lié au caractère arbitraire de la relation didactique : les choix concernant la validité des réponses. Détaillons ce point dans le paragraphe suivant.

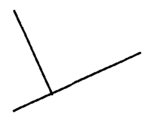
1.3. Contrats de lecture



A propos de chacun des dessins ci-dessus, la question « l'angle formé par les deux segments est-il un angle droit ? » est un type de question souvent étudié dans les travaux de recherche en didactique des mathématiques et proposé aux élèves dans de nombreux exercices à l'école primaire et à l'entrée au collège.

On en trouve de grands classiques dans les évaluations à l'entrée en 6ème où il s'agit de lire des éléments sur un dessin pour repérer la nature de tel ou tel quadrilatère ou la présence de telle ou telle propriété.

Reprenons la question formulée précédemment « l'angle formé par les deux segments est-il un angle droit ? » et par exemple le cas ci-après. Celle-ci admet alors différentes réponses selon le choix du *mode de validation des assertions*



- du point de vue de la géométrie déductive la réponse est « je ne peux pas répondre », puisque je n'ai aucune donnée de propriété géométrique (absence d'un texte, d'un codage ou d'un environnement de géométrie dynamique) ;
- du point de vue spatial, en m'équipant d'un gabarit d'angle droit et compte tenu d'une marge d'incertitude de un degré, je peux dire que cet angle est droit. Il est raisonnable d'affirmer cela à l'échelle de la perception. Cependant considérant une marge d'incertitude plus fine, du millième de degré par exemple, je pourrais déclarer que cet angle n'est pas droit. Ainsi avec un instrument la réponse dépend de *l'échelle d'observation* considérée ;
- du point de vue perceptif l'angle apparaît droit sans être ostensiblement non droit ; ceci me permet de faire l'hypothèse alors qu'il est droit.

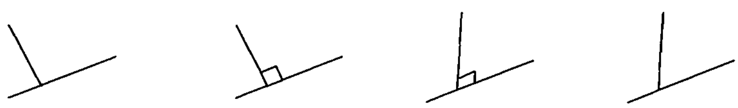
Dans les programmes officiels et dans la plupart des ouvrages ou articles de formation, on désigne respectivement par contrôle théorique (ou déductif), contrôle instrumenté et contrôle perceptif chacun des trois points de vue précédents. Or il est clair en considérant la réponse précédente qu'il ne s'agit pas d'un contrôle du dessin mais d'un point de vue signifiant *un choix de positionnement de lecture.* Celui-ci étant fondamentalement lié au contrat didactique, nous nous permettons alors d'appeler *contrat* ce qui se nomme couramment mais injustement contrôle et qui concerne *un mode de validation des assertions.*

- Le contrat de lecture géométrique se caractérise par un mode de validation lié aux données de propriétés géométriques (ou pouvant en être déduites par un raisonnement déductif).

- Le contrat de lecture instrumentée se caractérise par un mode de validation lié à l'usage d'instruments et à la définition d'une échelle d'observation.

- Le contrat de lecture perceptive se caractérise par un mode de validation lié à ce qui se donne à voir de manière ostensive.

Reprenons pour l'ensemble des dessins de perpendicularité les réponses à la question soulevée au début du paragraphe. Le tableau ne mentionne que les réponses, l'argumentaire est le même dans ses principes que celui déroulé précédemment.



Contrat de lecture géométrique	Pas de réponse	Angle droit (si je sais ce à quoi réfère le codage)	Pas de réponse
Contrat de lecture instrumentée	Dépendant de l'échelle d'observation considérée		
Contrat de lecture perceptive	Angle droit		Angle non droit

Dans l'histoire de la géométrie et de l'enseignement de la géométrie le choix du mode de validation des assertions n'a pas toujours été celui auquel on pense. Les travaux de Clairaut par exemple usaient du contrat de lecture perceptive pour valider certaines assertions (Barbin, 2001). Ce que Houdement et Kuzniak désignent par « géométrie un » est celle pour laquelle les contrats de lecture perceptive et instrumentée sont acceptés pour établir de nouveaux objets de savoir de la théorie géométrique, la « géométrie deux » se caractérisant quant à elle par un contrat de lecture géométrique. L'entrée dans une problématique géométrique, pour reprendre les termes de Salin et Berthelot, est la prise de conscience et l'acceptation d'un changement de contrat pour celui de lecture géométrique. Nonobstant, nous montrerons dans les parties II et III comment le contrat de lecture perceptive fait partie de la pratique de l'expert, et est a fortiori nécessaire à celle des élèves, pour la construction et la résolution d'un problème de géométrie.

1.4. Fonction heuristique et codage

Lorsqu'on parle de fonction heuristique des dessins, il serait hypocrite de ne pas parler du caractère ostensible des images. Pour aider à découvrir, le dessin offre des images qui donnent à voir des relations au sens propre et figuré. Le sens propre est porté par l'image elle-même, le sens figuré est porté par le renvoi au signifié géométrique. C'est le contrat de lecture perceptive que l'on adopte en général pour émettre des conjectures, qui sont ensuite soumises à un contrat de lecture géométrique. Le contrat de lecture perceptive n'est donc pas à remettre en cause au profit du second, il s'articule à différents moment du travail de résolution d'un problème selon certaines règles (nous développons ce point en partie II). Ainsi l'étude de dessins disposant d'informations géométriquement signifiantes et la recherche d'informations permettant de déterminer si ce perceptif est en liaison avec des propriétés géométriques parait fondamentale. Etant donné un dessin avec S comme information géométriquement signifiante il s'agit de savoir s'il relève du cas SP ou SNP en recherchant des informations, dans un texte, par visualisation d'un codage, ou par mise en mouvement du dessin s'il est donné dans un environnement de géométrie dynamique[2].

L'étude de dessins de type NSP parait également fondamentale tout en relevant d'un autre aspect de l'usage des dessins en géométrie. C'est un point nodal dans l'apprentissage de la lecture des dessins en géométrie, clairement identifiable si l'on s'intéresse aux dessins représentants des objets de l'espace à trois dimensions. En effet la représentation d'un objet de cet espace en dessin plan, quelle que soit la perspective, ne conserve pas toutes les propriétés géométriques de l'objet, en particulier celles relatives aux angles et aux égalités de longueurs. Le codage se justifie alors comme

[2] Ce type d'apprentissage relève sans doute de l'école primaire.

moyen de conserver en mémoire des propriétés dont la donnée n'est plus accessible par la vue. Ce qui correspond à une contrainte de représentation au regard des perspectives utilisées pour les objets de l'espace ne peut être désigné comme de la fausseté dans l'ensemble plus restreint des dessins d'objets plans, puisque cela participe au sens même du codage en géométrie.

Les dessins des énoncés 1 et 2 étudiés par ILY relèvent à la fois des cas SNP *et* NSP, ceux-là mêmes susceptibles de créer des obstacles pour les élèves, et ceux-là mêmes constituant chacun une dimension fondamentale intrinsèque à l'usage des dessins pour l'apprentissage de la géométrie dans le secondaire. Cette confusion, élément permettant de comprendre a priori une partie des difficultés des élèves, n'est pas constructive pour les apprentissages. Elle ne fait que confirmer et renforcer les phénomènes déjà repérés. Envisager des travaux pour les élèves, clarifiant au contraire les dimensions fondamentales d'usage des dessins en géométrie, pourrait constituer de nouvelles pistes de recherche.

Conclusion de la première partie

La lecture d'un dessin se fait par choix d'un contrat, de type perceptif, instrumenté ou géométrique, chacun étant régi pas des règles de validation. Celles du contrat perceptif sont basées sur une assertion du type : « je ne constate pas visuellement que ce que je suppose à partir de ma perception est en contradiction avec ma vision, donc je considère que ce je suppose est juste ». Celles relatives au constat instrumenté relèvent d'un choix d'une échelle d'observation et utilise ensuite la règle ci-dessus. Les règles du contrat géométrique reposent sur le mode de validation suivant : « je désigne comme juste une propriété géométrique : elle peut être donnée (par un texte, un codage ou une invariance dynamique) ou bien construite comme assertion selon un mode déductif à partir des données. »

Ce contrat nécessite des connaissances fondamentales spécifiant les modalités de considération d'une propriété géométrique et les différents cas d'articulation de ce qui est vu et de ce qui est su des propriétés d'un dessin. Ces connaissances ne peuvent rester implicites, elles ne sont pas non plus innées ; elles doivent faire l'objet d'un apprentissage.

Quant à la notion de « dessin faux » elle n'a pas de sens en géométrie. Les cas de ruptures entre VU et SU, où le perceptif et le raisonné sont en contradiction sur ce qu'ils désignent, font partie de manière *intrinsèque* de l'apprentissage de l'usage des dessins en géométrie. Ils correspondent à deux aspects fondamentaux : la fonction heuristique des dessins et la fonction de codage.

- Où le VU désigne ce que le SU ne définit pas, la perception est plus forte et peut emprisonner l'élève dans sa perception si aucun autre moyen ne lui est fourni pour accéder au SU (le dessin de perpendicularité SNP dans l'énoncé 2 chez ILY en est un exemple). Mais c'est un moyen heuristique pour conjecturer une propriété géométrique non donnée dans un énoncé et déductible savamment. Ce type de dessin n'a donc en rien valeur de fausseté et l'apprentissage de sa lecture est en liaison avec une fonction importante de traitement des dessins (reprise dans le III).

- Où le VU ne désigne pas ce que le SU définit, la perception fait également obstacle, mais de manière inhérente à la problématique des dessins en géométrie : un dessin ne représente pas tout d'un objet ou d'un référent de géométrie, il ne présente pas nécessairement les mêmes propriétés géométriques que son référent. Cela justifie l'utilisation du codage dont la fonction est de repérer dans le registre figuratif les traces du SU (l'égalité angulaire pour le dessin de l'énoncé 1 chez ILY en est un exemple). Ce type de dessin n'a donc en rien valeur de fausseté et l'apprentissage de sa lecture est en liaison avec l'apprentissage du sens du codage en géométrie.

L'étude menée permet de faire (en partie) une analyse a priori d'un exercice en ne considérant que la nature des dessins proposés, indépendamment de la formulation du problème. Elle vise en effet à prendre de la distance par rapport aux exercices, et à considérer les dessins d'un point de vue plus général. Nous allons maintenant entrer dans la formulation des énoncés d'exercices et développer d'autres éléments de réflexion.

2. Conditions pour la formulation d'un problème de géométrie

La distinction nécessaire entre « problèmes de géométrie » caractérisés par la recherche d'un résultat générique pour une figure de géométrie, et « problèmes spatiaux » caractérisés par des objets de l'espace sensible et des relations spatiales, doit être précisée en repérant parmi ces derniers les « problèmes spatio-graphiques ». Ils correspondent aux cas particuliers des problèmes spatiaux se déroulant dans un environnement plan (feuille de papier, écran d'ordinateur, surface lisse) sur lequel s'inscrivent des images pouvant également être considérées comme des objets de l'espace sensible.

Nous allons montrer dans un premier temps comment la présence d'un dessin dans un énoncé de problème a priori de géométrie, fait basculer celui-ci dans le domaine des problèmes spatio-graphiques, ne permettant plus aux élèves de repérer les caractéristiques liées au premier type de problème. Nous repréciserons ensuite dans le cas contraire le rôle fondamental joué par les dessins pour se représenter un problème de géométrie et pour avancer dans sa résolution.

2.1. Formulation d'un problème de géométrie

i) Des mots et des images

Relisons les énoncés proposés aux élèves dans les travaux d'ILY.

Enoncé 1 : En utilisant les indications portées sur la figure à main levée, dire quelle est la nature du parallélogramme ABCD. Justifier la réponse.
Enoncé 2 : Sur la figure ci-dessous dessinée à main levée, ABC et ABF sont des triangles équilatéraux. Quelle est la nature du quadrilatère AFBC ? Justifier la réponse.

Les expressions « sur la figure ci-dessous ...» « en utilisant les indications portées sur la figure ... » assignent aux élèves une référence quant à l'environnement de travail : celle des dessins fournis en entrée. L'usage du déterminant « du » dans les expressions

« quelle est la nature *du* parallélogramme [respectivement *du* quadrilatère] ? » marque l'unicité du référent sans qu'auparavant ne soit définit un élément générique. A priori et avant même de proposer le travail aux élèves, il est donc certain que l'énoncé empêche de poser le problème d'une recherche de résultat à valeur de généralité. Or rappelons cette évidence, *la généralité d'un résultat doit faire partie intégrante de l'enjeu d'un problème de géométrie, c'est une condition nécessaire à sa considération.*

L'énoncé 1 renforce la prégnance du dessin comme support de travail dans la mesure où aucune information n'est fournie par d'autres moyens, contrairement à l'énoncé 2 proposant un texte permettant alors de faire abstraction du dessin fournit et d'en reconstruire un autre. ILY repère d'ailleurs que les résultats des élèves (au moins leurs réponses) sont plus significativement corrects pour le second exercice que pour le premier. L'énoncé 1 est intéressant à étudier comme cas limite, puisque lui seul assure une « fonction de communication » de l'ensemble des données du problème ; fonction que Duval (1999) définie ainsi : « La fonction de communication requiert l'utilisation d'un code commun aux individus en positions respectives d'émission et de réception ». Nous avons étudié dans la partie I les connaissances fondamentales qui déterminent ce code commun en géométrie et précisé les difficultés qu'il engendre pour les élèves. En particulier rien dans la consigne ne spécifie le contrat de lecture des objets de l'environnement spatio-graphique, la confusion règne au contraire par l'amalgame des cas NSP et SNP convoqués par le dessin. Sans être aussi caricaturaux, un nombre très importants d'exercices de manuels proposent aux élèves un dessin en entrée assurant une fonction de communication, plaçant les élèves dans les mêmes difficultés, qu'il ne nous parait pas abusif de considérer dorénavant comme un constat didactique : *un dessin seul ne peut assurer une fonction de communication d'un problème de géométrie ; il pose de fait l'environnement spatio-graphique comme espace de travail référent et induit par défaut un contrat de lecture perceptive ou instrumentée soumis à la contingence et l'unicité du cas considéré.*

ii) Reconstruction d'un problème de géométrie

Nous pouvons supposer qu'à l'instar d'un expert (de collège ou de lycée), les élèves se plaçant dans une problématique géométrique ont compris qu'il s'agit de considérer un problème générique, d'en repérer des régularités stables quels que soient les paramètres du problème (des résultats vrais pour tous les cas de figure) et d'en argumenter la justesse selon les règles du débat mathématique. Or pour cela il est nécessaire de (se) reformuler les énoncés des exercices, par exemple de la manière suivante :

Enoncé 1' : On considère un parallélogramme ABCD, et O le point d'intersection de ses diagonales. Les angles OCB et OBC sont des demi angles droits. Emettre une conjecture sur la nature générale du quadrilatère ABCD et démontrer cette conjecture.

Enoncé 2' : A et B sont deux points quelconques. C et F sont deux points, distincts, tels que ABC est un triangle équilatéral et ABF est aussi un triangle équilatéral. Emettre une conjecture sur à la nature du quadrilatère ACBF et démontrer cette conjecture.

Ces formulations posent clairement l'espace géométrique comme environnement de travail et l'usage de l'environnement spatio-graphique soumis à un contrat de lecture géométrique. Il dissocie bien les objets considérés (la figure géométrique), l'énoncé d'une conjecture (l'assertion d'une propriété géométrique de cette figure) et la mise en débat mathématique de cette conjecture (la démonstration). Il serait intéressant de comparer les résultats d'analyses réalisées selon le même protocole utilisé par ILY en proposant les énoncés ci-dessus. Nous faisons à nouveau l'hypothèse qu'un plus grand nombre d'élèves aura des réponses plus justes et des arguments plus proches d'arguments géométriques considérés dans une logique déductive, en raison d'une clarté dans le contrat défini implicitement, et du respect de la condition nécessaire de généricité mentionnée précédemment.

Nous posons alors une nouvelle condition nécessaire déterminants des choix didactiques : *la reconstruction d'un problème de géométrie sous-jacent à un énoncé ne doit pas être laissée à la charge de l'élève* ; il doit être considéré explicitement dans l'énoncé même du problème. En conséquence *un énoncé de problème de géométrie ne s'accompagne pas de dessin ou s'accompagne d'un nombre suffisamment important de dessins pour en garantir son caractère de généricité.*

2.2. Formulation sans dessin et activité de conversion

Observons de plus près l'activité engagée par des énoncés de problèmes de géométrie formulés sans dessin. Nous examinerons dans la partie III une proposition d'ingénierie s'appuyant au contraire sur des problèmes spatio-graphiques répondant à la seconde condition posée ci-dessus.

Très souvent, un premier acte d'expert pour résoudre un problème de géométrie est de convertir les informations données par le texte en informations graphiques. Le lien du (ou des) dessin(s) à la figure géométrique se fait à travers la représentation de propriétés géométriques en informations visuelles le plus souvent géométriquement signifiantes, mais pas nécessairement. Les nouveaux attributs visuels des dessins générés dans ce nouveau registre permettent à l'expert de conjecturer et de proposer une réponse à une question posée.

Reprenant le terme de Duval (1999), nous pouvons dire que l'expert effectue une « activité de conversion » du texte dans le registre spatio-graphique : « [L'activité de conversion] consiste à transformer une représentation produite en changeant de système de représentation pour pouvoir utiliser les possibilités spécifiques d'explication ou de traitement du nouveau système. Convertir une représentation c'est passer d'une représentation produite dans un système à une autre représentation produite dans un autre système en conservant le renvoi à l'objet représenté. » Dans cette activité, l'expert connaît et maîtrise les règles d'articulation du visuel et du géométrique, les connaissances fondamentales et le contrat de lecture géométrique définis dans la partie I lui permettent de toujours contrôler la signification et les pertinences des renvois à l'objet représenté.

Un élève, à la différence de l'expert, ne maîtrise pas nécessairement ces règles d'articulation et, par ailleurs, n'est pas habitué à effectuer des conversions. En effet dans la plupart des manuels, les énoncés d'exercices sont accompagnés d'illustrations par des dessins de type géométrique. Or lorsqu'un dessin est donné en illustration pour accompagner un texte il assure *déjà* une conversion du problème, il fixe une représentation de la situation. Le dessin illustratif ne permet pas à chaque élève d'effectuer pour lui l'acte consistant à se représenter le problème dans le registre et avec les propriétés de son choix. Certains élèves repèrent l'implicite du contrat didactique et s'autorisent à reconstruire pour eux-mêmes une autre représentation, mais beaucoup d'autres élèves restent enfermés dans celle imposée par l'énoncé. Et pourquoi ne le seraient-ils pas ? Si « ce » dessin est donné avec l'énoncé, c'est qu'il doit servir à quelque chose, sinon pourquoi est-il là ?

Nous pouvons à nouveau mieux comprendre les difficultés rencontrées par les élèves dans l'article d'ILY. D'une part, la fonction d'illustration dans les énoncés 1 et 2 est pervertie par les SNP trop prégnantes et leur collision avec les NSP. D'autre part, pour l'énoncé 1, aucune conversion du dessin vers un autre dessin n'est possible, à moins d'avoir effectué une première conversion dans le registre du langage, pour pouvoir à nouveau en trouver une représentation dans le registre figuratif. L'énoncé 2 est plus facilement converti par les élèves, car il propose un texte pour communiquer la situation. Ce constat peut être fait a priori, et permet aussi de comprendre la différence d'appréhension et de résolution des deux exercices.

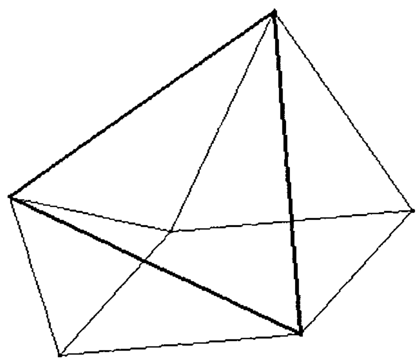
Dans l'activité de conversion d'un énoncé de problème de géométrie dans le registre spatio-graphique, les dessins assurent un rôle d'aide à la représentation du problème et doivent être laissée à la charge de l'élève. Par conséquent il faut accepter que les dessins produits par chacun puissent être différents, l'important est qu'ils soient suffisamment pertinents pour aider à la résolution du problème. Poursuivons à présent le cheminement de l'expert confronté à un problème de géométrie pour appréhender un autre rôle, plus classique, joué par les dessins dans la résolution d'un problème de géométrie.

2.3. Activité de traitement dans l'environnement spatio-graphique

Considérons par exemple le problème de géométrie suivant :

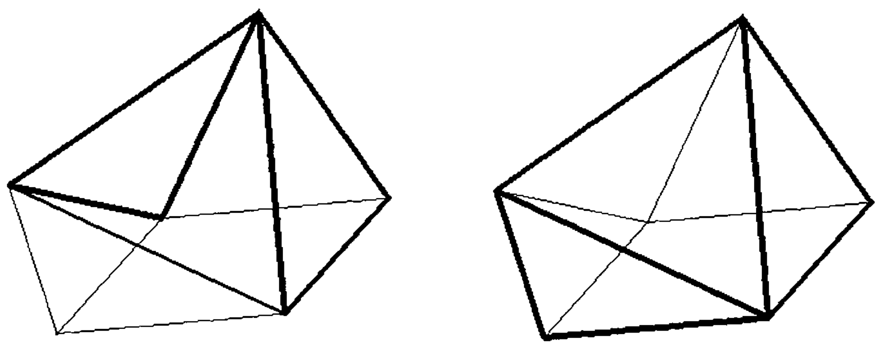
« Soit ABCD un parallélogramme. ASB et ATD sont deux triangles équilatéraux situés à l'extérieur du parallélogramme. Démontrer que le triangle STC est un triangle équilatéral. »

Les objets du problème sont bien ceux de la géométrie. La résolution attendue doit procéder d'une argumentation, la problématique installée est géométrique. L'expert opère une conversion faisant intervenir un premier dessin, pour avoir une représentation imagée du problème et mieux cerner les relations géométriques mentionnées dans l'énoncé. Par exemple, pour le problème cité, voici le dessin que j'ai choisi de produire :



Cette conversion ne constitue pas seulement une aide à la représentation du problème. En changeant de registre, elle permet d'utiliser des outils d'analyse et d'aide à la résolution fournis par le nouveau registre. Pour « mieux voir » les relations, propriétés ou objets pouvant servir à la résolution dans le cadre géométrique, l'expert utilise la fonction heuristique des dessins, ses connaissances de géométrie et ses connaissances des articulations du visuel et du géométrique. Pour l'exemple cité, l'expert peut être plus ou moins familier de l'usage des cas d'isométrie des triangles ou des transformations, et « verra » le dessin différemment suivant les habitudes qu'il en a et les connaissances qu'il fait fonctionner régulièrement.

Les dessins suivants par exemple permettent de visualiser les triangles qui m'ont aidée à avoir une intuition, à chercher et à bâtir une démonstration utilisant les égalités d'angles et le cas d'isométrie « deux triangles ayant deux côtés de même longueur et l'angle qu'ils forment de même mesure sont identiques. » Sur la figure de droite ci-dessous, l'isométrie des deux triangles en gras se voit à partir des données et du théorème cité. Sur la figure de gauche, il faut faire un calcul d'angle, pour l'usage de ce même théorème[3].



Quelle que soit la méthode l'expert utilise des actions (effectives ou évoquées) sur les dessins : reconfigurations, transformations, décompositions en sous-figures, inclusions dans des sur-figures, ... Cette activité, distincte de l'activité de conversion, est appelée dans la typologie de Duval (1993) « activité de traitement » : « Le traitement d'une représentation est la transformation de cette représentation dans le registre même où elle a été formée. Le traitement est une transformation interne à un registre. » Cette activité

[3] En annexe 2 quelques démonstrations sont proposées : une utilisant les cas d'égalité des triangles, et deux autres utilisant des transformations.

nécessite une bonne connaissance des dessins comme objets spatiaux d'un environnement graphique et des manipulations qu'ils peuvent subir. Ces manipulations sont fondamentales dans l'activité de recherche d'éléments argumentatifs pour la démonstration d'une conjecture. Soumise aux connaissances fondamentales (cf. Partie I) l'activité de traitement est intrinsèquement liée au travail argumentatif, non pas pour son organisation discursive mais pour la détermination de ces éléments. *La fonction heuristique n'est pas essentiellement contenue dans ce que les dessins donnent à voir, mais également dans tous les mouvements qu'on peut leur faire subir.*

Conclusion de la seconde partie

La présence d'un dessin pour accompagner un énoncé de géométrie (le communiquer ou l'illustrer) pose de fait l'environnement spatio-graphique comme référent de l'activité effective des élèves et justifie a priori leurs difficultés potentielles : difficulté à envisager le caractère générique du problème de géométrie ; confusion quant au contrat de lecture associé à la tâche ; empêchement à l'activité de conversion nécessaire pour se représenter le problème.

L'énoncé du caractère de généricité d'un problème de géométrie ne peut a priori être laissé à la charge des élèves, le contrat didactique doit poser clairement, comme mode de validation des assertions, le contrat de lecture géométrique des dessins utilisés et les règles du débat mathématique. Par contre, les activités de conversion et de traitement doivent être laissées à la charge des élèves. La confiance en la fonction heuristique des dessins, dans ce qu'ils donnent à voir en eux-mêmes ou selon des mouvements qu'ils peuvent subir, est une condition nécessaire au travail intrinsèque de résolution d'un problème de géométrie.

Puisque la donnée d'un dessin en entrée d'un énoncé de géométrie favorise le phénomène récurrent rappelé dès le début de ce présent article, la première assertion ci-dessus a pour conséquence la nécessité de revisiter un nombre très important d'énoncés d'exercices ou de problèmes proposés dans les manuels de géométrie. La seconde assertion garantit que le propos tenu ici n'est pas de se passer des dessins pour l'enseignement de la géométrie, bien au contraire. Ainsi : *pour énoncer un problème de géométrie* il faut peut-être ou bien renoncer à l'usage de l'environnement graphique dans sa formulation, ou bien l'appuyer sur l'environnement spatio-graphique selon certaines conditions que nous allons étudier dans la troisième partie.

3. Condition sur l'usage de l'environnement spatio-graphique pour énoncer un problème de géométrie

Cette partie prend pour support la proposition d'ingénierie faite par IAQ dans l'article « Engager les élèves dans une réelle activité mathématique ». Différentes phases de travail sont exposées pour provoquer une réflexion sur des propriétés de géométrie et une pratique argumentative pour un apprentissage de la notion de cercle circonscrit en $5^{ème}$. Le problème de géométrie sous-jacent à l'ingénierie est de « démontrer qu'il existe un unique cercle passant par trois points quelconques distincts. » Mais IAQ ne soumet pas aux élèves un problème de géométrie.

Il organise au contraire l'ingénierie autour de problèmes spatio-graphiques sans tomber dans les écueils mentionnés dans les parties I et II du présent article. Il connaît, par expérience, et par les travaux didactiques antérieurs, les difficultés majeures de tels problèmes : ils placent les élèves a priori dans une problématique pratique ; la diversité des réponses graphiques ne permet pas de conclure ; rien dans le contrat ni dans le milieu ne permet de justifier un point de vue plutôt qu'un autre. L'intérêt de la proposition de IAQ se trouve alors dans l'organisation des étapes et la mise en place progressive de conditions garantissant pour une majorité d'élèves une entrée dans une problématique géométrique, malgré la prégnance de ces phénomènes didactiques. C'est ce que nous allons analyser dans cette partie.

Ci-dessous, en préalable, nous donnons une lecture très parcellaire mais suffisante de l'organisation des tâches proposées aux élèves au cours de l'ingénierie, puis dans les paragraphes suivants, trois éclairages différents ferons chacun apparaître des éléments d'analyse a priori d'un usage de l'environnement spatio-graphique pour faire fréquenter des problèmes de géométrie aux élèves de collège. La lecture faite ci-dessous de la succession des étapes est évidemment orientée par notre problématique et inclue déjà des considérations analytiques et synthétiques.

Dans une étape 0, la notion de médiatrice est réactivée selon deux conceptions dont l'équivalence régit le principe de la démonstration du problème de géométrie sous-jacent à l'ingénierie : ensemble de points équidistants à deux points donnés et droite perpendiculaire à un segment en son milieu. L'enseignant s'assure ainsi de la présence dans le milieu de travail de tous les élèves des connaissances utiles aux démonstrations ultérieures.

Dans les étapes 1 et 2, il s'agit de « Placer deux [respectivement trois] points. Combien passe-t-il de cercles par ces deux [respectivement trois] points ? ». Le cas de deux points fait apparaître clairement à la vision une infinité de cercles solutions. La liaison entre les positions de leurs centres et la médiatrice d'un segment prend du sens à travers le caractère ostensif des dessins réalisés par les élèves. Le cas de trois points quant à lui fournit peu d'éléments visuels pour affirmer nettement un résultat. Cependant, la continuité avec les étapes précédentes permet aux élèves d'activer à nouveau la notion de médiatrice, non pour déterminer une réponse définitive au problème mais pour *établir un lien signifiant avec la formulation d'une nouvelle tâche* proposée dans l'étape suivante.

En effet, une autre approche du problème est proposée en étape 3, la consigne est « Placer deux points A et B sur papier blanc et un troisième, C au hasard. Tracer les segments [AB] et [AC] et leurs médiatrices. Appeler D leur point d'intersection. Faire des conjectures. » Bien que des constructions soient à réaliser, il s'agit pour les élèves de se placer maintenant dans un registre discursif, même si le discours s'appuie sur des observations de l'environnement graphique. L'aboutissement de cette étape est la mise en évidence de conjectures, leur organisation et leur justification, formant au final une démonstration de l'existence d'un cercle passant trois points distincts dont le centre est situé sur deux médiatrices.

L'étape 4 consiste en la justification de l'unicité de ce cercle et propose à la suite trois tâches aux élèves : « On reprend la figure précédente et on trace la troisième médiatrice. Si on considère deux médiatrices différentes des précédentes : le point d'intersection est-il le même ? Y en a-t-il plusieurs ? ». Certains élèves obtiennent un point, d'autres un petit triangle, rien de permet de conclure mais *tout est en place pour à nouveau établir un lien signifiant avec le contexte* de la seconde tâche : « Dessiner un triangle ABC. Dessiner les trois médiatrices des côtés. Parfois elles semblent former un petit triangle. Essayer de choisir le triangle ABC de départ de sorte que le petit triangle formé par les trois médiatrices soit le plus grand possible. »[4] Les élèves constatent l'impossibilité à agrandir de façon visuellement significative ce petit triangle. L'enseignant énonce alors une affirmation et leur propose de la justifier, affirmation dont le sens aura pu se construire pour les élèves par les expériences graphiques précédentes : « On va montrer qu'il ne s'agit pas d'un triangle mais d'un point. »

L'étape 5 consiste en l'observation des positions du centre du cercle circonscrit en fonction des angles du triangle initial à partir d'une exploration faite avec du matériel dynamique (logiciel de géométrie dynamique ou baguettes en bois articulées).

Dans l'étape 0, se traite la notion de médiatrice. Dans les étapes 1 à 3, le problème de géométrie sous-jacent est l'existence d'un cercle circonscrit à trois points quelconques distincts. Dans l'étape 4, le problème de géométrie sous-jacent est l'unicité du cercle circonscrit à trois points quelconques distincts. Dans l'étape 5, s'étudient des cas particuliers de configurations.

3.1. Multiplicité des dessins dans les tâches de construction

Bien qu'il s'agisse de tâches de construction en amorce des conjectures et de leur argumentation, il faut noter l'absence de dessin en entrée des tâches proposées aux élèves. Ce choix volontaire de IAQ participe aux conditions d'efficacité didactique du dispositif en permettant par la variété des dessins obtenus pour un même élève ou sur l'ensemble de la classe, de faire vivre la contrainte de généricité des problèmes posés. *La considération d'un signifié générique, celui de la figure géométrique sous-jacente à l'énoncé, est garantie par la pluralité des représentations graphiques signifiantes.*

L'anecdote rapportée par IAQ d'un collègue proposant un dessin en entrée pour accompagner l'énoncé du problème est à ce propos révélatrice et significative. Pour la recherche des élèves de l'existence d'un cercle passant par trois points donnés, « [le professeur] a placé lui-même trois points au tableau de façon à ce qu'ils soient les sommets d'un triangle ayant un angle obtus. Il craignait que, sans cette intervention, ce cas ne soit pas envisagé par les élèves. Rien de ce qui est censé se produire après n'a eu lieu. En effet les élèves ont placé sur leur cahier trois points disposés à peu près comme le professeur l'avait fait au tableau obtenant ainsi un triangle avec un angle obtus. La recherche par les élèves de cas particuliers ne pouvait pas se produire. Les élèves, démunis devant un tel triangle, se plaçaient dans une problématique pratique et essayaient de trouver un centre par tâtonnement avec leur compas. Certains s'interdisaient de sortir de la figure et concluaient à l'impossibilité car le centre était à l'extérieur du triangle. D'autres trouvaient ou non par approximations successives et tout était fini. Certains concluaient que c'était possible, d'autres concluaient le contraire. » On retrouve dans cet exemple les problèmes soulevés dans notre partie I, lorsqu'un

[4] Comme le mentionne IAQ dans son article, il s'agit là d'une situation proposée par Brousseau (1983) et étudiée en détail par Berthelot et Salin (1992).

dessin est fournit dans l'énoncé d'un problème de géométrie, assurant déjà une conversion du problème. Cela enferme la recherche et ne permet pas d'appréhender le caractère générique de la situation géométrique sous-jacente.

Ainsi les conditions nécessaires mises en évidence dans les parties I et II sont respectées dans le dispositif proposé par IAQ et garantissent en partie a priori une certaine efficacité. IAQ précise à la suite de la citation précédente « Ils ne pouvaient pas faire des mathématiques pour trancher rationnellement le débat, le problème étant trop difficile pour eux. » En effet, et nous ajouterons ceci : cette affirmation est valable *aussi* dans la situation proposée dans l'ingénierie, à la fin de l'étape 2, les élèves ne peuvent pas conclure non plus, aucun élément ne définit le contrat de lecture géométrique dans l'environnement de travail des élèves. Cependant certaines conditions remplies par l'ingénierie permettent a priori l'évolution des élèves d'une problématique pratique (dans laquelle ils sont également dans l'étape 2 de l'ingénierie proposée par IAQ) vers une problématique géométrique. Nous essayons dans le paragraphe suivant de les rendre plus explicites.

3.2. Suivi des tâches pour construire des conjectures

Pour les deux problèmes de géométrie sous-jacents à l'ingénierie (existence du cercle circonscrit et unicité du cercle circonscrit) le travail des élèves repose sur les mêmes principes d'organisation didactique des tâches et de fonctionnement de l'environnement spatio-graphique, déclinés en plusieurs points ci-dessous en mettant en parallèle les tâches structurant les deux étapes.

- Une situation de référence non problématique

C'est l'étape 1 : « Placer deux points. Combien passe-t-il de cercles par ces deux points ? ». Bien que les élèves en général placent ces deux points en position de former un segment horizontal, la multiplicité des solutions apparaît assez rapidement et de façon suffisamment claire pour mettre en évidence l'infinité des solutions constituant l'enjeu du problème. L'environnement spatio-graphique donne à voir perceptivement ce qu'il y a à voir rationnellement.

La situation de référence non problématique consiste en un premier problème spatio-graphique pour lequel le caractère ostensif des dessins permet de visualiser clairement une pluralité de solutions. Pour ce premier problème tous les élèves peuvent s'engager, en comprendre la finalité, trouver des solutions, en comprendre l'enjeu. De plus, suite à cette situation, le milieu de travail des élèves contient une référence possible pour tous d'un lien entre un type de problème (cercle passant par des points) et une connaissance géométrique (la notion de médiatrice) fonctionnelle pour les argumentations futures.

- Une première situation problématique : l'environnement graphique ne permet pas de conjecturer.

Problème d'existence du cercle	Problème d'unicité du cercle
Etape 2 « Placer trois points. Combien existe-t-il de cercles passant par ces trois points ? »	Etape 4 - Situation 1 « On reprend la figure précédente et on trace la troisième médiatrice. Si on considère deux médiatrices différentes des précédentes : le point d'intersection est-il le même ? Y en a-t-il plusieurs ? »
« Il semble qu'il y ait toujours un centre pour n'importe quel triangle, il suffit de tracer le point d'intersection de deux médiatrices. Ce n'est qu'une conjecture car l'idée est encore floue pour beaucoup d'élèves qui ont trouvé certaines choses mais ont du mal à formuler que le centre existe quand deux médiatrices se coupent et encore plus à en être convaincus. »	« Certains élèves pensent qu'il y a plusieurs points d'intersection, peut-être trois, d'autres pensent qu'il y en a un seul. Certains sont tellement persuadés qu'il n'y en a qu'un que s'ils obtiennent un petit triangle, ils le colorient en faisant un « gros point ». »

Les constructions permettent aux élèves de faire des hypothèses de réponses. Mais l'exploration graphique n'aboutit pas à une détermination convaincante d'une information visuelle géométriquement signifiante. Rien ne peut alors être conjecturé. *La première situation problématique consiste à énoncer le même problème spatio-graphique que celui de la situation précédente dans un cas où le caractère ostensif des dessins ne permet pas conclure.* Cette difficulté à conclure oblige à un changement de contraintes. Les expériences graphiques de cette étape auront servi à donner du sens aux contraintes qui définissent la nouvelle tâche dans l'étape suivante.

- Une seconde situation problématique : pour forcer l'environnement spatio-graphique à donner à voir une conjecture

Etape 3	Etape 4 - Situation 2
« Placer deux points A et B sur papier blanc et un troisième, C au hasard. Tracer les segments [AB] et [AC] et leurs médiatrices. Appeler D leur point d'intersection.»	« Dessiner un triangle ABC. Dessiner les trois médiatrices des côtés. Parfois elles semblent former un petit triangle. Essayer de choisir le triangle ABC de départ de sorte que le petit triangle formé par les trois médiatrices soit le plus grand possible. »
« Tous les cas de figure apparaissent dans la classe ce qui permet de renforcer l'idée de l'existence du cercle pour tous les triangles »[5].	« Le triangle des médiatrices ne s'agrandit pas si on agrandit le triangle de départ. Plus on fait un dessin soigné, plus le triangle formé par les médiatrices est petit. »

De nouvelles contraintes de construction, ayant pris du sens dans le travail de l'étape précédente, vont permettre de s'appuyer à nouveau sur le caractère ostensif des

[5] Notons l'importance accordée par IAQ aux effets des dessins sur l'activité cognitive des élèves pour garantir une multiplicité de choix (et donc de cas) au sein de la classe. Le choix de fournir deux segments et non pas un triangle « est indispensable pour renforcer l'examen de tous les cas de figures » car « les élèves s'interdisent de sortir de la figure fermée [d'un triangle] pour trouver le centre du cercle ».

dessins. Dans le cas de l'étape 3, pour donner à voir ce qu'il y a à savoir. Dans le cas de l'étape 4, pour donner à voir une impossibilité de construction suggérant ce qu'il y aurait à savoir (une étude plus fine de cette nuance fait l'objet des paragraphes suivants). *La seconde situation problématique s'organise autour des mêmes tâches de construction avec de nouvelles contraintes autorisant des constats perceptifs suffisamment ostensifs pour suggérer les propriétés à conjecturer.*

- Un changement de nature de situation : conjectures et argumentation

Etape 3 – suite « Faire des conjectures. » « Les élèves émettent des conjectures par écrit. Le professeur les recueille au tableau puis les élèves les ordonnent en commençant par celles qu'ils pensent pouvoir prouver le plus facilement ».	Etape 4 – situation 2 – suite « On va montrer qu'il ne s'agit pas d'un triangle mais d'un point. »

Une nouvelle tâche : il ne s'agit plus de construire mais de conjecturer (puis d'argumenter). Les conjectures ont pris du sens à travers les expériences graphiques précédentes. La tâche principale place clairement l'activité de l'élève dans le registre discursif d'émission de conjectures.
Le changement de nature de la tâche, dorénavant discursive, précise que le contrat est maintenant soumis aux règles du débat mathématique.

Pour résumer, le principe du suivi des tâches se définit ainsi : une situation de référence non problématique, une première situation problématique ne permettant pas de conjecturer sûrement, une seconde avec de nouvelles contraintes permettant de le faire, et enfin un changement de tâche et de registre de travail caractérisant la formulation de la conjecture et l'entrée dans la recherche argumentative.

Bien que la formulation des conjectures soit prise en charge par deux acteurs différents, les élèves dans l'étape 3 et l'enseignant dans l'étape 4, elle s'appuie sur des expériences graphiques menées par les élèves. Dans l'étape 3 ces expériences donnent à voir l'assertion de manière perceptive suffisamment ostensive pour permettre aux élèves de se convaincre a priori d'un résultat et de le formuler eux-mêmes comme une conjecture. Dans l'étape 4 ces expériences permettent de convaincre les élèves que le résultat énoncé ensuite par l'enseignant est sans doute une conjecture raisonnable. Dans les deux étapes, *les formulations de conjectures s'appuient sur des expériences graphiques ayant permis de construire pour les élèves de la nécessité autour des assertions conjecturées.*

Les étapes 3 et 4 illustrent deux types différents de construction de conjecture ; au sein de l'ingénierie proposée par IAQ l'étape 5 en constitue une troisième. Dans ces trois étapes les assertions à démontrer sont formulées à partir de constats d'observations dans l'environnement spatio-graphique, mais pour chacune d'elle *l'origine de la nécessité* de l'assertion est de nature différente. Nous allons dans le paragraphe suivant en dégager leurs caractéristiques.

3.3. Origine de la nécessité

- Nécessité par construction

A la fin de l'étape 3 la nécessité de la conjecture à démontrer a pris du sens pour les élèves à travers la pluralité des dessins proposés assurant le caractère de généralité d'une proposition géométrique. Le contrat de lecture perceptif fonctionne sur le principe suivant : si une pluralité de dessins répondant aux mêmes contraintes initiales donnent à voir de manière ostensible la même information géométriquement signifiante, quelle que soit la diversité des configurations envisagées, alors il est raisonnable de conjecturer cette propriété.

La nécessité d'une conjecture par construction peut se définir comme la conséquence d'une pluralité de constructions ou de mises en mouvement donnant à voir la même information géométriquement signifiante.

L'habitude à considérer l'environnement spatio-graphique comme un lieu d'expériences graphiques permettrait de repenser les consignes construites dans l'environnement papier crayon pour répondre à cette condition. L'environnement de géométrie dynamique fournit quant à lui un espace propice à la visualisation de la multiplicité. Les mises en mouvement de dessins obtenus par « des constructions dures » au sens de Laborde (2005) donnent à voir des propriétés perceptivement géométriques invariantes par mouvement permettant raisonnablement de les considérer comme conjectures de propriétés rationnellement géométrique.

- Nécessité par contraposée

Le contrat de lecture pour l'étape 4 est également perceptif, mais rien ne peut être conjecturé à partir d'une information géométriquement signifiante. La formulation de la conjecture proposée par l'enseignant procède d'un raisonnement du type : supposons que ..., essayons de réaliser des constructions consistant à ..., le résultat aboutit au constat d'impossibilité de telles constructions, l'hypothèse faite peut alors être supposée erronée et son contraire peut être conjecturé comme assertion.

La nécessité d'une conjecture par contraposée peut se définir comme conséquence d'une impossibilité de constructions vérifiant telle hypothèse. La conjecture se formule comme hypothèse contraire.

- Nécessité par étude de cas

L'étape 5 consiste en l'étude des positions du centre du cercle circonscrit à un triangle en fonction des mesures des angles du triangle. IAQ propose de faire varier la nature d'un triangle initial pour visualiser les différentes positions : l'usage d'un logiciel de géométrie dynamique facilite l'étude des possibilités et permet rapidement de repérer les cas particuliers. L'exploration graphique aboutit à des constats d'observation sources de nouvelles conjectures. Ces constats proviennent d'une information géométriquement signifiante mais non invariante dans le mouvement. Il s'agit au contraire d'une régularité constatée au sein d'une même configuration réalisée comme « constructions molles » (Laborde 2005). A travers le mouvement d'un dessin représentant une figure géométrique, ou la multiplicité des cas de dessins possibles pour représenter une telle figure, on observe certaines particularités qui peuvent alors prendre un statut de conjecture.

La nécessité d'une conjecture par étude de cas peut se définir comme la visualisation d'une information G-signifiante spécifique de certains cas de dessins réalisés ou observés au cours du mouvement d'une configuration.

Conclusion de la troisième partie

Cette partie a permis de comprendre comment l'environnement spatio-graphique peut être un environnement propice à la construction de conjectures pour des problèmes de géométrie. A condition de s'assurer de la pluralité des dessins, l'articulation des tâches de construction avec ou sans contraintes permet d'user du caractère ostensif des images et établir du lien signifiant avec les tâches discursives d'émission de conjectures (puis d'argumentation). La nécessité des assertions peut avoir différentes origines : par construction, par contraposée ou par étude de cas, provenant d'explorations graphiques. L'ensemble de la démarche favorise a priori l'entrée des élèves dans une problématique géométrique.

Conclusion générale

La problématique de l'usage des dessins en géométrie est très ancienne sur le plan épistémologique et déjà âgée sur le plan didactique. Les éléments d'analyse institutionnels sont très souvent organisés autour de la différence perceptif, instrumenté, déductif, en considérant que chacun de ses aspects peut définir une géométrie et qu'il s'agirait pour les élèves de passer de l'une à l'autre. Pour élaborer autrement des perspectives de travail, nous avons tenté de définir plus finement quelques outils d'analyse didactique : à partir de la distinction entre information géométriquement signifiante et propriété géométrique d'un référent, les connaissances fondamentales de l'usage des dessins et les différents contrats de lecture peuvent être explicités. Il en va de même pour les cas d'articulation du perceptif et du rationnel déterminant deux fonctions essentielles dans l'usage des dessins en géométrie : l'heuristique et la mémorisation par le codage. Les apprentissages de ces aspects sont sans doute à privilégier pour le choix des exercices, en laissant ceux pour lesquels nous savons dorénavant qu'ils mettent a priori les élèves en difficulté.

Le caractère ostensif des dessins est intrinsèquement prégnant à l'appréhension des informations, il s'agit alors de l'utiliser comme allié et non d'en faire un obstacle aux apprentissages des élèves. Plusieurs conséquences didactiques découlent de ce positionnement :

1. La formulation d'un problème de géométrie ne peut poser l'environnement spatio-graphique comme espace de travail référent que si la condition de pluralité des dessins est remplie pour garantir la généricité du problème. Le contrat de lecture géométrique ne peut être laissé à la charge des élèves.

2. Par contre l'activité de conversion d'un problème de géométrie relève de la responsabilité de ceux qui résolvent le problème. Ceci implique qu'elle soit considérée comme un apprentissage nécessaire au travail en géométrie.

3. L'usage de l'environnement spatio-graphique, sous réserve de répondre à la condition de généricité, permet de formuler des conjectures : elles deviennent alors des problèmes de géométrie ou servent dans le traitement de problèmes de géométrie. Les nécessités peuvent se forger selon différentes modalités : par construction, contraposée ou étude de cas.

En posant ces conditions nécessaires à l'usage des dessins en géométrie déductive, nous avançons dans la détermination d'éléments d'analyse a priori de situations proposées aux élèves. Les difficultés, les contraintes et les contingences des mises en œuvre soulèvent de nouvelles questions. C'est bien sûr grâce à elles que nous progressons.

Bibliographie

BARBIN E. (2001) Qu'est-ce que faire de la géométrie, In *Repères IREM* n°43.

BERTE A., CHAGNEAU J., DESNAVRES C., LAFOURCADE J., MAURATILLE M-C., SAGEAUX C. (2006) Engager les élèves dans une réelle activité mathématique, In *Petit X* n°70, pp7-29.

BERTHELOT R., SALIN M-H. (1992) L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire, , Thèse, Université Bordeaux I.

BERTHELOT R., SALIN M-H. (2001) L'enseignement de la géométrie au début du collège, In *Petit X* n°56, pp5-34.

BROUSSEAU G. (1983) Etudes de question d'enseignement. Un exemple : la géométrie, Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, LSD IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1982-1983.

CAPPONI B., LABORDE C. (1994) L'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherche en Didactique des Mathématiques* vol 14 n°1.2, Ed. La pensée sauvage, Grenoble.

COLMEZ F., PARZYSZ B. (1993) Le vu et le su dans l'évolution de dessins de pyramides du CE2 à la seconde, In *Espaces graphiques et Graphismes d'espaces,* Ed. La pensée sauvage, Grenoble, pp35-55.

COPPE S., DORIER J-L., MOREAU V. (2005) Différents types de dessins dans les activités d'argumentation en classe de 5ème, In *Petit X* n°68, pp8-37.

DUVAL R. (1999) Conversion et articulation des représentations analogiques, *Séminaire de recherche* n°1 IUFM Nord Pas-de-Calais.

DUVAL R.(1993) *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée,* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol 5, Université Louis Pasteur, IREM de Strasbourg, p37-65.

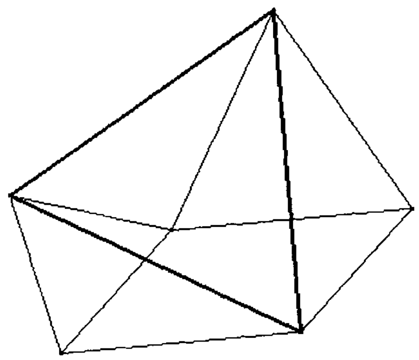
HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (1999) Réflexions sur l'enseignement de la géométrie, In *Grand N* n° 64

LABORDE C. (2005) La variation en géométrie dynamique comme source d'apprentissages, Actes du XIIe Colloque des Professeurs et Formateurs chargés de la Formation des Enseignants de Mathématiques du Second Degré (CORFEM).

ANNEXE

Démonstrations pour un problème de géométrie

Soit ABCD un parallélogramme. ASB et ATD sont deux triangles équilatéraux situés à l'extérieur du parallélogramme. Démontrer que le triangle STC est un triangle équilatéral.



Afin d'éviter les répétitions et lourdeurs de la rédaction, précisons en préalable les données du problème avec les conséquences sur les propriétés géométriques en jeu. Nous ne les rappellerons pas en justification par la suite. (Les « chapeaux » sont manquants).
ABCD parallélogramme fournit : AB = DC et AD = BC ; ABC = CDA et DAB = BCD ; deux angles consécutifs du parallélogramme sont supplémentaires.
SAB et TAD sont des triangles équilatéraux donc leurs angles sont égaux (et égaux à 60°) ; les longueurs SA, SB, et AB sont égales ; les longueurs TA, TD et DA sont égales.

1. Démonstrations utilisant les cas d'égalité des triangles

Nous utilisons la propriété suivante : « Deux triangles ayant deux côtés de même longueur, et même angle formé par ces deux cotés respectivement, sont isométriques. »

Montrons que SBC et CDT sont isométriques :
SB = AB et AB = DC d'où SB = DC

BC = AD et AD = DT d'où BC = DT
CBS = CBA + ABS terme qui équivaut à ADC + TDA, d'où CBS = TDC
Ainsi les triangles SBC et CDT sont isométriques, et on en déduit : *SC = CT*
Montrons que SBC et SAT sont isométriques :
SB = SA ; BC = AD et AD = TA d'où BC = TA
CBS = CBA + ABS ; TAS = 360 – 60 – 60 – DAB
DAB = 180 – CBA ; TAS = CBA + 60 ; TAS = CBA + ABS ; d'où CBS = TAS
Ainsi les triangles SBC et SAT sont isométriques, et on en déduit : *SC = ST*
[SC], [ST] et [CT] sont de même longueur, donc le triangle SCT est équilatéral.

On peut aussi montrer seulement l'isométrie de deux des triangles précédents pour montrer que STC est isocèle, puis faire un calcul d'angles pour montrer qu'il a un angle de 60°. C'est l'objet des deux variantes.

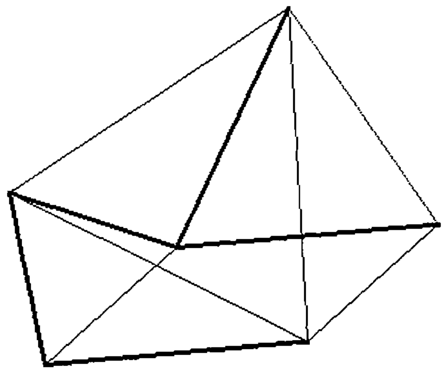
Variante 1
Les triangles SBC et CDT sont isométriques (voir ci-dessus)
DCT + TCS + SCB + CBA = 180° (somme des angles consécutifs d'un parallélogramme)
SCB + CBS + BSC = 180° (somme des angles d'un triangle).
BSC = DCT (par isométrie des triangles) et CBS = CBA + ABS donc TCS = ABS = 60°

Variante 2
Les triangles SAT et SBC sont isométriques (voir ci-dessus, nécessite un calcul d'angles)
TSC = TSB - CSB = TSB - TSA (puisque TSA = CSB par isométrie des triangles)
donc TSC = ASB = 60°. Ceci permet d'ailleurs de démontrer que SBC se déduit de SAT par une rotation de centre S et d'angle 60°.

2. Démonstrations utilisant des transformations

i) Démonstration 1 (figure ci-dessous)

Considérons la rotation de centre T et d'angle 60°.
Montrons que S est l'image de C par cette rotation. D a pour image A par la rotation. L'image de la demi-droite [DC) a pour origine A et fait un angle de 60° avec [DC), ou encore [AB), puisque (DC) et (AB) sont parallèles. Par unicité de cette demi-droite, et compte tenu que ABS est un triangle équilatéral, on obtient que *[AS) est l'image de [DC) par la rotation.*
D'autre part, DC = AB et AB = AS, d'où *DC = AS.*
On conclut des deux affirmations précédentes que *S est l'image de C par la rotation de centre T et d'angle 60° ; donc le triangle TCS est équilatéral.*



ii) Démonstration 2 (figure ci-dessous)

Soit r la rotation de centre A et d'angle 60° et t la translation de vecteur AB.
La composée d'une translation et d'une rotation est une rotation de même angle. Donc t o r est une rotation d'angle 60°. D'autre part t o r (A) = B.
Le triangle SAB est équilatéral, donc par unicité de la transformation précédente, *t o r est la rotation de centre S et d'angle 60°. Puisque t o r (T) = C, alors le triangle STC est équilatéral.*