RATIONNELS ET PROPORTIONNALITE : COMPLEXITE ET ENSEIGNEMENT AU DEBUT DU COLLEGE

Robert ADJIAGE
IUFM d'Alsace

Résumé : Cet article résume notre analyse de la complexité des notions de rationnel, de rapport et de proportionnalité au début du collège et en déduit des applications détaillées pour l'enseignement. Il décrit ce champ notionnel au moyen de six types de contextes physico-empiriques, de quatre variables permettant de transformer ces contextes en problèmes et de trois registres d'expression des rationnels au sens de Duval (1995) : le registre fractionnaire, le registre décimal et le registre des droites graduées. Trois séquences didactiques sont présentées et analysées.
Mots-clés : didactique des mathématiques, collège, grandeur, rapport, proportionnalité, rationnel, fraction, décimal, droite graduée.

1. Introduction

Cet article conclut un processus de recherche mené depuis 1997 sur l'enseignement et l'apprentissage des notions de rapports, de rationnel et de proportionnalité. Si l'on se réfère aux programmes définis en 2002 pour l'école, en 2004 et 2005 pour le collège, le niveau scolaire concerné s'étend du cycle 3 des écoles jusqu'à la classe de 5ème. La première partie de cet article présente le contexte dans lequel s'insère notre recherche, la deuxième résume notre analyse de la complexité du champ étudié (Adjiage, 2005) et explicite les variables sur lesquelles nous agissons. Dans la troisième partie, nous proposons le schéma d'enseignement qui en découle. La quatrième partie est résolument applicative et c'est de loin la plus longue. Nous y présentons et commentons trois séquences-types destinées à des classes de 6ème et 5ème.

La question centrale dont nous voudrions débattre est celle de la nature et de la place respective des grandeurs, des nombres et de leurs représentations dans l'enseignement et l'apprentissage concernés. Historiquement, la notion de nombre se construit sur la notion de grandeur et plus précisément sur celle de rapport de grandeurs (Dhombres et al., 1997, pp. 6-8). C'est seulement à la fin du dix-neuvième siècle qu'il est « *devenu possible de mettre les nombre au départ, à la place des grandeurs* » (Rouche in Dhombres et al., 1997, p. 41), lorsque la théorie des nombres a acquis suffisamment de rigueur. En ce qui concerne l'enseignement, les grandeurs ont « *été emportées* », un siècle plus tard, « *en tous cas au niveau du secondaire, dans le grand mouvement de rénovation dit des "mathématiques modernes"* » (ibid, p. 42). La quasi-totalité des didacticiens a déploré leur évacuation des programmes scolaires et l'appui de l'enseignement des rationnels et de la proportionnalité sur des considérations avant tout numériques. La valeur pédagogique des grandeurs est considérée comme irremplaçable car elles « ...*fondent pratiquement et intuitivement le système des nombres*... » (Rouche in Dhombres et al., 1997, pp. 43-44).

L'immense majorité des ingénieries et analyses didactiques issues de la recherche s'appuient en conséquence sur les grandeurs pour fonder les notions de rapport et de fraction (Kieren, 1980, pp. 134-136), (Brousseau, 1987), de proportionnalité (Harel, Behr, Post, & Lesh, 1991, pp. 125), et interpréter les travaux d'élèves : "*Most procedures used by students... had a physical meaning*" Vergnaud (1983, p. 142).

Suite à ces travaux, les grandeurs ont été progressivement réhabilitées dans l'enseignement. En France cependant, elles ne sont explicitement mentionnées que dans les derniers programmes : pour les cycles 2 et 3 des écoles (2002), la rubrique « Mesures » a été remplacée par la rubrique « Grandeurs et Mesures ». Cette dernière rubrique apparaît également dans les programmes du collège (2004). De plus, dans les commentaires d'introduction à la proportionnalité en $6^{ème}$ on trouve : « *Les problèmes à proposer se situent dans le cadre des grandeurs... L'étude de la proportionnalité dans le cadre purement numérique relève du programme de* $5^{ème}$ ».

Comment passe-t-on des grandeurs aux nombres et quelle est la place réservée à ces derniers dans l'apprentissage ? Examinons à nouveau les travaux publiés au cours des trente dernières années. A peu près tous les chercheurs décrivent un processus de construction d'un nombre rationnel par les élèves en deux phases : une phase physico-empirique suivie d'une phase de détachement progressive du nombre de son contexte d'origine. Dans la première phase, le nombre est lié à un schéma d'action dans le monde sensible des grandeurs : fractions pour mesurer (l'épaisseur d'une feuille de papier) et fractions pour agrandir (un puzzle) de Brousseau (1998, pp.257-276 ; pp.237-241), ou encore rationnels pour comparer des grandeurs, pour fractionner des grandeurs ou pour opérer sur des grandeurs de Roditi (2002). Dans la deuxième phase, la mise en évidence d'invariants entre ces diverses acceptions permet de dégager un objet mathématique unique, un nombre rationnel. Les traitements valides ou les propriétés de ces nombres sont validées par des considérations liées à un contexte physico-empirique. Ainsi, suite à la situation de mesure de l'épaisseur d'une feuille de papier de Brousseau, le type de raisonnement suivant est observé : $\frac{2}{5} = \frac{40}{100}$ car « *si 5 feuilles ont une épaisseur de 2 mm, 100 feuilles ont une épaisseur de 40 mm* ». On retrouve un schéma semblable dans la construction de la fonction linéaire (voir par exemple Harel et al. 1991). L'apprentissage conçu de cette façon peut se décrire par un processus de filiation des grandeurs vers les nombres et les fonctions.

La question de la représentation des nombres rationnels occupe à présent une place importante dans l'enseignement. Dans la section 2.1 du programme de $6^{ème}$ 2004, on trouve des indications très précises sur trois modes de représentations des décimaux (écritures fractionnaires, écritures à virgule, expression sur demi-droite graduée) et leur mise en relation. Duval (1995, pp. 39-44) décrit l'activité mathématique en termes de traitements à l'intérieur d'un registre sémiotique donné (par exemple dans le registre des écritures fractionnaires : $\frac{7}{5}=\frac{14}{10}$), ou de conversions entre deux registres sémiotiques hétérogènes (par exemple lors du passage écriture fractionnaire vers écriture décimale : $\frac{7}{5}=1{,}4$). Il distingue fortement traitement de conversion, le changement de système sémiotique lié à la conversion entraînant « *des changements de direction de la pensée qui apparaissent comme des ruptures... à l'encontre du déroulement spontané du jeu d'associations qui a été induit par... les premiers traitements engagés.* » (Duval ; 2001, p 85). Ainsi, le passage de $\frac{7}{5}$ à 1,4 ne va pas de soi pour nombre d'élèves car, si on exprime le même nombre par ces deux représentations, on modifie radicalement la manière de le signifier. Ainsi, $\frac{7}{5}$ est rarement perçu comme un nombre en début d'apprentissage à l'opposé de 1,4, ou encore, $\frac{7}{5}$ est confondu avec 7,5. Mais lors de ce passage, on modifie aussi la face « éclairée » du nombre considéré (rapport de 7 à 5 d'un côté, nombre compris entre 1 et 2, plus près de 1 que de 2... de l'autre) et les modalités de traitements (le calcul de $\frac{7}{5}+\frac{3}{10}$ suivent des règles radicalement différentes de $1,4 + 0,3$).

La conversion est essentielle, selon Duval (1995, pp. 36-44), car, en articulant diverses représentations d'un même objet, elle amène les élèves à se questionner sur le fond commun de ces diverses représentations et donc à prendre conscience de l'existence d'objets mathématiques au-delà de la diversité de leurs représentations. Nous avons pour notre part décrit une expérience d'enseignement des rationnels au cycle 3 centrée sur l'étude systématique, dans un environnement logiciel (Adjiage et Heideier, 1998), de trois registres d'expression, des traitements qui leur sont spécifiques et des conversions de l'un à l'autre (Adjiage, 1999).

2. Notre analyse de complexité

Considérons un élève à qui on demande de résoudre un problème mettant en jeu des rapports de grandeurs dans un contexte physique, par exemple un mélange. L'énoncé évoque des objets (jus de fruit, eau) sur lesquels l'élève a déjà fait des expériences sensibles (par exemple en tester le goût), des grandeurs (volumes) sur lesquelles cet élève a sans doute des références sensibles (transvasement...), des rapports entre ces grandeurs (3 verres de jus de fruit pour 2 verres d'eau). L'énoncé pose aussi une question, par exemple combien faut-il de verres d'eau pour réaliser un mélange ayant le même goût (référence à une expérience sensible) à partir de 7 verres de jus de fruit ? Mais la question pourrait tout aussi bien porter sur une comparaison du goût de deux mélanges formés à partir des mêmes ingrédients. L'élève est censé mobiliser, pour résoudre ce problème, des nombres, entiers, fractionnaires, décimaux, objets d'une toute autre nature puisqu'il n'a aucun accès sensoriel à ces derniers. Il est censé leur appliquer des traitements valides, qui ne dépendent pas de l'objet (un rationnel par exemple), mais d'une de ses représentations (fractionnaire, décimale...). Il convient donc qu'il fasse plusieurs choix. Tout d'abord, dans l'univers physique, ne garder que les données pertinentes et parfois reformuler le problème en le débarrassant d'une partie de son « habillage » inutile pour la résolution. Ensuite, dans l'univers mathématique : mobiliser des relations numériques (par exemple de proportionnalité) qui traduisent les relations entre les grandeurs concernées dans l'univers physique ; choisir une représentation numérique adéquate, facilitante... (fractionnaire, et/ou décimale, et/ou schématique...) ; engager des traitements valides susceptibles de fournir des résultats pertinents ; changer éventuellement de représentation (comparer deux décimaux est parfois plus simple que comparer deux fractions) en cours de traitement. Puis réinterpréter ses résultats numériques en termes de grandeurs, d'objets, de goût... Mais cela ne s'arrête pas là. Car d'autres problèmes vont suivre, où il sera question d'agrandissement, de fréquence, de vitesse uniforme..., problèmes qui n'ont pas de rapport évident avec le goût d'un mélange, mais qui pourtant sollicitent les mêmes objets et notions mathématiques et les mêmes traitements.

Pour gérer cette complexité, nous pensons qu'il importe d'assigner une place spécifique à l'univers physique ou physico-empirique et à l'univers mathématique puis de décrire précisément chacun de ces univers. Le processus d'enseignement / apprentissage ne peut qu'en être clarifié. Notamment, cela permet aux élèves de :

- distinguer les méthodes d'investigation, de traitement et de preuves valides en mathématiques des méthodes et traitements physiques,
- ne pas attacher la notion de rationnel à un contexte d'origine et donc conserver sa pertinence, comme objet mathématique, à interpréter toute une classe de contextes.

Mais cette séparation et cette diversité ne se conçoivent que pour mieux prendre en compte la question délicate des articulations. Pour nous, la construction par un élève des notions de nombre rationnel et de proportionnalité passe par une reconnaissance claire des différences et des articulations entre les univers, les objets et les traitements impliqués. Nous obtenons en conséquence la configuration illustrée par le Schéma 1.

2.1. Le schéma de la complexité

En accord avec les travaux de Vergnaud (1983), synthétisés dans Brégeon et al. (2001, p. 22-29), sur les structures multiplicatives, nous intégrons dans cet unique schéma l'étude des rationnels (objets mathématiques permettant l'expression de rapports de grandeurs) et l'étude de la proportionnalité (conditions de l'invariance d'un rapport lorsque les grandeurs en jeu varient)

La partie supérieure de ce schéma concerne l'univers physico-empirique. Deux contextes y sont proposés, chacun dans un cadre[1] différent, mais d'autres seront décrits plus loin. La partie inférieure du schéma propose, dans l'univers mathématique, trois représentations, chacune dans son cadre, d'un même nombre rationnel. Nous distinguons deux sortes d'articulations : des articulations internes (à un cadre donné), et des articulations externes représentées par les doubles-flèches en gras.

Partie supérieure du schéma. Nous n'avons pas eu la place de représenter un exemple de traitement à l'intérieur d'un cadre. Un tel traitement engage des actions, réelles ou imaginées, et/ou dessinées, dans l'univers physique. Il conduit à transformer un contexte 1 en un contexte 1' de même type.

L'articulation de niveau 1 concerne plusieurs types de tâches. Nous en citerons deux qui nous semblent essentielles : transformer un contexte 1 en un contexte 2 de type différent, peut-être pour faciliter la résolution d'un problème (voir un exemple en 4.2.b) ; déterminer des invariants et des différences entre des contextes de type différents.

[1] Le mot cadre désigne ici les zones encadrées dans le schéma 1, et n'a rien à voir avec un cadre au sens de Douady (1984).

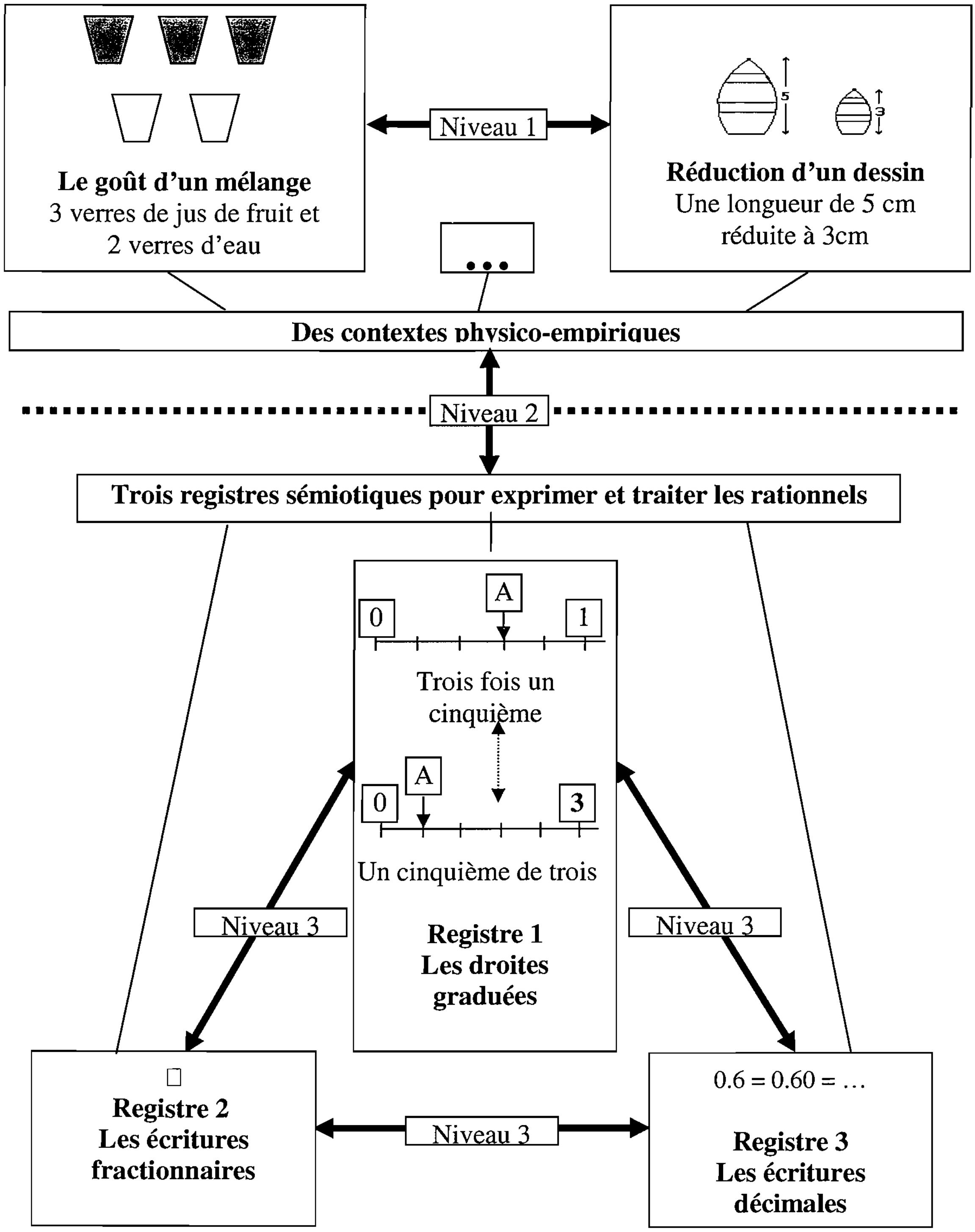


Schéma 1 : Diversité physique et sémiotique autour d'un nombre rationnel

Partie médiane du schéma. L'articulation de niveau 2 est celle qui concerne le passage des relations entre les grandeurs impliquées dans un problème physique à la saisie d'une expression numérique susceptible de traduire ces relations.

Partie inférieure du schéma. Les égalités comme $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$, 0.6 = 0.60 ou encore ce que représente la double-flèche pointillée dans le cadre relatif à la droite graduée sont des traitements au sens de Duval : transformations internes à un registre, par exemple d'une écriture fractionnaire à une autre... Les articulations de niveau 3 sont associées à des conversions au sens de Duval : transformations avec changement de registre, par exemple d'une écriture fractionnaire à une écriture décimale comme dans $\frac{3}{5} = 0{,}6$.

2.2. Description des univers physique et mathématique

Nous avons jusqu'à présent employé les termes « physique » et « mathématique » dans une acception banale, afin de distinguer ces éléments essentiels de la complexité trop souvent rabattus l'un sur l'autre dans un objet indifférencié : le « problème de maths ». Il s'agit à présent de préciser ce que nous entendons par univers physique ou physico-empirique et ce que nous entendons par univers mathématique au niveau scolaire concerné. Une première variable, dite de contexte va nous permettre de décrire le premier, une deuxième variable, dite de registre, dont la pertinence s'appuie la théorie de Duval, nous sera utile pour décrire le deuxième. C'est principalement sur ces deux variables que nous avons décidé d'agir pour construire notre ingénierie.

a. L'univers physique considéré

Cet univers contient des contextes qui peuvent engendrer des problèmes. Un contexte décrit une expérience physique dans laquelle sont considérés des objets sensibles, des grandeurs qui leur sont attachées, des mesures de ces grandeurs et des états dans lesquels on envisage les objets engagés. En prenant en compte successivement le nombre de grandeurs différentes (une ou deux) impliquées, puis, le cas échéant, le nombre d'objets sous-jacents (un ou deux), puis, le cas échéant, les états dans lesquels ces objets sont examinés, nous avons obtenu (Adjiage, 2005, pp. 100-102) six types de contextes mettant en jeu des rapports : "rapport de deux grandeurs hétérogènes" (vitesses, débits...) ; "mesure" ; "mélange" ; "fréquence" ; "dilatation" ; "changement d'unité". Par exemple : « Pour obtenir du gris, on mélange dans un seau des pots de peinture blanche avec des pots de peinture noire. Je m'intéresse à la nuance du mélange » est un contexte de type « mélange ». La pertinence didactique de cette variable de contexte a été établie dans Adjiage (2005, pp. 103-117) en montrant que les changements de contexte ont un impact repérable sur les scores et les procédures des élèves. Pour qu'un contexte engendre un problème, il convient de préciser les données numériques et de poser une question. Pour cela, et en accord avec la littérature existante, nous avons considéré quatre types de variables : nature des données (entiers, rationnels décimaux ou pas...) ; nature des rapports à traiter (entiers, rationnels décimaux ou pas) ; mode d'expression, dans l'énoncé, de ces rapports (« couple » d'entiers – 3 chances sur 5 –, écriture fractionnaire – $\frac{3}{5}$ –, écriture décimale – 0,6 ; nature de la question (recherche d'une quatrième proportionnelle, comparaison de rapports...).

Dans le cas du contexte "mélange des pots de peinture", cela peut donner : « Un fabricant recommande de mélanger 3 pots de peinture blanche et 2 pots de peinture noire pour obtenir une nuance de gris. J'ai versé 5 pots de peinture blanche dans un seau. Combien de pots de peinture noire dois-je verser pour obtenir le même gris ? » (données entières ; rapports non décimaux pouvant être pris en compte : $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{3}$..., rapports décimaux pouvant être pris en compte : $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{5}$... ; expression au moyen d'entiers ; recherche d'une quatrième proportionnelle).

b. L'univers mathématique considéré

Nous considérons dans cet univers des objets dont Duval (2000, pp. 61-63) dit : « *Nous n'avons pas d'accès perceptif ou instrumental aux objets mathématiques...* [alors que nous en avons] *pour n'importe quel objet ou phénomène du monde extérieur...la seule façon d'accéder aux objets mathématiques est d'utiliser des signes, des mots ou des symboles...* ». Un objet mathématique, au sens de Duval, est donc un objet « détaché » de l'éventuel contexte physico-empirique qui a pu lui donner naissance[2] : par exemple en passant de 3 élèves, 3 bonbons, 3 images à 3, ou encore de $\frac{3}{4}$ de tarte ou de 3 mètres parcourus en 4 secondes à $\frac{3}{4}$ ou 0,75... Nous mettons dans cet univers des signes organisés en registres sémiotiques distincts (par exemple, registre des écritures fractionnaires et registre des écritures décimales). Des traitements valides sont repérés à l'intérieur d'un registre donné (exemple : $\frac{3}{5}\times 5=3$), des conversions permettent de passer d'un registre à un autre, par exemple pour faciliter un traitement (comparer $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{7}$ peut être facilité en comparant des approximations décimales des rationnels sous-jacents). Enfin le repérage de différences et d'invariants entre ces diverses représentations et divers traitements permet d'envisager, au-delà des représentations, un objet dont les aspects divers sont tour à tour éclairés par ces diverses représentations et divers traitements (Duval, 2001, pp. 89-94). Dans cet univers, nous n'envisageons pas des rationnels-mesures, rationnels-dilatations..., nous considérons des nombres rationnels tout court. Les propriétés de ces derniers, révélées par les traitements et conversions, permettent d'interpréter et de traiter un quelconque problème issu d'un des six types contextes (2.2.a)

3. Faisabilité didactique et schéma d'enseignement

Dans une optique constructiviste et conformément aux programmes en vigueur, nous nous sommes tout d'abord attachés à concevoir un enseignement problématisant, c'est à dire plaçant la résolution de problèmes au cœur des apprentissages. La littérature propose de nombreuses situations-problèmes de la notion de rapport dans un contexte physico-empirique, notamment Brousseau (1987). Nous nous y sommes abondamment référés pour concevoir des problèmes dans l'univers décrit en 2.2.a. Mais est-il possible de problématiser un rationnel dans l'univers mathématique décrit en 2.2.b ? Nous donnerons des exemples de cette problématisation en 4. et, pour des considérations plus générales, nous renvoyons le lecteur à Adjiage (1999, pp. 180-191 ; pp. 235-282).

3.1. Les trois registres retenus, le rôle central de la droite graduée

Nous avons retenu trois registres d'expression et de traitement des rationnels : les droites graduées, les écritures fractionnaires, les écritures décimales. Nous expliquons

[2] On parlait autrefois de nombres concrets et nombres abstraits. Mais cela semble de nouveau être dans l'air du temps...

en détail ce choix dans Adjiage et Pluvinage (2000, p. 47). Nous souhaitons cependant justifier succinctement ici notre choix inhabituel de privilégier la droite graduée conçue comme véritable moyen d'exprimer et de traiter les rationnels, au même titre que les écritures fractionnaires et décimales, et non comme simple illustration de ces dernières. Cela tient d'abord à la question essentielle des articulations. Existe-t-il un registre de transition entre les deux registres incontournables des écritures fractionnaires et décimales (articulations de niveau 3) ? Un registre susceptible d'annoncer puis de contrôler les futurs et périlleux traitements fractionnaires ? Nous avons établi dans Adjiage & Pluvinage (2000, pp. 45-62) que la droite graduée, équipée de ressources appropriées, répond à ce premier cahier des charges. Elle permet de plus de gérer les articulations de niveaux 1 et 2. Ce registre offre en effet la possibilité d'interpréter (articulation de niveau 2) et même de traiter tous les problèmes issus des six contextes étudiés en 2.2.a (Adjiage 2004, pp. 253-256). Nous en verrons de nombreux exemples dans la partie 4 de cet article. On dispose ainsi d'un outil susceptible de créer du lien entre les différents types de contextes et donc de faciliter la gestion des articulations de niveau 1. Rappelons enfin que la droite graduée évite deux écueils sérieux dans l'apprentissage des rationnels (Adjiage & Pluvinage, 2000, pp. 52-61 & pp. 78-81) en :

- présentant d'entrée de jeu un rationnel comme un nombre[3], situé parmi les premiers nombres rencontrés, à savoir les entiers ;
- focalisant sur le lien[4] entre les deux entiers nécessaires à toute expression d'un rationnel plutôt que sur ces deux entiers pris séparément.

Une investigation des trois registres retenus, et notamment celui des droites graduées, ne pouvant se concevoir que par essai / erreur, un environnement logiciel devenait nécessaire pour limiter les coûts. C'est pourquoi nous avons développé les séries de logiciels ORATIO et NovOra.

3.2. L'environnement d'ORATIO et NovOra (Adjiage & Heideier, 1998-2002)

On se bornera ici à rappeler quelques caractéristiques générales de ces deux séries de logiciels et quelques choix fondamentaux qui ont guidé leur conception et leur mise en œuvre. On donnera en 4.1 et 4.3 quelques exemples d'utilisation et de ressources des logiciels consacrés aux droites graduées, et en 4.2 aux fractions. On se reportera pour plus de précisions à (Adjiage, 1999, pp. 107-120 ; pp. 403-435), (Adjiage et Pluvinage, 2000), (Adjiage, 2001a).

ORATIO est consacré à l'introduction des rationnels. Il est composé de vingt logiciels répartis en deux ensembles et une base de données permettant l'enregistrement des performances des élèves. Le premier ensemble comprend quatorze logiciels de *traitement* (transformation interne à un registre) au sens de Duval (1995, pp. 39-40) : Gradu1 à Gradu6 (droites graduées) ; Fracti1 à Fracti5 (écritures fractionnaires) ; Format1, Format2 et Mystère (écritures décimales). Il permet aux élèves une investigation séparée de chacun de ces trois registres. Le second ensemble est composé de six logiciels de conversion (transformation d'une représentation dans un registre, par

[3] Une introduction classique aux rationnels par les fractions, souvent renforcée par un enseignement privilégiant les « parts de tarte », amène nombre d'élèves à considérer qu'une fraction ne représente pas un mais deux nombres (Hart & Sinkinson, 1989; Streefland, 1993, p. 114; Adjiage, 1999, p. 204).

[4] Ce lien est représenté par la position, invariante par changement d'échelle, d'un point par rapport à un repère d'une droite graduée.

exemple celui des droites graduées, à une représentation dans un autre registre, par exemple celui des écritures fractionnaires) au sens de Duval (1995, pp. 40-44). Lors de cette deuxième série d'investigation, les élèves sont invités, à travers des tâches spécifiques, à mettre en relation deux des trois registres retenus, et ce dans les deux sens possibles.

NovOra est consacré aux quotients d'entiers, au produit par un rationnel et à la proportionnalité. La droite graduée, dans sa version simple ou double échelle, est le registre principalement sollicité par cette série.

La série ORATIO peut être abordée au cycle 3 des écoles et entièrement traitée en 6$^{\text{ème}}$. NovOra peut être abordé 6$^{\text{ème}}$ et entièrement traité en 5$^{\text{ème}}$. Quelques reprises d'ORATIO, variables d'une classe à l'autre, sont souhaitables en 5$^{\text{ème}}$.

Chaque logiciel propose plusieurs tâches, souvent à partir d'une consigne de comparaison ou de positionnement de rationnels exprimés dans un des trois registres. Un logiciel donné ne cherche pas à expliquer, il ouvre un accès aux objets mathématiques non par une définition formelle et /ou illustrée, mais par des mises à l'épreuve de leur mode d'expression, de traitement, puis de conversion. L'élève est censé agir, d'essais en erreurs, en testant des hypothèses : 3,14 est-il supérieur à 3,5 puisque 14 est supérieur à 5 ? Le milieu (le logiciel) rétroagit alors, donne à observer des phénomènes qui invitent à engager une nouvelle action puis à échafauder des règles qu'on remet à l'épreuve. Le but de ces tâches est, au-delà de l'identification de règles de traitements valides, le repérage d'invariants entre ces divers modes d'expression et de traitement, ce qui aide à l'objectivation de la notion de rationnel.

3.3. Cinq moments clés d'une séquence d'enseignement (sur plusieurs séances)

Nous prenons acte, dans le processus d'enseignement, des différents niveaux de séparation et d'articulation illustrés par le Schéma 1 de la complexité. Nous nous appuyons en conséquence plus sur une mise en parallèle de l'univers des grandeurs et des nombres que sur une relation de filiation du premier au deuxième. C'est sans doute la distinction majeure de notre ingénierie. Nous agissons sur les variables de contexte et de registre de manière séparée ou coordonnée selon que nous souhaitons valoriser la séparation ou l'articulation des deux univers. Tout ceci nous amène à décrire cinq moments-clés d'une séquence didactique. Ces moments seront systématiquement repris dans chacun des exemples étudiés en 4.

Moment 1. Résolution par les élèves d'un problème physique construit à partir de la variable de contexte et des quatre variables des données et de la question (2.2.a). Les élèves traitent le problème selon une procédure de leur choix.

Moment 2. Résolution par les élèves d'un problème purement mathématique dans l'environnement logiciel d'ORATIO ou de NovOra. Ce problème est structurellement et numériquement semblable au problème mathématique sous-jacent à celui du Moment 1. Certains des élèves reconnaissent spontanément ces similarités, d'autres pas. L'enseignant prend bonne note de ces commentaires mais n'arbitre pas à ce stade.

Moment 3. Résolution par les élèves d'un problème purement mathématique, semblable à celui de Moment 2, dans un environnement papier / crayon. Même remarque que ci-dessus sur d'éventuels commentaires-élèves.

Moment 4. « La convergence provoquée ». Le professeur rappelle les enjeux du « débat scientifique » au sens de Legrand (2000) : « Certains d'entre vous pensent que les problèmes des phases précédentes présentent de plus ou moins fortes similarités. Nous allons essayer de préciser en quoi ils sont semblables, en quoi ils sont différents. ».

Moment 5. Institutionnalisation au sens de Douady (1984, p.16). Par exemple : « 7 divisé par 4 est égal à $\frac{7}{4}$ » ou « Etant donné une dilatation transformant une longueur de 4 cm en une longueur de 7 cm, toute longueur à dilater doit être multipliée par $\frac{7}{4}$ ».

Commentaires

- *La phase physique (Moment 1) précède les phases mathématiques (Moments 2 et 3).* Ce choix est dicté par toutes les considérations rappelées en 1. et conforme aux programmes en vigueur.
- *Pourquoi deux phases mathématiques ?* Les rétroactions d'un logiciel et la diminution des coûts de reprise dans un tel environnement facilitent la mise en œuvre d'une démarche par essai / erreur. L'environnement papier / crayon, moins favorable, encourage en revanche la recherche de solutions plus directes, souvent plus généralisables, et amène donc à reconsidérer les acquis des phases précédentes. Le Moment 3 est toujours un moment d'action, mais aussi de réflexion sur les connaissances, au sens de la théorie des situations (Brousseau, 1998, pp. 99-103), construites notamment lors de la phase logicielle.
- *La convergence provoquée* (Moment 4) est le point d'orgue du processus. Cette tâche de comparaison d'énoncés et de procédures est peu fréquente dans le cursus secondaire français, et on peut le regretter, car elle a toute sa place dans l'arsenal didactique à côté des tâches de production de résultats. Lors de cette phase, les élèves sont amenés à expliciter les liens entre les nombres et leurs modes d'expression d'une part, les grandeurs en jeu et leurs relations d'autre part. Ce Moment 4 est évidemment essentiel pour mener un travail sur les articulations des trois niveaux du Schéma 1. La droite graduée sera alors souvent sollicitée comme objet permettant de situer le niveau où il est légitime d'identifier les problèmes des Moments 1, 2, et 3.

3.4. Quelques mots sur la méthodologie et les principaux résultats

Le processus d'identification par les élèves d'un modèle mathématique (rationnels et proportionnalité), sous-jacent à la diversité des problèmes physiques liés aux rapports, a été mis en évidence lors d'une expérience que nous avons menée en $6^{ème}$ et $5^{ème}$ entre septembre 2001 et avril 2003 (Adjiage & Pluvinage, 2007). Une classe expérimentale, ayant bénéficié d'un enseignement basé sur notre protocole, a été comparée à une classe témoin. Un des principaux résultats de cette expérience a été le suivant. Avant enseignement, les élèves des deux classes tendaient à changer de procédure en changeant de contexte, à problème mathématique sous-jacent unique. Après enseignement, les élèves de la classe expérimentale avaient tendance à conserver leur procédure, mobilisant très fréquemment des fractions, en changeant de contexte. Les élèves de la classe témoin en revanche continuaient massivement à changer de procédure en changeant de contexte. Ce qui nous a permis de conclure que les premiers reconnaissaient l'existence d'un problème mathématique unique permettant d'interpréter et de traiter les problèmes physiques proposés dans divers contextes, alors que les deuxièmes semblaient, dans leur ensemble, changer de problème mathématique en changeant de contexte.

4. Trois séquences-types d'enseignement

Les trois séquences qui suivent sont extraites du corpus complet des séquences d'enseignement menées dans la classe expérimentale évoquée en 3.4. L'ordre de présentation est chronologique mais à « trous » : de nombreux chaînons intermédiaires sont manquants.

Ces séquences sont des séquences clés. Elles ont été choisies car elles sont caractéristiques de l'ensemble du corpus et de sa dynamique. Elles permettent à elles-seules de se faire une idée assez précise du protocole.

Le même déroulement, reprenant les quatre premiers moments décrits en 3.3, est proposé pour chacune des trois séquences. Les institutionnalisations (Moment 5), très dépendantes de la classe et de la progression effectives, ne seront évoquées que si les phases précédentes les déterminent suffisamment. En outre, un aval et un amont de chaque séquence sont systématiquement envisagés afin de situer cette dernière dans une progression.

4.1. Comparaison de rapports Gradu 4 ($6^{ème}$)

a. L'amont

Dans notre progression, le problème ci-dessous démarre la série des problèmes physico-empiriques mettant en jeu des rapports non entiers. Notamment, aucun rappel sur les fractions associées à des surfaces fractionnées n'est proposé auparavant. L'univers mathématique de Gradu 1 à 3 a en revanche permis de travailler la dépose de nombres entiers sur droite graduée, par report et subdivision d'intervalles[5], ainsi que la comparaison d'entiers situés sur des droites graduées différentes. Les problèmes physiques associés sont essentiellement des problèmes multiplicatifs de type « un / plusieurs » et des problèmes de division partition et division quotition (Brégeon et al., 2001, p. 23).

b. Moment 1 : la phase physique

Le problème de mélange suivant est posé aux élèves. Pour obtenir de la peinture grise, on mélange dans un seau de la peinture noire et de la peinture blanche. Le mélange A utilise 3 pots de peinture noire et 2 pots de peinture blanche. Le mélange B utilise 2 pots de peinture noire et 1 pot de peinture blanche. Lequel de ces deux mélanges est le plus foncé ?

Figure 1 : comparer des nuances de gris

[5] Par exemple : déposer 22 sur une droite graduée régulièrement de 6 en 6. Les seules données sont les nombres 7 et 13 marquant deux graduations successives. Ressources : subdiviser un seul intervalle par un diviseur de 6.

Valeurs des variables (2.2.a). Contexte : Mélange ; données : entières ; rapports en jeu[6] : entier (2 pour B), décimaux non entiers ($\frac{3}{2}$, $\frac{3}{5}$ pour A), rationnels non décimaux ($\frac{2}{3}$ pour B) ; question : comparaison de rapports.

Ces problèmes de mélange ont été beaucoup étudiés, notamment par Noelting (1980). Leur réussite en début de 6ème est faible. Nous avons observé pour le problème ci-dessus, en début de 6ème avant enseignement (47 élèves) : 21% de réponses justes et justifiées, 38% de réponses utilisant un raisonnement basé sur une comparaison des écarts entre les constituants (1 pot de plus de noir et 1 pot de plus de blanc, donc c'est le même gris) ou sur la prise en compte d'un seul constituant (Il y a plus de pots de noir dans A, donc A est plus foncé). Notons enfin que, dans le cas de la recherche d'une quatrième proportionnelle (mélange donné : 5 pots de peinture noire, 8 pots de peinture blanche ; combien de pots de peinture blanche doit-on mélanger à 11 pots de peinture noire pour obtenir le même gris ?), le pourcentage de raisonnements additifs faux monte à 56% en cours de cinquième (sur 121 élèves).

Nous avons assisté à de nombreuses séances de résolution de problèmes de mélange avec des publics très variés. Nous avons pu constater chaque fois un réel engagement de chaque élève, tant dans la recherche de la solution que dans la défense de sa solution, et aussi beaucoup d'étonnement durable lorsque cette dernière (par exemple la prise en compte des écarts), est invalidée. C'est pourquoi nous avons pris le risque de placer cette séquence au début du cursus. Nous ne visons évidemment pas une compréhension aboutie de ces problèmes à ce stade, ainsi que nous l'expliquerons au Moment 4, mais un premier contact avec le monde des rapports et leurs traitements parfois déroutants, dans un contexte se prêtant à de multiples conjectures.

c. Moment 2 : la phase mathématique dans l'environnement logiciel d'ORATIO

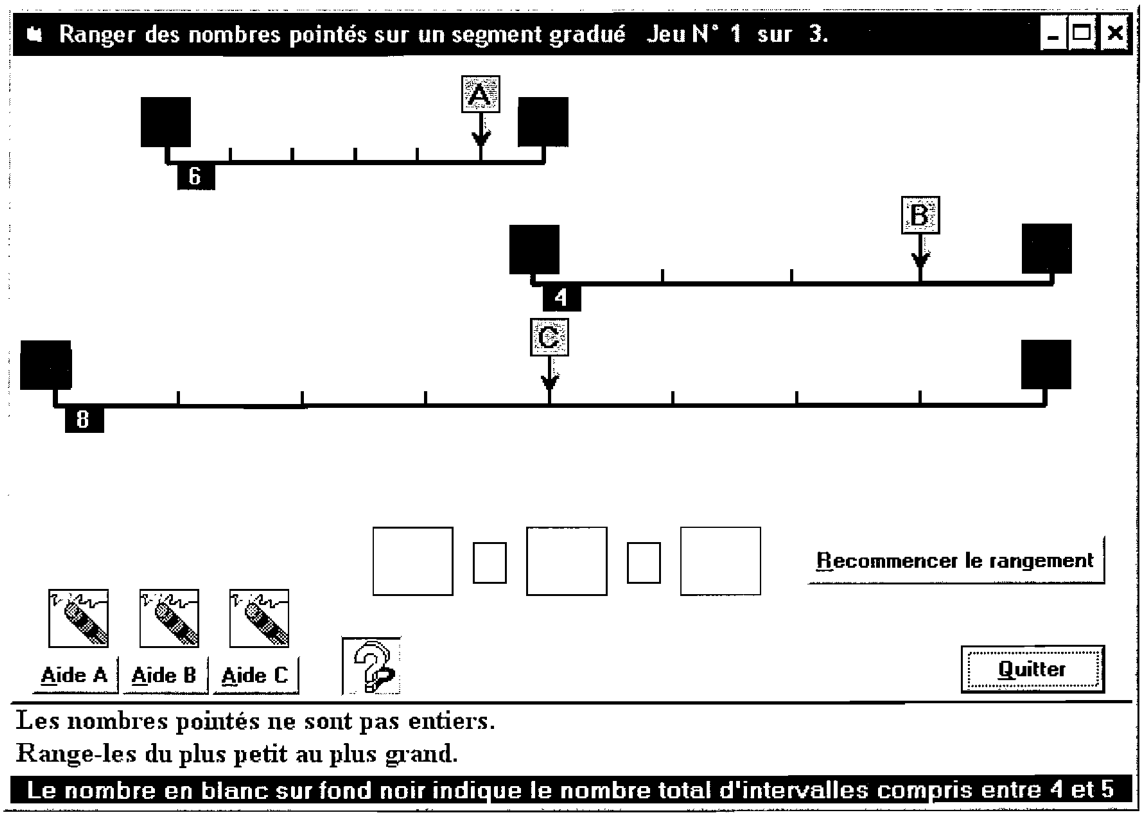
A l'écran apparaissent trois segments gradués (Ecran 1). Chacun est subdivisé en sous-intervalles, ce qui permet l'expression de trois rationnels. On notera ci-dessous par abus de langage A, B, C aussi bien les rationnels exprimés que les points associés. Le but est de ranger ces trois nombres, du plus petit au plus grand. Aucune fraction n'est sollicitée ou fournie. Le registre des droites graduées suffit à l'expression des nombres considérés et au traitement du problème posé. La ressource majeure est la possibilité de choisir le nombre par lequel on souhaite resubdiviser chaque sous-intervalle initial. Le nombre inscrit en blanc sur fond noir dans la case située au-dessous du segment gradué est le fractionneur. Il indique le nombre de sous-intervalles compris entre les bornes de l'intervalle principal et évolue avec les éventuels choix de resubdivision de l'utilisateur.

Dans le cas présenté en Ecran 1, un élève peut par exemple comparer C à A et B en positionnant chacun de ces points par rapport au milieu du segment qui les porte, puis ranger A et B en évaluant l'écart de chacun de ces nombres à la borne supérieure 1.

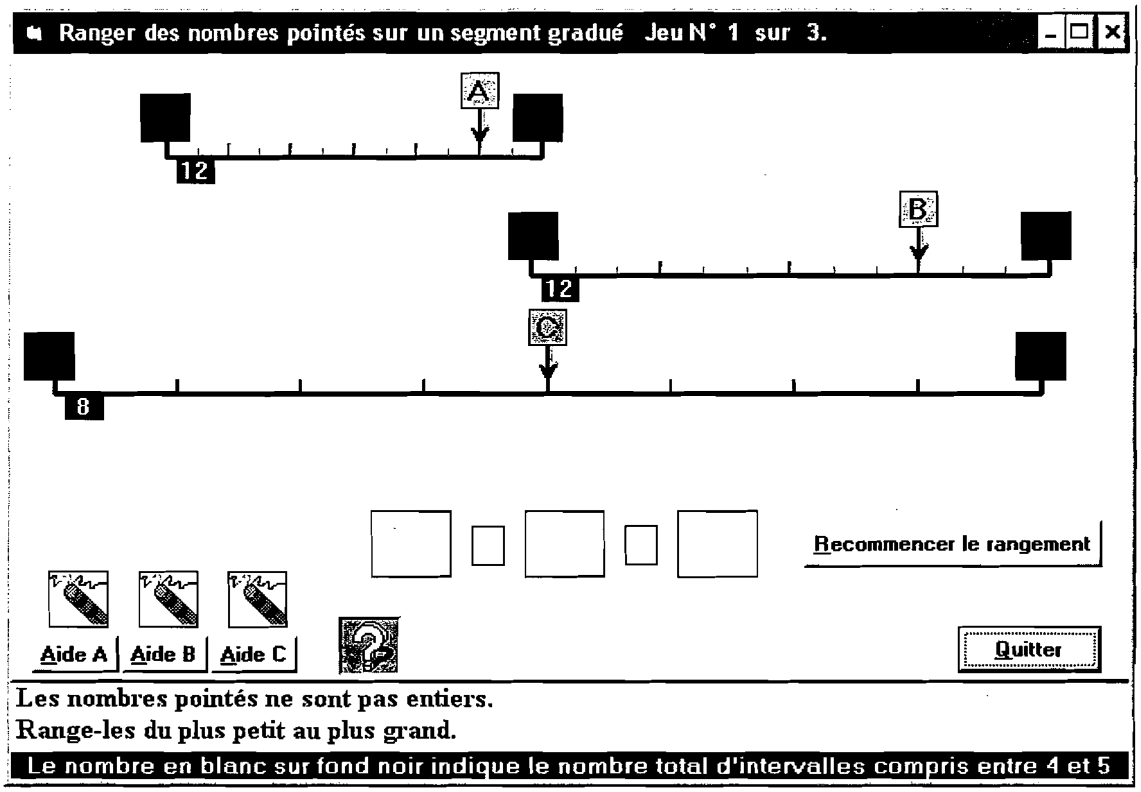
[6] On ne considère que les rapports Noir/Blanc ou Noir/Total, les plus congruents à la question. Seuls 10% des 47 élèves que nous avons observés en début de 6ème recherchent le mélange le plus clair, par exemple en considérant les rapports Blanc/Noir. Ce pourcentage devient négligeable dans la même population en fin de 5ème.

Mais il peut aussi recourir à l'aide sur A et B pour resubdiviser chaque sous-intervalle du segment portant A (respectivement B) en 2 (respectivement en 3), ce qui l'amène à raisonner sur un fractionneur commun 12 et permet une comparaison plus facile de A et B (Ecran 2).

La recherche d'un fractionneur commun n'est jamais nécessaire dans Gradu4, mais peut faciliter la tâche en cas d'insuccès répété. La possibilité d'essayer, de défaire ou de refaire à moindre coût grâce aux ressources de l'environnement logiciel est un facteur déterminant dans la réussite de cette entreprise. On notera enfin que les trois segments portant A, B, C, bien que représentant chacun [0 , 1], n'ont pas la même longueur. Cette disposition a été prise pour éviter que les élèves ne comparent des longueurs pour comparer des rationnels, ce qui aurait considérablement appauvri le problème. Les ressources du logiciel orientent plutôt l'élève vers la prise en compte d'invariants dans un changement d'échelle, et donc des rapports en jeu.



Ecran 1 : écran principal de Gradu4



Ecran 2 : écran d'aide de Gradu4

d. Moment 3 : la phase mathématique dans un environnement papier / crayon

Le problème de comparaison de A et B, exprimés au moyen des segments gradués en Figure 2, est posé aux élèves. Les moyens de sa résolution sont laissés au choix de ces derniers. Le corrigé peut, si besoin est, se référer aux procédures mobilisées pendant la phase logicielle.

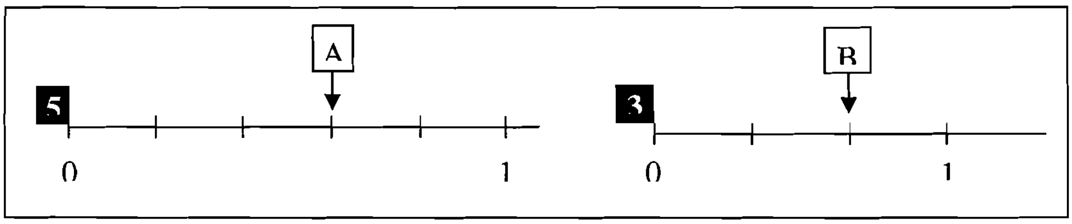


Figure 2 : comparer deux rationnels dans le registre des droites graduées

L'expérience a prouvé que quelques élèves établissent spontanément des liens avec le problème de la phase physique. Mais une forte majorité ne s'y réfère pas. La reconnaissance de ces liens sera donc l'objet principal de la phase suivante.

e. Moment 4 : la convergence provoquée

Nous ne prétendons évidemment pas que cette séance suffise à persuader tous les élèves que la comparaison d'un mélange puisse se ramener à la comparaison de rationnels. Mais les élèves disposent d'une possibilité de représenter chaque mélange par un point sur une droite graduée, donc par un nombre en l'occurrence non entier ; ils savent d'autre part comparer ces nouveaux nombres.

Si le modèle est adéquat, ils disposent alors d'un puissant outil de comparaison des mélanges. Il restera à tester la robustesse de ce modèle, en le soumettant régulièrement à l'épreuve de ses prédictions comparées à celles d'autres types de raisonnement. Par exemple, si un élève acquiert la conviction qu'on ne modifie pas un mélange M en doublant ses deux constituants, la mise à l'épreuve du modèle consistera à vérifier que le point M correspondant est invariant sur sa droite graduée lorsqu'on dédouble les intervalles qui déterminent sa position.

f. L'aval

A court terme, nous proposons d'autres problèmes de comparaison de mélanges ou de comparaison de fréquences qui sont assez proches, pour des rapports entiers (notamment le rapport 1) ou non entiers. A plus long terme, ces problèmes seront associés aux écritures fractionnaires et/ou décimales. Une fois maîtrisées, ces dernières fourniront une alternative à la droite graduée pour interpréter et traiter à moindre coût ce type de problèmes.

4.2. Introduction aux fractions (6ème)

a. L'amont

Les élèves ont déjà rencontré des nombres rationnels non entiers, mais exprimés dans le seul registre des droites graduées. Ils ont mis à l'épreuve leur potentiel d'interprétation et de traitement de problèmes physiques (4.1). Ils ont aussi été confrontés, lors de ces séquences, à l'existence, voire à la nécessité, des expressions équivalentes d'un rationnel (Ecran 2).

Ils ont par ailleurs été initiés au cycle 3 de l'école primaire aux fractions via le fractionnement de l'unité ($\frac{a}{b}$ entendue comme a $b^{ièmes}$). Il s'agit ici de réexaminer cette écriture fractionnaire comme susceptible d'exprimer un partage de a unités en b parts.

L'expression fractionnaire des rationnels, alternative dans notre démarche à celle déjà vue sur droite graduée, se révèlera en son temps beaucoup plus commode que cette dernière pour effectuer les traitements.

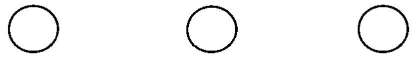
b. Moment 1 : la phase physique

Les élèves seront amenés à travailler sur un problème physique de partage, dont le résultat pourra être entier ou non entier, plus grand ou plus petit que 1. La (re)conquête de l'écriture fractionnaire n'est pas un objectif de cette phase, c'est un objectif de séquence. En revanche, la prise de conscience de la nécessité de procéder à des opérations physiques de subdivisions et reports pour effectuer un partage en est la visée essentielle. La démarche et les résultats pourront être présentés verbalement et/ou au moyen de schémas. La mobilisation spontanée par des élèves d'écritures fractionnaires sera acceptée, sans pointage particulier, comme un des moyens envisageables de traiter le problème.

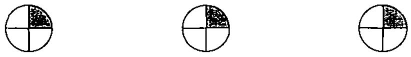
Une photocopie de disques représentant des pizzas est distribuée à chaque élève. « Je veux partager équitablement 3 pizzas identiques entre 4 invités. »

Question : « tu diras si chaque invité reçoit un nombre entier de pizzas. Si oui, quel est ce nombre ? Sinon, tu représenteras la part d'un invité. »

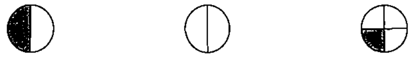
Ce qui est fourni : le dessin de trois pizzas



« Formes » de réponses-élèves correctes après traitement dans l'univers physique



Découpe de chaque pizza en quatre. La part d'un invité est grisée.



Chacune des deux premières pizzas est découpée en deux parts égales, la dernière est découpée en quatre. La part d'un invité est grisée.

La réponse est directement fournie en grisé sur une des trois pizzas.

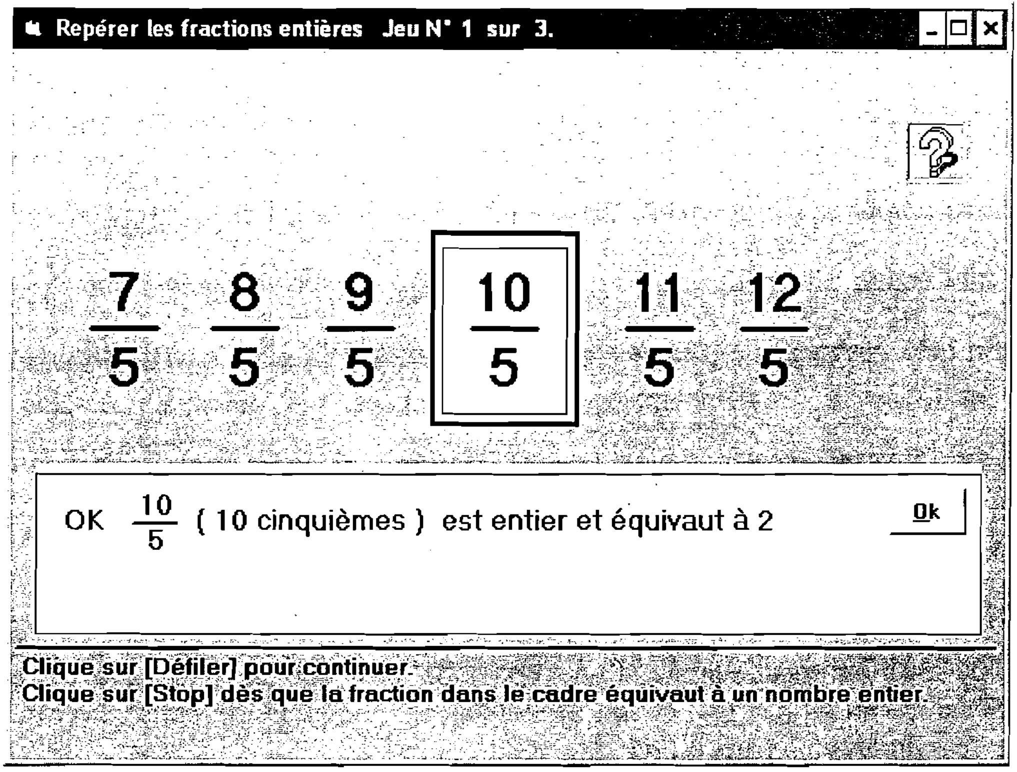
Valeur des variables. Contexte : Rapport de grandeurs hétérogènes (quantité de pizza/quantité de personnes) ; données : entières ; rapports en jeu : Rationnel décimal ($\frac{3}{4}$) ; question : recherche d'une quatrième proportionnelle dans le cas particulier de la recherche de l'image de 1 (combien pour 1 invité ?)

Notons qu'après traitement dans l'univers physique, le contexte initial de rapport de grandeurs hétérogènes peut se reformuler en un contexte de mesure : évaluer la part d'un invité avec la pizza entière comme unité : trois fois un quart de pizza. Quant à l'interprétation en terme de quotient (voir la division-partition dans Brégeon et al., 2001, p. 23) elle renvoie pour nous à l'univers mathématique (voir 4.2.g et 4.3.a et Adjiage, 2005, p. 122). Une fois approprié, le quotient de *a* par *b* permettra de modéliser directement les situations de partage de *a* objets en *b* parts.

Lors de la même séance, la même situation de partage sera traitée avec d'autres données, par exemple : 7 pizzas et 4 invités puis 12 (petites) pizzas et 4 invités.

c. Moment 2 : la phase mathématique dans l'environnement logiciel d'ORATIO

Cette phase mobilisera d'entrée de jeu l'écriture fractionnaire. On pourra évoquer le petit capital de fractions déjà rencontrées par les élèves à l'école primaire ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$… et leurs multiples). A l'écran de Fractil défilent des fractions de dénominateur constant et dont le numérateur augmente de 1 en 1 (exercice 1), ou de n en n (exercice 2) en commençant à 1. L'élève doit, à travers une démarche essai / erreur, « attraper » les fractions qui représentent un nombre entier en cliquant dans la fenêtre de défilement.



Ecran 3 : écran de défilement de Fractil. $\frac{10}{5}$ **est « attrapé » comme entier**

Le but est quintuple : plonger les fractions dans un environnement numérique attesté par la présence de fractions représentant des entiers (les fractions représentent des nombres) ; amener les élèves à repérer l'existence de nombres exprimables par des fractions entre deux entiers consécutifs ; fournir aux élèves des moyens d'interpréter les expressions fractionnaires de nombres non entiers à partir de l'expression fractionnaire des entiers ($\frac{4}{5}$ c'est $\frac{5}{5}$ moins $\frac{1}{5}$, donc $\frac{1}{5}$ de moins que 1, $\frac{11}{5}$ c'est $\frac{10}{5}$ plus $\frac{1}{5}$, donc $\frac{1}{5}$ de plus que 2) ; fournir aux élèves les précieux repères que sont les entiers pour situer une fraction ; amener les élèves à s'interroger sur le sens du dénominateur et du numérateur (quel type d'objet mathématique mérite une telle écriture, de tels traitements ?). On remarquera dans l'exemple ci-dessus que c'est $\frac{5}{5}$ ou $\frac{10}{5}$ qui amènent à s'interroger sur la signification de $\frac{4}{5}$ ou $\frac{11}{5}$ et pas le contraire.

d. Moment 3 : la phase mathématique dans un environnement papier / crayon

Les 21 fractions de la forme $\frac{n}{4}$, pour n compris entre 0 et 20, sont données aux élèves. On leur demande d'indiquer dans cette liste les fractions qui représentent : un entier (et dans ce cas d'indiquer quel entier) ; un nombre compris entre 0 et 1, supérieur à 1, à 2, à 3.... Les justifications peuvent s'appuyer sur celles évoquées lors de la phase logicielle, par exemple en mobilisant le quotient euclidien de n par 4. Pour le moment, on se contente toujours d'appréhender l'objet fraction à partir des traitements qu'il est légitime de lui appliquer.

e. Moment 4 : la convergence provoquée

Le débat scientifique est ouvert par le rappel suivant : le problème du Moment 1 était de partager 3 pizzas (respectivement 7, 12 pizzas) en 4. Le problème du Moment 3 (mais aussi sûrement du Moment 2, car les quarts sont forcément traités lors d'une passation complète sur Fractil) a été à un moment de savoir si $\frac{3}{4}$ (respectivement $\frac{7}{4}$, $\frac{12}{4}$) était entier, plus petit que 1 et égal à 3 fois $\frac{1}{4}$ (respectivement 7 fois $\frac{1}{4}$, 12 fois $\frac{1}{4}$). En quoi ces deux problèmes sont-ils les mêmes ? En quoi sont-ils différents ? On relèvera toutes les ressemblances et dissemblances, par exemple : dessins contre nombres ; 3 parmi 4 (parts de pizza) contre lien (encore à expliciter) de 3 à 4 dans $\frac{3}{4}$; 3 fois $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$; $3\div4$ contre $\frac{3}{4}$…

f. Moment 5 : institutionnalisations envisageables

- Une fraction rend compte d'une opération physique de partage à travers son numérateur (ce qu'on partage) et son dénominateur (le nombre de parts). Le résultat du partage de a unités en b parts est a b$^{\text{ièmes}}$
- $\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$.
- une fraction $\frac{a}{b}$ représente un nombre : inférieur à 1 si $a < b$; supérieur à 1 si $a > b$.
- une fraction $\frac{a}{b}$ représente un entier si et seulement si a est multiple de b.

On notera bien que le nombre exprimé par une fraction, s'il permet de rendre compte du résultat d'un partage, n'est pas qu'un produit de cette situation. Il est aussi problématisé dans un contexte purement mathématique, d'abord indépendant du contexte de partage puis articulé à ce dernier. On n'attache pas ainsi une fraction à une part de pizza, ce qui permet de préserver tout le potentiel d'interprétation (mélange, dilatation…) lié à cette entité numérique.

g. L'aval

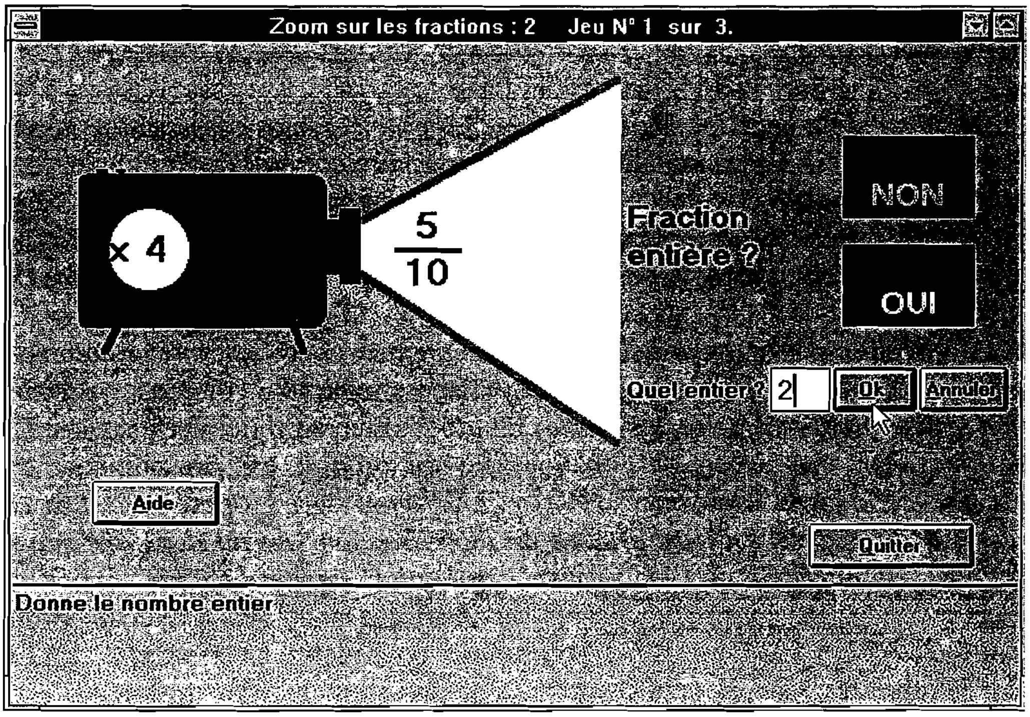
La séquence précédente permettait d'envisager $\frac{a}{b}$ comme l'expression d'un nombre pouvant interpréter le résultat d'un partage. Nous décrivons brièvement ci-dessous une séquence qui permettra de caractériser plus généralement $\frac{a}{b}$ comme un nombre r tel que : $r\times b=a$. Le quotient de a par b (a et b entiers, $b \neq 0$), qu'on peut noter $a\div b$, peut alors être défini. Cette opération permettra d'interpréter des problèmes physiques, dans différents contextes, débouchant sur la recherche d'une valeur unitaire (combien pour 1 ?).

La phase physique

Un problème de commensuration est proposé : « Avec 5 bouteilles de lait, on remplit exactement 13 verres. Combien de verres remplit-on avec 1 bouteille de lait ? » Dans notre classification, il s'agit d'un contexte de « Changement d'unité » (mesure de volumes avec l'unité « bouteille » ou l'unité « verre »), engendrant un problème à données entières, rapport décimal ($\frac{13}{5}$), recherche d'une quatrième proportionnelle particulière (image de 1).

La phase mathématique dans l'environnement logiciel d'ORATIO

Fracti2 propose une fraction et un entier. La question posée est : le produit de cette fraction par l'entier donné est-il entier ? Si oui, quel est cet entier ? Fracti2 vise à la prise de conscience que : modulo une dilatation bien choisie, une fraction peut toujours se ramener à un entier ; il existe une infinité (« autant qu'on veut ») de dilatations de rapport entier qui conviennent.



Ecran 4 : écran principal de Fracti2. Réponses de l'utilisateur : « Oui et 2 »

La phase mathématique dans un environnement papier / crayon

Elle va permettre la reformulation, en termes de quotient d'entiers, des résultats de la phase ORATIO : parmi l'infinité des entiers k tels que $\frac{a}{b}\times k$ est entier, on va privilégier l'un d'entre eux à savoir b. Les élèves pourront alors, ainsi que le mentionnent les programmes de sixième : « *interpréter la fraction* $\frac{a}{b}$ *comme quotient de l'entier a par l'entier b, c'est à dire comme le nombre qui multiplié par b donne a* ».
La fraction $\frac{13}{5}$ est choisie ci-dessous afin de faire le lien avec le problème de la phase physique.

Problème

1. Trouver le plus possible d'entiers n tels que : $\frac{13}{5}\times n$ est entier. Caractériser ces entiers n.
2. Résoudre : $\ldots\times 5 = 13$

La convergence provoquée

En quoi le problème de la phase physique et le problème de la phase mathématique papier/crayon sont-ils semblables ? En quoi sont-ils différents ? On mettra en concurrence et on discutera d'éventuelles réponses formellement différentes comme : 2,6 ; $\frac{13}{5}$; $2 + \frac{3}{5}$.

Institutionnalisation

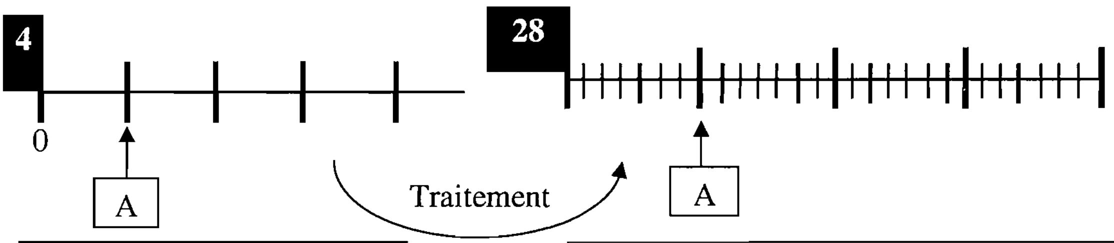
Le quotient de a par b est le nombre q tel que $bq = a$. Ce quotient admet une expression fractionnaire : $q = \frac{a}{b}$.

4.3. Produit par un rationnel, proportionnalité avec coefficient rationnel non entier (6ème et 5ème)

Les considérations et les écritures formelles utilisées dans cette section ne sont pas celles des élèves. Elles sont mobilisées ici pour se faire comprendre à moindre coût par des spécialistes. Le projet de cette section est de présenter un scénario, décliné sur les cinq moments usuels, susceptible d'amener les élèves à donner du sens au produit des rationnels et à la commutativité de ce dernier. A cet égard, il importe a minima de bien distinguer au début de l'apprentissage le produit d'un rationnel par un entier ($r \times n$) du produit d'un entier par un rationnel ($n \times r$). Le premier peut s'interpréter comme n fois r, ou $r + r + \ldots + r$, n fois, alors que le deuxième s'interprète comme : « *prendre une fraction d'une quantité* », selon les termes du programme de sixième en vigueur (2004). C'est donc bien une acception fonctionnelle du produit par un rationnel qui est encouragée ici, ce que Brousseau (1998, p. 222) avait déjà proposé : « *...Les enfants cherchent à donner un sens au produit de deux fractions ou de deux décimaux. Il y parviennent en interprétant l'un comme application linéaire opérant sur l'autre* ». C'est cette conception du produit par un rationnel que nous avons retenue. Brousseau (1998, pp. 237-241 ; 1987, pp. 136-144) propose, pour mettre en scène cette application linéaire auprès des élèves, une situation d'agrandissement d'un puzzle. C'est cette situation, déjà très expérimentée, que nous avons reprise pour la phase physique de notre scénario.

a. L'amont

Etude des activités physiques et mathématiques liées à ORATIO : expression et comparaison des rationnels au moyen des droites graduées, des écritures fractionnaires et décimales; conversion entre ces diverses expressions dont le passage droite graduée vers écritures fractionnaires. Etude des activités physiques et mathématiques liées à NovOra : proportionnalité avec coefficient entier ; quotient d'entiers. NovOra reprend en effet dans l'environnement de la droite graduée la scénarisation de $\frac{a}{b}$ vu comme quotient des entiers a et b. Une expression de rationnel est donnée dans un repère différent de [0,1]. Il s'agit de fournir une expression de ce même rationnel dans le repère [0,1]. La principale ressource pour effectuer ce traitement est la possibilité de resubdiviser chaque intervalle du segment gradué initial par un nombre entier.



L'expression du rationnel A dans le repère [0, 7] permet d'interpréter A comme le quotient de 7 par 4	L'expression du rationnel A dans le repère [0, 1] permet d'interpréter A comme 7 fois un quart plus congruent à □

Figure 3 : Un traitement dans le registre des droites graduées (resubdiviser chaque intervalle en 7), permet de placer 1 sur la graduation et donc de repérer A par rapport à l'intervalle [0, 1] au moyen de la fraction $\frac{7}{4}$

Nous verrons au Moment 2 en quoi ce type de traitement est utile pour fournir une expression fractionnaire de l'image d'un entier par une application linéaire dans l'environnement de NovOra.

b. Moment 1 : la phase physique

Les élèves sont invités à agrandir le puzzle de la Figure 4, avec pour seule indication : la longueur de 4 cm du côté de la pièce III de ce puzzle se transforme en une longueur de 7 cm.

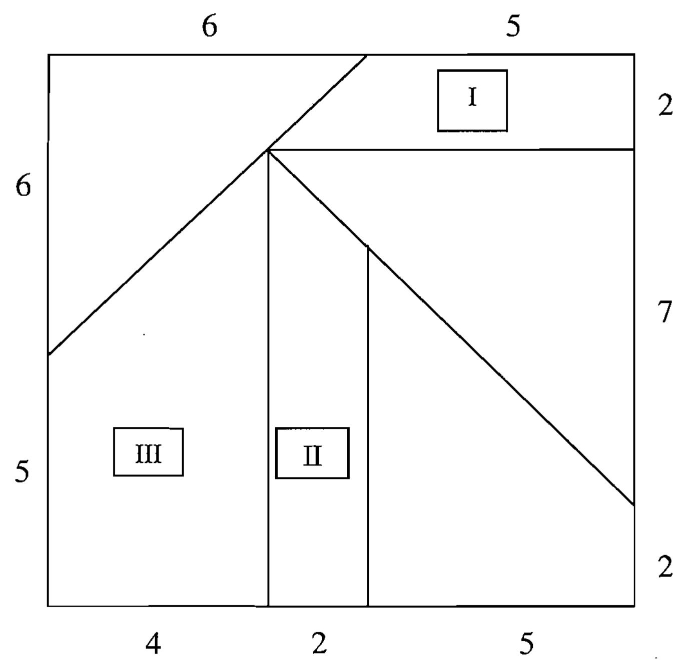


Figure 4 : le puzzle à agrandir (Brousseau, 1998, p.237)

Valeur des variables. Contexte : dilatation ; données entières ; rapports entiers ou décimaux non entiers ; recherches de quatrièmes proportionnelles.

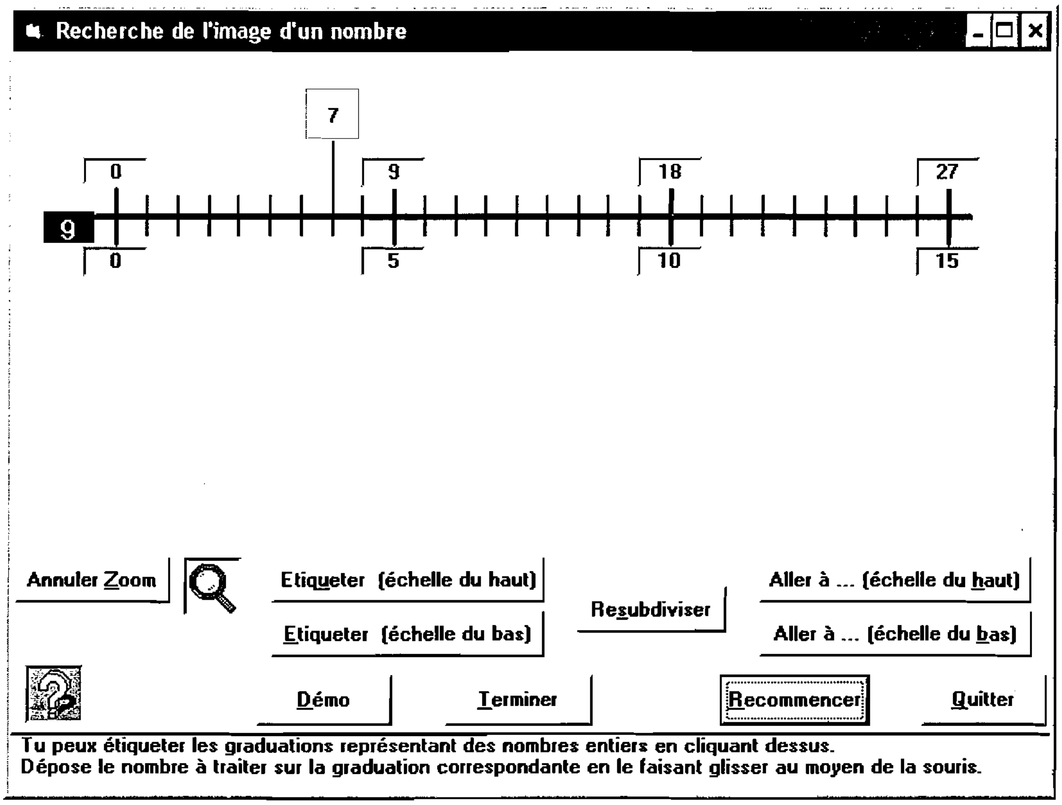
Après une première phase qui les amène à renoncer au modèle additif erroné (ajouter à toutes les longueurs la différence 7 – 4 = 3), et des processus de validation mis en place avec l'aide du professeur, les élèves donnent en général l'image de 8 qui n'est pas demandée mais semble déterminante pour s'approprier les propriétés de linéarité (Brousseau, 1998, p.237-239). En général, l'image de 2 suit, puis de 6 (4 + 2) selon nos propres observations. Le calcul de l'image de 5 pose problème car 5 n'est pas une combinaison linéaire simple de nombres dont on connaît déjà l'image. Mais comme 5 = 4 + 1, le calcul de l'image de 1 s'impose assez rapidement. Son expression au moyen de la fraction $\frac{7}{4}$ est aisée vu le travail fait en amont sur quotients et fractions : « *4 fois l'image de 1 mesure 7, l'image de 1 est donc* $\frac{7}{4}$ » (Brousseau, 1998, p. 239) ; ou en termes d'élève : « *... Il faut partager 4 en 4 parties, il faut diviser 7 en quatre aussi* » (ibid).

De plus, comme tout nombre entier est multiple de 1, l'image de 1 permet de calculer l'image de n'importe quel entier par linéarité multiplicative ou en termes d'élèves : « *Il faudrait calculer l'image de 1*». « *Oui, ça permettrait de trouver toutes les autres* » (ibid).

c. Moment 2 : la phase mathématique dans l'environnement logiciel de NovOra

Elle va fournir un registre, mobilisant une droite graduée avec double échelle, pour exprimer et traiter une application linéaire. Cette application est déterminée par la donnée d'un entier n et de son image m. Ainsi, l'application linéaire représentée dans Ecran 5 est déterminée par la donnée de 9 et de son image 5. On dispose sur la même graduation : n sur l'échelle du haut et m sur l'échelle du bas. Puis on dispose régulièrement sur l'échelle du haut les multiples de n et sur l'échelle du bas les multiples de m. Les subdivisions entre deux multiples consécutifs sont choisies pour que l'échelle du haut progresse de 1 en 1. Il est ainsi possible de déposer n'importe quel entier x (la droite peut glisser) sur l'échelle du haut, et d'avoir une expression de son image y sur la même graduation, mais à interpréter par rapport à l'échelle du bas. La difficulté est que les rationnels y sont alors exprimés dans un repère généralement différent de 1.

Au départ, un nombre x apparaît en haut de l'écran sur fond grisé ($x = 7$ dans Ecran 5). On demande à l'élève de déposer x sur l'échelle du haut puis de « calculer » son image y. Dans le cas de Ecran 5, une première expression de y pourrait être sept neuvièmes du segment [0 , 5]. Mais cette expression n'est guère commode, en tous cas peu usuelle. Par exemple, elle ne permet que difficilement de donner une approximation entière de l'image de 7.



Ecran 5 : NovOra, Exercice 3, écran initial

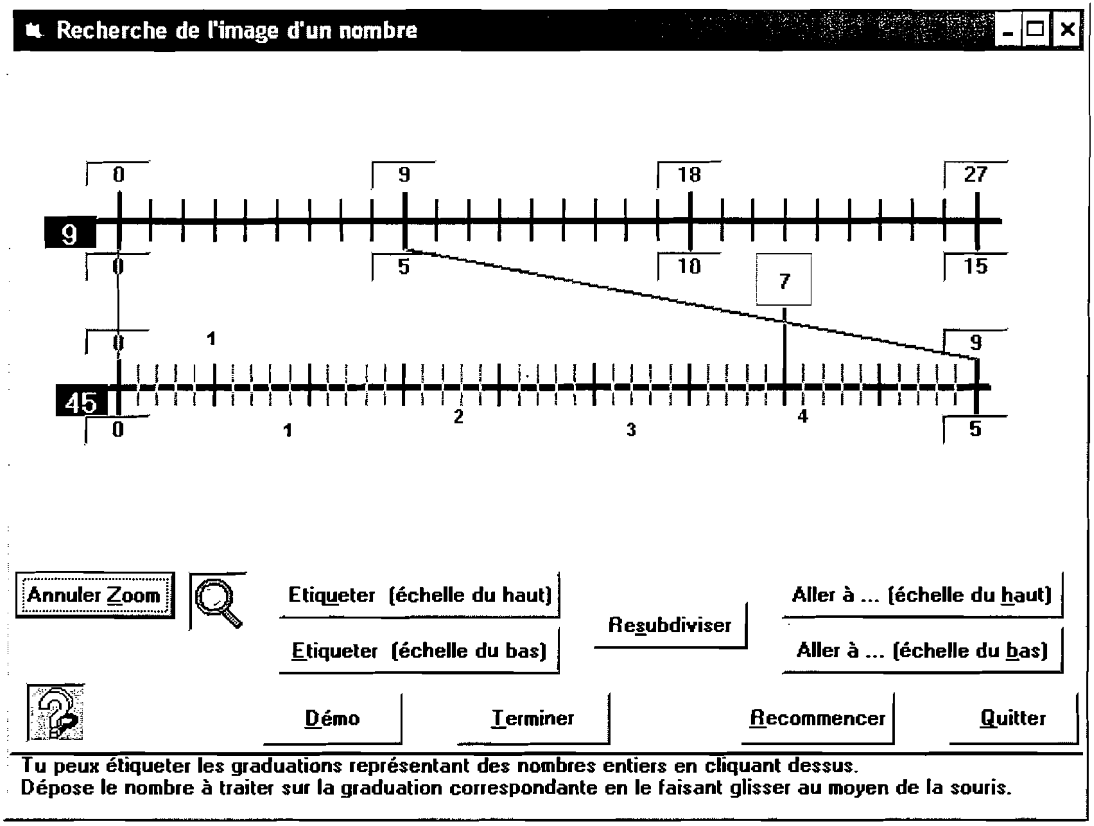
C'est pour fournir une expression plus usuelle de y que le logiciel offre des ressources que l'utilisateur a exploitées dans Ecran 6 :

- agrandir le segment [0 ; 9] sur lequel le nombre x est à déposer (droite du dessous de Ecran 6) ;
- resubdiviser chaque intervalle initial par 5 afin de pouvoir attraper les entiers sur l'échelle du bas ;
- marquer certains entiers utiles **sur l'échelle du bas**, ce que l'utilisateur peut obtenir à condition de cliquer sur des sous-graduations qui représentent des entiers (toutes les 9 sous-graduations).

L'utilisateur peut alors :

- localiser l'image de 7 entre deux entiers (ici entre 3 et 4) ;
- préciser cette image en utilisant les 9 sous-intervalles compris entre deux entiers consécutifs de l'échelle du bas.

Les types de réponses acceptées par le logiciel pour y sont : un entier (le cas échéant), une fraction, la somme d'un entier et d'une fraction. On voit dans Ecran 6 que l'utilisateur s'est donné les moyens de fournir comme expression de y : $3 + \frac{8}{9}$ s'il s'appuie sur 3 ou $\frac{35}{9}$ s'il considère tous les sous-intervalles compris entre 0 et y (7×5, soit 35 sous-intervalles, chacun représentant un saut de $\frac{1}{9}$).



Ecran 6 : NovOra, Exercice 3, écran de travail après traitements

On notera que l'utilisateur a à prendre toutes les décisions importantes avant de conclure : choisir un nombre adéquat pour obtenir une resubdivision permettant d'attraper les entiers sur l'échelle du bas ; choisir le regroupement de sous-graduations de l'échelle du bas qui permet de progresser de 1 en 1.

La droite graduée à double échelle peut être présentée comme une machine à transformer des nombres selon un mécanisme qu'il faudra amener les élèves à expliciter au fur et à mesure. Cette explicitation peut passer d'abord par la réfutation de procédures erronées (enlever 4 par exemple est une procédure qui se réfute aisément dans cet environnement) ; puis par la découverte de la conservation de certaines régularités : « Si on multiplie par 2, par 3… "en haut", alors on multiplie par 2, par 3… "en bas" ». Ces premiers résultats peuvent conduire à rapprocher cette « machine » numérique de la dilatation exhibée lors de phase physique (puzzle), ce qui alimentera le débat scientifique du Moment 4. Enfin, on pourra amener les élèves à expliciter le calcul qui relie les données : 7, 9, 5, à y par : $y=\frac{7\times 5}{9}$ en s'appuyant sur leurs actions et le résultat de leurs actions sur la droite graduée.

Comme on le voit, il ne s'agit pas encore de définir le produit par une fraction ($\times\frac{5}{9}$) mais d'entrer dans une intelligence des possibilités du calcul de y.

d. Moment 3 la phase mathématique dans un environnement papier / crayon

Elle permet de traiter le problème numérique sous-jacent au problème du puzzle. La question posée aux élèves est à présent de calculer l'image de 5 par une « machine » qui transforme 4 en 7 en utilisant, s'ils le souhaitent, des ressources de type NovOra, ainsi qu'indiqué en Figure 5. Bien entendu, il est beaucoup plus difficile de subdiviser dans l'environnement papier / crayon qu'en appuyant sur une touche d'ordinateur. D'autant que les élèves sont familiarisés avec des subdivisions décimales. Nous nous sommes contentés de dessins à main levée, insistant plus sur la pertinence du nombre de sous-graduations choisi que sur la régularité de la graduation. Notre constat est que cet environnement plus « hostile » a exercé une pression bénéfique sur nombre d'élèves pour les amener à s'approprier les procédures calculatoires suggérées par les traitements dans le registre des droites graduées.

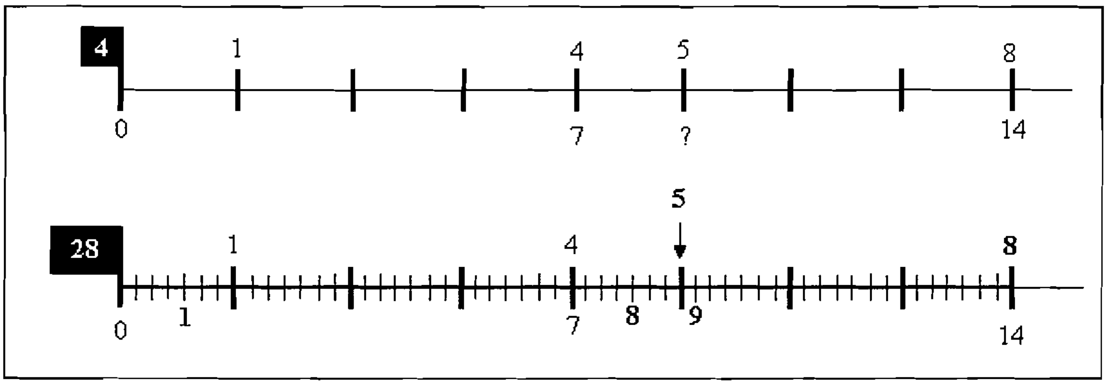


Figure 5 : calcul de l'image de 5 par la dilatation qui transforme 4 en 7

L'expression sur droite graduée de l'image de 5 est congruente à : $8 + \frac{3}{4}$ ou $\frac{5 \times 7}{4} = \frac{35}{4}$. Le tableau de proportionnalité et ses propriétés peuvent être introduits ou rappelés lors de cette phase. Mais il est aussi parfaitement envisageable d'y avoir recours dès le Moment 1 si le besoin s'en fait sentir.

e. Moment 4 : la convergence provoquée

Les élèves disposent à présent de deux représentations d'une dilatation, l'une dans un environnement de grandeurs (le puzzle), l'autre dans un environnement numérique (la droite graduée). Il s'agira comme toujours de faire analyser par les élèves en quoi les problèmes du Moment 1 et du Moment 3 sont semblables, en quoi ils sont différents.

Au titre des similitudes, on notera que l'image de 1 est $\frac{7}{4}$ et que l'image de 5 est $\frac{35}{4}$ dans les deux cas, même si le mode de calcul de ce dernier résultat présente des différences : 5 fois (sept-quarts) au Moment 1, (cinq fois sept) quarts au Moment 3.

Pour calculer l'image de n'importe quel nombre x, on remarquera dans les deux cas la stabilité du traitement qu'il suffit d'appliquer : multiplier x par 7 puis le diviser par 4.

Cet algorithme de calcul se confond avec le produit de x par le coefficient de dilatation lorsque ce dernier est entier (NovOra propose de nombreux exemples où c'est le cas). Tout est en place pour définir le produit par un rationnel, lorsque ce dernier n'est pas entier, et son usage pour calculer des images par une dilatation. La notion de coefficient de proportionnalité, abordée dans le cas entier en fin de cycle 3 de l'école primaire, trouve ici une généralisation au cas rationnel.

f. Moment 5 : institutionnalisations envisageables

- Une dilatation transforme une longueur l en une longueur L plus grande ou plus petite.
- Une dilatation est déterminée par deux nombres. Le premier peut être la mesure d'une longueur l, le deuxième la mesure de la longueur image L. On peut donc aussi dire qu'une dilatation agit sur des nombres.
- Les calculs légitimes d'images et d'antécédents par une dilatation sont ceux d'un tableau de proportionnalité (un exemple exhibant des calculs par linéarité ou au moyen du coefficient de proportionnalité sera fourni).
- Multiplier un nombre par $\frac{7}{4}$, c'est lui appliquer une dilatation qui transforme 4 en 7.
- Pour multiplier 5 par $\frac{7}{4}$, il suffit de multiplier $\frac{7}{4}$ par 5 : $5 \times \frac{7}{4} = \frac{7}{4} \times 5 = \frac{35}{4}$.

g. L'aval

Les exercices successifs de NovOra jouent sur la variation de la nature (nombre entier ou pas) des données (x, y, coefficient de proportionnalité) et de la question posée (calcul d'antécédent ou d'image). On proposera donc des problèmes physiques dont les variations tiendront compte à la fois des variations des problèmes de NovOra et des variables repérées en 2.2.a. Cette suite sera donc l'occasion de questionner en permanence la pertinence du modèle, des registres mobilisés et la validité des prédictions réalisées.

5. Conclusion

Cette étude apporte en premier lieu une analyse « compacte » de la complexité d'un vaste champ englobant les notions de rationnel, de rapport et de proportionnalité du cycle 3 des écoles à la fin de la cinquième. Elle prend en compte les travaux d'autres chercheurs tels que : l'unité des structures multiplicatives, certaines variables impliquées dans les problèmes mettant en jeu des rapports, la détermination de nombreuses situations physico-empiriques ayant fait la preuve de leur efficacité pour les apprentissages concernés. Elle s'en démarque par :

- le pointage explicite et la séparation des univers impliqués ;
- la description des univers par deux variables empiriquement validées (les contextes, les registres) ;
- la prise en compte et la description de différents niveaux d'articulation intra et inter univers.

En second lieu, elle explicite pour les professeurs :

- un corpus de six types de contextes physico-empiriques mettant en jeu des rapports, nécessaires et suffisants à ce niveau de scolarité ;
- les variables permettant de transformer ces contextes en problèmes ;
- un registre, la droite graduée, susceptible d'interpréter et de traiter tous les problèmes liés aux rapports, d'assurer l'interface entre les univers physique et mathématique et entre les modes d'expression usuels des rationnels (fractions et décimaux) ;
- une série de logiciels réduisant le coût didactique d'une étude systématique des traitements et des conversions dans l'univers mathématique des rationnels ;
- des exemples de séquences didactiques, prenant en compte l'analyse de complexité, relatives à des objets et notions du champ concerné.

Cette approche par séparation et articulation des univers physique et mathématique est-elle généralisable à d'autres apprentissages numériques ? Il existe déjà la classification des structures additives de Vergnaud (Brégeon et al., 2001, p. 11-21), reconnue de tous. Dans sa thèse, Regina Damm (1992) propose un matériel enactif bi-dimensionnel pour interpréter et résoudre des problèmes additif-soustractifs. Nous avons substitué à ce matériel un véritable registre bi-dimensionnel mobilisant des droites graduées. Nous avons conduit une pré-expérimentation dans une classe de CM1-CM2 à faible effectif en 2005-2006 afin de tester l'hypothèse suivante : le registre introduit permet de modéliser et de traiter tous les problèmes additifs-soustractifs du champ physico-empirique obtenus à partir de la classification de Vergnaud. Les résultats sont encourageants mais l'expérience, pour être totalement significative, devrait être menée à plus grande échelle.

Dans les deux champs additif et multiplicatif la droite graduée apparaît comme un outil d'une haute efficacité pour la représentation et les traitements numériques, mais aussi pour l'interprétation et le traitement des contextes physiques. Elle amène de l'invariance et du lien dans la diversité de ces derniers, et aide à dégager les structures mathématiques qui leur sont sous-jacentes.

Et au-delà de la cinquième ? En ce qui concerne l'algèbre et les fonctions numériques, le rôle de la droite graduée pourrait être tenu par un tableur utilisé comme registre de transition, entre les problèmes physico-empiriques et leur interprétation au moyen d'inconnues liées, et entre le registre des écritures arithmétiques et celui des écritures algébriques. Un groupe de l'IREM de Strasbourg se penche déjà sur la question et a produit quelques résultats pour Mathempoche. Une difficulté de l'enseignement est d'amener les élèves à reconnaître, au-delà de la diversité de contextes d'apprentissage ou d'application, un modèle mathématique unique. L'approche par séparation et articulation permet d'œuvrer dans ce sens en donnant à étudier la diversité du côté des situations physiques et de l'expression, et en aidant à dégager de l'unicité du côté des objets et notions mathématiques.

Bibliographie

ADJIAGE R. & HEIDEIER A. (1998), Didacticiels de la série Oratio, http://www.alsace.iufm.fr/web/ressourc/serveur_cd_et_video/tout_oratio.htm

ADJIAGE R. (1999), *L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial*, thèse, IREM, ULP Strasbourg 1. http://tel.ccsd.cnrs.fr/tel-00012146

ADJIAGE R. ET PLUVINAGE F. (2000), Un registre géométrique unidimensionnel pour l'expression des rationnels, *RDM, La Pensée Sauvage*, Vol.20.1, pp.41-88.

ADJIAGE R. (2001a), Fondements théoriques et présentation des logiciels de la série ORATIO, *Actes du XXVII^{e} colloque de la COPIRELEM*, pp 309-317, IREM de Grenoble.

ADJIAGE R. & HEIDEIER A. (2002), Didacticiels de la série NovOra, http://www.alsace.iufm.fr/web/ressourc/serveur_cd_et_video/tout_oratio.htm

ADJIAGE R. (2004), Rationnels, proportionnalité et double échelle dans un environnement informatique, *Actes du XXX^{e} colloque de la COPIRELEM*, pp. 249-270, 19-21 mai 2003, Avignon.

ADJIAGE R. (2005), « Diversité et invariants des problèmes mettant en jeu des rapports », *Annales de didactique et sciences cognitives*, IREM de Strasbourg, Vol 10, pp. 95-129.

ADJIAGE R. ET PLUVINAGE F. (2007), An experiment in teaching ratio and proportion, *Educational Studies in Mathematics, Vol. 65*, pp. 149-175.

BEHR M., POST T., LESH R. (1981), Construct analyses, Manipulative aids, Representational Systems and the Learning of Rational Numbers, *Proceedings of the fifth conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 203-209, Grenoble, France : PME.

BREGEON J.-L., DOSSAT L., HUGUET F., MYX A., PEAULT H. (2001), *Le Moniteur de mathématiques, résolution de problèmes cycle 3,* Fichier pédagogique sous la direction de G. Vergnaud, Nathan.

BROUSSEAU G. et N. (1987), *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, IREM de Bordeaux.

BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, La Pensée sauvage, Grenoble.

DAMM R. (1992), *Apprentissage des problèmes additifs et compréhension de textes*, thèse, IREM, ULP Strasbourg 1.

DHOMBRES J., Reignier J., Rouche N. (1997), Grandeurs physiques et grandeurs mathématiques, *CREM A.S.B.L.*, Nivelles Belgique.

DOUADY R. (1984), *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques, une réalisation de tout le cursus primaire*, Doctorat d'état, Université de Paris VII, Paris.

DUVAL R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Bern.

DUVAL R. (2000), Basic Issues for Research in Mathematics Education, *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, Vol 1 pp. 55-69, July 23-27, 2000, Hiroshima-Japan.

DUVAL R. (2001), Comment décrire et analyser l'activité mathématique ? Cadres et registres, *Actes du colloque « Journée en hommage à Régine Douady »*, pp. 83-105, IREM Paris 7.

HAREL G., BEHR M., POST T. & LESH R. (1991), Variables Affecting Proportionality: Understanding of Physical Principles, Formation of Quantitative Relations, and Multiplicative Invariance, *Proceedings of PME XV Conference* (pp. 125-133). Assisi, Italy

KIEREN T.E., (1980), The rational number construct - its elements and mechanism, *T.E. Kieren (ed), Recent Research on Number Learning, ERIC/SMEAC*, pp. 125-150, Columbus.

LEGRAND Marc, (2000), Sciences, Enseignement, Démocratie et Humanisme, *Actes du XXVII^{e} Colloque Inter-IREM des formateurs chargés de la formation des maîtres*, pp. 9-28, IREM de Grenoble.

NOELTING G., (1980), The development of proportional reasoning and the ratio concept, *Educational Studies in mathematics*, Vol. 11, pp. 217-253, Cambridge.

RODITI E. (2002), La multiplication des nombres décimaux, *Cahier de DIDIREM* n° 39, université de Paris-VII.

VERGNAUD G. (1983), Multiplicative Structures, *R. Lesh and M. Landau (eds), Acquisition of mathematics concepts and processes, Academic Press*, (pp. 127-174), New York.