AU CŒUR DE « LA CALCULATRICE DEFECTUEUSE » : UN VIRUS QU'ON SOUHAITERAIT CONTAGIEUX !

France Caron
Université de Montréal

Résumé : Ce texte présente d'abord un environnement informatique conçu par Gisèle Lemoyne, « la calculatrice défectueuse », en soulignant ses apports didactiques dans l'approfondissement des apprentissages en arithmétique. Il montre ensuite comment les principes didactiques qui sous-tendent cet environnement pourraient être appliqués à d'autres outils de calcul et contribuer tant au développement chez l'élève de connaissances mathématiques et informatiques qu'à un contrôle accru dans l'utilisation de ces outils.
Mots-clés : enseignement des mathématiques, technologie, calculatrice, arithmétique, algèbre, fonctions, représentations.

Introduction

Si l'on devait identifier un principe fondamental à partir duquel s'est développée la contribution majeure de Gisèle Lemoyne à l'étude des difficultés d'apprentissage en mathématiques et au développement de situations propices au franchissement des obstacles qui y sont associés, celui-ci pourrait prendre la forme suivante :

PRINCIPE DE GISELE : Les difficultés d'apprentissage en mathématiques doivent être prises au sérieux. Cela ne se fait pas en négociant à la baisse les contenus mathématiques, mais en visant plutôt des situations didactiques propices à un engagement cognitif des élèves, qui les conduise à travailler le sens des notions et les liens qui les unissent.

Ce principe l'a conduite, en accord avec la Théorie des situations (Brousseau, 1986), à s'intéresser à la conception de situations didactiques qui puissent faire *«agir, parler, réfléchir»* l'élève et lui permettre d'« *évoluer de son propre mouvement* », par adaptations successives, vers le savoir visé (Lemoyne *et al*, 2005). Pensées pour surmonter les difficultés, ces situations conduisent à travailler le sens des notions et les liens qui les unissent, et se révèlent tout aussi pertinentes avec des élèves dits « réguliers ».

Cette position épistémologique explique en grande partie l'intérêt de Gisèle Lemoyne pour le développement d'environnements informatiques. Parce que les outils technologiques influencent la pratique mathématique, en ouvrant de nouvelles possibilités d'interaction (calcul, manipulation, exploration et visualisation), il devient possible d'engager activement l'élève « *dans un processus d'adaptation et de coordination de connaissances* » (Lemoyne *et al*, 2005) à travers l'élaboration d'environnements didactiques suffisamment ouverts, à l'image des micromondes, où les connaissances visées sont investies de sens et d'utilité, et se révèlent comme leviers de l'action.

Dans de tels environnements, l'élève a une grande liberté d'action et le système ne cautionne ni ne sanctionne les productions de l'élève : c'est l'élève lui-même qui à partir des actions qu'il pose et des résultats qui en découlent, est conduit à réfléchir sur ces résultats et à décider de nouvelles actions à entreprendre. De façon générale, le développement de tels environnements pour usage scolaire n'est économiquement envisageable qu'en les rendant suffisamment ouverts aussi pour l'enseignant. Celui-ci pourra alors les paramétrer pour multiplier et ajuster les situations didactiques en fonction des difficultés des élèves et des savoirs visés.

Parmi les environnements informatiques d'apprentissage élaborés par Gisèle Lemoyne, celui de « La Calculatrice défectueuse » (Lemoyne, Giroux, René de Cotret, Brouillet, 2005) constitue une illustration éloquente du Principe évoqué et de la flexibilité recherchée. Nous commencerons donc par décrire cet environnement et ses propriétés didactiques, qu'ont pu valider plusieurs expérimentations en classe. Nous enchaînerons ensuite en montrant que, moyennant l'acceptation de certaines règles du jeu, les calculatrices (arithmétique, scientifique ou graphique) utilisées dans l'apprentissage des mathématiques au secondaire pourraient aussi servir à l'élaboration de situations d'apprentissage aux propriétés didactiques équivalentes pour plusieurs des savoirs enseignés à ce niveau. Nous finirons avec le tableur qui, n'ayant pas été conçu avec le projet d'aider à l'apprentissage des mathématiques, est à la fois riche en contraintes et en possibilités ; lorsqu'on les combine dans l'élaboration de situations didactiques, on peut viser le développement de connaissances autant en mathématiques qu'en informatique, et mieux préparer à la pratique actuelle des mathématiques.

1. « La calculatrice défectueuse »

L'intention initiale à l'origine de cet environnement était de permettre l'acquisition de connaissances en calcul arithmétique réfléchi, en favorisant d'une part un travail sur les nombres, les opérations et leurs propriétés, et d'autre part un décodage de l'écriture des expressions arithmétiques et des conventions qui lui sont associées (priorité des opérations, rôle des parenthèses). Dans le contexte actuel où la calculatrice paraît, à tort, décharger de la nécessité de tels apprentissages, il fallait pouvoir restaurer cette nécessité aux yeux des élèves en conférant un caractère d'utilité aux connaissances visées. L'idée ingénieuse de Gisèle Lemoyne fut de développer un environnement informatique à l'image de la calculatrice où certaines touches (chiffres, opérateurs ou parenthèses) sont bloquées ; pour effectuer une opération demandée, l'élève doit trouver une façon de contourner ces touches en recherchant une séquence d'opérations différente mais équivalente. Cette idée lui est venue à partir de l'observation en classe de tâches de calcul proposées dans un manuel où les élèves devaient utiliser leur calculatrice *comme si* certaines touches ne fonctionnaient pas :

Nous avons pu observer que la dévolution de ces tâches ne fonctionne pas, les élèves envisageant ces tâches d'une manière tout à fait artificielle, en calculant d'abord avec toutes les touches et en faisant ensuite des accommodations pour trouver la réponse.

L'environnement, développé sur site web (Figure 1), a donc été conçu pour redonner un caractère authentique à la situation en faisant en sorte que l'interaction élève-calculatrice soit sensiblement la même que celle qui serait possible avec une calculatrice arithmétique où la priorité des opérations est implémentée et où certaines touches sont effectivement bloquées. De son côté, l'enseignant peut définir à loisir une suite d'opérations à effectuer et, pour chacune d'entre elles, les touches à bloquer sur la calculatrice. L'élève a donc comme objectif de contourner les limites imposées en faisant faire à l'outil ce qu'il semble se refuser à faire initialement. Par le défi qu'elle représente et la dimension ludique et créative qui en découle, la situation amène spontanément l'élève à mobiliser ses connaissances sur les propriétés des nombres et des opérations arithmétiques.

Figure 1 – La Calculatrice défectueuse – côté élève

Cet environnement agit comme *milieu*[1] authentique et riche, à la fois pour l'élève et l'enseignant. Pour l'élève, le champ d'action est très vaste ; il y a plus d'une solution possible et le système lui renvoie systématiquement une information sur l'action qu'il vient de poser, i.e. le résultat produit par la calculatrice dès l'entrée par l'élève d'une chaîne d'opérations à effectuer. L'élève peut donc juger de façon autonome de la valeur du résultat, en mettant à profit ses capacités à estimer et ses connaissances numériques, et décider de correctifs si nécessaire. Ainsi, face au calcul de 1279×797 où les touches du 2, du 7 et du 9 étaient bloquées, et après avoir soumis la séquence suivante

$$1000 + 100 + 100 + 60 + 10 + 10 - 1 \times 500 + 100 + 100 + 80 + 10 + 5 + 1 + 1 =$$

pour laquelle la calculatrice retourna la valeur 1077, deux élèves conclurent d'abord que la calculatrice était « *vraiment folle* » pour envisager ensuite, après quelques autres essais, un possible recours aux parenthèses.

[1] Au sens de Brousseau (1986).

Cette succession d'essais où les erreurs ont été repérées par les élèves et utilisées pour modifier leurs stratégies les ont amenés à saisir la nécessité de rigueur dans la communication avec l'outil informatique : la connaissance de la priorité des opérations et du rôle des parenthèses, deux éléments de nature langagière, se voyaient alors conférer une utilité et, conséquemment aux yeux des élèves, une nouvelle valeur, possiblement transférable à une tâche papier-crayon.

Pour l'enseignant qui dispose de l'enregistrement informatique des essais successifs des élèves et de la formulation de leurs stratégies face aux différentes tâches soumises, l'environnement constitue aussi un *milieu.* Ces informations lui permettent en effet d'apprécier, selon l'opération à effectuer et l'ensemble des touches bloquées, le degré de difficulté de la tâche et la richesse des stratégies déployées. Tout en faisant ressortir l'importance pour l'apprentissage du choix des variables didactiques, l'environnement conduit l'enseignant à mieux cerner les connaissances des élèves et leur évolution, et à s'ajuster, lui aussi, en proposant de nouvelles tâches qui les feront évoluer davantage.

De telles propriétés didactiques nous ont encouragée à explorer un prolongement souvent évoqué par Gisèle Lemoyne, soit l'extension à la calculatrice scientifique de l'environnement de la calculatrice défectueuse. En « désactivant » quelques touches de la calculatrice scientifique, nous avons cherché à voir quelles notions vues au secondaire pourraient être mobilisées pour effectuer une tâche qui normalement aurait fait appel à ces touches. Nous avons ensuite ouvert cette exploration à l'ensemble des outils de calcul qui sont typiquement utilisés au secondaire. Ce travail de recherche d'avenues alternatives, qui fait appel autant aux connaissances mathématiques qu'à une compréhension de certains mécanismes propres à l'outil, nous semblait pouvoir participer chez l'élève au développement d'un usage contrôlé de l'outil et au maintien d'un regard critique sur les résultats qu'il produit. Et il nous paraissait de plus pouvoir ouvrir au développement de « techniques nouvelles » associées à ces instruments qui, tout en reflétant l'évolution qu'ont connue les mathématiques en lien avec l'informatique et en justifiant l'intégration d'outils technologiques dans les cours de mathématiques (Caron, 2004), appellent à un examen de leur apport dans les conceptualisations et de leur articulation avec les « techniques traditionnelles » (Lagrange, 2000). Après avoir transmis le « virus de défectuosité » à la calculatrice scientifique, nous nous sommes ainsi permis de propager l'infection à la calculatrice graphique. Et pour réinjecter un peu plus d'authenticité à la démarche, nous avons complété cette première exploration en considérant les limites intrinsèques du tableur comme défauts naturels, qu'il est tout aussi possible de contourner en parcourant d'autres champs de savoirs mathématiques et informatiques.

2. Contagion de la calculatrice scientifique

La Figure 2 donne un premier problème, inspiré directement des tâches arithmétiques associées à la calculatrice défectueuse, mais appliqué à une calculatrice scientifique lourdement handicapée. Deux approches de solution possibles complètent l'exemple :

À calculer : 775×779
Touches désactivées : 0 1 3 4 5 6 8 9 $\times$ $+$

Approche 1

$775 \times 779 = (777\text{-}2) \div (1 \div (777\text{+}2))$
$= (777\text{-}2) \div (1 \div (777\text{-}(\text{-}2)))$

Approche 2

$775 \times 779 = (777\text{-}2) \times (777\text{+}2)$
$= 777^2 - 2^2$

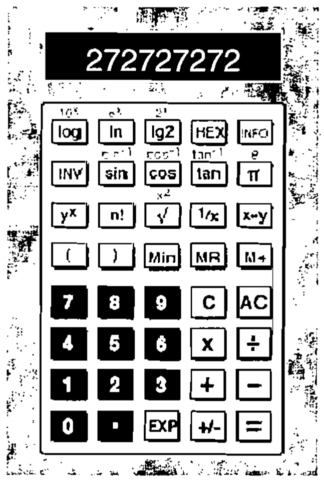


Figure 2 – Calcul arithmétique avec une calculatrice scientifique défectueuse

S'il paraît assez facile a priori de reconstruire les opérandes en ajoutant ou en retranchant 2 à la valeur 777, l'impossibilité d'utiliser les touches associées à l'addition et à la multiplication demande un peu plus de créativité. Une approche possible de résolution est de faire appel à deux reprises aux opérations inverses, et à réinvestir par conséquent le travail fait avec les fractions et les négatifs. Une alternative à cette approche consiste à utiliser l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ et à élever au carré (opération inverse de l'extraction de la racine) les valeurs de a et b.

Comme deuxième exemple, considérons l'évaluation de $\sqrt{2}$ quand la touche « $\sqrt{\ }$ » ne fonctionne pas. Selon le niveau de l'élève, différentes options sont envisageables. Il peut d'abord considérer le fait que l'extraction de la racine est l'opération inverse de l'élévation au carré (ou de la multiplication d'un nombre par lui-même) et y aller d'essais successifs. Il se doute peut-être déjà que la valeur de $\sqrt{2}$ doit être entre 1 et 2, puisque 2 se situe entre leurs carrés respectifs (1 et 4). Il essaie alors avec 1,5 qui lui donne un carré supérieur à 2, puis possiblement avec 1,3 qui lui renvoie un carré inférieur à 2, et procède ainsi, par encadrements successifs, pour arriver à une valeur approchée dont le carré est suffisamment près du 2 cherché. Ce faisant, il réinvestit la représentation décimale des nombres et appréhende de façon intuitive la densité des réels. Et il aura construit, sans le savoir, un premier algorithme itératif, typique des mathématiques instrumentées par la technologie.

Une connaissance des puissances fractionnaires pourrait l'amener à utiliser la touche « 2^x » (« opération inverse » du logarithme en base 2) avec $x = 0{,}5$.

Et si cette touche n'existe pas ou est désactivée, on pourrait se permettre un changement de base en tirant parti des propriétés des puissances et des logarithmes :

$2^{\frac{1}{2}} = (10^{\log 2})^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{\log 2}{2}}$; ou bien encore : $2^{\frac{1}{2}} = (e^{\ln 2})^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{\ln 2}{2}}$

Mais à ce stade, un recours aux rapports trigonométriques dans le triangle rectangle isocèle serait sans doute envisagé plus spontanément. Par exemple, en travaillant en degrés, l'élève pourrait se souvenir que $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et en déduire alors que $2\sin 45°$ pourrait produire la valeur recherchée. On pourrait alors relancer l'élève en lui demandant pourquoi l'emploi de la fonction *1/x* sur la valeur de $\sin 45°$ paraît aussi faire l'affaire, et l'amener ainsi à retravailler la rationalisation du dénominateur.

Les nombreux liens qui unissent les différentes fonctions trigonométriques permettent de contourner de multiples façons une touche trigonométrique défectueuse. Mais elles ne sont pas toutes équivalentes. Pour illustrer les différences, considérons le problème suivant : on cherche une façon d'évaluer $\sin x$, qui puisse fonctionner pour tout x, sans utiliser la touche « SIN » qui, elle, ne fonctionne pas. L'élève pourrait vouloir partir de l'identité bien connue $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et proposer alors $\sqrt{1-\cos^2 x}$ comme expression équivalente, sans percevoir que cela n'équivaut qu'à la valeur absolue du sinus cherché. Ce type de tâche devient particulièrement fécond si l'on insiste sur la démarche de validation : en effet, si l'expression suggérée semble fonctionner pour bien des valeurs de x, typiquement celles qu'il est possible d'associer aux angles aigus d'un triangle rectangle, il faut pousser plus loin la recherche pour trouver des cas qui l'invalident. Et si cette recherche bénéficie de la visualisation du cercle trigonométrique, la résolution du conflit cognitif que peut poser l'observation de différences entre la fonction sinus et l'expression suggérée demande à repenser autant la résolution d'équations du second degré que la notion de fonction et le sens à accorder au radical.

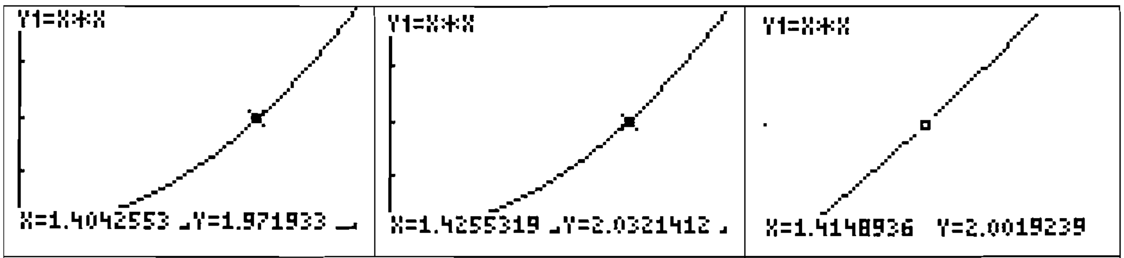
Une autre approche pour définir un substitut à la touche « SIN » serait de considérer la fonction tangente comme rapport des fonctions sinus et cosinus, et de proposer alors $\tan x \cos x$ comme expression équivalente à $\sin x$. Mais dans ce cas, ce sont les discontinuités de la fonction tangente qui se produisent lorsque la fonction cosinus est nulle, qui empêchent l'expression d'être équivalente à $\sin x$. À nouveau, une validation en profondeur peut amener à retravailler plusieurs notions (le cercle trigonométrique, l'axe de la tangente, le domaine d'une fonction, les fonctions rationnelles, la division par zéro) et à favoriser leur consolidation mutuelle.

Finalement, l'approche la plus économique, qui ne demande pas de considérer des cas distincts, consiste à tirer parti des allures similaires des fonctions sinus et cosinus et des transformations géométriques qui permettent de passer de l'une à l'autre. Par exemple, l'identité $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$, déjà observée et justifiée dans le cadre de la trigonométrie du triangle rectangle, peut être vue dans le plan cartésien comme la composition de deux transformations appliquées à la courbe de la fonction cosinus : une réflexion par rapport à l'axe des y et une translation horizontale de $-\frac{\pi}{2}$. On peut chercher ensuite s'il n'y aurait pas moyen d'éviter la transformation de réflexion en se limitant à une simple translation ; cela peut conduire à identifier une nouvelle relation : $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$, qu'on peut valider de façon algébrique en utilisant la relation $\cos x = \cos(-x)$. Mais tout ce travail d'analyse est relativement exigeant sur le plan de la visualisation et justifierait la mise à contribution de la calculatrice graphique dans l'exploration et la découverte des multiples propriétés de ces fonctions, pour une meilleure compréhension des liens entre paramètres et transformations géométriques.

3. Contagion de la calculatrice graphique

Avec ses nombreuses fonctions préprogrammées et ses possibilités de représentation graphique et de programmation, la calculatrice graphique multiplie les voies de contournement aux touches désactivées. Toujours avec l'exemple de la touche « SIN » qui ne fonctionne pas, il serait possible de faire appel à la fonction de régression « SINREG » à partir de quelques « couples célèbres » (x, y) vérifiant la relation $y = \sin x$: $(0,0)$; $(\frac{\pi}{2},1)$; $(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2})$; etc. On pourrait alors s'interroger sur le nombre de couples requis pour tomber exactement sur la fonction cherchée et comparer avec les courbes des fonctions obtenues à partir des différentes régressions polynomiales disponibles (« LINREG », « QUADREG », « CUBICREG » et « QUARTREG »). Au collégial, un tel exercice pourrait démarrer une discussion sur la capacité pour un polynôme d'approcher une fonction donnée, et ouvrir sur le polynôme de Taylor de la fonction sinus, dont on pourrait programmer la somme des 20 ou 100 premiers termes. On dispose donc, en plus des approches suggérées dans la section précédente et aussi utilisables avec la calculatrice graphique, d'une variété d'alternatives dont la comparaison permet une entrée dans une analyse mathématique d'une grande richesse.

La représentation graphique des fonctions offre, entre autres possibilités, un passage relativement aisé par la fonction réciproque. Ainsi, pour une nouvelle façon d'évaluer $\sqrt{2}$ sans utiliser la touche « $\sqrt{\ }$ », l'élève peut choisir de passer par la représentation graphique de $y = x * x$ (on suppose ici que la touche qui élève au carré, typiquement la même que celle qui extrait la racine, ne fonctionne pas non plus) et de déplacer le curseur sur la courbe (ex. avec l'option « TRACE ») jusqu'à ce qu'il arrive à $y = 2$; le x correspondant serait alors la valeur cherchée. Mais un tel exercice l'amène à constater qu'il ne tombe pas exactement sur $y = 2$ (Figure 3-a). Et ceci constitue en soi une grande leçon : il y a discrétisation dans la représentation graphique. On n'a pas accès à l'ensemble des valeurs possibles de x sur un intervalle donné mais bien à un sous-ensemble de valeurs réparties sur cet intervalle, dont le cardinal correspond au nombre de pixels affichables sur une ligne horizontale.



(a) deux points d'abscisses « consécutives » sur [0,2]

(b) après un premier zoom

Figure 3 – Recherche graphique du point $x > 0$ tel que $x^2 = 2$.

Cette contrainte est évidemment contournable en changeant la grandeur de l'intervalle par un appel au « ZOOM ». En appliquant cette stratégie à répétition, l'élève construit et applique sur le plan graphique une méthode itérative de recherche, et est à même de constater, comme en témoigne la Figure 3-b, une propriété remarquable des fonctions continues dérivables : leur *linéarité locale* (Tall, 1992).

En effet, lorsqu'on les examine « au microscope », en s'étant rapproché tant et si bien qu'on ne voit plus qu'un très petit intervalle autour d'un point visé, la courbe de ces fonctions, vue de façon aussi locale, finit par ressembler à une droite (dans les limites de la représentation par pixels) ; et c'est la pente de cette droite qui équivaut à la dérivée en ce point. On appréhende donc le continu en passant par le discret, et on prépare avantageusement à un éventuel passage à la limite, au cœur du calcul différentiel et intégral.

La possibilité de définir, sans même avoir à programmer, un traitement numérique qu'on applique à répétition permet d'implémenter facilement des algorithmes numériques simples. La Figure 4 illustre une implémentation très rapide de la méthode babylonienne (vieille de plus de 5000 ans !), pour calculer la racine de 2 (ou de tout nombre n) : elle consiste à partir d'une première approximation (1, dans ce cas-ci), à prendre comme nouvelle approximation la moyenne entre ce nombre et le quotient de 2 (ou de n) par ce nombre, et à appliquer à nouveau ce traitement jusqu'à convergence (en appuyant ici successivement sur la touche « ENTER »). On est alors à même d'observer la vitesse de convergence d'un tel algorithme ; le fonctionnement des fonctions numériques préprogrammées sur une calculatrice devient tout à coup moins mystérieux.

```
1→A
                1
(A+2/A)/2→A
              1.5
      1.416666667
      1.414215686
      1.414213562
```

Figure 4 – Calcul itératif de $\sqrt{2}$.

De même pour démystifier la fonction « SOLVE » qui calcule, à partir d'une valeur approchée le zéro d'une équation, on peut lui substituer d'autres schémas numériques itératifs : par exemple, pour résoudre l'équation $x - \cos x = 0$, on pourrait appliquer à partir d'une valeur initiale le schéma itératif $x_{n+1} = \cos x_n$ jusqu'à convergence vers le point fixe, solution de l'équation. On pourrait poursuivre avec d'autres transformations d'équations de la forme $f(x) = 0$ en suites $x_{n+1} = g(x_n)$ et examiner sous quelles conditions ces suites convergent vers la racine cherchée.

Mais tous ces exemples font l'hypothèse que l'élève est prêt à s'engager activement dans la recherche d'une méthode alternative. Sans un environnement comme celui de la « calculatrice défectueuse » où les touches sont effectivement désactivées, il se pourrait fort bien que la dévolution ne fonctionne qu'à moitié (ou pour un nombre limité de tâches), si l'élève ne voit pas la pertinence de faire autrement quelque chose qu'il sait déjà faire exécuter par sa calculatrice. Pour rompre avec le côté artificiel de ces tâches sans chercher pour autant à développer des environnements de calculatrices défectueuses de plus en plus sophistiquées, il peut être intéressant de regarder du côté du tableur.

4. Handicaps du tableur

N'ayant pas été conçu à l'origine pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, le tableur, malgré son extraordinaire puissance mathématique, présente plusieurs lacunes ou restrictions pour qui cherche à l'utiliser pour explorer certains objets mathématiques ou comme simple substitut à la calculatrice graphique.

Premièrement, il ne dispose pas de fonction « ZOOM ». À la surprise de certains étudiants, le fait de jouer avec l'échelle d'un graphique en réduisant l'intervalle des abscisses ne permet pas en général de gagner en précision dans la représentation d'une fonction. Le logiciel ne fait que retracer la courbe avec un sous-ensemble des points qui ont déjà été calculés, sans en générer de nouveaux qui permettraient une représentation plus précise de la courbe. Mais il est possible d'émuler de façon relativement efficace une fonction ZOOM sur le tableur. Il suffit pour cela de se donner comme constante au départ un nombre n de points souhaité (qui peut être de beaucoup supérieur à celui dicté par le nombre de pixels de la calculatrice graphique), de définir comme paramètres les bornes de l'intervalle des abscisses (a et b), de faire calculer par le tableur le pas entre deux abscisses en fonction de ces bornes : $h = (b-a)/(n-1)$. Si l'on a défini sur la feuille de calcul du tableur la suite des $x_i = a + (i-1)\ h$ (avec i allant de 1 à n) et qu'on l'a associée avec celle des $y_i = f(x_i)$, on peut alors, en modifiant les bornes a et b, réduire à la fois l'intervalle de recherche et le pas, et, par conséquent, accroître simultanément la précision des représentations numérique et graphique.

Ce type d'exercice permet de comprendre le principe de discrétisation qui, s'il est présent dans tous les outils logiciels qui permettent la représentation graphique de fonctions, n'est jamais aussi visible qu'avec le tableur ; celui-ci assure en effet une correspondance stricte entre une table de valeurs et sa représentation graphique. Ainsi, une émulation de la fonction ZOOM sur le tableur permet de voir et de comprendre les effets du processus de discrétisation et ouvre la voie au développement d'un plus grand contrôle sur les limites des représentations graphiques produites par ces outils.

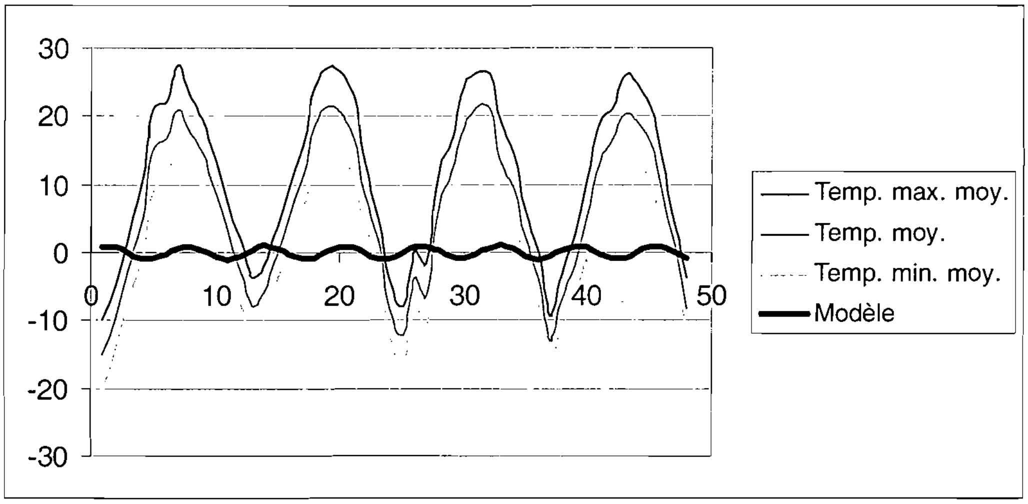
Une autre limite du tableur concerne la régression statistique. Si le tableur offre la possibilité de faire afficher sur un graphique une courbe de tendance et son équation, le choix de régressions possibles est un peu plus limité qu'avec la calculatrice graphique : on constate ainsi que la régression sinusoïdale en est absente. On peut alors contourner cette lacune en juxtaposant à la ligne brisée qui relie les points donnés une courbe sinusoïdale $y = a \sin(bx - h) + k$, où chacun des paramètres a, b, h et k est défini dans une cellule qui lui est propre et peut être aisément modifié. On constitue ainsi un milieu didactique qui, dans la recherche de stratégies efficaces pour déterminer les paramètres qui permettront à la courbe de s'ajuster aux données, conduit à mieux anticiper l'effet de la variation de chacun de ces paramètres. La Figure 5 montre le début et la fin de la recherche d'une fonction sinusoïdale pour modéliser, le cycle des températures moyennes mensuelles pour Montréal à partir de données[2] relevées sur quatre années. Un passage par le sens facilite la recherche de ces paramètres : ainsi, 0,52 pour le facteur b permet de ramener un cycle de 12 mois à la période de 2π ; une amplitude de 15 (i.e. le paramètre a) s'impose en raison d'un écart de 30 degrés entre les températures moyennes des mois les plus chauds et celles des mois les plus froids. La valeur de k reflète la température médiane (supérieure à zéro, heureusement !) et le déphasage qui vient d'une valeur de h non nulle est lié au fait que les températures atteignent leur minimum en janvier.

---

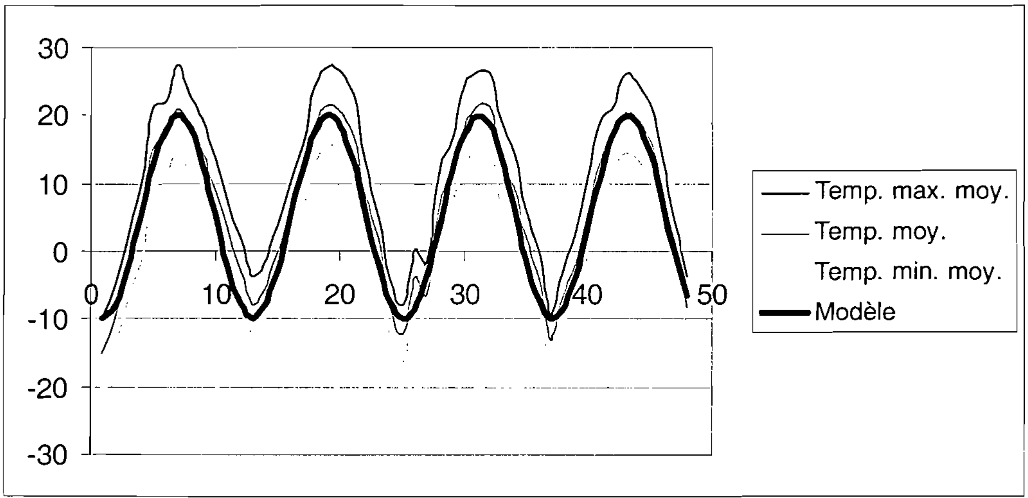
[2] Environnement Canada, http://www.ec.gc.ca/environment_f.html

Figure 5 – Recherche de la fonction modèle $y = a \sin(bx-h) + k$

a) avec $a = 1$; $b=1$; $h=0$; $k=0$

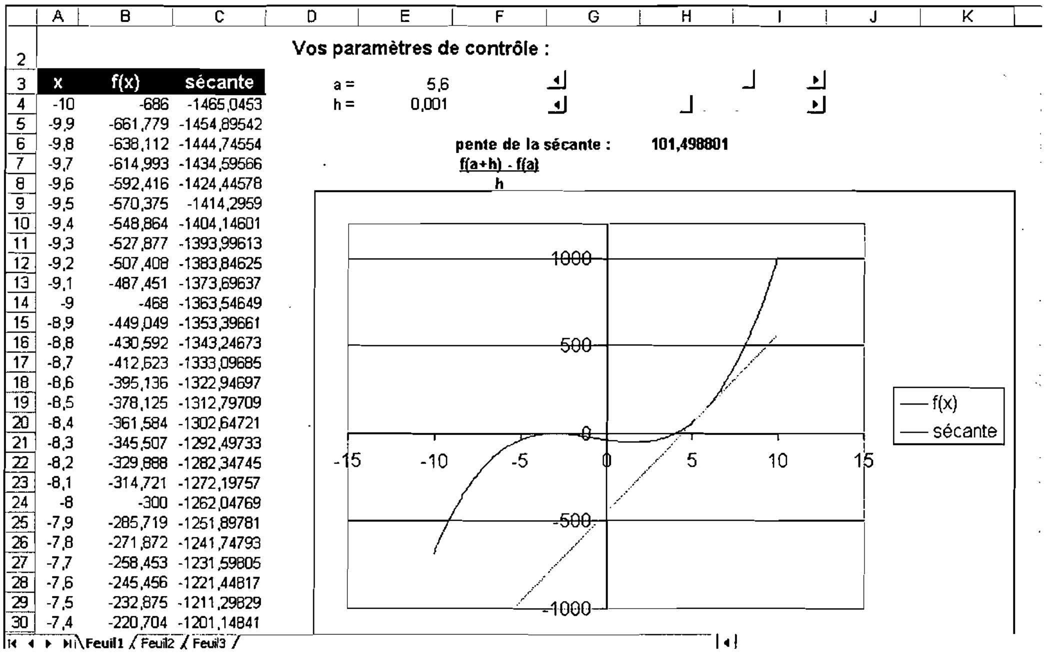


b) avec $a = 15$; $b=0{,}52$; $h=4$; $k=5$



Toujours du côté de la statistique, on découvre assez vite qu'il n'y a pas sur le tableur de fonction graphique pour élaborer rapidement un diagramme de quartiles à partir de données. Il peut d'abord être alors intéressant de tenter de repérer sur les autres diagrammes disponibles (diagramme circulaire, diagramme à « bandes empilées », etc.) où trouver la valeur des différents quartiles, car cela amène à travailler le sens de ces mesures. On peut ensuite aller plus loin, en cherchant à construire un authentique diagramme de quartiles, par une mise à contribution de la fonction QUARTILE et des options graphiques disponibles.

Cette approche qui consiste à contourner de façon créative les limites du tableur en mettant ses autres capacités à contribution peut même se poursuivre au niveau collégial. Par exemple, pour compenser le fait qu'il n'existe pas de fonction qui permette de tracer la tangente à une courbe et d'illustrer de façon graphique la dérivée d'une fonction, il est tout à fait envisageable de faire calculer dans une colonne adjacente à la colonne des $f(x_i)$ les images des x_i selon la fonction qui correspond à l'équation de la tangente à la courbe en un point dont l'abscisse est précisée comme paramètre. Il s'agit en fait d'une occasion idéale de réinvestir ses connaissances en géométrie analytique. À partir d'une évaluation exacte ou approchée de la dérivée en ce point (ex. par le calcul du taux de variation entre deux points de la courbe suffisamment rapprochés), on dispose déjà de la pente de la tangente. Pour trouver l'ordonnée à l'origine qui achèvera de déterminer l'équation de la droite tangente, on met à profit le fait que cette droite passe par le point de la courbe pour lequel on cherche à tracer la tangente. Si on se dote en plus d'une barre de défilement qui permet de bouger rapidement la valeur de l'abscisse de ce point (comme il est possible de le faire avec le tableur), on peut constituer une animation visuellement convaincante de l'évolution de la position de la tangente et donc anticiper l'allure de la fonction dérivée. La Figure 6 en donne un aperçu.



	x	f(x)	sécante
4	-10	-686	-1465,0453
5	-9,9	-661,779	-1454,89542
6	-9,8	-638,112	-1444,74554
7	-9,7	-614,993	-1434,59566
8	-9,6	-592,416	-1424,44578
9	-9,5	-570,375	-1414,2959
10	-9,4	-548,864	-1404,14601
11	-9,3	-527,877	-1393,99613
12	-9,2	-507,408	-1383,84625
13	-9,1	-487,451	-1373,69637
14	-9	-468	-1363,54649
15	-8,9	-449,049	-1353,39661
16	-8,8	-430,592	-1343,24673
17	-8,7	-412,623	-1333,09685
18	-8,6	-395,136	-1322,94697
19	-8,5	-378,125	-1312,79709
20	-8,4	-361,584	-1302,64721
21	-8,3	-345,507	-1292,49733
22	-8,2	-329,888	-1282,34745
23	-8,1	-314,721	-1272,19757
24	-8	-300	-1262,04769
25	-7,9	-285,719	-1251,89781
26	-7,8	-271,872	-1241,74793
27	-7,7	-258,453	-1231,59805
28	-7,6	-245,456	-1221,44817
29	-7,5	-232,875	-1211,29829
30	-7,4	-220,704	-1201,14841

Figure 6 – Tracé de la tangente à la courbe en un point (comme limite de sécante)

Ces différents exemples nous semblent illustrer le fait qu'il est possible d'exploiter sur un plan didactique les limites intrinsèques du tableur. D'une part, l'authenticité des contraintes et des objectifs poursuivis ainsi que la variété des approches possibles contribuent à définir des problèmes susceptibles de constituer un défi motivant pour l'élève et de faire appel à sa créativité. D'autre part, non seulement de tels problèmes amènent-ils à développer une meilleure compréhension des processus informatiques et une autonomie accrue dans l'utilisation d'un outil très répandu, leur résolution peut difficilement se faire sans un travail sur le sens des concepts mathématiques et des liens qui les unissent.

Conclusions

La façon dont Gisèle Lemoyne a cherché à aborder et à traiter les difficultés d'apprentissage en mathématiques nous conduit à dire que, par respect pour les élèves qui en éprouvent, elle s'est intéressée, d'abord et avant tout, à un authentique apprentissage des mathématiques, qui ne sacrifie rien à la richesse du savoir à apprendre, mais vise au contraire un approfondissement du sens et de la structure des connaissances. Cela était à ses yeux une condition essentielle à l'établissement d'un rapport éclairé avec les mathématiques. Par conséquent, les tâches qu'elle a développées pour surmonter les difficultés constituent des modèles didactiques, utilisables et à utiliser avec tous les élèves. C'est donc sur cette base que nous nous sommes permis de généraliser l'emploi des principes sous-jacents à la « calculatrice défectueuse » à un ensemble plus vaste d'outils et pour des contenus qui ne sont pas typiquement destinés aux élèves considérés en difficulté d'apprentissage.

RÉFÉRENCES

BROUSSEAU, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 7/2, Grenoble : La Pensée Sauvage, pp. 33-115.

CARON, F. (2004) Les technologies dans les cours de mathématiques : catalyseur ou poudre aux yeux?, *Actes du Colloque GDM 2003 - Portée et limites de la notion d'autonomie en mathématiques*, Université de Sherbrooke, pp.58-68.

LAGRANGE, J.B. (2000). L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement : Une approche par les techniques, *Educational Studies in Mathematics*, Vol.43, No. 1, pp. 1-30

LEMOYNE, G., GIROUX, J., RENÉ DE COTRET, S., BROUILLET, F. (2005) Environnement informatique pour l'enseignement du calcul réfléchi : un travail orienté par la théorie des situations didactiques, In M.-H. Salin, P. Clanché et B. Sarrazy (éditeurs), *Sur la théorie des situations didactiques, Questions, réponses, ouvertures. Hommage à Guy Brousseau*, Grenoble : La Pensée Sauvage éditions, pp. 279-296.

TALL, D. (1992). L'enseignement de l'analyse à l'âge de l'informatique, In B. Cornu (dir.), *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques*, Paris : Presses Universitaires de France, pp.159-182.