UNE VUE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES AU PRIMAIRE ET AU SECONDAIRE EN SUISSE ROMANDE

F. Conne
Universités de Genève et de Lausanne [1]

- J-T D : " On dit que les gens vieux ont de l'expérience. Mais " expérience " veut dire, au sens premier, traversée. "
- D. D : " Mais après tant d'envols et de retombées, je veux dire à ceux qui commencent leur trajet que l'élan vaut la peine. (...) je crois du fond de moi que ce qui compte, ce qui vaut la peine d'être vécu, c'est l'élan.

Dominique & Jean-Toussaint Desanti, '*La liberté nous aime encore*'. Odile Jacob, Paris 2001.

Résumé : Ce texte est la suite de l'article intitulé : "*Evolution de la référence à la réalité dans les manuels suisse romands au cours du XXème siècle*". La réflexion ne porte plus sur l'idée de situation mais sur celle d'expérience. L'idée de cet article est d'utiliser le schéma de la seconde synthèse dialectique proposé par F. Gonseth dans son ouvrage '*La géométrie et le problème de l'espace*' (fasc. IV) pour en faire un outil d'analyse et de comparaison des manuels. Je dégage deux axes, un premier reliant les pôles théorie/expérience, le second reliant les pôles intuition et formel, ces quatre pôles marquant leur présence à tout niveau de la scolarité mais dans des configurations différentes. Le troisième volet de ce triptyque consistera à repenser le recours à l'expérience dans l'enseignement élémentaire à la faveur de mes travaux dans l'enseignement spécialisé.

Mots-clés : Théorie *versus* expérience, intuition *versus* formel, comparaison de manuels, enseignement spécialisé.

Introduction : Extraits du carnet de croquis d'un chercheur en didactique des mathématiques

Le texte qui suit a une forme particulière, c'est à titre expérimental que je l'ai conçu et rédigé. Ce qui me semble le mieux le qualifier est de dire que c'est un texte de repérage. En ce sens c'est une pièce à verser en amont de la recherche, un texte de problématisation et c'est à ce titre qu'il s'adresse aux enseignants. L'étude que je présente ici prépare et accompagne mes recherches effectives, dans une sorte de *pas de*

[1] Ce texte est issu d'une conférence parue In Actes du colloque du Groupe des Didacticiens des Mathématiques du Québec (GDM) 2002 : *Continuités et ruptures entre les mathématiques enseignées au primaire et au secondaire*. Dép. des sciences de l'Education, Université du Québec à Trois Rivières, 2004. pp. 3-29. A *Gisèle Lemoyne* qui s'est tant intéressée à la question du formel. Mes remerciements à *Aline Sigrist* qui m'a très aimablement donné à réfléchir à propos de ses difficultés à s'initier aux questions d'analyse, d'étude de coniques, de calcul des probabilités et d'algèbre linéaire.

côté ou, si vous me permettez cette expression, en levant mon regard au dessus de mon ouvrage.

Depuis mon travail de thèse (Conne 1981), j'ai toujours inscrit mes analyses de manuels dans le cadre de l'étude de la transposition didactique et en contrepoint à mes recherches sur le terrain, dans les échanges didactiques avec des élèves et en collaboration avec des enseignants. Depuis quelques années je travaille sur le terrain de l'enseignement spécialisé où la question de l'expérience se pose avec une très grande acuité. D'une part : comment arriver à exploiter ce dont ces élèves ont l'expérience ? D'autre part, quelle expérience peut leur occasionner telle ou telle activité scolaire alors qu'on est quasiment assuré qu'ils n'arriveront pas à l'accomplir comme prévu ? On comprend alors que les propositions de la *technique des situations* (voir infra point 9.2) sont du plus grand intérêt pour ces questions. Depuis plusieurs années mes recherches portent sur le domaine de la géométrie et travaillent sur la dimension intuitive et formelle comme clés d'ouverture de l'expérience et de la pensée dans les échanges didactiques.

Dans cet article mon but est de travailler à rattacher les questions qui me préoccupent le plus avec des questions didactiques plus générales qui traversent des ordres d'enseignement aussi différents que l'enseignement primaire, secondaire et secondaire supérieur de l'école ordinaire, ainsi que celui des classes d'enseignement spécialisé. Bien que pour la précision de mon propos je me réfère exclusivement à l'enseignement au canton de Vaud, qui présente des différences historiques et culturelles marquées vis à vis des autres réalités francophones, les liens problématiques qui sont ici esquissés ont une portée générale.

Cet article illustre donc une démarche, une méthode de travail. Il entend rendre compte d'un aspect du travail de chercheur qu'on n'a pas l'habitude d'expliciter. Il entrelace trois types de propos distincts.

Tout d'abord des propos quasi philosophiques axés sur une approche phénoménologique avec au centre des termes comme *expérience*, *théorie*, *intuition*, *réalité*. C'est par ce biais que je rattache mon analyse à l'approche du philosophe Ferdinand Gonseth telle qu'il l'a développée dans son ouvrage : *'La géométrie et le problème de l'espace'*. Cet ouvrage est épistémologique, et les préoccupations phénoménologiques n'y sont pas absentes. Non seulement F. Gonseth lui-même, mais encore plusieurs auteurs ont cherché à s'inspirer de ces analyses à fin d'enseignement. Mon propos est plus large puisque je vise à faire des idées du philosophe un outil pour l'analyse et la théorisation didactique. Ici, pour l'exemple, j'esquisserai la manière dont selon moi le schéma du philosophe peut cadrer une analyse de manuels. Je mentionnerai très discrètement les liens que je vois avec la sémiotique de C. S. Peirce.

Le second type de propos de ce texte est proprement théorique. C'est pour cette raison que j'ai choisi un ton résolument affirmatif et, pour autant que je l'ai pu, direct. C'est le ton qu'on use pour la présentation de propositions : paragraphes courts, texte quasi haché. Par ces moyens j'ai cherché à rendre visible l'articulation de mes propos, leur développement. Mon intention vis à vis du lecteur est avant tout de lui donner à réfléchir en lui indiquant des questions qui me semblent très importantes, en les liant les unes aux autres. J'espère par là susciter chez le lecteur des idées en vue de les éprouver, de vérifier à quel degré elles sont fondées etc. Ce texte contient plusieurs thèses qu'il serait erroné de prendre pour des opinions.

Le troisième type de propos réfère et évoque des aspects de l'enseignement des mathématiques dans le canton de Vaud en Suisse romande. Les manuels que je présente ici sont les derniers manuels représentatifs d'une conception didactique qui s'est imposée dans le canton de Vaud durant la seconde moitié du XX$^{\text{ème}}$ siècle et qui a été nourrie de la philosophie de F. Gonseth. En Suisse romande les manuels scolaires de l'école obligatoire sont édités par les cantons et sont imposés. Les manuels auxquels je fais ici référence ont désormais tous été retirés pour laisser place à d'autres qui s'inspirent à d'autres sources.

Cet article offre une vue sur l'enseignement des mathématiques tel qu'il se donnait vers les années 1998. Je n'y dépeins pourtant pas un paysage, mais quelque chose de plus modeste : une vue comme quelqu'un qui se mettrait à la fenêtre et balayerait le paysage du regard. Un travelling plus qu'un panorama. Ceci veut dire en particulier que je suis prêt à admettre que certaines choses ont échappé à ma vision, et qu'elle n'est que partiellement fidèle. Cela veut dire surtout que ce qui m'importe est le mouvement du regard qui évoquera des questions relatives à l'enseignement du primaire, s'arrêtera un moment sur des questions relatives au secondaire, et au secondaire supérieur, le temps de développer deux exemples, et qui enfin reviendra en arrière vers une pratique qui s'est développée surtout dans l'enseignement primaire en Suisse romande. Mon geste est celui d'exprimer ce qu'offre un regard didactique sur un paysage d'enseignement, et en particulier comment il permet de lier des questions qui se posent en des points fort éloignés du système. Le projet est ambitieux et, si on voulait le mener en tous ses détails, nécessiterait qu'on y consacre un ouvrage entier. J'ai pensé qu'une esquisse ne serait pourtant pas inutile même si cela limite fortement mon propos.

1. Expériences informelles et savoirs formels

1.1 Réel, situation et jeu

Dans une étude antérieure sur les manuels d'enseignement de l'école primaire en Suisse romande au XX$^{\text{ème}}$ siècle (Conne 2002), j'étais parti du raisonnement suivant : on n'enseigne pas les mathématiques directement mais toujours en référence à une « réalité » connue ou connaissable par ailleurs. Mais s'agissait-il toujours de la même réalité à laquelle on se référait ?

J'avais montré que cette réalité différait selon les époques. Dans cette analyse, je m'étais appuyé sur l'idée de *situation* et le fait qu'elle était devenue l'objet d'une théorie en didactique des mathématiques. J'avais ainsi pu mettre en correspondance les idées et apports conceptuels de la didactique des mathématiques avec cette évolution. En particulier, en ce qui concerne les manuels les plus récents, j'avais montré combien la notion de *jeu* était devenue centrale. J'avais mis en relation cette évolution des conceptions et celle des théories didactiques puisque la *théorie des situations* propose de modéliser les situations en les considérant comme des jeux formels.

Il y aurait de multiples manières d'attester la centration des manuels sur les jeux pour représenter schématiquement la pratique des mathématiques, les situations dans lesquelles elles s'inscrivent et les expériences qu'on est amené à y faire. Je me contenterai ici d'une seule citation, d'une part pour son originalité et, d'autre part, parce que j'aurais l'occasion de revenir sur le manuel dont elle est tirée. Voici ce que l'on trouve dans un manuel de géométrie pour le secondaire (degrés 7, 8, 9 de la scolarité) au canton de Vaud, édité à la fin des années 80, je cite : O. Burlet, Géométrie, p. 5 :

> ***Conception pédagogique.***
> *Résoudre des problèmes, c'est véritablement faire des mathématiques et dans notre cas de la géométrie.*
> *Cette activité se présente comme un " jeu de cartes " dont les cartes sont les résultats de la théorie. Chaque étape du raisonnement qui mène de la donnée du problème à sa solution doit être justifiée par une carte ou un fait précédemment établi. L'intérêt du jeu réside dans le grand nombre de combinaisons de cartes qu'il est possible de former, alors que seules quelques unes conduisent au résultat. A condition de ne pas s'attaquer d'emblée à des problèmes trop difficiles, ce jeu peut apporter beaucoup de satisfactions. Des cartes de jeu sur lesquelles figurent les résultats théoriques sont distribuées à cet effet. (Les élèves recevaient effectivement un jeu de cartes sur lesquelles figuraient ces résultats, NDR).*
>
> Un cheminement minimal à travers le livre pourrait se limiter à une présentation des cartes du jeu et, pour montrer comment les utiliser, à quelques incursions dans la théorie. Le travail de l'élève consistant presque exclusivement à résoudre des problèmes.
> *A l'opposé, on peut suivre en entier l'itinéraire de notre construction géométrique et s'apercevoir que la géométrie forme un tout cohérent. Mais les variantes entre ces deux extrêmes sont possibles.*

1.2 Le formel comme reprise et renouvellement de l'expérience

L'étude qui suit spécifie une idée défendue dans un article plus ancien encore : *faire faire des mathématiques aux élèves* (Conne 1999) sur la question de l'*expérience* et l'idée de : *faire faire des expériences aux élèves.* Ces expériences, on ne les fait pas faire à vide, nous devons donc considérer d'une part l'expérience que procure tout enseignement des mathématiques et, d'autre part, l'expérience à laquelle fait appel tout enseignement des mathématiques. Je vais aborder ces questions sous l'angle de la *réplication.*

Comme je l'ai noté à diverses reprises (Conne 1999, Conne 2002) il s'agit pour moi d'articuler les aspects épistémologiques et didactiques de ces questions. Je me propose de le faire en mettant en perspective les schémas proposés par J. Petitot et A. Descaves d'une part et par F. Gonseth d'autre part. Le volet didactique de la question de l'expérience m'amènera à une mise en perspective de ces propositions selon les pratiques scolaires.

Voici les deux schémas proposés par J. Petitot et A. Descaves (J. Petitot, Séminaire EHESS, *Idéalités mathématiques et réalité objective,* 1987/88: voir Descaves, 1992, p. 13).

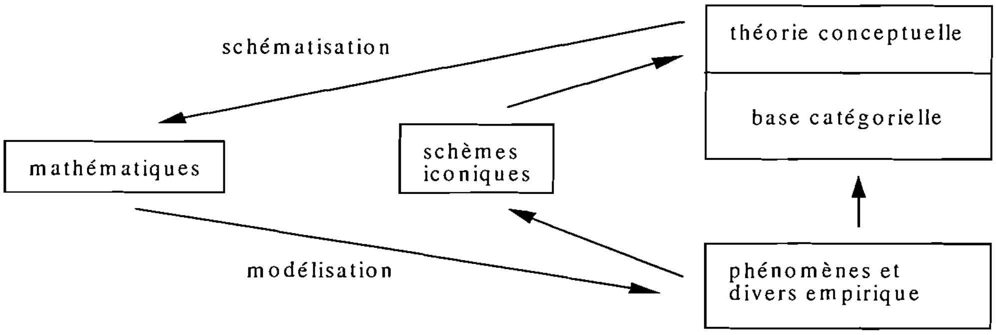


fig 1 schématisation et modélisation

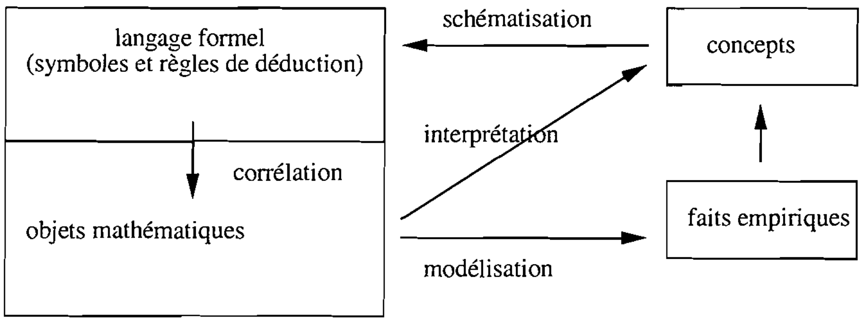


fig 2. le "jeu à quatre" des relations entre réalité et mathématiques

Un commentaire de l'auteur (A. Descaves) constitue à mes yeux l'équivalent d'une "légende" pour les figures 1 et 2 :

> *«La* mathématisation *des phénomènes empiriques n'est pas directe. Pour comprendre la possibilité d'une mathématisation des phénomènes issus du divers empirique, il faut postuler l'existence de processus de catégorisation, liés à la façon dont le monde se donne au sujet et aux capacités perceptives et cognitives de ce dernier. Le monde se donne sous forme d'un apparaître organisé morphologiquement. Le sujet extrait des catégories à partir de lui et c'est à partir de bases catégorielles que s'élaborent les théories conceptuelles. De nombreuses sciences humaines en restent d'ailleurs à un tel niveau conceptuel descriptif, sans pouvoir trouver les objets mathématiques modélisateurs qui leur permettraient de passer à un niveau explicatif.»*

L'interprétation didactique que je donne de ces schémas procède d'une réflexion sur le formel et la formalisation en mathématiques et de sa fonction de réplication tant au niveau théorique, par schématisation de la théorie conceptuelle, qu'au niveau expérimental, par la modélisation de faits empiriques. L'existence de ces boucles dans les schémas signifie qu'ils contiennent déjà tous les éléments dont nous avons besoin pour penser l'entreprise didactique.

La thèse qui en découle et que j'ai déjà formulée dans les articles cités ci-dessus, est de considérer que les boucles suggérées par les schémas épistémologiques seront répliquées au niveau didactique et que par conséquent, pour passer du niveau épistémologique au niveau didactique, il n'y a rien de plus à considérer que l'idée de parcourir récursivement, à plusieurs reprises ces graphes. Ceci suppose de considérer que les entités présentes dans les cases restent ouvertes et ne sont que provisoirement achevées. De telles considérations permettent une interprétation gonséthienne de ces schémas, bien que les thèses gonséthiennes aient largement anticipé celles de Petitot.

Dans cet article, je vais m'en tenir au cursus scolaire et examiner ces questions à différents niveaux de la scolarité primaire, et secondaire (obligatoire et post-obligatoire) et passer en revue différents chapitres de l'enseignement. Néanmoins pour ce faire, je prendrai appui sur l'enseignement de la géométrie et ce, pour trois raisons :

a) Les schémas de Petitot Descaves méritent d'être interrogés et spécifiés. Je trouve dans l'œuvre de F. Gonseth une étude profonde qui le permet. Cette étude porte sur la géométrie.

b) Une question m'importe d'examiner ici : celle du formel dans l'aménagement local de segments théoriques ainsi que dans la réplication d'expérience. Elle se pose avec acuité pour l'enseignement de la géométrie et le passage de l'enseignement primaire à l'enseignement secondaire. On peut considérer ce pas comme un moment de formalisation qui opère une reprise de l'expérience antérieurement acquise, en classe ou ailleurs, et l'ouvre sur de nouveaux horizons : une réplique donc. Dit autrement, dans les représentations que l'on se fait de l'enseignement, ce trait est étroitement associé à la question de l'enseignement de la géométrie. Pour l'école en Suisse romande, cette discipline marque ou marquait l'avènement d'une matière formalisée faisant appel à une large expérience (dite) informelle préalablement acquise.

c) La géométrie occupe une place particulière dans le cursus d'enseignement, puisqu'elle se présente au secondaire comme une théorie qui réfère à un vaste répertoire d'expériences. En regard de la géométrie, les mathématiques enseignées en classe, sont soit bien moins théorisées – comme c'est le cas pour toutes les questions numériques – soit présentées comme théorie fondée sur des répertoires d'expériences bien plus pauvres que dans le cas de la géométrie.

Ainsi la préoccupation portée sur l'expérience et les répliques que la didactique entend assurer aux élèves nous conduit à une mise en perspective portant sur le formel comme agent de ces répliques. Nous avons vu ce lien du point de vue épistémologique. Il se trouve aussi, mais de manière bien plus évidente cette fois, sur le plan effectif, voire méthodologique. En effet pour faire répliquer une expérience, il convient d'en dresser un protocole, indiquer une procédure plus ou moins finement réglée qui sera ensuite traduite dans l'enseignement en consignes faites aux élèves. Ce travail est aussi un travail de formalisation et de schématisation dans une théorisation et on parlera dès lors plus volontiers d'*expérimentation* que d'expérience. J'ai mentionné ceci dans mon article de 2002 (op. cit).

On dit volontiers que l'expérimentation et un art raisonné de questionner le réel, mais ceci ne peut se faire sans questionner aussi notre *intuition* du réel et par là l'expérience que nous en avons. Les aspects de la théorie, de l'expérience et de l'intuition sont donc solidaires et entretiennent entre eux des relations dynamiques agonistes/antagonistes, ce que F. Gonseth appelle des rapports dialectiques. Tout sujet en «joue » dans ses raisonnements, tantôt théoriques, tantôt expérimentaux (aspect formel).

1.3 L'expérience comme propédeutique à la géométrie

Il y a donc *un versant formel à l'expérience*, que je nommerai expérimentation et *un versant intuitif*. Voyons cela de plus près. Que vise-t-on en faisant faire des expériences aux élèves ? Dans tout cet article, je distingue et tente d'articuler deux aspects (évoqués dans Conne 1996, *L'ambivalence de la transposition didactique*, p.332). D'une part, il y a l'expérience *hic et nunc* de l'élève dans sa pratique scolaire des mathématiques, son étude et les exercices requis pour atteindre la maîtrise requise de ses instruments (mathématiques et/ou didactiques). D'autre part, il y a l'expérience de ce que les schémas ci-dessus appellent *le divers empirique*. Certes le premier volet de l'expérience entre aussi dans cette catégorie, et du point de vue général épistémologique, on peut fort bien confondre ces deux volets, puisque alors on fera abstraction de la dimension didactique. Une perspective didactique se doit au contraire de faire la distinction, puisque les deux ne se situent plus au même niveau de parcours des boucles du processus.

Tout comme la question de l'expérience et de sa réplique nous a fait rencontrer le formel, elle nous fait alors rencontrer l'intuitif, quelque fois connoté par l'expression d'*expérience informelle*. On retrouve ceci par exemple dans la facture du manuel de géométrie de O. Burlet (op. cit.) dont j'ai déjà cité un extrait. Dans l'introduction, au paragraphe intitulé Conception pédagogique, nous trouvons ceci (p. 5) :

> ***Organisation des chapitres***
>
> *Chaque chapitre est divisé en quatre paragraphes.*
> - *Le premier est consacré à la théorie.*
> - *Le deuxième récapitule les résultats de la théorie. Ces résultats figurent également sur les cartes du jeu qui accompagnent le manuel.*
> - *Le troisième comporte des problèmes pour tous les goûts. L'important est que chacun ait du plaisir à en résoudre quelques-uns. Les problèmes les plus délicats sont signalés par une couleur.*
> - *<u>Le quatrième présente une leçon informelle. Sous ce terme, nous entendons exposer des développements et des applications de la géométrie qui sortent du programme scolaire. Les sujets sont choisis pour se prêter à des constructions et des réalisations concrètes.</u>*

(C'est moi qui souligne.)

Plus généralement, dans leurs pages introductives, tous les auteurs de manuels de géométrie font appel à l'expérience comme assurant un *ancrage* de la théorie dans l'expérience du divers empirique. Il s'agit aussi, comme dans la citation ci-dessus, d'une *entrée* intuitive sur des objets mathématiques. Ancrage et entrée se rejouent donc à chaque parcours de la boucle épistémologique. En première approximation[2], je dirai que l'enseignement de la géométrie, qui s'opère au secondaire – en Suisse romande dès la 7ème année de scolarité, qui correspond à la 5ème de collège – amorce un second parcours

---

[2] En fait, ma thèse est qu'il s'agit ici d'une troisième reprise, le lecteur intéressé se référera pour ceci à Conne 2003, pp. 92 -95.

de la boucle, reprise et développement de ce qui a été étudié au degré primaire. De ce point de vue, l'école primaire serait dévolue à la constitution d'une expérience qui puisse plus tard servir de référence à l'enseignement de la géométrie. Cette conception est dominante dans tous les manuels que j'ai consultés et qui couvrent les années 1920 à nos jours.

Tout au long de cet article, je questionnerai les termes *intuitif* et *informel*. Pour le moment je me contenterai de faire remarquer primo que ces termes s'imposent à tous les auteurs et secundo qu'ils sont liés à la question des expériences qu'on se propose de faire faire aux élèves, ou de leur faire évoquer afin d'étayer l'enseignement avec les significations qu'elles véhiculent. En particulier, l'expérience fait rencontrer des *évidences perceptives ou logicomathématiques*, ce dont F. Gonseth rend compte sous l'expression d'*horizon intuitif*.

Quatre exemples. Les deux premiers illustrent le fait que l'expérience rencontre l'intuition, mais que celle-ci est à prime abord syncrétique, indifférenciée. Il reviendra à des commencements de théorisation et d'expérimentation de fonctionner comme analyseurs de ce qui est donné par l'intuition et qui se révèle souvent assez complexe.

1. Quelque fois déjà en classe de maternelle, on propose aux élèves de confectionner des *tapis*, qui sont des papiers pliés et découpés afin de révéler lorsqu'ils sont dépliés des motifs symétriques, eux-mêmes disposés symétriquement. L'effet esthétique est garanti. La confection de ces tapis repose sur une procédure qui indique la manière de plier et de découper. C'est ici que l'expérience rencontre l'intuition (esthétique) de la symétrie. Ces productions sont complexes et ne fournissent qu'une entrée en matière sur la symétrie, qui sera abordée par des exemples plus élémentaires. Mais elles peuvent a bon escient servir de référent à une étude théorique de la symétrie.

2. On propose des jeux de puzzle en classe, prenons le fameux Tan-gram. L'expérience rencontre directement l'intuition perceptive en montrant que par divers arrangements des mêmes pièces on obtient des figures de formes différentes. L'expérience est lancée comme un jeu avec des règles d'assemblage - *pas de chevauchement par exemple* - ainsi que d'identification des arrangements – ex. *deux arrangements isométriques seront considérés comme identiques* - et des buts - *production de formes originales, reproduction de figures imposées* -, etc. Une catégorisation des figures obtenues peut-être faite - *figures de personnages d'animaux, de choses, figures géométriques*. Les élèves en tirent par voie inductive quelques règles qui sont relatives à ces catégories - *position des pièces pour obtenir la figure d'un chapeau de personnage, de sa tête, moyens de produire des décrochements dans la silhouette, etc.* Ces règles ne sont pas sans liens avec certaines propriétés géométriques des pièces - *similitudes, mais aussi égalités ou inégalités de segments (relation de double, d'incommensurabilité, angles supplémentaires, etc.)*. Plus abstraitement on peut illustrer avec ces jeux les propriétés fondamentales d'aires - *équi-décomposabilité* - ou de rapports aires périmètres - *figures d'aires égales mais de périmètres différents*. Ce jeu lui aussi peut devenir fort complexe à décrire dans toutes ses subtilités. On le voit les exploitations théoriques possibles d'un même champ d'expériences sont multivoques, parce que les dites expériences renvoient à des intuitions riches et indifférenciées.

3. Cet exemple illustre une situation ouverte qui procède explicitement d'une mise en alternance d'approches expérimentales, intuitives et théoriques. Il s'adresse à des élèves de division moyenne de l'enseignement, mais présente un intérêt même pour des adultes. (Charrière et alii 1991)

> *Les trois p'tits tours.*
> *Consigne : Choisir trois nombres entiers. Placer un point de départ sur un quadrillage et tourner toujours à angle droit dans le sens des aiguilles de la montre selon le code formé par ces trois nombres.*

Je décris la procédure : Si on obtient le code 1/3/5, on part du point de départ, et on fait un parcours sur le quadrillage, que l'on marque au crayon. Sur la droite du point de départ, on parcourt horizontalement, un côté de carré vers la droite, puis, verticalement 3 côtés de carrés vers le bas, puis de nouveau horizontalement, mais vers la gauche, 5 côtés de carré, puis on poursuit le parcours, qui débutera maintenant verticalement vers le haut, en reprenant le code 1/3/5, dans l'ordre : 1 carré verticalement vers le haut, 3 carrés horizontalement vers la droite, 5 carrés verticalement vers le bas, et ainsi de suite.) Au tableau noir, on fait la démonstration de trois parcours : 1/3/5, 1/3/3, et 3/4/5. Il ressort que les parcours bouclent tous sur leur point de départ. On ne fait pas de commentaire là-dessus, mais on engage les élèves à explorer les dessins que l'on peut ainsi réaliser.

Ici encore la consigne est un élément formel qui permet de répliquer une série d'expériences. Il y a une technique expérimentale à s'approprier, qui est assez simple pour devenir rapidement *routinière*. Comme il est démontré devant les élèves au tableau, la règle d'action clôt sur un événement : *le retour au point de départ* après (au maximum) 4 répétitions de la règle *et la répétition qui s'en suit du parcours du motif.* Par ailleurs, le motif obtenu est une *figure* qui présente une certaine forme. Ainsi, les critères de fin de la procédure ne sont pas donnés dans la consigne, ils nichent au cœur même de l'effectuation. La procédure se termine lorsque le tracé sera complet à la fois en regard de la procédure qui le produit - *on ne fera plus que de repasser dessus* - et en regard des propriétés de la figure qu'il fait apparaître - *ses symétries essentiellement.* Ces critères de fin sont produits là où l'effectuation rencontre l'*intuition, tant procédurale que figurative*[3]. Les élèves sont priés de répéter l'expérience et d'étudier ce qui se passe. Comme ci-dessus, l'exploitation théorique n'est pas univoque : types de catégorisation des productions obtenues, inférences de résultats intéressants, variations expérimentales à titre d'exploration ou de confrontation de conjectures par modification de paramètres – *par exemple varier le nombre de jets de dés, ou encore dessiner sur un autre réseau qu'un quadrillage* - démonstrations, recherche d'un modèle simple rendant compte de la diversité des figures obtenues, etc. On peut s'intéresser à comprendre ce qui fait que le dessin soit ainsi bouclé, à le démontrer, à trouver une modification de la procédure qui fasse que ceci se reproduise, ou, au contraire, ne se reproduise pas. On peut chercher à caractériser la forme de la figure obtenue en fonction des nombres tirés aux dés, non seulement en forme mais encore en dimension. On peut examiner les modifications de ces formes sous l'effet de la permutation des paramètres. Etc.

---

[3] C'est bien l'apport essentiel et décisif de la psychologie piagétienne que d'avoir fait comprendre que toute intuition n'est pas perceptive, mais tout autant opératoire. Reconnaître ceci n'est nullement tomber dans un quelconque mentalisme. C'est désormais un acquis scientifique dont nous devons tenir compte.

A chaque fois les sources de connaissance expérimentales, intuitives et théoriques sont sollicitées et les élèves se trouvent relancés des unes aux autres comme si elles se contrôlaient les unes les autres, selon **le** *principe que chacune d'elles rend compte également d'un même réel qui se révèle progressivement.* Un principe d'économie joue en faveur d'une théorie générale qui non seulement épargne aux élèves de multiplier les expériences mais encore leur fait identifier les expériences les plus significatives à faire. Une économie et une organisation dans le questionnement du réel et la rencontre de l'intuitif qui dispense une application formelle et aveugle de la procédure de dessin. A la fin de mon article (point 9.2), je présente quelques productions d'élèves dans cette situation.

4. Cet exemple est celui d'une de ces leçons dites informelles du manuel de O. Burlet (op. cit) qui porte sur les coniques. Le chapitre dont il est un développement est celui des lieux géométriques. C'est un petit exposé théorique - l'auteur indique que c'est en simplifié l'approche proposée par A. Quetelet et G. Dandelin - qui établit le pont entre la définition usuelle des coniques en tant que trois sortes de courbes du plan et sa définition originelle univoque de section de cônes par un plan[4]. L'exposé fait appel à l'expérience et par là à l'intuition d'images. Il s'agit en effet de donner une *signification réaliste* aux objets évoqués et *interpréter les figures* de l'exposé comme étant les images de cette réalité évoquée. Diverses évocations jalonnent l'exposé - les cônes sont introduits par l'évocation d'expériences d'optique comme *des cônes de lumière* et les coniques sont mises en évidence par la suggestion de les *formes que laissent ces projecteurs selon leur inclinaison par rapport à une surface plane.* Puis le cône est évoqué comme *une nappe en entonnoir.* Ce qui permet d'introduire une sphère inscrite dans un cône comme un *ballon qui y serait déposé.* Ce dispositif venant illustrer (imager) les relations entre un cône et un plan sécant et une sphère tangente à la fois au cône et au plan sécant. Ceci est possible comme le suggère l'auteur en évoquant l'expérience d'un *ballon déposé dans l'entonnoir formé par l'une des nappes du cône et que l'on gonfle jusqu'à ce qu'à toucher le plan sécant* (p. 202). Ces évocations donnent une interprétation des figures qui accompagnent l'exposé et dont l'étude supporte le développement théorique. En effet, le point de tangence de la sphère et du plan sécant existe et se voit appelé foyer, la droite d'intersection de plan sécant et du plan équateur de la sphère (perpendiculaire à l'axe du cône) est appelé directrice de la conique. S'en suit la définition de la conique comme lieu de points dont les rapports des distances au foyer et à la directrice sont comme les rapports des sinus de l'angle dièdre des deux plans et de l'angle du cône, ainsi qu'une caractérisation de l'excentricité de la conique. Notons que cet exposé prend entièrement en charge les considérations techniques afin d'amener ses résultats et qu'il ne sera proposé aux élèves aucun exercice portant sur cette partie du cours. On en reste à des expériences évoquées tant avec des objets comme les cônes, plans, sphères et leurs intersections qu'avec des éléments de calcul et de raisonnement et un appel à l'intuition afin de soutenir la logique de l'exposé. On présente avant tout une logique, la toile de liens essentiels qui relient ces différents éléments.

Dans cet exemple, l'entrée dans le sujet se fait par le biais d'une évocation théorique et intuitive et non pas par une entrée en matière expérimentale comme c'est le cas dans les trois exemples cités ci-dessus. Pourtant, et malgré le caractère informel revendiqué

[4] Notons que dans la pratique, tant en raison de manque de temps qu'en raison de la difficulté du sujet, cette partie du manuel aura été rarement étudiée en classe.

par l'auteur, un tel exposé demande de la part de l'élève qu'il ait bien intégré la théorie de ce chapitre et en particulier les exigences d'une présentation déductive en mathématiques. Il n'y a donc pas retour en arrière sur une pratique ante-géométrique mais au contraire prolongement de la démarches et réexploitation ad hoc de données intuitives supposées disponibles.

Quelles que soient les conceptions épistémologiques, on retrouve toujours liée aux idées d'informel et d'intuitif celle de connaissances (théoriques) tirées de l'expérience par voie inductive. La reprise de ces connaissances – dont certaines sont déjà théoriques – par la géométrie se marquera au secondaire par l'exigence d'établir ces connaissances par voie déductive. Nous trouvons ici deux triplets :

a) du point de vue du raisonnement celui de la *déduction, de l'induction et de l'abduction* – ici implicite et seulement connoté par l'idée d'intuition voire d'insight (ces termes ont été introduits par C. S Peirce, les développer m'entraînerait trop loin. Pour une définition de ces termes, voir annexe 1) ;

b) du point de vue des sources de connaissances celles de *la théorie*, de *l'expérience* et de *l'intuition*. C'est sur ce second triplet que F. Gonseth construit son schéma épistémologique que je vais présenter succinctement.

2. Le problème de l'espace et ses solutions théoriques : présentation du schéma de la seconde synthèse dialectique selon F. Gonseth (1949)

2.1 Les quatre horizons, sources de nos informations sur le réel et leur jeu *dialectique*

L'étude de F. Gonseth consiste en une réflexion sur le développement de la géométrie qui, après avoir décrit l'espace de notre intuition s'en est libérée pour considérer aussi des espaces non euclidiens. Cette révolution historique participe d'une modification du statut des axiomes dès lors qu'ils sont devenus susceptibles de choix. Selon la conception de F. Gonseth, nos sources d'information sur le réel sont diverses : celles de nos *intuitions* (I) (intuitions spatiales, perceptives et cognitives) ; celles de nos *expérimentations empiriques* (E), contrôlées par les contraintes que la matière nous impose ; celle de nos *théorisations* (T) (expériences de pensées, raisonnements), contrôlé par la *claire conception de ses objets* et des principes de non contradiction.
Au niveau de notre information naturelle, ces sources d'information forment une synthèse dialectique soumise à l'idée *d'adéquation à la réalité*. Les exemples ci-dessus évoquent une telle synthèse. Voici comment on pourrait la représenter[5] :

[5] F. Gonseth n'a pas proposé de schéma pour cette synthèse, celui que je propose est de mon cru.

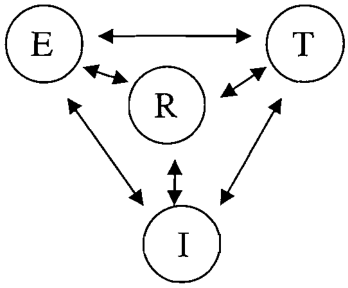


Schéma de la synthèse dialectique au niveau de notre information naturelle.

La géométrie se développe dans la direction d'une théorisation plus achevée par le biais de l'édification axiomatique (organisation formelle de la théorie). Cela donne lieu à une authentique *expérimentation théorique* à partir d'objets libérés le plus possible de nos sources intuitives afin qu'ils ne deviennent régis que par la logique déductive. Pourtant l'entreprise n'aboutit pas à une autonomie complète du rationnel car, de quelque manière que l'on procède, la convenance des axiomes reste suspendue à nos sources intuitives et expérimentales de connaissance. Qui plus est, avec la question du Ve postulat, la crise de l'évidence géométrique met un autre aspect de la même question en lumière. Il en résulte la nécessité de considérer une nouvelle synthèse dialectique qui *appelle à l'existence et fasse intervenir une série de notions telles que celle de schéma, de modèle, d'horizon de réalité* (p. 108).

La nouvelle synthèse dialectique sera soumise à l'idée *moins sommaire de correspondance schématique* entre ces quatre *horizons de réalité* intuitif (I), expérimental (E), théorique (T) et axiomatique (A).

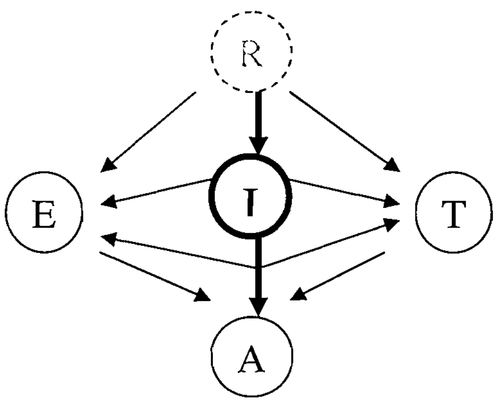


Schéma (simplifié) de la synthèse dialectique au niveau axiomatique selon F. Gonseth (figure p. 331. fascicule IV).

2.2 Pertinence de ce schéma au vu du développement des mathématiques

Depuis la rédaction de cet ouvrage (publié entre 1945 et 1955), les sources de notre information se sont passablement multipliées, en particulier nos connaissances en psychologie, en didactique, sur les pratiques mathématiciennes, scolaires ou savantes. F.

Gonseth déclare explicitement (p. 108, fasc. III) que les conclusions de son étude ont *une portée générale et s'étendent à la théorie de la connaissance, à la méthode de la connaissance toute entière.* Et il m'apparaît en effet que le mouvement ne concerne pas que la géométrie, et que ce développement s'est poursuivi en une prolifération de petits *systèmes formels*, en particulier, mais pas exclusivement non plus, avec le développement de l'algorithmique et l'apparition d'automates informatiques à même d'implémenter le formel dans l'expérimental (ce qu'on appelle communément le virtuel).

2.3 La seconde synthèse dialectique comme réitération du parcours de la boucle épistémologique

On notera que la seconde synthèse dialectique proposée par F. Gonseth procède exactement comme une reprise de la géométrie : celle de l'*édification axiomatique de la théorie*. Cela l'amène à introduire de nouvelles notions spécifiques à ce second parcours de la boucle épistémologique et qui, par ce caractère même de secondarité, intéressent toute interprétation didactique de telles considérations épistémologiques.

3. La figure de F. Gonseth réinterprétée

3.1 L'idée de *dialectique* comme pratique abstraite

Je tiens pour excellente cette idée de F. Gonseth d'avoir opposé sur un plan d'égalité théorie et expérimentation, et je salue sa volonté de tordre le cou à la pseudo hiérarchie théorie/pratique qui ne fait que confondre théorie et idéal d'une part, pratique et expérience, de l'autre. Tous les schémas épistémologiques présentés ici sont idéaux en ce sens qu'ils procèdent d'un travail réflexif et théorique. Avec son idée d'*idonéité*, qui combine une connotation de convenance aux fins que l'on s'est données et une connotation d'efficience dans la poursuite de celles-ci, F. Gonseth plaide pour un idéalisme relatif et provisoire, vu les limites qu'opposent des considérations pratiques. L'*idonéisme* est lui-même une idée, il marque chez l'auteur une sorte de pragmatique de principe, ou, pour paraphraser l'auteur, une sorte de *pragmatique de la pratique quelconque*.

La proposition de F. Gonseth nous informe sur une pratique, celle de la connaissance géométrique et partant mathématique, voire plus (voir citation p. 108 ci-dessus). Elle consiste à attribuer une image – plus précisément une icône au sens peircien – à une pratique que son ouvrage nous indique. Lire '*La géométrie et le problème de l'espace*', c'est entrer dans une pratique qui, par l'évocation bien sûr, vous fera aller et venir dialectiquement entre les horizons intuitifs, théoriques, expérimentaux et axiomatiques. Ces mouvements et les entrelacs qui en résultent, l'auteur les appelle *dialectiques*. Ceci fait que son ouvrage est bien plus proche d'un traité ou d'un manuel que d'un roman. L'argumentation s'y déploie parallèlement sur plusieurs plans qu'il ne faut avoir de cesse à mettre en relation. Cela demande un travail certain de la part de son lecteur puisque, par exemple dans le fascicule III, l'auteur nous convie à faire l'expérience de *l'édification axiomatique de la géométrie* afin de nous faire constater la toute relative autonomie théorique qui en résulte. En ce sens qu'il met une pratique au service d'un propos, l'ouvrage de F. Gonseth peut être qualifié d'ouvrage didactique.

Dès lors, ce qui distingue les diverses reprises des boucles épistémologiques et leurs parcours récursifs sont les pratiques qui d'un étage à l'autre se modifient. J'ai dit que je m'intéressais au second schéma de F. Gonseth pour son aspect secondarisé qui le rapproche des préoccupations didactiques, mais je ne confonds pas pour autant les *pratiques mathématiciennes* indiquées par cet auteur et les *pratiques didactiques elles-mêmes*, ce qui serait ignorer la transposition didactique. Mon hypothèse est que la transposition a lieu dans l'attribution de l'image même que l'on se fait des mathématiques et de leur connaissance à des pratiques didactiques et non plus mathématiciennes. A ce titre, il doit y avoir dans la manière dont l'emploi de la méthode axiomatique a modifié les pratiques mathématiciennes quelque chose qui transparaisse dans les pratiques didactiques actuelles. C'est ce que je propose en vous invitant à une réflexion sur le formel (voir infra.) et plus généralement en considérant les pratiques didactiques selon les deux axes théorie/expérience d'une part et intuition/formel de l'autre.

3.2 L'interprétation didactique du schéma de F. Gonseth commence par une reprise en compte de la pratique

En renversant la perspective, on peut examiner les objets et pratiques didactiques selon le schéma de F. Gonseth. Les pratiques didactiques ou scolaires des mathématiques sont par nature bien plus étroites et limitées que les pratiques mathématiques, elles ont quelque chose de générique. Il en résulte des pondérations très différentes entre leurs constituants. Prenons l'exemple d'une pratique massive à l'école : *le calcul* (calcul numérique, algébrique, vectoriel, différentiel, des probabilités, etc.). On peut l'interpréter d'une manière analogue à ce que F. Gonseth fait pour la géométrie et y retrouver des éléments de chacun des aspects qu'il a dégagé. Pour le sujet c'est une *expérience* et on peut même dire déjà qu'elle comporte un aspect quasi empirique, expérimental donc, en tant qu'elle porte sur des choses qui ont une forme (ou des signes). Dans cette expérience, le calcul est réglé, donc comporte aussi un aspect *théorique* et l'intuition du sujet y est sollicitée : intuition tant des formes (intuition figurative) que des règles (intuition procédurale). Enfin, le calcul est organisé (formellement) selon des schémas. Par exemple, un calcul procède d'une base de résultats élémentaires (qui est un sous-ensemble d'un répertoire) et de règles de dérivation.

3.3 L'expérience de l'élève

Ainsi donc, considérer les propos de F. Gonseth sous un angle pragmatique revient à reconsidérer les activités qu'il attribue aux divers horizons de réalité. L'élève n'est pas mathématicien, il n'est pas ce personnage dont le rôle est, selon W. P. Thurston (1995), de *faire avancer la compréhension des mathématiques*. Il reste exécutant des techniques et méthodes que d'autres ont inventées. Par exemple, il ne cherche pas tant à penser la continuité qu'à entrer dans ce qu'en pensent les mathématiciens, sans trop savoir d'ailleurs à quoi ils pensent vraiment ; il doit à la fois saisir l'objet et ce qu'on lui dit d'en penser... Il doit surtout suivre ses cours qui ne s'arrêtent pas longtemps sur un même objet.

Dès lors, l'accomplissement de toute tâche qu'on lui soumet représente bien pour l'élève un lieu où il confronte et mesure sa compréhension de ce qu'on lui enseigne. Et en ce qui concerne les élèves du secondaire et du secondaire supérieur, ce sont massivement des tâches de calcul. Plus généralement, les exercices et problèmes qu'on lui soumet, peuvent être vus comme de petites expérimentations, guidées certes, pour lesquelles il sait que s'il les a bien menées, alors elles doivent produire la réponse qui se trouve dans les listes fournies par les manuels, ou encore dans les corrigés, les moules de résolution, les méthodes.

On peut alors facilement distinguer les pratiques scolaires en matière de mathématiques selon la référence qui est faite à la théorie ou à l'expérimentation et de regarder dans chacun des cas le rapport formel/intuitif.

4. Les destins contrastés des connaissances numériques et spatiales dispensées dans l'enseignement élémentaire

4.1 Initiation au numérique et au spatial au début de l'enseignement primaire

Il est intéressant de contraster les enseignements du nombre et de l'espace à l'école primaire en Suisse romande (et de plus en plus en aval dans le cursus) :

- dans chacun des cas, on initie les élèves à des pratiques, et ce, sans qu'il soit question de référence à un travail théorique, à l'étude d'un cours etc. ; certes les enseignants font ci et là quelques commentaires, voire proposent quelques notes dans un cahier, mais ce sont plus des ponctuations théoriques qu'objet d'une étude, d'un questionnement. Ce n'est confronté à rien.
- dans le cas du numérique, cette théorie ne viendra d'ailleurs jamais, on apprendra certes l'algèbre, mais en tant que telle et non pas comme une matière pouvant théoriser les savoirs arithmétiques appris auparavant ;
- dans le cas de l'espace, par contre, cette théorie existe, c'est l'exposé bien ordonné et moyennement formalisé des éléments de géométrie. C'est d'ailleurs surtout en référence à des connaissances spatiales que l'on utilisera le terme de *savoirs ou de connaissances informelles*, comme si, dans ce domaine, il y avait plus de choses à formaliser que dans le domaine numérique.

On a donc un contraste fort entre les transpositions scolaires respectives de l'arithmétique et de la géométrie en ce sens que la première serait d'emblée référée à un horizon formel plus qu'intuitif, et que la seconde au contraire, référée à l'intuitif plus qu'au formel, demanderait à ce que cette référence se fasse à l'occasion d'un enseignement théorique ultérieur.

4.2 L'intuition, prisonnière des formes numériques enseignées

Au delà de toute psychologie, je considère les algorithmes, et les algorithmes de calcul en particulier, comme des petits systèmes formels. Dans son ouvrage (1949, Fascicule IV), F. Gonseth parle quant à lui de *modèles formels*. Les élèves apprennent à manier quelques ensembles de règles, qui portent sur des signes. Pour les introduire on les justifie en référence à ce que représentent ces signes, *id est* à des *significations externes*.

Mais il y a une logique du calcul, une cohérence et une économie dans le maniement des règles et ses motivations, qui constituent une autre facette de leur signification, et je les appelle, après F. Gonseth mais aussi bien d'autres, *significations internes*. Alors que les significations externes consistent en une projection objective et que leur fonction réside essentiellement à asseoir les décisions d'engager telles ou telles techniques, les significations internes restent très implicites, cantonnées dans l'acte, et si on les objective, cela se fait sur fond de méthode. Ainsi, traditionnellement, même si on accorde une valeur d'expérience indéniable à l'exercice du calcul - du maniement de petits systèmes formels de règles - ce n'est pas tant sur l'expérience que cet exercice procurerait *hic et nunc* que l'on insiste. C'est plutôt autre chose qui est mis en avant : l'acquisition d'instruments fiables et automatisés.

Selon cette conception très répandue, il s'agirait de doter les élèves d'une certaine autonomie en leur libérant l'esprit des tâches que l'on croit pouvoir rendre automatiques à peu de frais (lorsque tout se passe bien, ce qui arrive aussi de temps en temps) ; alors l'esprit ainsi étayé par des procédures fiables et peu coûteuses, les élèves pourront apprendre des mathématiques plus intéressantes et nobles, faire des expériences plus riches. Toujours dans le même ordre d'idées, s'il y a un lien entre l'expérience et l'acquisition de ces savoirs faire, ce lien n'est pas à chercher dans l'expérience que les élèves font en apprenant à calculer, cela est comme versé au chapitre des pertes et profits, mais dans ce qu'ils pourront faire d'autre. Les automatismes de calcul permettent, et pour certains conditionnent, l'autonomie des élèves.

Tant que les significations internes restent implicites, versées du côté de l'habileté du sujet, du côté de ses schèmes mentaux, elles ne sont pas disponibles et par conséquent sont intransmissibles. Il faut, pour les objectiver un tant soit peu, les projeter sur un système sémiotique de formes et en faire la théorie. En effet, et pour ne prendre qu'un exemple, pas de calcul de soustraction en colonnes sans l'introduction du diagramme de disposition des nombres, chiffres et autres marques, auxquels les élèves auront été préalablement introduits par l'apprentissage de l'addition. Ceci se poursuit pour le calcul des quatre opérations, ou encore éventuellement, par le calcul de la racine carrée, puis la multiplication et la division des polynômes. Mais cela ne suffit pas et il faudrait en faire une théorie, dire par exemple ce qu'est un *diagramme d'algorithme*, une *table de nombres*, une *formule* et dire en quoi les calculettes ont supplanté ces *appareils sémiotiques*.

Ce que nous observons, c'est que dans l'enseignement cela reste cantonné à l'expérience (les exercices de calcul essentiellement etc.), les significations internes qui s'installent progressivement autour de ces expériences de maniements réglés de formes et de figures y restent fortement liées, ni libres, ni surtout disponibles séparément. Dans cet horizon d'expériences, l'intuition n'est certes pas absente mais elle n'est pas pour autant disponible. Par exemple cet élève qui, devant effectuer une soustraction en colonnes et redoutant les retenues et emprunts qu'il aura à faire, a l'idée, comme préventivement, d'y procéder par avance sur chaque chiffre. Ainsi, devant calculer en colonne *5374-857*, il transforme la donnée du haut en *4/12/16/14* ce qui lui permettra d'opérer toutes les soustractions et lui donner *4/4/11/7*, ce qu'il transformera pour finir en *4517*. Le procédé est valide mais présente un détour dans lequel on risque bien de se perdre. Par ailleurs, il donne lieu à une écriture « interdite »[6], celle d'un résultat à deux chiffres. Pourtant, une telle intuition procédurale, liée à une intuition figurale – celle de l'écriture de nombres qui se terminent par une suite de 9 – est à même de suggérer un nouvel algorithme de soustraction.

Par exemple celui-ci que je présente de manière figurale : *5374* se décomposera en *4999+375*, on soustraira *857* de *4999*, ce qui revient à réécrire un *4* suivi des compléments à 9 de chacun des chiffres de *857*, donc *4142*, nombre auquel on ajoutera *375*, pour trouver le résultat : *4517*. C'est à très peu de choses près l'algorithme que présente Condorcet dans son ouvrage : '*Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité*', dans son commentaire destiné à l'enseignant (p. 108) en déclarant qu'il préfère cet algorithme aux deux autres qu'il a présenté dans sa leçon – qui sont les deux algorithmes que l'on rencontre usuellement dans les manuels.

L'intuition de l'élève marque un bon sens certain, elle est relativement banale. Pourtant, elle n'est pas directement exploitable et par conséquent il ne serait pas vraiment de mise d'encourager les élèves à de telles initiatives, du moins tant qu'ils ne seraient pas assurés de trouver une oreille attentive auprès de leur enseignant, et il faut en général l'œil avisé d'un chercheur pour repérer de telles idées. On le voit donc bien, faute de disposer d'un horizon théorique auquel la référer, la pratique du calcul est appelée à rester cantonnée à un certain formalisme ce qui interdit que l'on cherche trop à y tenter ses expériences.

4.3 Formes et intuitions sont intimement liées, retour au contraste numérique et spatial dans l'enseignement élémentaire

Plus généralement, les manières de déconcerter un public instruit aux quatre opérations de calcul en colonnes sont innombrables : *multiplication sur les doigts, multiplication et division dites à la paysanne russe, calculs sur bouliers, méthode de multiplication dite per gelosia*, et j'en passe.

Ainsi, on aurait tort de prendre formel et intuitif comme des termes contraires, de prendre *informel* comme synonyme d'*intuitif* et de ne retenir le *formel* que par ce qu'il se révélerait *contre intuitif.* Je soutiens au contraire que l'apprentissage scolaire des quatre opérations comporte un pan intuitif, et sans doute très intuitif, mais non libre, lié aux supports sémiotiques – aux chiffres et à leurs dispositions, aux figures que peuvent présenter les écritures de nombres. Cet enseignement se caractérise donc par le lien très rigide et serré qu'entretiennent, dans les pratiques scolaires, les aspects formels et intuitifs laissant peu de place tant à une expérimentation qu'à une théorisation. C'est ce que nous avons pu constater lors de nos recherches sur l'enseignement de la division écrite (Conne et al, 1994).

Je rappelle au lecteur l'exemple des critères de fin dans l'activité des *Trois P'tits Tours*, qui renvoyaient à ce que je me permettrais d'appeler une *intuition procédurale* couplée à une *intuition figurale.* Comparé au champ spatial, le champ numérique se caractérise par la pauvreté des intuitions figurales. Ceci n'a bien entendu rien

---

[6] Cette interdiction d'inscrire un nombre à deux chiffres dans une colonne *du résultat* est ce qui a motivé dans l'apprentissage de l'addition en colonne la sous procédure de retenues. Dans la soustraction, cette écriture de nombres à deux chiffres dans les colonnes fait partie de la sous procédure d'emprunt, elle ne porte pas sur l'écriture des nombres (données, résultat) mais est une manière d'apprêter, *après transcription*, les données inscrites dans le tableau en colonnes.

d'ontologique, mais caractérise notre culture et ce qu'elle a standardisé[7]. Pour moi ce qui distingue la question de l'enseignement du nombre de celle de l'espace, tient là, dans une pauvreté figurative du numérique opposée à la richesse figurative du spatial. Bien entendu, cette richesse laissée en friche ne peut être exploitée. Il faut donc la cultiver et cela passe par un travail sur des figures qui sont comme des images formelles.

5. Lorsque la référence théorique devient inévitable

5.1 Pour la réplique épistémologique que représente toute entreprise didactique, les horizons de F. Gonseth sont des horizons de référence

Dans son étude, suivant le droit fil de la tradition épistémologique, F. Gonseth s'appuie sur l'espace pour questionner la géométrie et son évolution. L'auteur fait des horizons intuitifs, théoriques, expérimentaux et axiomatiques les constituants de la géométrie en tant que solution au problème de l'espace, conçue comme une solution toujours provisoire à un problème toujours susceptible d'être réouvert.

Dès lors que vous réintroduisez la dimension didactique, la géométrie ne se pose plus en tant que solution au problème de l'espace mais en tant que discipline et pratique à laquelle l'élève est initié, et les constituants de la géométrie deviennent référents de et pour son apprentissage. Le texte théorique dont il dispose, tout comme les expérimentations – didactiques - qu'on lui fera faire, tout comme les évocations intuitives qu'on lui suggérera et les petits systèmes de règles – ou modèles formels, automates on non - qu'il apprendra à faire fonctionner, tout cela lui servira de référence à l'étude.

5.2 C'est bien le schéma de la seconde synthèse dialectique qui s'impose pour les chapitres non élémentaires de l'enseignement des mathématiques

Nous avons vu que tous les pédagogues suivent cette idée d'un espace constitué qui servirait de réservoir de référents pour la géométrie, je dis réservoir de référents parce que la référence à l'espace (au réel) est déjà catégorisée, ce n'est pas à toute l'expérience spatiale des sujets qu'on réfère. On pourrait dire qu'on réfère à des réalités spatiales, opposant ainsi réalité à réel selon l'idée qu'une réalité serait du réel reconstitué et informé selon certaines de nos connaissances. Mon point de vue à ce propos est que les élèves sont initiés à la géométrie, à un domaine de pratiques et de signes. Les connaissances et savoirs sur l'espace servent de référent à l'initiation aux pratiques géométriques, au moment où on y installe les élèves, et comme référence à l'apprentissage de la géométrie, au moment où on reprend l'expérience antérieure dans l'exposé de la géométrie et de son application à diverses situations spatiales.

Par contre, lorsqu'on enseigne l'analyse, les formes quadratiques, les espaces vectoriels, ou encore les probabilités, à quel réel va-t-on pouvoir faire référence ? Qu'est-ce donc qui pourrait jouer le rôle de l'espace vis-à-vis de la géométrie ? En d'autres mots, pour une élève de 15-16 ans, de quoi donc l'analyse etc. seraient-ils la connaissance ? Et surtout comment le lui indiquer ?

---

[7] L'algébrisation progressive de la géométrie tend à réduire aussi la part figurative. Et les figures spatiales prennent par contre coup de l'autonomie.

5.3 Enseignements pour lesquels une entrée théorique devient nécessaire

Ainsi donc, lorsqu'on enseigne des mathématiques plus abstraites, qui bien que puisant aussi profond, si ce n'est plus dans l'horizon intuitif, sont néanmoins fort peu empiriques, on est en quelque sorte d'emblée engagé dans la théorie. Alors que pour la géométrie. ce qui pouvait faire obstacle était de bien vouloir entrer dans une théorie apparemment plus pauvre que ce qu'on connaissait de l'espace, dans le cas présent, c'est la pauvreté de référence et de répertoire qui prédomine, puisque finalement on est directement installé dans un horizon théorique sans que l'on sache par ailleurs, collatéralement dirait Peirce[8], de quel objet c'est la théorie. Les deux fonctions didactiques d'initiation et d'exposition sont confondues, ou plutôt ce qui est discours d'exposition pour l'enseignant est discours d'initiation pour l'élève (cf. Conne 2004). L'élève se trouve avec une théorie sans objet. Du point de vue pragmatique, c'est inévitable. On pense alors à la célèbre boutade de B. Russel : *Une science dans laquelle on ne sait jamais de quoi on parle, ni si ce que l'on dit est vrai.*

5.4 Les objets, tout comme le réel dans le schéma de F. Gonseth, sont en pointillés

Ces considérations jettent une lumière nouvelle sur la question du bagage d'expériences et de connaissances soi disant informelles que l'école primaire serait sensée apporter aux élèves. Dans le cursus élémentaire, l'accès aux mathématiques a tendance à se faire exclusivement dans l'horizon expérimental par l'enrôlement des élèves à des pratiques. Il porte sur des objets auxquels s'applique la théorie (future, *pensez à la géométrie*) mais qui ne sont pas à proprement parler les objets de la théorie - *pensez aux pliages pris comme objets d'expérimentation des élèves etc.*- et dont on ne fera pas la théorie - *pour autant qu'elle existe.* L'élève se trouve donc à faire des expériences à propos d'objets sans théorie, et ce afin de l'initier à une théorie qui, lorsqu'il y sera introduit, risque fort de jouer comme une théorie sans objet (autre qu'elle-même).

Dans le secondaire supérieur, il devient nécessaire de ménager un accès par la théorie - par le biais d'un discours théorique auquel ils confronteront leur compréhension et leurs expériences de calcul. Cela ne suffit pas à résoudre le problème que je viens de souligner à propos des objets de la théorie.

6. Exemple autour de la définition de la limite

Une suite a_n admet une limite L si et seulement si : $\forall\varepsilon>0, \exists N \,/\, \forall n > N, |a_n-L| < \varepsilon$

Les élèves trouvent cette définition dans leur cours et ils sont amenés à se la rendre intelligible et utilisable. Cela entraîne leurs pensées sur les 4 horizons : la constitution de référents théorique et expérimentaux, la maîtrise intuitive, c'est-à-dire à quelle intuition recourir, quand, comment, et dans quelles limites, la saisie des phénomènes de

[8] Pour tout ce qui concerne mes références à la sémiotique de Ch. S. Peirce et à certains de ses termes, je renvoie le lecteur à deux ouvrages introductifs : J. Fisette (1990) et N. Everaert-Desmedt (1990). Je remercie J. Giroux pour m'avoir fait connaître les écrits de J. Fisette.

convergence, mais aussi de ce qu'est une suite, et partant une fonction, de la continuité, etc. ; et enfin la formule en elle-même, sa forme et les possibilités ou non de jouer avec elle directement.

6.1 Le référent théorique.

Qu'est-ce que cette formule exprime ? Que doit-on se mettre en tête pour voir ce qu'elle recouvre ? Quelles paraphrases commande-t-elle ? Que faut-il pour l'installer ? On peut considérer l'évocation suivante. Je choisis arbitrairement un ε et je montre alors qu'à partir d'un certain rang, tous les a_n s'écartent de L de moins de ε [9]. La logique de cette expérience mentale repose sur le fait que cela reste valable pour un ε aussi petit qu'on veut quitte à ce que le rang devienne élevé. Cela indique en particulier que, ainsi conçu, le rang N dépende du choix de ε. On trouve cela dans les commentaires des enseignants à leurs élèves. Dans la définition suivante de la limite d'une fonction, extraite du fundamentum d'analyse, on trouve de telles paraphrases :

> *Le nombre L est limite de f en a si f(x) est arbitrairement proche de L dès que x est suffisamment proche de a. On note* $\lim_{x \to a} f(x) = L$. *On dit encore que f(x) tend vers L quand x tend vers a. Formellement : Le nombre L est limite de f en a si :*
>
> $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ \mid\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$
>
> *Ou de manière équivalente :*
>
> $$x \in \,]a-\delta, a+\delta[\setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in \,]L-\varepsilon, L+\varepsilon[.$$
>
> *Remarque: si elle existe la limite de la fonction f en a est unique.*

La définition se présente comme l'équivalence de plusieurs paraphrases : une première expression jouant fort subtilement des adverbes *arbitrairement* et *suffisamment*, une notation, une formule correspondant à la notation, puis deux notations formelles exprimant l'expression introductive. On voit le travail mental demandé pour rendre intelligibles de telles formules et paraphrases. Mais on voit aussi un certain enfermement dans des formules et jeux de styles qui de loin n'expriment pas toutes les idées que l'on pourrait se faire de limites. Notons enfin que dans chacun des deux cas, on a choisi une propriété de la convergence pour en faire une définition générale. Quelqu'un qui jusque là ne connaissait rien au sujet pourra difficilement se montrer sceptique, pourtant cela ne va pas de soi.

6.2 Sur le plan expérimental de l'élève

Selon les idées exposées précédemment, lorsqu'on passe au plan du calcul quelque chose change : ce qui théoriquement est donné comme une propriété de la suite devient un critère de calcul amenant à une détermination : la suite admet-elle ou non **a** comme limite ? Cela se dénote en particulier dans un choix judicieux des ε et δ, ce qui demande de l'intuition et de l'expertise. Puis, profitant de quelques théorèmes sur les limites, on montrera que les choix de ε (et δ), faits pour le calcul de limites de certaines suites conviennent a fortiori pour d'autres suites, ce qui fait qu'avec ces théorèmes et un répertoire de limites de quelques suites simples, on peut établir passablement de résultats. Finalement, sans trop avoir à penser à ce qu'est une suite, ce qu'est le

---

[9] Dans leur article, p. 304, G. Arsac et V. Durand Guerrier donnent un exemple d'une telle tentative dans un manuel : Commeau J. (1959), *'Algèbre et trigonométrie'* Paris : Masson.

phénomène de convergence, ce qu'est la propriété de continuité qui est en ligne de mire, le calcul dispense un savoir certain sur les suites.

6.3 L'intuition

Elle est sollicitée sur chacun des deux plans : théoriquement par l'appel aux idées de proximité ou l'usage du verbe *tendre vers*, et dans le calcul, « expérimentalement », par le choix judicieux des ε et δ, souvent en recourant à des suites de nombres tendant vers 0. Etc. Souvent cette intuition est laissée implicite, ou plutôt indifférenciée, cela se voit particulièrement aux variables liées qu'on n'examinera pas pour elles-mêmes. L'appel à l'intuition est ponctuel et délié. Les élèves sont mis en garde contre les dangers de trop s'y fier, pour cela on leur présente quelques exemples contre intuitifs. Pourtant on ne va pas jusqu'à questionner l'intuition. Par exemple, les suites de nombres. On y fait appel d'une manière totalement intuitive : une suite de nombres ce sont des nombres indicés et ordonnés par les entiers. Ajoute-t-on que ce sont des suites infinies qui nous retiennent le plus ? Ajoute-t-on que dans ce cas les suites dont les termes seraient tous des entiers ne nous intéressent pas vraiment ? Tout cela semble aller de soi, rester intuitif. Examinera-t-on comment produire de telles suites de nombres ? On laisse cela à l'implicite d'exemples de suites données par une formule dans laquelle l'ordre apparaît. De là on finit par centrer l'attention de tous sur des suites convergentes, divergentes, ou bornées ; toutefois, à proprement parler, on ne fait pas la théorie des suites. On vise autre chose : la convergence, et, partant, la continuité d'une fonction. Les suites ne sont qu'un moyen d'en parler, une logique de penser ces notions, je ne dirais même pas de construire quoi que ce soit. On est donc introduit à passer d'un objet à un autre. Et c'est au cours de ces périples que l'appel à l'intuition sera fait, ponctuellement.

6.4 Contrôles mutuels du formel et de l'intuitif

Penser intuitivement ces objets est délicat, prend du temps, peut devenir oiseux. Et cela l'est d'autant plus que les mathématiques proposent des instruments formels très efficaces, rôdés, du moins pour ceux qui auront appris à y recourir et les utiliser. Mais ces instruments, par exemple ces formules en ε, ne sont pas faciles à manier. Il est difficile de les comprendre comme expressives et leur contrôle sémantique n'est pas aisé. L'enseignement se caractérise donc par un contrôle mutuel de l'intuitif et du formel qui aboutit à une centration très forte et une clôture sur les propos de la théorie et les enchaînements de calcul. Il y a tout un jeu de renvoi entre intuitif et formel, et ce d'autant plus que le formel sera mal reconnu par l'idéologie, et/ou l'intuitif, souvent confondu à l'appel au sens des choses, sera mis en exergue. Certaines questions reviennent soit à transgresser le contrôle intuitif - ce qui est demandé pour les démonstrations, soit à transgresser le contrôle formel – ces dernières transgressions étant le plus souvent versées sur le plan pragmatique.

Comme jeu de transgression des limites de l'intuition invoquée à un moment donné de l'étude, prenons l'exemple de la définition de la limite L d'une suite. L'idée intuitive est une suite de nombre qui approche de plus en plus le nombre L, par exemple une suite d'approximations d'un nombre. Dans ce cas, il va sans dire que l'on ne pense qu'à un nombre limite L et à nul autre. Une suite ne peut donc avoir plusieurs limites. Questionnons alors la formule : $\forall \varepsilon>0, \exists N \mid \forall n > N, |a_n - L| < \varepsilon$, laisse-t-elle transparaître d'une manière évidente à tous qu'il ne peut y avoir qu'une seule limite ? Cela donne un petit peu à réfléchir, et si on y arrive sans trop de peine, fallait-il encore se poser la question, c'est-à-dire bien vouloir reconsidérer ce que devient l'intuition suite à ces dérivations formelles. Les enseignants ou les manuels qui feront ce détour diront : on a démontré l'unicité de la limite. C'est d'ailleurs ce qu'affirme, à propos de la limite d'une fonction en x = a, le manuel (fundamentum) d'où j'ai tiré ma citation. Dans la foulée, et même si on ne le dit pas explicitement, on affirme aussi que « *cette unicité est conforme à l'intuition* ». Nonobstant, cela nous aura ouvert à d'autres considérations sur le plan intuitif, d'autres paraphrases disant, par exemple : « *j'ai une suite qui converge vers L, elle ne converge pas vers un autre nombre L' aussi proche qu'il puisse être de L* ». Cela reste intuitif, aurait-on songé à se le dire ? Mais ce qu'on ne dit pas vraiment alors ce sont des choses du genre de celle-ci : « *cette question nous a donné à apprendre quelque chose sur les formules en ε : on aura raisonné sur un ε plus petit que l'écart entre les deux limites de la suite supposées distinctes* ». Ici il s'agit d'une autre intuition, celle qui porte sur la façon de traduire des idées dans le langage formel.

Prenons maintenant un exemple du jeu de transgression des limites implicitement instaurées par la formalisation proposée et posons-nous la question de ce qui se passe pour un nombre L qui n'est pas limite d'une suite, ou une suite qui n'admet pas le nombre L comme limite. Cette question est légitime si on s'intéresse aux suites, elle l'est moins pour qui s'intéresse au phénomène de convergence[10]. Le formalisme retenu a pour fonction de saisir la convergence et pour ce faire il rend compte de ce qu'est une limite. Puis posons-nous la question plus vaste de savoir à quoi peut ressembler une suite qui n'a aucune limite. Cette question est quelque peu incongrue. Elle nous amène à tenter d'exprimer la négation de la définition. Cela nous mène aussi à une distinction qui était restée implicite dans la définition sur laquelle nous réfléchissons. En effet, on passe d'une proposition logique à une quantification existentielle d'une fonction propositionnelle. On retrouve la distinction entre une propriété et une définition. Ce qu'il faut transgresser est alors la paraphrase par laquelle on a introduit la définition. Il est relativement facile d'écrire la négation de la formule :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \,/\, \forall n > N,\ |a_n - L| < \varepsilon.$$

Pour ce faire, on applique la règle de conversion des quantificateurs et on inverse le signe de l'inégalité :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \mid \exists n > N,\ |a_n - L| \geq \varepsilon$$ [11].

Mais qu'est-ce à dire intuitivement ? On peut toujours s'imaginer qu'une suite n'a pas L comme limite, si dès un certain rang elle s'en éloigne inexorablement, c'est un peu l'idée à laquelle on fait appel pour définir une suite à limite infinie. Toutefois cette idée ne dit qu'une seule des manières pour un nombre de ne pas être limite d'une suite. On peut se dire que L n'est pas limite d'une suite si cette suite converge vers un autre nombre L' différent. Mais la suite pourrait aussi être chaotique. Revenons alors à notre formule, et supposons-là correcte. Comment l'interpréter, quelle paraphrase lui donner ?

---

[10] Tous les collègues mathématiciens à qui j'ai soumis cette question/discussion, ont cherché à me répondre de manière intuitive et aucun ne m'a proposé d'écrire la négation de la formule en ε. Tout, sauf V. Durand Guerrier qui justement était en pleine rédaction de l'article d'elle que j'ai cité ci-dessus. Dans une annexe de leur article V. Durand Guerrier et G. Arsac commentent différentes version de la définition de la limite d'une suite ou d'une fonction.

[11] Peut-être on me demandera : Pourquoi n'avez-vous pas inversé la relation $n > N$ par $n \leq N$, et maintenu $n > N$?

On comprend encore assez bien : *$\exists\varepsilon>0$*, cela indique une sorte de borne au delà de laquelle les a_n ne s'approchent plus tous de L. Notez donc cette chose un peu étrange et qui amène l'intuition comme à se retourner sur elle : une suite a une limite L si ses termes dépassent toute borne de séparation de L, fixée d'avance. Mais revenons à notre négation. On comprend encore l'expression : $\exists n \ldots |a_n - L| \geq \varepsilon$: il y a des a_n qui sont hors de cet intervalle, il y a comme un écart incompressible ε qui sépare ces a_n de L. Que se passerait-il si nous enlevions ces éléments ? La suite ainsi transformée serait-elle convergente vers L ? Est-ce que cela se pourrait ? Il suffit de penser à la suite qui vaut alternativement +1 et – 1 et nous serions dans ce cas, il suffirait d'enlever un terme de la suite sur deux pour obtenir une suite convergente.
Plus délicat est d'interpréter : $\forall N / \exists n > N, |a_n - L| \geq \varepsilon$. Supposons qu'on se donne un tel N, et que selon la propriété on trouve un n > N tel que $|a_n - L| \geq \varepsilon$, alors, en raisonnant sur n et non plus sur N, on trouve : m>n tel que $|a_m - L| \geq \varepsilon$; et ainsi de suite... Donc ces termes sont en nombre infinis, il en surgira toujours, et c'est cela qui suffit à ce que la suite ne converge pas vers L.

Tout cela rend assez absolue l'idée de convergence : une suite convergente ne se permet pas de tels écarts, aussi petits soient-ils. Mais alors quelle paraphrase en donner ? Voyons donc rapidement la définition de la limite d'une fonction et sa magnifique paraphrase : *Le nombre L est limite de f en a si f(x) est arbitrairement proche de L dès que x est suffisamment proche de a.* Tentons la négation : *Le nombre L n'est pas limite de f en a si f(x) n'est pas arbitrairement proche de L dès que x est suffisamment proche de a.* Vous trouvez que ça va ? Ou devrais-je dire ... *f(x) est arbitrairement pas proche de L* ...[12]. Je vous laisse trouver...

6.5 Ponctuations du formel et de l'intuitif apposés au théorique et à l'expérimental

Finalement, c'est bien d'un précepte formel que procède l'idée, voire l'exigence intellectuelle, consistant à se dire : « si on peut définir le fait pour une suite d'avoir une limite, on devrait pouvoir définir de même et dans un langage identique, le fait pour une suite de ne pas avoir de limites (sans s'arrêter aux suites qui croissent infiniment) ». On voit les difficultés que cela occasionne. On peut comprendre aussi qu'un enseignement décide qu'il serait prématuré d'introduire les étudiants à ce genre de questions et qu'on tente de mesurer au plus près les pas formels faits. On aurait donc une pratique mathématique scolaire dans laquelle les recours à l'intuitif et au formel deviennent comme des ponctuations le long de développements fermés et univoques, menés tantôt sur le plan théorique et tantôt sur le plan expérimental. Ces ponctuations seraient déliées par le fait que sur ces plans on passe, sans crier gare, d'un objet à un autre.

---

[12] Deux références ici, tout d'abord un article que j'ai écrit sur maths et langage, 1989, Invitation à une réflexion sur le rôle du langage dans l'enseignement des mathématiques avec L. Pauli. Petit "x". 1989, no 20, p. 67-83, et aussi ce merveilleux texte de W. Gombrowicz intitulé Sur Dante où l'auteur prend à parti le lecteur en lui demandant si les descriptions que fait Dante de l'enfer sont vraiment à la hauteur de l'horreur infernale.

7. Un exemple : l'algèbre des coniques.

7.1 Comment dépasser le fait qu'en didactique les sources d'information ne sont que des répliques ?

Dans l'enseignement post obligatoire en Suisse romande, l'usage du formel manque son objet : on n'a pas le temps en classe d'attendre que les élèves puissent *abstraire un schéma déductif d'une signification extérieure.* De plus, et c'est là tout le problème, pour enseigner les mathématiques, il ne suffit pas de recourir à l'expérience mais il faut encore qu'elle prenne certaines formes bien précises. On se trouve obligé de couper au plus court en introduisant les élèves dans le schéma. Pour beaucoup d'entre eux, et je dirais même la plupart sans doute, on n'apporte aucune réponse à la question de ce sur quoi portent les connaissances mathématiques : qu'est-ce que la continuité ? qu'est-ce qu'une probabilité ? qu'est-ce qu'une conique ? qu'est-ce qu'un vecteur ? Mais on se borne à leur imposer des notions et techniques que l'on illustre par des exercices, problèmes et calculs se rapportant à des objets qu'ils ne connaissent pas vraiment.

7.2 Un chapitre du cours d'algèbre au secondaire post obligatoire : les coniques

Au niveau post-obligatoire de l'école secondaire, le cours d'algèbre contient un chapitre *coniques*. Chacune des coniques est présentée sur le même mode, selon le même moule, les paragraphes correspondent. Une définition géométrique est donnée - en tant que lieu géométrique : les définitions de l'ellipse et de l'hyperbole sont formulées dans les mêmes termes : *lieux des points dont la somme (respectivement la différence) des distances à deux points appelés foyers est constante.* Par contre, la définition de la parabole recourt à un foyer et une droite directrice. Puis la figure de chacune des courbes est dessinée et les équations de ces figures sont établies. Ainsi d'entrée de jeu, la présentation n'est pas totalement homogène. Elle aurait pu l'être bien sûr, il eut suffit de présenter ces courbes comme étant des sections coniques, mais pour cela il eût fallu faire appel à plus de géométrie. Pourtant des notions comme l'excentricité sont introduites, elles sont données sans autre justification que le fait que les ellipses ont une *excentricité inférieure à 1*, les hyperboles ont une *excentricité supérieure à 1* tandis que l'on dit des paraboles cette affirmation sibylline : " *on considère la parabole comme une conique d'excentricité 1.* ". Rappelons que nous sommes dans un manuel d'Algèbre, et on y fait de l'algèbre. Les coniques ne sont que des objets de référence, apparents, des significations extérieures, sur lesquels on applique les techniques de calcul algébrique. La finalité de ce chapitre est l'introduction de l'élève à l'étude des formes quadratiques en l'engageant dans des calculs sur des polynômes du second degré en deux variables. Cela on ne l'annonce pas tel quel, mais on le fait, ce qui oblige d'ailleurs à enchaîner divers changements d'objets. La théorie n'a donc pas d'autre finalité que la succession des objets qu'elle pointe dans son développement, succession qui est reprise en écho, sur le plan expérimental, par les développements nécessaires à l'aboutissement des calculs. Ici, on part d'un triplet : propriété de lieu géométrique, figure, et équation des points de la figure, pour arriver à des formes quadratiques que l'on considérera comme des fonctions. Au passage, la figure se mue en courbe (ou association de courbes) de fonction(s). Ceci permettra ensuite d'introduire à des techniques d'analyse (dérivation et limites). On fait comme si les coniques étaient supposées connues de l'élève, ce qui n'est pas le cas en règle générale. L'élève n'a aucune raison de comprendre l'homogénéité du sujet, en quoi ellipse, hyperboles, ou paraboles sont trois cas de figure d'une même chose, si ce n'est en considérant les analogies de formules et surtout de leur exposé par le manuel. L'objet n'est donc que suggéré par des formes. Les significations externes, requises à l'entrée de ce processus (lieux géométriques) ne sont pas les mêmes que celles requises à la sortie (formes quadratiques), et on aura en chemin enchaîné d'autres significations externes encore (tracé des coniques). Dans un tel exemple, on comprend pourquoi la sémiotique de Peirce est tout à fait pertinente pour saisir une telle mouvance. Par contre, ce formalisme là reste limité et, alors que la majorité des exercices sur les hyperboles portent sur le calcul des équations de leurs asymptotes, on évitera de laisser se demander pourquoi les paraboles n'auraient-elles, elles aussi, pas droit à leurs asymptotes. Ce qui serait une question tirée de l'expérience du calcul avec ces formes là. Mais dans le contexte de cet enseignement, la question ne se pose pas parce que l'idée d'asymptote est contrôlée d'emblée par la signification externe qu'est la forme des tracés de coniques.

7.3 Fait surprenant, une théorie des coniques est exposée dans le manuel de géométrie en amont du cursus

Avant de conclure cet exemple, remontons le cursus scolaire. Retour sur le manuel de géométrie de O. Burlet qui avait la particularité d'offrir pour chacun de ses chapitres un *exposé informel.* Il se trouve que celui du chapitre III, portant sur les lieux géométriques est justement *consacré aux coniques et aux propriétés optiques des surfaces qu'elles peuvent engendrer.* Il s'agit bel et bien d'une petite théorie sur les coniques, que l'auteur dit être l'approche de A. Quetelet et G. Dandelin, fort bien faite, quoi qu'hors de portée d'un élève moyen à ce degré d'enseignement (7ème à 9ème degrés de scolarité). Que veut dire ici informel ? L'exposé est mille fois plus mathématique et théorique que celui du manuel d'algèbre des degrés post-obligatoire. Et ici on y traite, assez complètement, d'un seul et même objet. On y apprend le fond de ce que représente l'excentricité, les foyers et les directrices. L'exposé est informel parce qu'il déroge aux canons de la démonstration mathématique et surtout, informel dénote une valeur d'ouverture : ouverture de l'horizon théorique des élèves d'une part, ouverture par son côté gratuit d'autre part, puisque le manuel ne propose aucun exercice d'application ou problème liés à cette théorie, elle-même étant en fait une petite étude, engageant les moyens géométriques introduits jusqu'ici dans le cours, et à laquelle il propose les élèves de l'accompagner. L'auteur se fait donc ici vulgarisateur.

7.4 Où la confusion formel / intuitif ruine une intention louable

On voit comment l'idée de munir les élèves d'un bagage de connaissances et d'expériences propres à supporter, plus tard, l'enseignement, reste vœu pieu, et échoue. L'exposé soi disant informel de O. Burlet veut rendre disponibles des idées intuitives sur les coniques. Mais l'exposé d'algèbre qui en sera fait ultérieurement, parce qu'il confond celles-ci à son objet formel véritable, les formes quadratiques, s'interdit par là même toute possibilité de faire usage des intuitions géométriques.

8. "*L'algèbre mode d'emploi*" pour faire des mathématiques

8.1 Un "gradient" théorique / expérimental

Tout au long du cursus, l'enseignement des mathématiques introduit progressivement une référence théorique de plus en plus marquée pour introduire les élèves à de nouveaux objets d'étude. Du point de vue des activités mathématiques scolaires, on peut dire que ce contre poids théorique les organise de manière de plus en plus serrée. Ceci fait que ce qui n'a en début de scolarité que le statut d'expérience acquiert les qualités de véritables expérimentations. On peut en voir la manifestation dans les énoncés d'exercices et problèmes voire de questions d'examen, qui sont de plus en plus structurés. Si au début de la scolarité le calcul s'exerce relativement librement, per se, en fin de scolarité c'est surtout à l'occasion de tâches de vérifications et de démonstrations que l'élève y sera invité.

8.2 Où je fais fonctionner plus systématiquement le schéma de F. Gonseth

Le principe de mon analyse est donc d'examiner différents cas de figures du schéma de F. Gonseth (cf. 2.1). D'autres cas que ceux relatifs à la présence ou non d'une référence à une théorie sont possibles. Dans mon exemple sur les coniques et leur étude dans le livre de géométrie de O. Burlet, nous avons observé un cas de figure caractérisé par l'absence de la référence expérimentale. Ce cas de figure caractérise généralement les livres de vulgarisation.

8.3 Une exception culturelle chez les helvètes

Au cours des années 80, le canton de Vaud s'est distingué en se dotant, pour les degrés 7,8 et 9 de l'enseignement secondaire, de deux remarquables manuels, l'un auquel j'ai déjà fait mention, le manuel de géométrie de O. Burlet et un autre, intitulé : *L'algèbre mode d'emploi* de G. Charrière. Cet ouvrage mériterait à lui seul toute une étude. Le titre est bien entendu un clin d'œil fait à G. Pérec, et son roman : *La vie mode d'emploi*, pourtant il décrit assez bien la facture de l'ouvrage qui invite les élèves aussi bien que leurs enseignants à faire de l'algèbre à propos de mathématiques.

Je pourrais qualifier ce projet didactique en paraphrasant F. Gonseth et parler de *L'algèbre et le problème des mathématiques*, parce qu'en effet le problème didactique auquel répond l'auteur est celui d'une initiation à l'algèbre pour apprendre et être acculturé aux mathématiques.

8.4 Contraste

Il est intéressant de comparer ce manuel avec un manuel standard de mathématiques de l'école secondaire post-obligatoire. La facture de ce dernier est en gros celle-ci : un texte théorique et une liste d'exercices et de problèmes s'y rapportant et très étroitement calibrés.

- Selon le schéma de mon analyse, les volets théoriques et expérimentaux sont l'un à l'autre étroitement contrôlés.
- Pas d'exercice qui dépasse les moyens mis à disposition dans la théorie, et dont il faut faire l'apprentissage, même si le fond des problèmes que ces moyens permettent

de résoudre, n'est pas toujours à la portée des élèves. Ainsi, pas d'exercice vraiment difficile d'algèbre des coniques (des difficultés toutes scolaires, des chausse trappe etc., mais pas de problème qui ne connaisse une solution relativement simple et dont on puisse faire un exposé élémentaire). Par exemple, on trouvera des problèmes mettant en jeu la notion d'excentricité des coniques, sans que les élèves aient pour autant les moyens de savoir ce que recouvre exactement cette notion, de comprendre pourquoi on peut classer les coniques avec ce paramètre, etc.

- De même, aucune illustration historique sur les coniques et aucun *intermède curieux* à leur propos ne sont présentés aux élèves.

Comme le suggère ma description, *L'algèbre mode d'emploi* présente une facture toute différente.

- On y trouve une partie théorique, complète en regard des exigences du programme, mais relativement diffuse, on y trouve une liste d'exercices, de problèmes, d'activités, qui n'est pas organisée pour coller à un texte théorique, et dont l'organisation répond à des critères d'organisation propre.
- On a un champ mathématique, l'algèbre est un moyen de l'explorer, d'y mener ses expériences. Ces expériences sont sources de connaissances algébriques, tout comme l'étude des exposés théoriques, mais ces derniers n'ont pas pour finalité de proposer des instruments dont l'élève devra apprendre le maniement par essais/erreurs et exercices.
- Le calcul n'est jamais découplé de significations externes mathématiques, en partie fournies par l'expérience. Beaucoup d'exercices sont très difficiles, hors de portée des élèves et même de leurs enseignants.
- Les exercices ne sont pas tous des activités à accomplir et à mener à terme et encore moins à réussir, mais plus simplement des occasions de faire un petit bout de chemin dans l'étude des mathématiques, selon ses goûts et ses moyens.
- Dans une telle transposition didactique, l'auteur a voulu préserver cette idée que la théorie nous vient en aide à résoudre des problèmes variés et souvent difficiles, mais pas comme le moyen infaillible pour résoudre toute une classe de problèmes.
- Il se situe à l'exact antipode d'un point de vue algorithmique dans l'enseignement : la classe des activités à résoudre n'est pas organisée en fonction des instruments enseignés mais en fonction de sa portée en tant que connaissance mathématique. On pourrait même dire que l'auteur prend un malin plaisir à montrer une théorie qui se dérobe devant les problèmes[13], mystères et merveilles autrement plus intéressants et vastes des mathématiques elles-mêmes.

Voici un exemple de problème que l'on trouve dans cet ouvrage. J'ai choisi ce problème parce que j'y fais référence dans un article actuellement soumis à RDM ('*Une conception sémiotique de la Transposition Didactique : rêverie d'un didacticien solitaire*') qui prolonge cet article et me permettra ultérieurement de jeter des ponts entre philosophie ouverte gonséthienne et pragmaticisme peircien.

---

[13] Au canton de Vaud le bruit court que l'auteur aurait dû contre son gré se résoudre à insérer quelques pages de théorie dans son manuel. Par ailleurs il aurait aussi été contre l'idée de publier une annexe de réponses. Un petit cahier de réponse a été finalement édité, mais à part, et des corrigés des exercices figurent sur le net, mais ne sont diffusés que confidentiellement.

111 Galileo Galilei (1564 – 1642) eut à répondre à des joueurs, dont le Grand-Duc de Toscane, qui lui demandaient pourquoi, lorsqu'on jette trois dés, un total de dix est plus fréquent qu'un total de neuf. Il lui fut facile de montrer, en faisant un inventaire systématique, qu'avec trois dés, il y a 27 manières de faire 10 contre 25 manières de faire 9. Mais sa réflexion sur ce sujet n'alla pas beaucoup plus loin.
On peut trouver une méthode efficace pour résoudre ce genre de problème dans un chapitre de l'ouvrage *Ars Conjectandi* (l'Art de conjecturer) de Jakob Bernoulli (1655 – 1705), publié en 1713. Un tableau, en particulier, permet de mettre en évidence tous les dénombrements possibles avec deux, trois, quatre dés, etc., et de calculer les probabilités en conséquence.

Nombres de cas possibles avec…	Totaux possibles	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	…
…un seul dé		1	1	1	1	1	1													
…un deuxième dé	1		1	1	1	1	1	1												
	2			1	1	1	1	1	1											
	3				1	1	1	1	1	1										
	4					1	1	1	1	1	1									
	5						1	1	1	1	1	1								
	6							1	1	1	1	1	1							
…deux dés			1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1							
… un troisième dé	1			1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1						
	2				1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1					
	3					1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1				
	4						1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1			
	5							1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1		
	6								1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	
…trois dés				1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1	
…		…																		

A Etudier la structure du tableau de Bernoulli. Compléter ce tableau pour quatre, puis cinq dés.

B Etablir une liste de questions relatives à la somme des points obtenus en lançant trois dés, puis les résoudre à l'aide de ce tableau.

112

9. L'horizon formel et l'idée de situation

9.1 Un jeu sur deux dimension : théorique / expérimental et formel / intuitif

Les cas de figures que nous permet le schéma de F. Gonseth valent pour les relations qu'entretiennent les 4 horizons, et je ne fais que prolonger et généraliser l'idée de cet auteur à examiner la *dialectique* qu'ils entretiennent dans une pratique donnée.

Ainsi ce n'est pas tant cet aspect d'une " théorie qui se dérobe " qui retiendra ici mon attention, que la relation distendue que l'auteur maintient entre théorie et expérimentation. On constate que dans ce manuel, l'auteur se permet de rompre avec la clause qui voudrait que l'on ne pose aux élèves que des problèmes qu'ils pourront résoudre pour autant qu'ils s'approprient des savoirs qu'on leur enseigne. Qu'est-ce qui autorise l'auteur à une telle rupture ? Sa manière de jouer sur l'axe formel / intuitif ! Il y a là une rupture d'illusion que le système scolaire a d'ailleurs rejetée et ce manuel a d'ores et déjà été abandonné. Nombreux sont les enseignants qui se le sont procuré pour eux-mêmes, et ce manuel est donc devenu un manuel pour enseignants, une mine d'idée et de suggestions pour agrémenter leur enseignement. Je trouve fort dommage pour ne pas dire plus qu'il ait été ainsi mis hors de portée des élèves.

9.2 La technique des situations

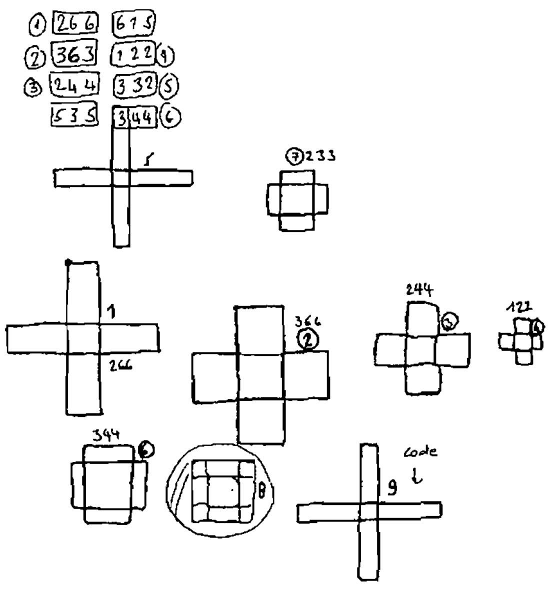
Désormais. l'école secondaire Suisse romande s'est dotée de nouveaux moyens d'enseignement. Je suis prêt à montrer que ces derniers sont en grande partie le fruit d'une transposition didactique de *L'algèbre mode d'emploi.* En effet, cet ouvrage n'est lui-même pas né de rien, et l'auteur est connu en Suisse romande pour avoir été le chef de file d'un groupe promouvant ce qu'on a appelé *la technique des situations*[14].

Le concept est proche de celui qui s'est développé en France sous le titre de *problèmes ouverts.* On ne peut pas confondre totalement les idées didactiques de ces deux mouvements, bien qu'ils puisent à la même source. Je me contenterai de noter ici que ce sont deux dialectes d'une même idée. De plus, le mot situation n'est pas à comprendre dans le sens qu'il a pris dans la théorie des situations, ni non plus dans l'idée de situation-problème. Très succinctement, la *technique des situations* est une technique d'animation d'activités visant à favoriser l'actualisation de leurs connaissances par les élèves, des activités de recherche libre, en fonction de leurs intérêts, de ce qui les intrigue et de leurs moyens[15]. C'est pour garantir leur liberté d'exploration que les situations doivent soumettre aux élèves des problèmes ouverts, qu'on ne se propose pas d'épuiser.

J'ai déjà présenté une des plus fameuses de ces situations, les *Trois petits tours.* Nous avons un système formel de règles ainsi que des traces, des signes de quelque objet mystérieux que l'on cherche à connaître, traces que l'on cherche donc à rendre *dicentes* – qui nous disent quelque chose, au sens de Peirce. Ainsi donc, vu de cette manière le jeu sur l'entrée formelle / intuitive marque l'entrée dans une expérimentation dont éventuellement, lors de la mise en commun, les groupes d'élèves présenteront leur petite théorie agrémentée d'observations issues de leurs expérimentation. Voici deux exemples que donnent G. Charrière et ses collaborateurs (Charrière et alii, 1991, document qui n'est hélas plus disponible).

Lorsque les élèves parviennent parfaitement bien à réaliser des figures, ils utilisent le support révélateur du dessin pour établir des relations entre les différentes figures et essayer de les regrouper par famille.

Philippe, après voir produit un grand nombre de figures, se donne comme tâche de les classer selon leur forme.

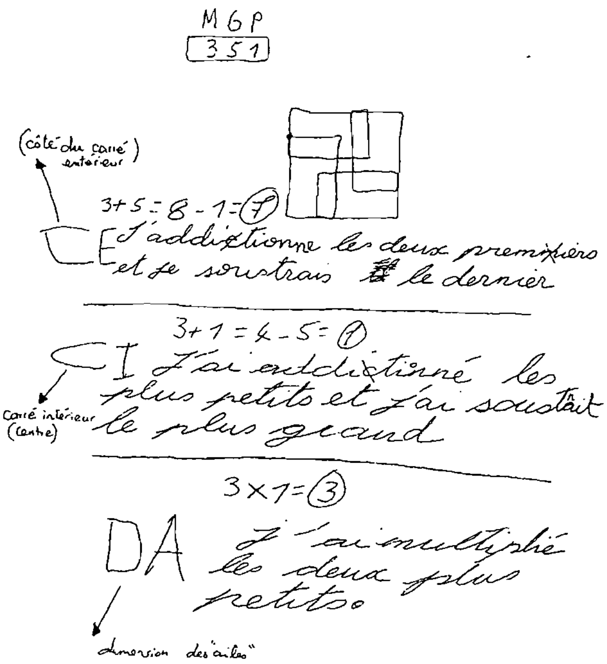


---

[14] Groupe auquel J. Brun, et dans une moindre mesure moi-même avons participé.

[15] Pour plus d'informations sur des situations, voir Brun J. & Conne F. 1990 ainsi que Conne F. 1995.

On a demandé à Manuel de découvrir, à partir d'un code donné 351 comment sera la figure; à savoir les dimensions des ailes, du centre et du carré extérieur dans lequel on peut inscrire une figure.



L'observation de cette situation met fort bien en évidence que la procédure formelle très simple et relativement vite apprise, permet aux élèves de circuler entre expérience et théorie, à la faveur de raisonnements à composantes inductives, déductives et abductives, ces dernières étant suggérés par des intuitions procédurales et perceptuelles.

9.3 L'idée de situation donne lieu à des pratiques scolaires fort distinctes

Il y a donc une source commune à toutes ces productions didactiques se référant à l'idée de situation qui diffèrent grandement par l'interprétation qu'elles donnent à l'idée de situation. Le point qui les sépare réside exactement sur leurs conceptions du rapport formel/intuitif !

9.4 Le jeu c'est du formel, pragmatisé autrement que comme un langage

Comme je l'ai montré dans mon article sur la place de la réalité dans les manuels du primaire (Conne 2002), l'idée de situation correspond à la tentative de donner accès aux savoirs par la médiation d'expériences en situations et de problèmes dont les savoirs à enseigner offriraient la solution. L'idée de jeu repose sur celle d'un système de règles relativement autonome ce qui lui confère sans contradiction apparente une connotation de régularité autant que de liberté.

Il faut en effet qu'un système de règles, auxquelles s'en tenir formellement, offre à l'activité un confinement propre à créer la surprise, l'intrigue tout en donnant les moyens aux élèves d'amorcer leur exploration. Cette façon d'envisager l'exploitation du formel est au cœur même de l'idée que se faisait G. Charrière de la *technique des situations* et il n'a jamais manqué de le dire lors de ses conférences et présentations.

L'intrigue vient des inévitables et nombreuses surprises que procure alors le formel à l'intuition.

Ici encore, le recours au formel se fait libre, libre de tout travail de formalisation d'une matière mathématique à faire apprendre. On ne formalise pas en δ ou ε et je ne sais quel quantificateur logique parce qu'ils fournissent des garde fous à nos dérapages intuitifs, mais au contraire on y défie l'intuition.

Conclusion

Je tire trois conclusions de ce travail. La première est que je referme ce carnet de croquis par l'évocation de la technique des situations et les ouvertures qu'elle permet en introduisant une dimension formelle dans des activités par ailleurs fort intuitives, dont en particulier des activités de type spatial. Il se trouve que, suivant en cela la tradition culturelle de l'enseignement en Suisse romande, mes recherches sur le terrain de l'enseignement spécialisé sont influencées par la technique des situations, que je tente de prolonger. Voilà donc par ces repérages épistémologiques et théoriques mes recherches portant sur l'enseignement spécialisé bien ancrées dans des problématiques didactiques générales et traversantes concernant les 5 pôles (les 5 cercles) du schéma de la synthèse dialectique gonséthienne.

La seconde est d'avoir montré comment une analyse épistémologique comme celle de F. Gonseth est féconde pour penser les questions didactiques et orienter nos recherches, et ce, même lorsqu'on aborde des questions touchant à l'enseignement élémentaire. Le schéma de F. Gonseth a, pour les questions didactiques, une vertu de synthèse et de cohésion qui méritait d'être relevée. Ce schéma permet surtout de ne plus confondre formel et théorique, en particulier en montrant que le formel n'est jamais absent de l'enseignement des mathématiques quel que soit le degré que l'on considère, de bien situer l'expérimental et de dégager l'engagement contant de l'intuition dans ces jeux.

La troisième conclusion tient aux quelques références que, malgré une volontaire retenue, j'ai été amené à faire à la sémiotique peircienne dès lors que je posais des questions sur ce qui faisait le réel et l'expérience dans l'apprentissage des mathématiques. Ces références se sont étagées sur trois plans. Le premier plan est celui des objets sur lesquels les élèves sont amenés à travailler. Le second plan est celui de ma propre démarche de chercheur, en particulier par l'exposition de moments abductifs dans les raisonnement théoriques ainsi que la description de quelques petites expériences mentales d'enseignement que l'on peut faire à partir de certaines catégories épistémologiques et didactiques. Le troisième plan est celui de montrer les liens indubitables qu'il y a entre les approches de F. Gonseth et celle de C. S. Peirce.

Bibliographie

ARSAC G. & DURAND GUERRIER V., 2003, Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *RDM*, 22/3, pp. 295-342.

BURLET O., 1989, Géométrie, Lep Lausanne.

BRUN J. & Conne F., 1990, Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations. *Education et recherche*, n°3, 1990, pp.261-186, Editions universitaires Fribourg.

CHARRIERE G., 1995, *L'algèbre mode d'emploi*, Fourniture et éditions scolaires du canton de Vaud.

CHARRIERE G. et al., 1991, *Sur les pistes de la mathématique*, cahier n° 40 du Service de la Recherche Pédagogique, Genève.

CONDORCET 1989, *Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité.* Paris, A.C.L. - éditions.

CONNE F. 2003, Comprendre la théorie, c'est en attraper le geste et pouvoir continuer, *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, année 2003, V. Durand Guerrier & C. Tisseron eds, ARDM & IREM Paris 7, pp. 79-99.

CONNE F., 2002, Evolution de la référence à la *réalité* dans les manuels suisses romands au cours du 20ème siècle., in cd-rom, *des Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques*, Corps, août 01, J-L Dorier et al. eds, La Pensée Sauvage, Grenoble.

CONNE F., 2004, Problèmes de transposition didactique, *Petit x n° 64*, Grenoble.

CONNE F., 1995, Ricochets. (Concept, théorie, modèle, situation, question problème, représentation.......), *Petit x*, n° 39, 1995, IREM Grenoble, p. 5 à 27.

CONNE F., 1994, Quelques enjeux épistémologiques rencontrés lors de l'étude de l'enseignement des mathématiques, in *Actes du XXIè congrès colloque INTER-IREM de la COPIRELEM*_(colloque inter IREM des professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres), Chantilly, IREM Picardie INSSET St Quentin, p. 3 à 35.

CONNE F. et al., 1994, Erreurs systématiques et schèmes algorithmes, communication au colloque de l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques: *20 ans de Didactique des Mathématiques en France*, Paris 15-17 juin 1993, Artigue M., Gras, R. & Tavignot P. Eds. La Pensée Sauvage, Grenoble, p. 203 à 209.

CONNE F., 1996, Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, *Didactique des mathématiques* de la collection *Textes de base en Pédagogie*, pp 275-338, sous la direction de J. Brun, Delachaux et Niestlé, Lausanne, Paris.

CONNE F., 1981, *La Transposition Didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'école primaire.* Thèse de doctorat. Lausanne. Conne / Couturier - Noverraz, 1986. 462 pages,.

DESCAVES A., 1992, *Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes*, Paris Hachette.

GONSETH F., 1945-1955, *La géométrie et le problème de l'espace*, Neuchâtel, Eds. du Griffon.

GONSETH F., 1966, Le problème du langage et la philosophie ouverte, in Dialectica, vol 20 fascicule 1, Lausanne.

THURSTON W. P., 1995, Preuve et progrès en mathématiques, *Repères IREM*, N° 21.

ANNEXE

Induction, déduction & abduction

C. S. Peirce distingue trois modes de raisonnement, l'*induction*, la *déduction* et l'*abduction*. L'*induction* consiste à relier un certain nombre de faits constatés en une loi générale. La vérité de ses conclusions est toujours tributaire de l'apparition d'un contre exemple. Pourtant l'induction nous garantit bel et bien la véracité de ses conclusions sur tous les cas qu'elle aura préalablement envisagés. Par conséquent le raisonnement par induction est un raisonnement valide et relativement pertinent qui ne garantit pas la portée de ses conclusions. Enfin, c'est par induction que l'expérience contribue à accroître nos connaissances. La *déduction* consiste à dire ce qui est vrai compte tenu de certaines prémisses acceptées. Sa fonction est de validation. En contre partie, elle ne contribue en rien à l'invention ni à la découverte et elle ne garantit pas non plus la pertinence de ses conclusions. Cette pertinence ne peut-être obtenue que par un retour aux faits ainsi expliqués (donc à l'expérience et l'induction), et qui donneront toutes leurs significations aux conclusions déduites. Fait déterminant, la déduction permet une économie d'expérience en organisant l'expérimentation et la dirigeant sur des expériences cruciales.

Dans chacun de ces modes de raisonnement, on dispose d'une règle générale suffisamment bien formulée que l'on soumet soit à l'épreuve des faits, soit à celle d'une démonstration. C. S Peirce considère que même lorsque nous croyons avoir deviné une telle hypothèse, c'est un raisonnement – pas nécessairement conscient de lui-même - qui nous y aura amené. Il nomme ce raisonnement : *abduction.* C'est, de tous les modes de raisonnement, le seul qui amène à découvrir quelque chose de nouveau. En contre partie, c'est un raisonnement qui n'offre aucune garantie sur la véracité de ses conclusions, ni par les faits, ni par la raison. Dans sa conception la plus achevée de l'abduction C. S. Peirce propose le schéma suivant : *(1) Le fait surprenant, C, est observé. (1.1) Mais si A était vrai, C irait de soi. (1.2) Donc, il est raisonnable de soupçonner que A est vrai.* On notera que les types de raisonnements s'imbriquent les uns dans les autres, comme des moments d'une chaîne. Ainsi dans ce schéma, l'abduction est décrite comme comportant un moment inductif : *le fait C est observé*, et un moment déductif : *si A est vrai, C va de soi.* Notons le principe sélectif sous-entendu par la référence au *fait surprenant,* qui exprime une mise à l'épreuve de la pertinence des explications antérieures à l'observation de C. Une fois que A est formulée, on peut en faire la conjecture et la soumettre à un jugement de véracité (démonstration par déduction) et de pertinence (factualisation par induction). Et ainsi de suite. La découverte de A rend banal ce qui auparavant avait été une surprise. Par conséquent, et quel que soit le sort réservé à A, acceptation ou rejet, le processus abductif se solde toujours par un accroissement de la pertinence de nos explications.