UN CADRE EXPERIMENTAL POUR L'ETUDE DE LA GEOMETRIE AU CYCLE 3 : LE CAS DU PARALLELISME

Christian Reymonet
IUFM d'Aix Marseille

L'article qui suit se propose d'explorer une alternative curriculaire à l'enseignement de la géométrie au cycle 3 (et plus particulièrement la question du parallélisme), grâce à quelques exemples d'activités graphiques et au développement des techniques que l'on peut en attendre. Les contours de cet enseignement, aujourd'hui mieux précisés dans le texte du nouveau programme, mais encore mal circonscrits dans les pratiques de classe, en font le parent pauvre de nos pratiques d'étude dans les classes de primaire.

L'arrière-plan théorique de ce travail est donné par le cadre de l'approche anthropologique proposée par Yves Chevallard et son équipe.

Posons tout d'abord quelques balises qui permettent de circonscrire le champ de nos observations et propositions

La géométrie au cœur d'un processus de modélisation

L'idée première ici est d'inscrire la géométrie au sein d'activités classiques de modélisation. En tant que telle, cette discipline propose des modèles permettant d'appréhender et d'étudier des systèmes inclus essentiellement dans deux domaines de réalités : le monde sensible (notre espace de vie) et le monde graphique (les figures et les relations mutuelles qu'elles peuvent entretenir).

La diversité des activités géométriques

Le tableau ci-après présente un cadre de lecture précisant la nature des activités géométriques ainsi que les objets que ces activités se donnent à étudier. On y croise les domaines de réalités évoqués dans le paragraphe précédent, avec les différents cadres de perception de ces mondes sommairement proposés par Roland Charnay dans une typologie présentée dans des écrits assez récents[1]. Pour lui, l'apprentissage de la géométrie peut être inscrit dans une dynamique qui peut se découper en trois temps :

- le temps de la géométrie perceptive ;
- le temps de la géométrie instrumentée ;
- le temps de la géométrie mathématisée.

[1] « De l'école au collège, les élèves et les mathématiques » in Grand N n° 62 ,1998

Chacun de ces temps correspond au développement de structures particulières de communication (langagières ou sémiotiques) et de raisonnement, spécifiques des rapports aux objets du domaine d'étude. Ainsi, la définition d'un même objet (par exemple un carré) évoluera avec le cadre proposé pour l'étude.
L'ordre dans lequel sont donnés ces trois temps correspond, de fait, à des degrés croissants d'expertise dans la connaissance des objets de l'étude. Cependant, les frontières entre ces trois moments restent très perméables, ce qui permet ensuite à l'expert, suivant ses besoins, de jouer sur les différents rapports établis avec les objets géométriques.

Voici donc le tableau en question :

	La géométrie perceptive	**La géométrie instrumentée**	**La géométrie mathématisée**
Le monde sensible	On pose ici les bases d'un éclairage géométrique du sensible. On approche les premières figures grâce à la manipulation (au sens le plus large du terme) de formes.	On appréhende notre espace de vie (tout au moins les aspects liés à l'arpentage) grâce à un arsenal dont font partie l'outil graphique, mais aussi certains appareils de visées qui sont les outils du géomètre de terrain.	La vérification expérimentale de certaines propriétés déduites dans la théorie mathématique rendue disponible, permet de voir si cette théorie peut encore raisonnablement servir de modèle à notre espace de vie[2].
Le monde graphique	La notion de figure s'est peu à peu dégagée de la notion de forme des objets. Les empreintes en sont des intermédiaires pertinents. La perception des figures est globale et se suffit à elle-même comme moyen de justification. *Par exemple l'objet que j'observe est carré parce que je le perçois comme tel.*	On travaille ici autour d'une expertise graphique intégrant un réseau de justifications appuyé sur de l'expérimental. *Dans ma communauté d'apprentissage, la preuve qu'une figure est un carré passe par le développement d'une expérience graphique à l'aide de l'équerre et de la règle graduée.*	La culture (experte) gagnée grâce à une familiarisation expérimentale du monde graphique, devient elle-même objet d'étude. On organise ici des liens logiques entre les différents résultats établis, ce qui permet d'en engendrer de nouveaux. *Ici, le quadrilatère représenté sur le tableau de la classe est carré, car certains signes que porte cette représentation lui donnent des propriétés qui le caractérisent (trois angles droits et deux côtés consécutifs isométriques, par exemple).*

[2] Nous citerons ici Yves Chevallard :

La science géométrique est ainsi, d'abord, *géométrie expérimentale*. Gauss pensait qu'on ne pouvait « démontrer par le seul raisonnement la nécessité de la géométrie euclidienne » (lettre à Olbers, 1817). Pour en avoir le cœur net, il fit mesurer les angles d'un triangle formé par trois pics distants de 69, 85 et 197 km : la somme dépassait 180° de près de 15″, ce qui, étant donné la précision des mesures, était malheureusement insuffisant pour conclure.

Les « vérités » révélées par l'expérience sont ensuite *organisées déductivement*. On passe ainsi de la géométrie expérimentale à la géométrie *théorique* : certaines vérités expérimentales sont prises comme *axiomes*, les autres devront être *déduites* des axiomes.

Le premier apport des mathématiques tient alors en ceci que, à tout moment dans le processus d'élaboration de la géométrie théorique, toute assertion A démontrable dans la théorie géométrique disponible (TGD) est – sauf erreur ! – *vraie dans l'espace sensible* E ; soit, avec des notations empruntées aux logiciens : si $\vdash_{TGD}$ A alors $\models_E$ A.

La répartition des enjeux didactiques entre l'école et le collège

Un partage des attributions didactiques entre les institutions primaire et secondaire de notre système d'enseignement, qui tienne compte des instructions officielles, laissera à l'école les aspects perceptifs et instrumentés, ce que nous nommons la géométrie expérimentale. Pour le collège, sera mis au devant de la scène le souci de fabriquer les prémisses d'une géométrie mathématisée, dont l'étude se poursuivra au lycée puis à l'université.

Comme nous venons de le voir ci-dessus, la géométrie mathématisée se construit sur (et se nourrit de) l'expertise graphique établie dans le cadre expérimental précédent. On cherche un écho aux propriétés de configurations que l'on a établies dans ce premier cadre, au sein d'une théorie géométrique que l'on se rend disponible. Cette quête sert tout autant le système qu'elle permet de modéliser la construction théorique qu'elle engendre par ajouts successifs.

Précisions sur la problématique et le contenu de l'article

L'analyse suivante conduisant aux esquisses de propositions données à la fin de cet article, se situe dans le cadre de l'expérimentation graphique. L'étude se propose justement d'instrumenter les activités d'étude et de recherche proposées aux élèves autour du parallélisme. Il s'agit de créer un univers culturel fait de techniques permettant de contrôler ou de construire le parallélisme. Dans un premier temps, nous travaillerons des organisations mathématiques compatibles avec le cadre que nous nous sommes fixé. Durant cette première période, nous serons essentiellement guidés dans notre étude par la nécessité d'explorer les possibilités d'organisations mathématiques, en gardant pour un temps ultérieur la question de la faisabilité au niveau des classes de primaire. Cette mise à distance de la classe permettra une exploration plus libre et aussi plus riche des organisations mathématiques possibles.

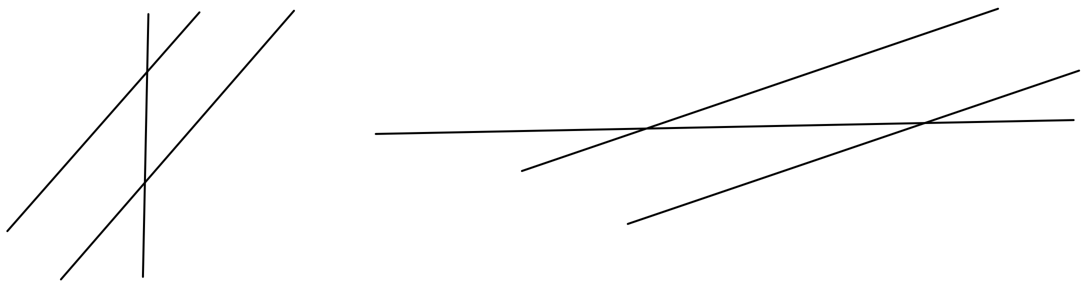
L'étude du parallélisme

Remarque préliminaire : les définitions du parallélisme

Lorsqu'on demande à des enseignants quelles sont les définitions qu'ils donnent de deux droites parallèles, l'une des premières qu'ils énoncent est : « deux droites parallèles sont deux droites qui ne se coupent **jamais**. »
L'adverbe « jamais » (souligné dans cette définition) confère son caractère ésotérique à cet énoncé. En effet, voilà un adverbe relatif au temps, employé pour définir une situation qui n'a rien *a priori* de dynamique. En fait, cet adverbe vient rappeler la différence entre une droite et sa représentation graphique. La droite est cet objet « infini » dans les deux sens et dont on ne sait représenter que des « morceaux. »
La traduction graphique de cette définition sera, en fait, de courte portée et, ni le contrôle du parallélisme, ni la construction de deux parallèles ne se trouvent outillés par cette propriété caractéristique. Cette définition ne présente aucun caractère opératoire au niveau de l'expérimentation graphique.

D'autres définitions sont en revanche plus efficientes, si l'on se place de ce point de vue. Celle qui évoque « l'écart constant » entre deux droites parallèles ou celle que pourrait par exemple, donner un élève, en référence au monde sensible, et qui s'énoncerait comme suit : « des droites parallèles sont des droites qui ont la même direction, la même inclinaison ou encore, comme pourraient dire certains élèves, qui penchent pareil. »

En effet, cette considération qui se réfère à une position des deux droites réputées parallèles par rapport à une verticale ou une horizontale, va permettre la mise à jour de techniques et outils graphiques de contrôle et construction.



De plus, ces derniers éléments techniques de travail graphique ont un avenir mathématique assuré dans le curriculum du collège.

D'autres exemples nous sont fournis pour une définition opératoire du parallélisme. Ce sont ceux qui font appel à la position des côtés opposés des quadrilatères particuliers (carré, rectangle, losange, parallélogramme) suffisamment familiers aux élèves (en ce qui concerne les trois premiers au moins.) Cette familiarité se traduit par la connaissance de propriétés de ces quadrilatères qui peuvent être utilisées pour vérifier le parallélisme ou construire des droites parallèles.
Par exemple, pour vérifier le parallélisme de deux droites, on choisit sur chacune d'elles deux points, de sorte qu'ils soient les extrémités de segments isométriques portés par les droites. En comparant les longueurs des deux autres segments non croisés ayant ces points pour extrémités on peut déduire ou rejeter le parallélisme de ces droites. Ce travail s'appuie sur le fait que les côtés opposés d'un parallélogramme sont isométriques (cette propriété est caractéristique des parallélogrammes au sein des quadrilatères convexes.)

Types de tâches et techniques

Concernant le parallélisme, les types de tâches sur lesquels nous nous fixons de faire progresser les élèves sont les suivants :

- ***T_1 : Contrôler que deux droites dessinées sont parallèles***
- ***T_2 : Construire une droite parallèle à une droite donnée et passant par un point donné***

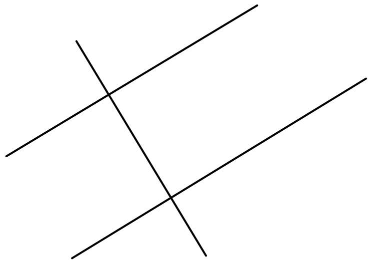
La définition de ce que serait un progrès en ce domaine passe d'abord par la détermination d'un ensemble de techniques associées à ces types de tâches. Le second temps de cette approche consistera en la détermination de celles, parmi ces techniques, que nous retiendrons pour ce niveau d'étude.

Des configurations productrices de techniques

Dans le même ordre d'idée que ce qui est décrit précédemment, on se propose maintenant de trouver dans le champ de la géométrie mathématisée des propriétés de configurations qui pourraient être les sources d'émergence de techniques ou d'outils graphiques de contrôle et de construction du parallélisme.

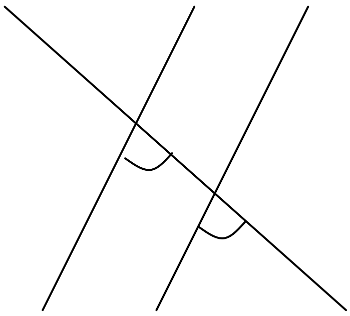
Le plus classique, le rapport avec l’orthogonalité

Deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles. Cela conduit à des techniques de vérification du parallélisme ou construction de droites parallèles qui sont les techniques classiquement mises en avant dans notre curriculum.

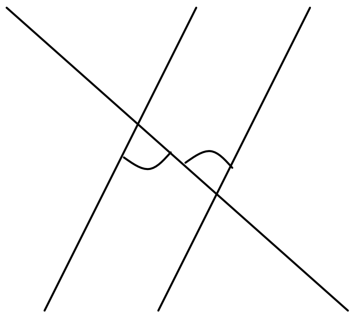


Les égalités d’angles

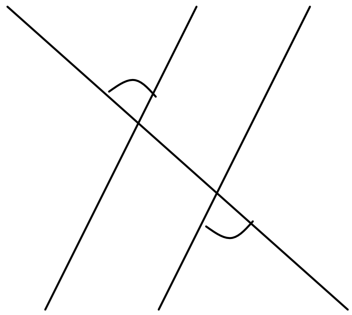
Deux droites sont parallèles si certaines paires d’angles qu’elles forment avec une troisième droite sont des paires d’angles égaux.



Angles correspondants



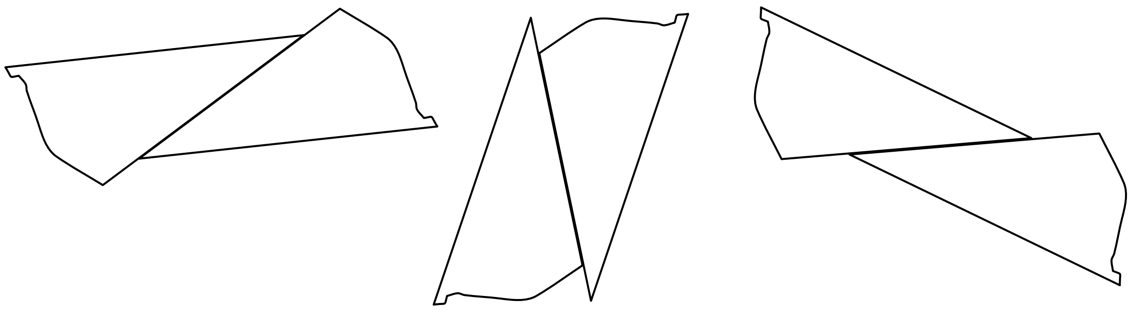
Angles alternes internes



Angles alternes externes

Ici se profilent des techniques utilisant les gabarits d’angles. On peut même envisager la fabrication d’un outil, à partir de deux gabarits superposables.

Voici cet outil dans plusieurs positions :

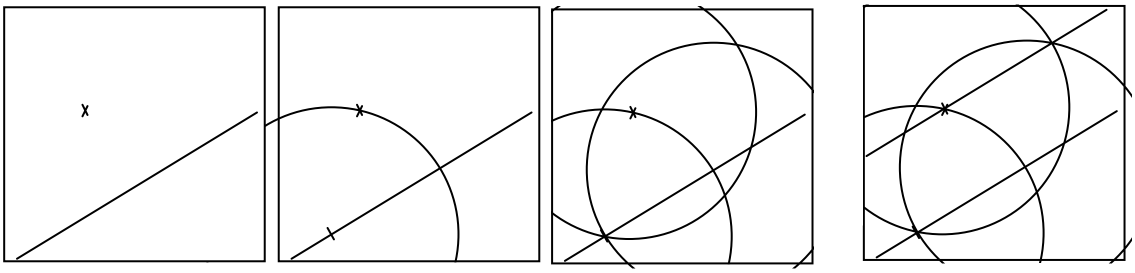


Les propriétés des côtés d’un parallélogramme ou d’un losange

Si les côtés opposés d’un quadrilatère convexe sont isométriques, alors c’est un parallélogramme et ces côtés sont aussi parallèles deux à deux. Cette propriété renvoie à l’utilisation possible de la technique évoquée plus haut, dans le paragraphe « *Remarque préliminaire : les définitions du parallélisme* »

Un quadrilatère ayant ses quatre côtés isométriques est un losange et les côtés opposés d’un losange sont parallèles. L’agencement adéquat de ces propriétés permet de proposer une technique de construction ou de vérification que l’on peut résumer par les séquences schématisées qui suivent.

Construction de la parallèle

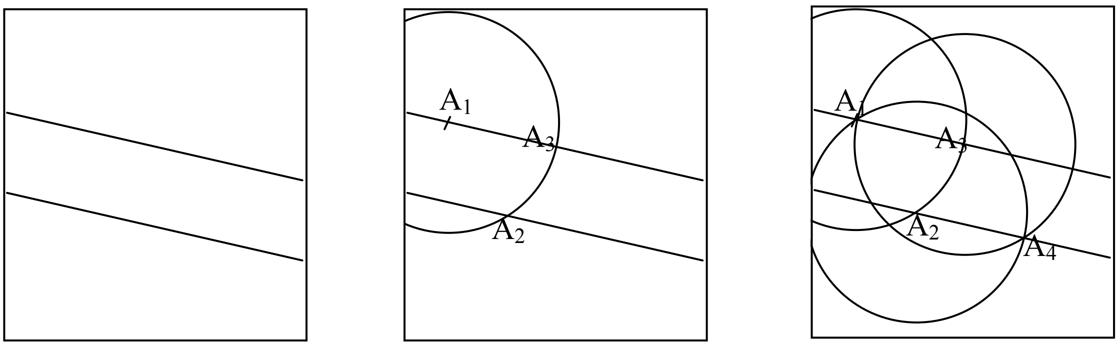


On choisit un point sur la droite et on trace le cercle centré sur ce point et passant par le point donné

Centrés sur le point donné et sur l'une des intersections de la droite avec le premier cercle, on trace deux cercles passant par le point choisi sur la droite. Pour terminer on trace la droite qui passe par le point donné et l'autre intersection des deux derniers cercles tracés.

Vérification du parallélisme de deux droites

On choisit A_1 sur l'une des droites, A_2 et A_3 sur chacune des droites, équidistants de A_1.

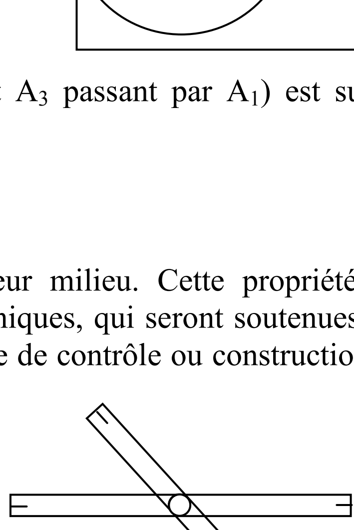


Si le point A_4 (intersection des cercles de centres A_2 et A_3 passant par A_1) est sur la deuxième droite alors les droites sont parallèles.

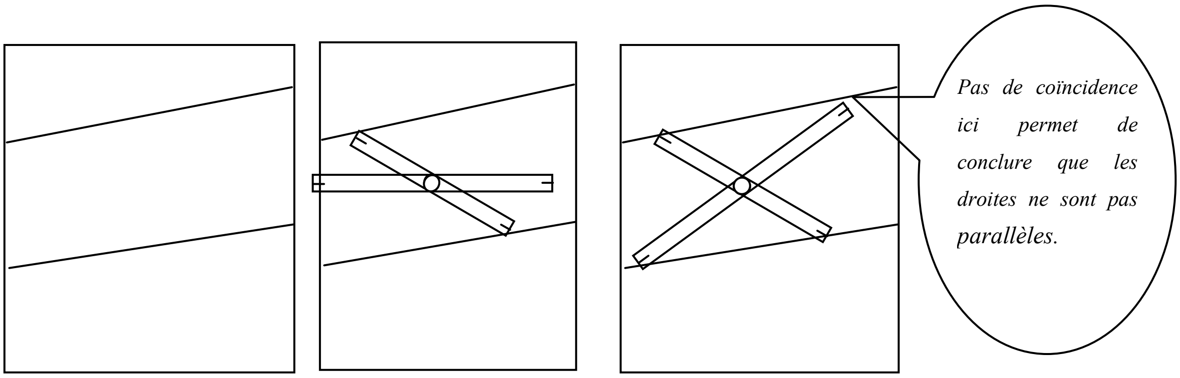
Les propriétés des diagonales d'un parallélogramme

Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. Cette propriété est caractéristique des parallélogrammes. Là encore, des techniques, qui seront soutenues par cette propriété, vont émerger. De plus, un outil élémentaire de contrôle ou construction du parallélisme, peut être envisagé.

En voici le principe : dans une plaque de matière plastique translucide, on découpe deux « tiges rectangulaires » sur lesquelles on porte des marques et que l'on assemble par leur milieu en laissant libre la rotation de l'une par rapport à l'autre, comme indiqué sur le schéma ci-contre.



L'utilisation de cet outil pour contrôler le parallélisme est également assez simple : on dispose les deux marques d'une tige sur chacune des droites, l'une des marques de l'autre tige sur l'une des droites, et on lit le verdict sur l'autre marque de cette dernière tige, comme l'indique le « schéma » ci-dessous.

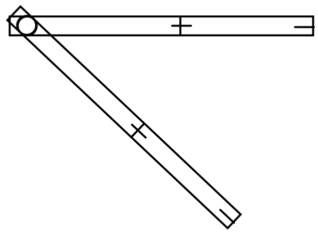


Le lecteur n'aura aucun mal à imaginer la manipulation de l'outil qui permet de construire la parallèle à une droite donnée passant par un point donné. Une taille convenablement choisie de l'outil ou la fabrication d'un jeu de deux ou trois de ces « croix » de tailles différentes permet à peu près toutes les vérifications ou constructions qui se présenteraient dans le cadre, somme toute assez réduit, de la feuille de papier.

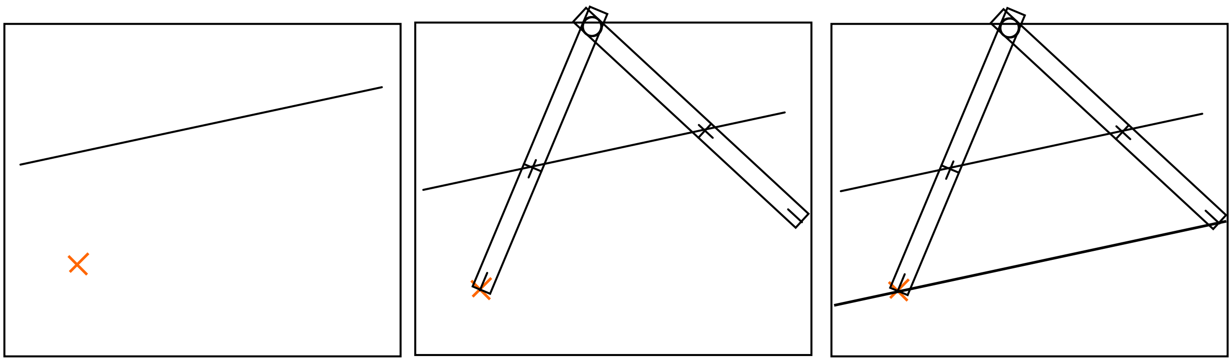
La droite des milieux dans un triangle

Dans un triangle quelconque, la droite qui passe par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté. Si une droite passant par le milieu d'un côté est parallèle à un deuxième côté alors on peut déduire qu'elle passe par le milieu du troisième côté.

Ces propriétés ouvrent la possibilité d'utiliser l'outil ci-contre.



Son utilisation pour construire la parallèle à un droite donnée passant par un point donné, se déroule comme suit :

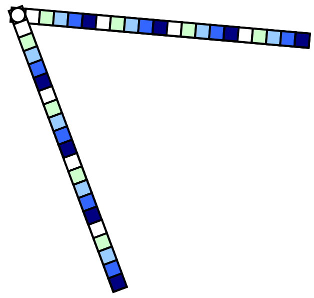


On laisse ici au lecteur la détermination d'une technique de vérification du parallélisme avec ce type d'outil.

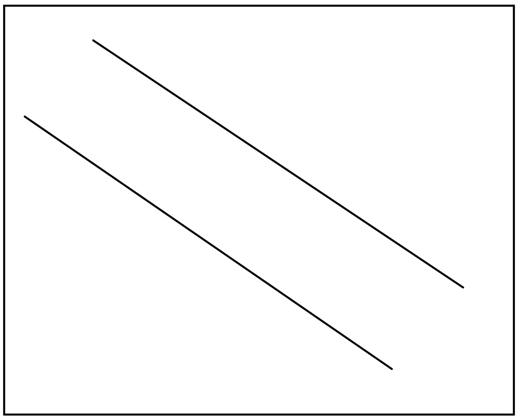
La propriété de Thalès appliquée dans une « configuration isocèle »

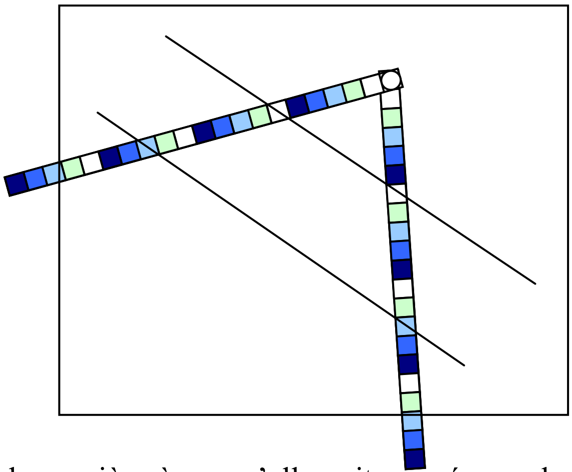
Dans un triangle isocèle, toute parallèle à la base qui coupe les deux autres côtés en deux points distincts détermine avec ces côtés un nouveau triangle isocèle. Cette propriété est une conséquence de la propriété de Thalès appliquée aux triangles isocèles.

Un outil analogue au précédent, mais avec des graduations portées sur les réglettes, va permettre de mettre en action ce résultat mathématique.



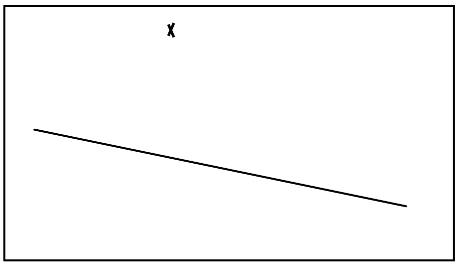
Vérifions le parallélisme de deux droites grâce à cet instrument :

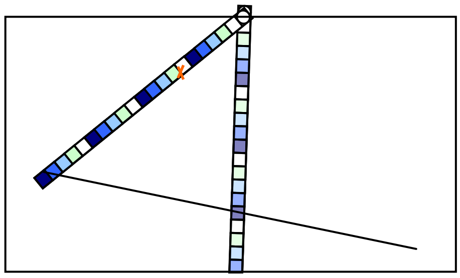




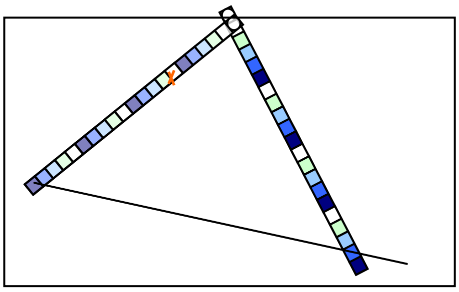
Technique : On dispose la première réglette de manière à ce qu'elle soit coupée par les droites tracées suivant deux graduations. On fait pivoter la seconde jusqu'à ce que l'une des droites la coupe suivant la même graduation que l'autre réglette. On observe alors sur quelle graduation cette deuxième réglette est coupée par la seconde droite.

Utilisons cet outil pour construire la parallèle à une droite donnée passant par un point donné :

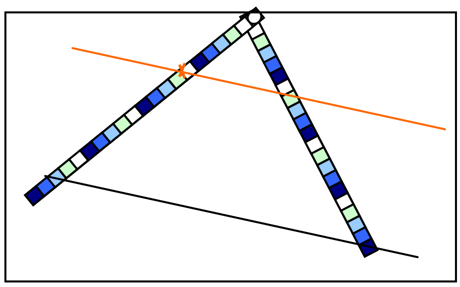




1. On place la première réglette de sorte que le point et la droite la rencontrent sur des graduations ;



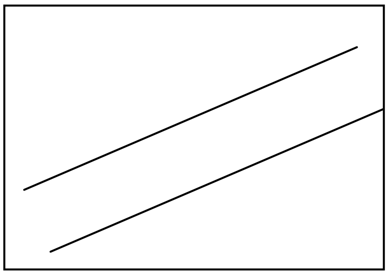
2. On fait pivoter la seconde réglette jusqu'à ce qu'elle soit coupée par la droite sur la même graduation que l'autre ;

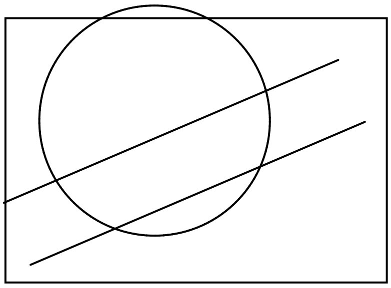


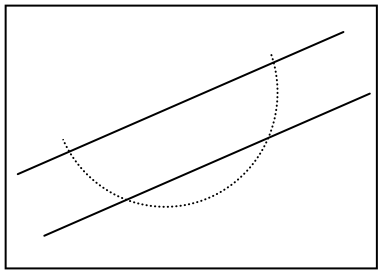
3. On fait une marque sur la graduation de cette deuxième réglette qui correspond à celle qui rencontre le point sur l'autre.
Il reste à tracer la droite qui passe par le point et la « marque ».

Intersection de deux parallèles avec un cercle

Toute paire de droites parallèles qui coupent un cercle détermine sur ce dernier des arcs isométriques. Cette propriété est caractéristique des droites parallèles. De plus, si l'on tient compte que deux arcs isométriques d'un même cercle sont sous-tendus par des cordes de même longueur, on peut alors développer des techniques associées à ces propriétés. Les voici illustrées par des schémas :

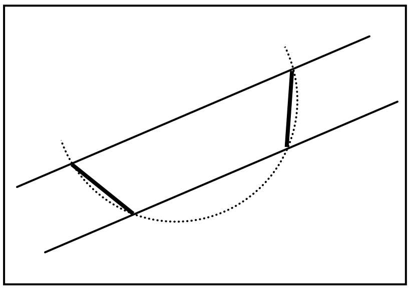






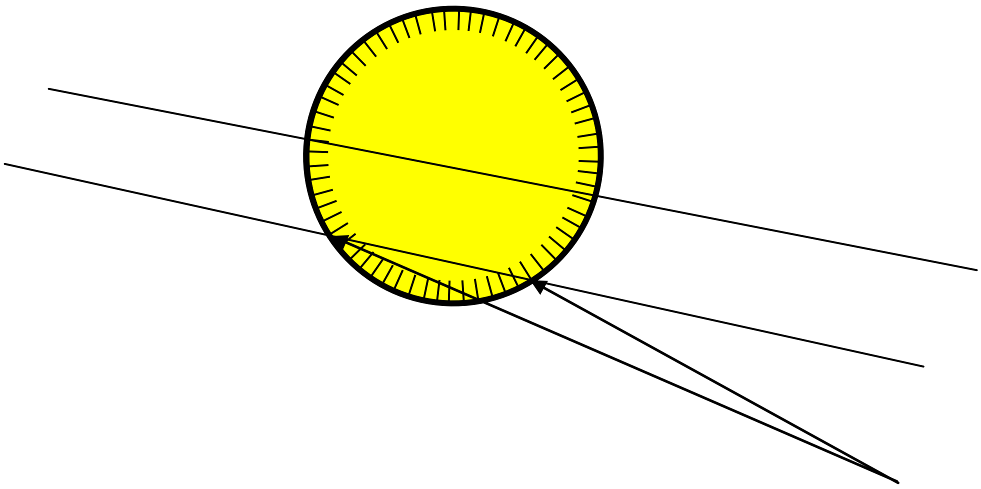
Soit à contrôler le parallélisme de deux droites :

On pose le disque de sorte que sa circonférence coupe les deux droites, et on trace de manière à marquer les intersections ;



On mesure les deux segments (cordes des arcs formés par ces diverses intersections).
En cas d'égalité, on conclut le parallélisme, sinon, on conclut que les droites sont sécantes.

Un disque transparent muni de graduations sur son pourtour, peut se révéler plus rapide d'utilisation.

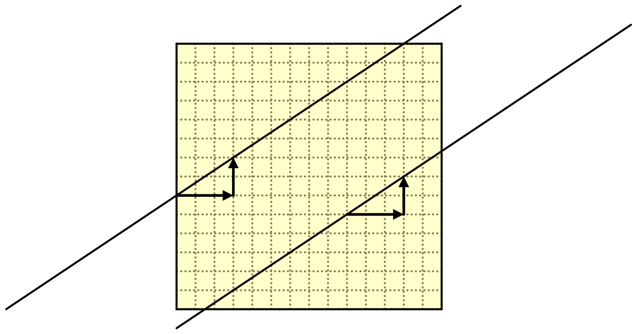


On se contente de compter les graduations entre les deux droites, après avoir disposé le disque de sorte que les deux droites coupent sa circonférence et, *pour l'une d'entre elles, sur deux graduations*, puis on conclut. Si les nombres obtenus sont les mêmes, alors les droites sont parallèles, dans le cas contraire elles sont sécantes. Cela revient à contrôler que les « écarts » sont constants, mais avec un outillage un peu particulier.

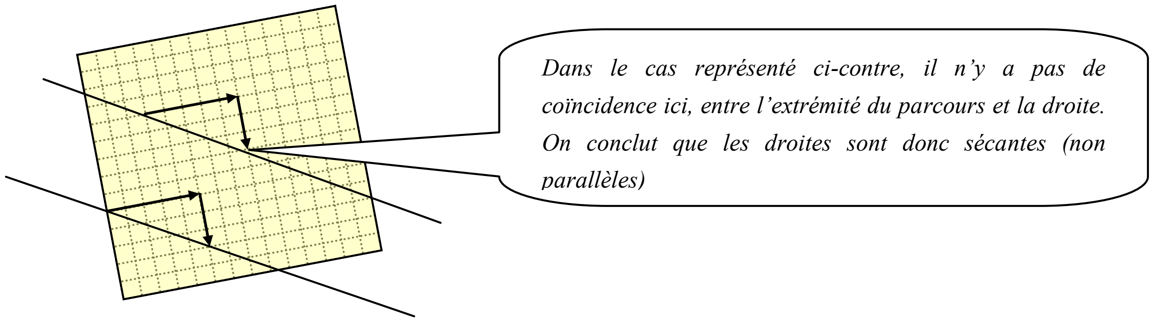
« Pente » d’une droite dans un réseau quadrillé

On considère une droite dessinée dans un réseau quadrillé qui passe par des nœuds du quadrillage. La « pente » de la droite peut être appréciée par les nombres respectifs de pas à faire pour aller d’un nœud sur lequel la droite passe jusqu’au nœud voisin, en suivant une direction du quadrillage puis en suivant l’autre (le sens du déplacement doit être précisé).
Les droites de ce type qui ont la même pente sont parallèles.
Ainsi, on peut avoir l’idée de se fabriquer un outil : un réseau quadrillé dessiné sur une feuille transparente peut faire l’affaire. Voici comment l’utiliser sur deux exemples de vérification :

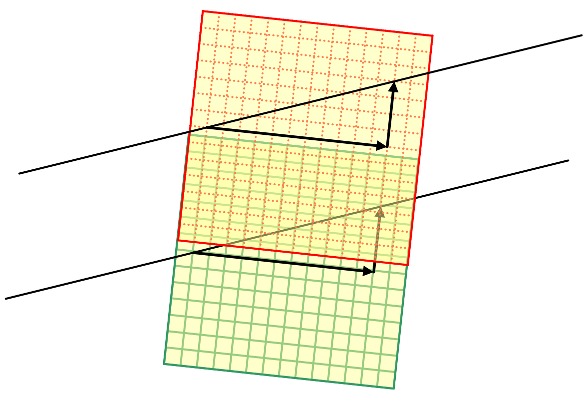
Les deux droites ont la même pente,
elles sont donc parallèles



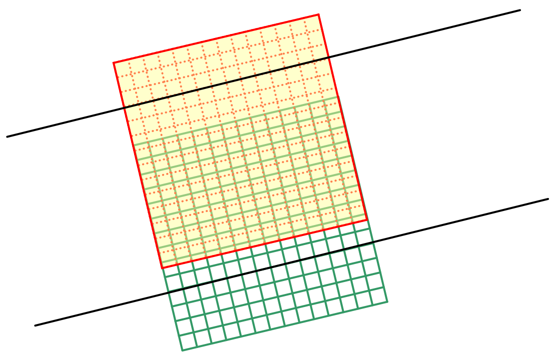
Parfois une inclinaison de l’outil peut s’avérer indispensable. On contrôle alors l’égalité des pentes par rapport au quadrillage et on conclut :



On peut traiter ainsi une très grande quantité de situations, mais on ne les épuise pas toutes. Il se pourrait que notre outil doive se compléter avec une deuxième feuille que l’on utiliserait simultanément avec la première en jouant sur des superpositions judicieuses et des glissements suivant une direction du quadrillage, comme le suggère la séquence représentée ci-dessous (cas1).



Cas 1



Cas 2

Cette utilisation peut aussi trouver des variantes plus évidentes encore comme nous le montre le cas 2 ci-dessus.

C'est une technique sur laquelle nous pourrons revenir plus loin. Sa portée est plus limitée, puisqu'on ne « touche » ici que les droites à pentes rationnelles. Il est vrai que cela en fait déjà beaucoup !

Un scénario d'étude au banc d'essai

Remarques préliminaires :

- La proposition qui suit est une description encore inachevée de scénarios sur laquelle nous comptons engager une mise à l'épreuve dans des classes d'application dès l'année scolaire prochaine.
- La classe dans laquelle se déroule cette séquence d'étude est soit le CM1, soit le CM2, tout dépend en fait de la progression mise en place. Cette séquence peut également réserver les aspects les plus technologiques à la classe de CM2.
- Les définitions et propriétés sur les quadrilatères particuliers, carré, rectangle, losange seront réactivées, il est donc nécessaire que leur rencontre ait été organisée avant le début de cette séquence.
- L'objectif principal de cette séquence est « d'outiller » les élèves à partir d'une définition utilisable du parallélisme et, en employant des propriétés de certaines figures ou configurations, faire en sorte qu'émergent un certain nombre de techniques de vérification ou construction du parallélisme. Ainsi chacun se rend compétent pour accomplir les deux types de tâches déjà évoqués plus haut :
    - ***T_1* : Contrôler que deux droites dessinées sont parallèles.**
    - ***T_2* : Construire une droite parallèle à une droite donnée et passant par un point donné.**
- Le découpage en séances fourni ci-dessous n'est donné qu'à titre indicatif et fera sans doute l'objet d'un aménagement, au cours de la deuxième phase de notre travail. Notamment des regroupements pourront être envisagés, mais sans perdre de vue que la mise en place et l'assise d'une technique donnée nécessite toujours un peu de temps. L'expérimentation que nous engageons à partir de la prochaine rentrée permettra de préciser les contours de cette proposition. Un second article pourra être proposé à l'issue de cette étude.
- L'analyse *a priori* proposée, s'appuie sur les éléments théoriques de l'approche anthropologique. Les lettres T, τ et θ désignent respectivement des types de tâches (ici mathématiques), des techniques et des éléments technologiques (rendant intelligible la technique). Les indices fournis sont associés au type de tâches d'une part, aux technologies d'autre part : τ_{2a} par exemple désigne une technique permettant d'accomplir le type de tâches T_2 et dont la justification est associée à une technologie θ_a (propriété des angles correspondants égaux.)

L'organisation mathématique autour de ce problème pourrait se décrire à l'aide du tableau qui suit.

	T_1 : Contrôler que deux droites dessinées sont parallèles	*T_2 : Construire une droite parallèle à une droite donnée et passant par un point donné*	
Techniques basées sur les **angles**	τ_{1a} : on vérifie l'égalité des mesures des angles correspondants.	τ_{2a} on construit une configuration de trois droites pour lesquelles les angles correspondants ont même mesure.	La technologie θ_a qui légitime ces techniques s'appuiera sur une définition du parallélisme issue d'une perception globale du phénomène « ça penche pareil ».
Techniques basées sur les pro-priétés des **rectangles**	τ_{1R} : On cherche à faire apparaître les deux droites comme côtés opposés d'un rectangle.	τ_{2R} : on construit un rectangle appuyé sur la droite, tel que le côté opposé contienne le point donné.	θ_R est la propriété qui annonce que les côtés opposés d'un rectangle sont parallèles.
Techniques basées sur les propriétés de **l'ortho-gonalité**	τ_{1p} : On vérifie qu'une droite perpendiculaire à l'une des droites données est aussi perpendiculaire à l'autre.	τ_{2p} : On construit une perpendiculaire à la droite donnée, puis la perpendiculaire à cette dernière droite tracée passant par le point.	θ_p s'appuie sur la propriété classiquement étudiée et qui annonce que les droites perpendicu-laires à une droite donnée sont parallèles entre elles.
Techniques associées aux propriétés des **losanges**	τ_{1L} : On cherche à faire apparaître les deux droites comme côtés opposés d'un losange.	τ_{2L} : on construit un losange appuyé sur la droite et tel que le côté opposé contienne le point donné.	*le lecteur n'aura aucune difficulté à déterminer sur quels éléments s'appuie la technologie θ_L.*
Techniques utilisant les **milieux** de certains segments	τ_{1m} : On construit un segment ayant respec-tivement ses extrémités sur chacune des droites. On construit son milieu. On construit un segment ayant ses extrémités sur chacune des deux droites et passant par ce milieu. On contrôle pour terminer que le milieu du premier segment est aussi le milieu du second.	τ_{2m} : On choisit un point de la droite, on trace le segment ayant pour extré-mités le point donné et le point choisi et on en déter-mine le milieu. On choisit un autre point sur la droite et on construit son symé-trique par rapport au milieu du segment. Il reste à tracer la droite qui passe par le point donné et ce dernier point construit.	θ_m s'appuie sur l'utilisation de deux propriétés caractéristiques des parallélogrammes ou sur une propriété des symétries centrales (l'image d'une droite par symétrie centrale est une droite parallèle).
Techniques utilisant un réseau **quadrillé**	τ_{1q} : Si les droites sont tracées dans un réseau quadrillé,on repère sur chacune deux nœuds consécutifs et, par comptage on regarde si les paires de nœuds occupent des positions relatives identiques.	*τ_{2q} que le lecteur n'aura pas de mal à dégager, ne fonctionne évidemment que lorsque nous sommes dans le cas favorable où le point est un nœud du quadrillage.*	Ici c'est la notion de pente dans un réseau quadrillé qui sous-tend la technologie θ_q associée à ces techniques

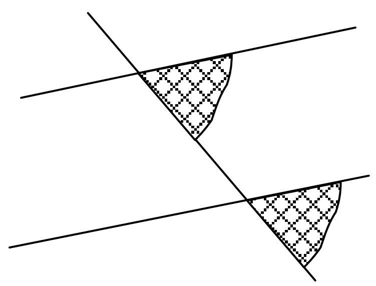
Organisation didactique

Séance 1

À partir de la capacité supposée des élèves à percevoir globalement le parallélisme de deux droites, on met en place une définition de ce concept qui permette ensuite l'activité graphique :
« Deux droites sont parallèles quand elles ont la même inclinaison » ou comme diraient peut-être certains élèves, « quand elles penchent pareil » *(première rencontre avec une formulation dite puis écrite du parallélisme).*
On s'intéresse alors à la signification technique de la notion d'inclinaison, et notamment à la nécessité de contrôler cette inclinaison par rapport à une « verticale » ou une « horizontale », tracée sur le papier.
La fin de la séance est consacrée à *l'émergence d'une technique* de vérification du parallélisme avec des gabarits d'angles ou grâce au papier calque, ce qui permet d'avoir une preuve expérimentale du parallélisme. Il s'agit d'associer le parallélisme à l'égalité des angles correspondants.

Dans le cours de cette séance c'est le type de tâche T_1 qui est essentiellement travaillé, mais il est clair que l'accomplissement de la technique mise en avant mobilise un certain nombre de types de tâches annexes pour lesquels on attend des compétences.
T_{1a} : repérer les angles correspondants dans une configuration de deux droites coupées par une sécante. T_{1b} : vérifier l'égalité de deux angles.
Pour chacun des types de tâches évoqués ci-dessus il est intéressant de produire une ou plusieurs techniques qui viennent parfois, à leur tour, faire émerger des sous-types de tâches.

Par exemple, considérons la tâche T_{1a}. Pour repérer les angles correspondants dans la configuration en question, voici une technique possible.



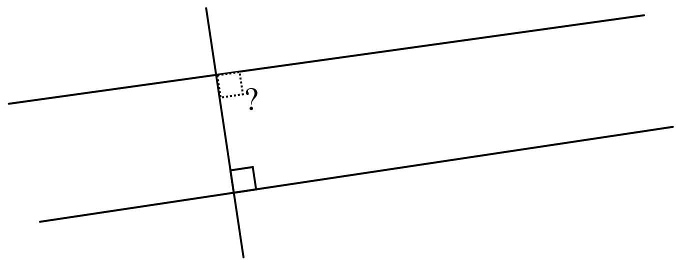
Considérons l'un quelconque des huit angles formés par ces droites. Il a pour sommet l'une des intersections de ces trois droites. On cherche un angle ayant pour sommet l'autre intersection des droites et qui contient ce premier angle ou bien qui est contenu par lui. C'est l'angle correspondant de l'angle choisi.
On voit ici qu'il est nécessaire pour appliquer cette technique de savoir quand un angle en contient un autre ou pas. Cette compétence a pu se construire au moment de la comparaison des angles.

Séance 2

C'est une séance durant laquelle la technique de vérification du parallélisme, qui a émergé à la fin de la séance 1, va être travaillée et l'étendue de ses possibilités explorées *(exploration et travail de la technique)*. Notamment on verra qu'elle peut servir à réaliser le type de tâche T_2.
À cette occasion on pourra examiner quelques variantes techniques, toutes basées sur le même support technologique (équivalence entre parallélisme et égalité des angles correspondants).
À l'issue de la séance, une synthèse sur le travail réalisé au cours des séances 1 et 2 permet d'institutionnaliser les techniques τ_{1a} et τ_{2a}. *(moment de l'institutionnalisation)*

Séance 3 : Droites parallèles et rectangles

Supposant en place la définition du rectangle (quadrilatère ayant quatre angles droits), on commence par constater expérimentalement, grâce à la technique mise en place durant les séances précédentes, que les côtés opposés d'un rectangle sont parallèles *(travail de la technique)*.
Ainsi, chaque fois qu'il devient possible de construire un rectangle appuyé sur deux droites qui en sont les côtés opposés, on peut conclure que les deux droites sur lesquelles on s'est appuyé sont parallèles *(émergence d'une technique)*.
Un problème surgit lorsqu'on n'est pas capable de produire une telle construction. Dans ces cas-là en effet, il est impossible de conclure (*exploration de la technique, évaluation de sa portée, élaboration d'un environnement technologique.)*
On revient alors grâce à une réflexion s'appuyant sur les deux techniques travaillées jusque-là, à produire une propriété jugée basique dans la plupart des parcours curriculaires : « équivalence entre le fait d'être parallèles pour deux droites et celui d'être perpendiculaires à une même troisième droite. »



On fait ainsi émerger une technique classique de vérification et de fabrication du parallélisme qui utilise l'équerre (gabarit d'angle droit). *(émergence d'une technique)*

Séance 4 : Droites parallèles et droites perpendiculaires

Il s'agit ici d'*institutionnaliser* la technique vue à la fin de la séance précédente et aussi de la travailler afin de la maîtriser *(institutionnalisation technique et technologique).*

Séance 5 : Droites parallèles et losanges

Supposant en place la définition du losange à partir de l'isométrie des quatre côtés, il s'agit d'abord, en utilisant la technique mise en place dans les séances 3 et 4 de vérifier que les côtés opposés d'un losange sont parallèles.
À l'image de ce qui a été fait au début de la séance 3, on travaille autour d'une technique qui consiste à faire apparaître un losange dans une configuration déterminée par deux droites afin de prouver que ces droites sont parallèles ou à construire un losange dont on connaît un sommet et le support d'un côté (ne contenant pas le sommet) afin de construire la parallèle à la droite passant par le point.

Séance 6 : Autour des propriétés du parallélisme (facultatif)

Cette courte séance permet de réviser diverses techniques de construction du parallélisme (gabarit d'angle, équerre ou règle et compas) en même temps qu'elle permet de conclure expérimentalement quelques propriétés du parallélisme *(évaluation sur les techniques, première rencontre avec les propriétés du parallélisme)*.

Exemple 1 : Sur la feuille, on a une droite et un point ; il s'agit de construire une parallèle à la droite passant par le point en utilisant deux techniques distinctes, et de constater au bout du compte que la parallèle à la droite passant par le point est unique (on touche du doigt le postulat d'Euclide).
Exemple 2 : Sur la feuille, on a une droite et deux points distincts de part et d'autre de la droite. En utilisant deux techniques différentes, on construit la parallèle à la droite passant par l'un des points, puis la parallèle à la droite passant par l'autre point. Grâce à la troisième technique, on contrôle le parallélisme des droites ainsi construites. On approche ainsi la symétrie et la transitivité de la relation de parallélisme.

Une conclusion provisoire

Les propositions présentées dans ce texte ont été rédigées en partie avant que ne soient publiés les nouveaux programmes et leurs commentaires associés. L'extrait du texte officiel cité ci-dessous[3] montre assez bien l'intérêt que portent les concepteurs de ces programmes pour des approches de la géométrie intégrant la dimension expérimentale sur laquelle nous travaillons.
Cet encouragement à continuer dans la voie ainsi ouverte, nous permettra de poursuivre le travail d'ingénierie didactique nécessaire à la mise au point de séances effectives. L'engagement dans cette nouvelle phase de notre travail de développement se présente accompagné d'un certain nombre d'hypothèses et de questions. L'adaptation de notre proposition aux éléments de culture en place dans les classes avec lesquelles nous allons travailler constitue le premier enjeu. À cet égard, on peut deviner une première difficulté : celle d'aborder le parallélisme par les angles (même pente) alors que la culture de l'école est plutôt orientée pour traiter cette question par les distances (écart constant). Comment devra-t-on procéder pour prendre le plus possible en compte l'existant ? C'est sur cette question et bien d'autres que notre équipe engage sa réflexion aujourd'hui.

---

[3] […] À travers ces activités, les élèves élaborent et utilisent les premiers concepts géométriques, en leur donnant du sens : alignement, perpendicularité, parallélisme, longueurs, angles. Ils prennent conscience de certaines propriétés des objets et ils acquièrent des éléments de vocabulaire : face, arête, sommet ; côté, segment, milieu, droite (synonyme au cycle 3 de ligne droite), droites perpendiculaires, droites parallèles, angle ; ainsi que les noms de quelques solides et de quelques figures planes. Enfin, ils développent des compétences techniques liées au maniement d'instruments de dessin : règle et équerre (pour vérifier des alignements, tracer des droites perpendiculaires, des droites parallèles), compas (pour tracer des cercles ou des arcs de cercle, pour reporter des longueurs), gabarit (pour comparer ou reporter des angles), calque. […]
[…] Le travail sur droites perpendiculaires et droites parallèles donne lieu à une synthèse, à partir d'une réflexion sur les positions relatives de deux droites : droites non sécantes (parallèles), droites sécantes en prenant en considération leur inclinaison relative (notion d'angle) et notamment cas des droites qui se coupent en faisant quatre angles égaux (perpendiculaires).
Pour les droites parallèles, la propriété d'écart constant entre ces droites sera mise en évidence et utilisée pour les activités de reconnaissance ou de construction.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BERGER Marcel & al. (1991). *Géométrie 2^e Exercices corrigés Col.* Guides plus. Paris : Belin.

BERTHELOT René & SALIN Marie-Hélène. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire.* Thèse d'université en Didactique des Mathématiques, Université de Bordeaux I.

BERTHELOT René & SALIN Marie-Hélène. (1993). L'enseignement de la géométrie à l'école primaire. *Grand N n°53*. IREM de Grenoble.

BERTHELOT René & SALIN Marie-Hélène. (1999). L'enseignement de l'espace à l'école primaire. *Grand N, n° 65*. IREM de Grenoble.

BERTHELOT René & SALIN Marie-Hélène. (2000). L'enseignement de la géométrie au début du collège. *Petit X, n° 56,* IREM de Grenoble.

BOULE François. (2000). *Questions sur la géométrie et son enseignement.* Paris : Nathan.

CHARNAY Roland. (1998). De l'école au collège : Les élèves et les mathématiques. *Petit X n° 49*. IREM de Grenoble.

CHARNAY Roland. (1999). A la recherche du sens. *Grand N n° 64*. IREM de Grenoble

CHEVALLARD Yves. (1991). Autour de l'enseignement de la géométrie (1ère partie). *Petit X n°27,* IREM de Grenoble.

CHEVALLARD Yves. (1992). *Le caractère expérimental de l'activité mathématique. Petit X n° 30.* IREM de Grenoble.

DUCROCQ Albert & WARUSFEL André. (2000). *Les mathématiques Plaisir et Nécessité : Un parcours guidé dans l'univers des mathématiques.* Vuibert.

FAUCONNET Annie. (1995). *Enseigner la géométrie au collège : Un chemin pour la découverte progressive par l'élève.* Paris : Armand Colin.

HOUDEMENT Catherine & KUZNIAK Alain. (1999). Réflexions sur l'enseignement de la géométrie. *Grand N n° 64.* IREM de Grenoble.

HOUDEMENT Catherine & KUZNIAK Alain. (1999). Géométries et paradigmes géométriques. *Petit X n°51*. IREM de Grenoble.

HOUDEMENT Catherine & KUZNIAK Alain. (2001). *in Actes du colloque de la COPIRELEM* à Tours. (mai 2001).

MANTE Michel & NEYRET Robert. (2000). Apprentissage géométrique au cycle 3 et argumentation en géométrie. in *Actes du colloque de la COPIRELEM* à Chamonix (mai 2000).

MERCIER Alain & TONNELLE Jacques. (1992). Autour de l'enseignement de la géométrie au collège (2ème partie). *Petit X n° 29.* IREM de Grenoble.

MERCIER Alain & TONNELLE Jacques. (1993). Autour de l'enseignement de la géométrie au collège (3ème partie). *Petit X n° 33.* IREM de Grenoble.

MLODINOW Léonard. (2001). *Dans l'œil du compas : La géométrie d'Euclide à Einstein.* Saint-Simon.

Collectif – réunion de professeurs (1956) *Géométrie pour les cours complémentaires et enseignement secondaire court.*