ANALYSE DE LA CONCEPTION DE VECTEUR EMERGENTE D'UN MANUEL SCOLAIRE

Ridha NAJAR
Doctorant ISEFC
Université de Tunis et Didirem, Université Paris 7

Résumé : Cet article propose une méthode de modélisation des connaissances et situations d'apprentissage relatives à la notion de *vecteur* d'un manuel scolaire tunisien de première année secondaire. A partir d'une analyse praxéologique des connaissances et savoirs donnés dans le manuel, nous constituons les ensembles $\mathcal{P}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ et Σ , qui définissent selon Balacheff une conception $\mathcal{C}$. Cette modélisation permet de définir, dans un sens qui sera précisé, une « *conception a priori* » de la notion de *vecteur* émergente des apprentissages proposés dans le manuel. La conclusion montre l'intérêt d'une telle analyse conceptuelle pour une évaluation a priori d'un contenu mathématique donné.*

Mots-clés : Vecteur, praxéologies, conception, modélisation.

1. Introduction

Dans les premiers travaux de recherche en didactique, certains auteurs semblent ne pas éprouver le besoin de considérer la notion de "*conception*" comme un objet d'étude pour lui-même, ni la nécessité de lui donner une définition précise. « *Conception fonctionne* [alors] *comme un concept "paradidactique"* » (Balacheff, 1995, p.224), un outil qui permet de désigner le « *déjà-là au moment de l'enseignement d'une notion, et susceptible d'influencer l'apprentissage* » (Astolfi, 1997, p.147). Souvent, ce "*déjà connu*" n'a pas la même interprétation suivant qu'il est constaté par un observateur extérieur, qui peut voir à travers lui un facteur de résistance à l'apprentissage, ou qu'il est considéré par le sujet même, qui peut trouver dans ces conceptions – même si elles sont apparemment contradictoires- un système explicatif personnel et fonctionnel (ibid. p147).

En vue de « *dépasser la contradiction liée à la coexistence chez un sujet de connaissances recouvrant une multiplicité de conceptions éventuellement contradictoires, en référence à un concept particulier* » (Balacheff, 1995, p.224), Balacheff propose la formalisation théorique suivante du terme "*conception*" (que nous explicitons ici de façon un peu moins formelle).

* Cette recherche est extraite de mon mémoire de DEA (en didactique des mathématiques) dirigé par Mahdi Abdeljaouad (Université de Tunis) et Claude Tisseron (Université de Lyon 1). Je remercie Claude Tisseron pour sa lecture attentive de la première version de cet article.

Selon Balacheff (1995), une conception $\mathcal{C}$ est constituée de quatre éléments :

- Un ensemble générateur $\mathcal{P}$ de problèmes spécifiques qui appellent la mise en œuvre de la conception $\mathcal{C}$. Tout autre problème relevant de la conception $\mathcal{C}$ devrait pouvoir être ramené à cet ensemble $\mathcal{P}$.
- Un ensemble $\mathcal{R}$ d'opérateurs qui permettent de transformer tout problème de $\mathcal{P}$ en un nouveau problème.
- Un système $\mathcal{L}$ de représentations permettant d'exprimer les éléments de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{R}$ et de mettre en œuvre les opérateurs.
- Un ensemble de primitives constituant une structure Σ de contrôle minimale. Le rôle de Σ est d'assurer la non-contradiction de $\mathcal{C}$.

La possible coexistence chez un sujet d'une multiplicité de conceptions (relativement à une notion mathématique donnée) éventuellement contradictoires du point de vue d'un observateur extérieur mais cohérentes lorsqu'elles sont replacées dans le référentiel[1] du sujet, provient, selon Balacheff, du fait que les situations d'apprentissage dont se réfèrent les conceptions considérées sont vécues par le sujet de façons distinctes et autonomes, alors que l'observateur extérieur cherche à trouver des opérateurs qui permettent de les traiter dans le même système de conception ($\mathcal{P}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, Σ). Le facteur déterminant pour la constitution d'une conception serait, selon cette acception, la classe de situations (ou de tâches) vécues par le sujet au moment de l'apprentissage d'une notion donnée.

Dans le système d'enseignement tunisien (qui nous intéresse ici), cette classe de situations, qui va engendrer chez un sujet une certaine conception (relative à une notion mathématique donnée) est, dans une large mesure, déterminée par les situations d'apprentissage et les connaissances que renferme le livre "officiel"[2]. C'est que ce livre, recommandé par le ministère de l'éducation (à chaque niveau d'enseignement) et utilisé par les élèves de tous les lycées du pays, constitue un appui essentiel pour les enseignants comme pour les apprenants dans l'opération d'enseignement/apprentissage.

Dans ces conditions, nous considérons que pour chaque notion mathématique à enseigner (et à apprendre) à un niveau donné, le livre officiel de mathématiques propose une « *conception a priori* » de cette notion résultante des épistémologies des auteurs du manuel et influencée par des contraintes institutionnelles, en particulier celles de la transposition didactique (Chevallard, 1991). Cette « *conception a priori* », pourrait être supposée comme la conception de base qui va engendrer la (ou les) conception(s) réelle(s) du sujet.

Dans cet article nous proposons de préciser le sens que nous donnons au terme « *conception a priori* » et ceci en montrant que les programmes d'étude (connaissances et situations d'apprentissage) relatives à la notion de *vecteur* que renferme le manuel scolaire, obéissent, dans un sens que nous préciserons, au modèle cK¢ de Balacheff (Balacheff, 1995).

---

[1] Balacheff désigne par « *référentiel* » une classe de situations ou de tâches vécues par le sujet.

[2] En Tunisie, pour chaque niveau d'enseignement, un seul livre (officiel) est autorisé à l'utilisation par le ministère de l'éducation. Ce livre doit obtenir l'accord préalable d'une commission spéciale constituée d'inspecteurs, de conseillers pédagogiques et d'enseignants du secondaire et du supérieur... De ce fait, ce manuel traduit, dans une mesure certaine, le point de vue de l'institution quant à l'application des programmes officiels.

2. Méthodologie du travail

En vue d'analyser la « *conception a priori* » de la notion de « *vecteur* » émergente des situations d'apprentissage et des savoirs proposés dans le manuel scolaire[3], nous commençons au préalable par effectuer des analyses praxéologiques (Chevallard, 1998) des trois leçons qui composent le chapitre « *Les vecteurs du plan* ». Ces analyses, en termes de praxéologies (*tâches, techniques, technologie-théorie*), ont pour objectif de connaître les différentes activités rapportées dans le manuel pour l'enseignement de la notion de vecteur, les techniques qui permettent de réaliser ces activités ainsi que les résultats technologico-théoriques qui sont supposés les justifier. Ceci nous permettra de connaître de façon détaillée les savoirs, implicites et explicites, construits dans le manuel concernant la notion de *vecteur*.

A la lumière de ces analyses praxéologiques, nous déterminons les éléments qui constituent chacun des ensembles $\mathcal{P}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ et Σ [4], qui définissent selon Balacheff une conception $\mathcal{C}$, et nous expliquons comment ceci permet de modéliser les connaissances et les savoirs proposés dans le manuel et de définir en conséquence la « *conception a priori* » de *vecteur* émergente de ces savoirs.

3. Analyse praxéologique

Nous rappelons que, selon Chevallard (1998), l'étude à l'école consiste à mettre les apprenants en contact avec un certain nombre d'œuvres fixé par les responsables du système scolaire (la "noosphère"). Afin de modéliser l'étude d'une œuvre O dans l'institution d'enseignement, on commence par préciser, pour chaque niveau d'enseignement (classe), le « domaine d'étude » (partie de l'œuvre O) qui va être étudié par les élèves de ce niveau. Pour chaque domaine d'étude, il convient d'identifier un certain nombre de questions (Q_1, Q_2, ... ,Q_n) pour lesquelles l'œuvre O propose des réponses sous forme de praxéologies et que les élèves sont censés étudier. On fabrique ainsi *un programme d'étude.*

Une *praxéologie mathématique* associée à un type de questions Q_i est la donnée d'un quadruplet : R_i = (*tâches, techniques, technologie, théorie*) qui constitue une réponse à Q_i. Cette réponse peut être apportée à partir d'une œuvre mathématique existante comme elle peut être élaborée par l'individu qui étudie Q_i.

Dans le manuel officiel tunisien de mathématique de première année secondaire[5] (édition, 2002/2003), le chapitre « *Les vecteurs du plan* » comprend quatre thèmes qui constituent (selon la terminologie de Chevallard) *le domaine d'étude* de la notion de *vecteur.*

---

[3] Il s'agit du manuel officiel tunisien intitulé : Mathématique. Première année de l'enseignement secondaire. Allani Mohsen & al. Édition CNP. Code 222103.

[4] Le passage de l'analyse praxéologique à la détermination des éléments constituants les ensembles $\mathcal{P}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ et Σ est étroitement lié à l'interprétation que nous donnons à ces ensembles dans le cas de notre analyse conceptuelle. Nous expliquons ceci au §5.

[5] La classe de première année secondaire est la première classe du lycée, élève de 15/16 ans (Classe de troisième en France).

Nous présentons ces quatre thèmes dans le tableau suivant :

Domaine d'étude

Définition d'un vecteur du plan	L'addition des vecteurs	Multiplication d'un vecteur par un réel	Introduction à l'étude analytique des vecteurs

Pour chaque thème, l'analyse praxéologique que nous effectuons consiste à organiser les connaissances mathématiques (activités d'introduction, énoncés théoriques, exercices d'application...) présentées dans le manuel sous forme de praxéologies (*type de tâches, techniques, technologies-théories*) (Chevallard, 1998). La famille de praxéologies ainsi constituée définit le *programme d'étude* associé au thème considéré.

Notons que dans les praxéologies mathématiques que nous considérons, chaque type de tâches regroupe les tâches (exercices et activités) données dans le manuel et qui sont censées être réalisées par des techniques justifiées par un même contenu « *technologico-théorique* ». Ce contenu « *technologico-théorique* » se trouve dans la plupart des cas explicité dans la leçon. Mais il peut, dans d'autres cas, s'agir d'un résultat établi dans une classe antérieure.

Nous présentons dans les tableaux ci-dessous les programmes d'étude relatifs aux quatre thèmes qui constituent le domaine d'étude de la notion de *vecteur*. En vue d'alléger la présentation de ces programmes d'étude, nous avons choisi d'omettre les contenus des techniques utilisées dans la réalisation des différents types de tâches.

3.1 Programme d'étude relatif au premier thème : définition d'un vecteur du plan

3.1.1 Structure du programme d'étude

Elle est représentée dans le ***Tableau 1***:

Types de tâches	*Technologie-théorie*
T_1 : Déterminer le nombre de points vérifiant une ou plusieurs conditions données.	- Définition d'une droite, d'une demi-droite. - Repérage sur une droite graduée.
T_2 : Reconnaître, représenter et comparer des vecteurs sur une figure donnée, sans construction auxiliaire.	Définition d'un vecteur : - détermination graphique, - égalité de deux vecteurs.

Types de tâches	*Technologie-théorie*
T_3 : Mettre en œuvre les caractérisations vectorielles des configurations géométriques usuelles pour marquer des points dans le plan.	- **Théorème** : *Étant donnés un vecteur* $\vec{u}$ *et un point* O, *il existe un unique point M tel que* $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$. - Caractérisation vectorielle d'un parallélogramme. - Définition de l'égalité de deux vecteurs.
T_4 : Mettre en œuvre les caractérisations vectorielles des configurations géométriques usuelles pour prouver un résultat géométrique.	- Caractérisation vectorielle d'un parallélogramme. - Caractérisation vectorielle du milieu d'un segment.
T_5 : Reconnaître et identifier une droite définie vectoriellement.	**Propriété** : $\overrightarrow{AB}$ *étant un vecteur non nul. L'ensemble des points* M *du plan tels que les vecteurs* $\overrightarrow{AM}$ *et* $\overrightarrow{AB}$ *sont colinéaires est la droite* (AB).

3.1.2. Commentaire

Ce programme d'étude permet d'établir trois résultats essentiels :

- La construction de l'ensemble des vecteurs du plan.
- Trouver le lien des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ *et* $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires (où A et B sont deux points distincts donnés).
- Énoncer la propriété fondamentale de la géométrie vectorielle :
  Étant donnés un vecteur $\vec{u}$ *et un point O, il existe un unique point M tel que* $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

Cet énoncé, avec la propriété du parallélogramme, la caractérisation vectorielle du milieu d'un segment et la définition vectorielle d'une droite, permet d'établir la liaison entre le domaine ponctuel et le domaine vectoriel. Les démonstrations des deux derniers résultats présentent des occasions pour les élèves d'exercer les techniques de la preuve mathématique, et aussi de comprendre le statut logique de l'équivalence.

3.2 Programme d'étude relatif au deuxième thème : L'addition des vecteurs

3.2.1 Structure du programme d'étude

Tableau 2 :

Types de tâches	*Technologie-théorie*
T_6: Utilisation de la relation de Chasles.	Définition de la somme de deux vecteurs - Relation de Chasles. - Propriétés de la somme des vecteurs.
T_7 : Mise en œuvre de la somme de deux vecteurs sur des configurations géométriques.	- (ABCD est un parallélogramme) équivaut à ($\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$). - (I milieu de [AB]) équivaut à ($\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$). - (I milieu de [AB]) équivaut à ($\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$) - Résolution dans P d'équations vectorielles.

3.2.2. Commentaire

Les principaux résultats que ce programme d'étude permet d'établir sont :

- La relation de Chasles.
- La définition de l'addition vectorielle.
- Les propriétés de l'addition vectorielle.

La relation de Chasles, et la propriété : « *Étant donnés un vecteur* $\vec{u}$ *et un point O, il existe un unique point M tel que* $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ » (établie dans la première leçon) constituent les deux axiomes qui attribuent au plan *P* la structure de plan affine (connaissance implicite).

L'addition vectorielle avec ses propriétés permet la construction (implicite) de la structure de groupe commutatif de l'ensemble $\vec{P}$ des vecteurs du plan.

Par ailleurs, la relation de Chasles constitue un outil fondamental pour la réalisation de plusieurs tâches qui favorisent l'articulation entre le registre géométrique et le registre vectoriel.

3.3 Programme d'étude relatif au troisième thème : Multiplication d'un vecteur par un réel

3.3.1 Structure du programme d'étude

Ce programme est décrit dans le ***Tableau 3*** :

Types de tâches	*Technologie-théorie*
T_8 : Déterminer, graphiquement ou par le calcul, le produit d'un vecteur par un réel.	Définition de la multiplication d'un vecteur par un réel.
T_9 : Manipulation des combinaisons linéaires de vecteurs.	- Relation de Chasles. - Propriétés de la multiplication d'un vecteur par un réel.
T_{10} : Représentation d'un vecteur, combinaison linéaire de deux vecteurs.	- Définition du produit d'un vecteur par un réel. - Relation de Chasles.
T_{11} : Repérage sur une droite graduée.	Définition du produit d'un vecteur par un réel.
T_{12} : Application à la recherche d'ensemble de points.	Bijections entre des parties de l'ensemble **R** et les parties correspondantes d'une droite affine.
T_{13} : Mise en œuvre du calcul vectoriel pour prouver une propriété géométrique.	-Caractérisation vectorielle de l'alignement de trois points. -Caractérisations vectorielles du milieu d'un segment. - Caractérisations vectorielles du centre de gravité d'un triangle.
T_{14} : Traduire une propriété géométrique par une relation vectorielle.	- Caractérisations vectorielles d'un parallélogramme. - Caractérisations vectorielles du centre de gravité d'un triangle. - forme vectorielle du théorème des milieux pour les triangles.

3.3.2. Commentaire

Le programme d'étude relatif à ce thème permet d'établir les résultats suivants :

- La définition de la multiplication d'un vecteur par un réel.
- Les propriétés de cette opération externe.
- La notion de vecteurs colinéaires.

La multiplication d'un vecteur par un réel, avec ses propriétés permettent de terminer la construction (implicite) de la structure du plan vectoriel $\overrightarrow{P}$ des vecteurs du plan. Elles permettent aussi d'établir une nouvelle caractérisation vectorielle du milieu d'un segment et de donner une caractérisation vectorielle du centre de gravité d'un triangle.

La notion de vecteurs colinéaires constitue un outil pour caractériser vectoriellement l'alignement de trois points ainsi que le parallélisme de deux droites. Ceci donne une occasion supplémentaire pour faire apparaître l'articulation entre les registres de travail géométrique et vectorielle.

3.4 Programme d'étude relatif au quatrième thème : Introduction à l'étude analytique des vecteurs

3.4.1 Structure du programme d'étude

Tableau 4 :

Types de tâches	*Technologie-théorie*
T_{15} : Application de la mesure algébrique d'un vecteur.	- Calculer la distance de deux points : $AB=\lvert\overline{AB}\rvert=\lvert x_B-x_A\rvert$ - (I milieu de [AB]) $\Leftrightarrow$ ($x_I=\frac{x_A+x_B}{2}$)
T_{16} : Exprimer un vecteur dans une base du plan vectoriel.	$(O, \vec{i}, \vec{j})$ étant un repère cartésien du plan. $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} \Leftrightarrow M(x, y)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
T_{17} : Placer un point dans un repère du plan.	Définition d'un repère cartésien du plan.
T_{18}: Trouver les coordonnées d'un point du plan.	-M(x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$ - M est le milieu de [AB]) équivaut à : $x_M=\frac{1}{2}(x_A+x_B)$ et $y_M=\frac{1}{2}(y_A+y_B)$
T_{19} : Mise en œuvre du repérage dans le plan pour reconnaître qu'un quadrilatère est un parallélogramme.	ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow$ $\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{x_B+x_D}{2}$ et $\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{y_B+y_D}{2}$ (relativement à un repère donné du plan)

3.4.2. Commentaire

Le programme d'étude relatif à ce dernier thème permet d'établir les résultats suivants :

- Définir la mesure algébrique d'un vecteur.
- Définir un repère cartésien du plan.
- Traduire par une relation vectorielle la donnée des coordonnées d'un point dans un repère du plan.

Les types de tâches proposées dans cette leçon permettent de faire apparaître l'articulation entre les registres de travail géométrique/numérique d'une part et géométrique/ analytique d'autre part.

4. Connaissances construites

En nous référant aux analyses praxéologiques que nous venons d'effectuer, nous précisons dans ce qui suit les connaissances, sur les vecteurs, construites dans les quatre programmes d'étude. Nous considérons que ces connaissances sont de deux types : explicites et implicites. Les premières connaissances sont celles qui sont explicitement rapportées dans le manuel et constituent de ce fait un objectif d'enseignement. Les connaissances implicites (comme les notions de classe d'équivalence, de groupe, d'espace vectoriel, d'espace affine...), bien qu'elles soient établies à travers les savoirs donnés dans le manuel[6], ne sont pas mentionnées de façon explicite, elles ne représentent pas un objectif d'enseignement. Ces connaissances constituent les fondements théoriques, du côté du savoir mathématique, de l'œuvre (qu'est la géométrie vectorielle) qui était à l'origine de la fabrication des programmes d'études. La détermination de ces connaissances implicites nous permettra de connaître la cohérence du savoir mathématique construit dans le manuel avec le savoir mathématique de référence (savoir savant). Le tableau qui suit (***Tableau** 5*) résume ces deux types de connaissances.

Commentaire

L'analyse des contenus des tâches que renferment les quatre thèmes étudiés ainsi que des techniques de leur réalisation, montre que les vecteurs sont présentés dans le manuel essentiellement dans leur fonction d'"*outil*" pour résoudre des problèmes de géométrie. Ceci est conforme aux recommandations rapportées dans le texte du programme officiel qui précisent que « *le calcul vectoriel ne sera pas considéré comme une fin en soi. Au contraire, on cherchera très vite à le mettre en œuvre sur les configurations usuelles et les transformations géométriques connues des élèves* »[7]

Pour confirmer son rôle d' « *outil* » dans la résolution de problèmes de géométrie, le vecteur est introduit comme un objet géométrique caractérisé par les notions intuitives de direction, sens et longueur. Cependant, contrairement aux autres objets géométriques étudiés par les élèves dans les classes antérieures (comme le point, la

---

[6] Voir les commentaires donnés à la fin de chaque programme d'étude.

[7] Ministère de l'éducation. (1998). Programmes officiels de l'enseignement secondaire. Annexe XI. Mathématiques. Tunis : CNP.

droite, le segment, les figures géométriques, etc.), le « *vecteur* » ici possède une particularité nouvelle : c'est qu'on peut effectuer avec lui des opérations d'addition et de multiplication par un réel. Ces opérations permettent de considérer de nouveaux types de tâches avec lesquels les élèves ne se sont pas habitués en géométrie, comme par exemple :

- La recherche d'un vecteur ou d'un point inséré dans une égalité vectorielle (Autrement dit, la résolution d'équations vectorielles dont les inconnues sont des éléments du plan vectoriel $\vec{\boldsymbol{P}}$ ou du plan affine associé **P**)
- La reconnaissance d'une configuration géométrique (milieu d'un segment, parallélogramme, centre de gravité d'un triangle...) au moyen de sa caractérisation vectorielle ou en utilisant les coordonnées et ceci sans faire appel aux propriétés graphiques de cette configuration.

La réalisation de tels types de tâches met en œuvre le vecteur dans sa fonction d'« *objet* » ce qui permet la construction (implicite), à travers les quatre programmes d'étude, de la structure de l'espace vectoriel ($\vec{\boldsymbol{P}}$,+, .) et de l'espace affine associé **P**.

Par ailleurs, les premières notions de la géométrie analytique sont introduites par la donnée de la définition du repère cartésien du plan et des propriétés qui en ont découlées.

Tableau 5 :

	Connaissances explicites	Connaissances implicites
Première leçon	• **Définition d'un vecteur :** -Vecteur <u>non nul</u>, défini à l'aide de son représentant (par direction sens et longueur) -Vecteur nul (aucune convention sur la direction) - *Egalité de deux vecteurs non nuls*	- Construction de l'ensemble $\overrightarrow{P}$ des vecteurs du plan. - l'égalité vectorielle, implique l'idée implicite de classes d'équivalences.
	Propriété Étant donnés un vecteur $\vec{u}$ et un point O, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$	Premier axiome de la définition axiomatique du plan affine P associé au plan vectoriel $\overrightarrow{P}$
	• Définition de deux vecteurs colinéaires non nuls	Famille liée de deux vecteurs de $\overrightarrow{P}$
Deuxième leçon	• Définition de l'addition vectorielle	L'addition dans $\overrightarrow{P}$, est une loi de composition interne
	• Relation de Chasles	Deuxième axiome de la définition axiomatique du plan affine P associé au plan vectoriel $\overrightarrow{P}$
	• Propriétés de l'addition vectorielle	($\overrightarrow{P}$,+) est un groupe commutatif.
Troisième leçon	• Propriétés de la multiplication externe	Définition d'une loi de composition externe sur $\overrightarrow{P}$, à opérateurs dans R.
	• Caractérisation algébrique de la colinéarité de deux vecteurs non nuls	($\overrightarrow{P}$, +, .) est un espace vectoriel réel.
	• Mesure algébrique d'un vecteur	Caractérisation algébrique d'une famille liée de deux vecteurs.
	• Repère cartésien du plan	Mesure algébrique d'un bipoint d'une droite, munie d'un repère unitaire direct.
	Caractérisation vectorielle d'une droite, d'une demi-droite, d'un segment de droite	- Base du plan vectoriel $\overrightarrow{P}$ - Repère du plan affine associé.
		Bijections entre chacun des ensembles **R**, $\mathbf{R}_+$ et [0,1], et les parties correspondantes de la droite géométrique graduée.

5. Analyse conceptuelle

Dans ce paragraphe, nous expliquons comment les programmes d'étude qui constituent le chapitre « *Les vecteurs du plan* » peuvent être modélisés au sens cK¢ de Balacheff et définir en conséquence la « *conception a priori* » de « *vecteur* » émergente des apprentissages donnés dans le manuel.

Pour cela, nous commençons par déterminer les éléments constitutifs de chacun des ensembles $\mathcal{P}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ et Σ qui définissent, selon Balacheff, une conception mathématique $\mathcal{C}$.

5.1. Ensemble P générateur de problèmes

Nous rappelons que pour Balacheff, l'ensemble générateur $\mathcal{P}$ contient les problèmes spécifiques qui appellent la mise en œuvre de la conception $\mathcal{C}$. Tout autre problème relevant de la conception $\mathcal{C}$ devrait pouvoir être ramené à cet ensemble $\mathcal{P}$.

Dans notre analyse conceptuelle, nous considérons que les problèmes spécifiques qui relèvent de l'ensemble $\mathcal{P}$ doivent constituer *un système minimal de connaissances* à acquérir permettant de :

- Reconnaître l'objet « *vecteur* » dans les différents registres de représentation sémiotiques.
- Connaître les opérations que nous pouvons effectuer avec les vecteurs.
- Connaître les transformations inter-registres (au sens de Duval) et inter-cadres (au sens de Douady) que le vecteur permet de réaliser.

En limitant notre analyse au niveau de la classe de première année secondaire et en nous référant aux programmes d'étude relatifs au chapitre « ***Les vecteurs du plan*** » présentés dans le manuel, nous dénombrons de cette manière cinq problèmes spécifiques :

1. Reconnaître et représenter un vecteur sous ses diverses formes graphiques et symboliques. (Type de tâches : $\mathbf{T_2}$)
2. Calculer et représenter graphiquement la somme de deux vecteurs. (Type de tâches : $\mathbf{T_6}$)
3. Déterminer, graphiquement et par le calcul, le produit d'un vecteur par un réel donné. (Type de tâches : $\mathbf{T_8}$)
4. Calculer la mesure algébrique d'un vecteur. (Type de tâches : $\mathbf{T_{15}}$)
5. Traduire vectoriellement la donnée des coordonnées d'un point dans un repère cartésien du plan. (Types de tâches : $\mathbf{T_{16}}$ et $\mathbf{T_{18}}$)

Le problème spécifique (1), donné par les types de tâches ($\mathbf{T_2}$) et ($\mathbf{T_{16}}$), permet de reconnaître l'objet « *vecteur* » dans les différents registres de représentation sémiotique. Ces registres, en nombre de cinq, sont donnés dans le tableau suivant.

Tableau 6 :

Registre Rhétorique	**Registre Graphique**	**Registre Géométrique**	**Registre Algébrique**	**Registre Analytique**
Énoncé dans le langage courant	$\longrightarrow$	$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA}$	$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{o}$	Utilisation des coordonnées

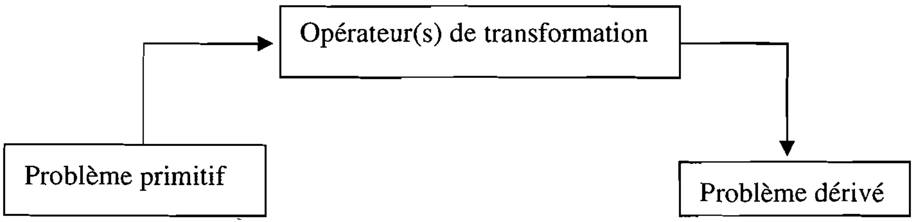
Les problèmes spécifiques (2) et (3), dont la réalisation est assurée par les types de tâches (**T_6**) et (**T_8**), permettent d'effectuer les opérations d'addition et de multiplication par un réel, définies dans l'ensemble des vecteurs.

La réalisation de ces opérations dans les différents registres, graphique, géométrique et algébrique d'une part, le calcul de la mesure algébrique et l'utilisation des coordonnées d'autre part, donnent une occasion pour se rendre compte des transformations que le vecteur permet de réaliser entre les différents registres de représentation sémiotique ainsi qu'entre les cadres de travail géométrique et algébrique.

Une bonne maîtrise des types de tâches indiquées ci-dessus – qui renvoient aux cinq problèmes spécifiques relevant de l'ensemble générateur $\mathcal{P}$ – nous semble nécessaire pour appréhender l'objet vecteur et pour pouvoir par la suite le mettre en œuvre dans de nouveaux problèmes.

5.2. Ensemble R d'opérateurs de transformation

Afin de déterminer les opérateurs qui vont transformer les problèmes de $\mathcal{P}$ (que nous désignerons désormais par problèmes primitifs) en de nouveaux problèmes (que nous appellerons les problèmes dérivés de $\mathcal{P}$), il nous semble nécessaire de préciser au préalable l'ensemble de ces nouveaux problèmes qui vont être générés à partir des problèmes primitifs au moyen des opérateurs de transformation.



Nous considérons alors comme « *problème dérivé* » toute tâche (ou type de tâches) présente dans les praxéologies mathématiques construites dans le chapitre « *Les vecteurs du plan* » et qui ne figure pas parmi les problèmes, éléments de l'ensemble générateur $\mathcal{P}$.

Dans les tableaux qui vont suivre, nous indiquons pour chaque problème primitif, les nouveaux problèmes qui en dérivent ainsi que les opérateurs de transformation qui permettent de les obtenir. Notons que, contrairement aux problèmes primitifs et aux problèmes dérivés qui sont explicitement donnés dans le manuel, les opérateurs de transformation n'y apparaissent pas toujours de façon explicite. Leur détermination fait appel dans certains cas au savoir de référence. Nous les rapportons ici en vue d'expliquer comment, à notre avis, les programmes d'étude qui ont constitué le chapitre sur les vecteurs obéissent au modèle cK¢ de Balacheff.

Pour expliquer comment se fait le passage d'un problème primitif à un problème dérivé, via les opérateurs de transformation, nous avons interprété dans ce sens quelques exemples qui, nous l'espérons, éclairciront notre point de vue.

5.2.1. Premier problème primitif

Le premier problème primitif (*Reconnaître et représenter un vecteur sous ses diverses formes graphiques et symboliques*) a donné lieu à sept problèmes dérivés obtenus à partir de trois opérateurs de transformation, cf.

Tableau 7 :

1^er^ problème primitif	**Opérateurs de transformation**	**Problèmes dérivés**
Reconnaître et représenter un vecteur sous ses diverses formes graphiques et symboliques.	1) Relation d'égalité.	1) Comparer deux vecteurs. 2) Représenter un vecteur égal à un vecteur donné.
	2) Connecteurs logiques d'implication ou d'équivalence.	• Prouver que deux points sont confondus : 3) $\overrightarrow{AB}=\vec{o}\Rightarrow A=B$ 4) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}\Rightarrow B=C$ 5) Prouver que deux vecteurs sont égaux ou qu'un quadrilatère est un parallélogramme : ABCD parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ 6) Prouver qu'un point I est milieu d'un segment : I milieu de [AB] $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$
	3) Application $f: P\to\vec{P}$, $M\mapsto\overrightarrow{AM}$ où A est un point donné du plan.	7) Déterminer le lieu des points (une droite affine) vérifiant une condition vectorielle donnée. (Image réciproque par f de l'ensemble $\{\overrightarrow{AM}\in\vec{P}/\overrightarrow{AM}$ soit colinéaire à un vecteur non nul donné$\}$.

Commentaire

Pour montrer comment les opérateurs de transformation interviennent dans le passage d'un problème primitif à un problème dérivé (ou d'un problème dérivé à un autre), nous proposons d'expliquer ceci à travers la résolution de deux exercices.

Exercice 1[8]

Soit HBMR *un parallélogramme,* E *et* F *les points définis par* $\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{BR}$. *Montrer que* R *est le milieu des segments* [ME] *et* [HF]

[8] Extrait du manuel scolaire (page 190, Premier programme d'étude)

Résolution : ***Tableau 8***

Hypothèses	**Problèmes utilisés**	**Opérateurs de transformation**	**Résultats**
Hypothèse 1 : HBMR parallélogramme	**Problème primitif 1:** Reconnaître les vecteurs intervenant dans la construction du parallélogramme HBMR et en choisir deux convenablement	Connecteur logique $\Leftrightarrow$ (ou $\Rightarrow$)	$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{HR}$
Hypothèse 2 : $\overrightarrow{BR}=\overrightarrow{MF}$	**Problème primitif 1:** Reconnaître les vecteurs conséquents et en choisir deux convenablement	Connecteur logique $\Leftrightarrow$ (ou $\Rightarrow$)	$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{RF}$
$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{HR}$ et $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{RF}$	**Problème dérivé 1 :** Comparaison de vecteurs.	Connecteur logique : ($\Rightarrow$)	$\overrightarrow{HR}=\overrightarrow{RF}$
$\overrightarrow{HR}=\overrightarrow{RF}$	**Problème dérivé 5 :** Prouver qu'un point est milieu d'un segment.	Connecteur logique $\Leftrightarrow$ (ou $\Rightarrow$)	R est milieu de $[HF]$
Hypothèse 3 : $\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{MF}$	**Problème primitif 1:** Reconnaître les caractéristiques graphiques des vecteurs $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{MF}$. En particulier, que les segments $[HE]$ et $[MF]$ sont parallèles et isométriques.	Connecteur logique $\Leftrightarrow$ (ou $\Rightarrow$)	HEFM parallélogramme
HEFM parallélogramme	Reconnaître les diagonales du parallélogramme HEFM	Connecteur logique $\Leftrightarrow$ (ou $\Rightarrow$)	$[ME]$ et $[HF]$ ont même milieu

Remarquons que nous considérons les connecteurs logiques d'implication et d'équivalence comme opérateurs de transformation dans la mesure où ils permettent à un sujet en cours de résolution d'un problème de passer directement d'un énoncé (indiquant un problème primitif ou dérivé) à un autre. Dans certains cas, ce passage requiert l'utilisation d'autres opérateurs de transformation. (Voir particulièrement l'exemple donné dans le commentaire de 5.2.5)

Remarquons qu'à chaque étape de résolution, le problème primitif ou dérivé indiqué pourrait marquer un pas de raisonnement effectué (implicitement) par un sujet dans sa résolution de l'exercice. Pour marquer et justifier ces différents pas de raisonnement lors de la rédaction de la solution, le sujet aurait besoin d'un moyen qui lui permet de passer d'un énoncé (indiquant une hypothèse) à un autre (indiquant un résultat), il pourrait alors utiliser les connecteurs logiques d'implication ou d'équivalence. L'emploi des symboles "$\Rightarrow$" et "$\Leftrightarrow$" n'étant pas autorisé au niveau de la classe de première année secondaire, ces connecteurs pourraient être désignés respectivement par : « *si...alors...* » et « *...équivaut à...* » comme le recommande le texte des programmes officiels.

Exercice 2[9]
Soit un vecteur $\vec{u}$ *non nul et* A *un point. Trouvez graphiquement les positions des points* M *sachant que les vecteurs* $\overrightarrow{AM}$ *et* $\vec{u}$ *ont la même direction.*

Résolution : ***Tableau 9***

Hypothèses	Problème utilisé	Opérateur de transformation (implicite)	Résultat
$\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ ont la même direction	**Problème primitif 1 :** Représenter des exemples de vecteurs $\overrightarrow{AM}$ colinéaires à $\vec{u}$.	Application $f:P \to \vec{P}$, $M \mapsto \overrightarrow{AM}$ où A est un point donné du plan.	M décrit la droite passant par A et ayant la direction de $\vec{u}$.

Dans cet exercice, il s'agit de faire le lien entre l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ colinéaires à $\vec{u}$ et l'ensemble des points M associés. Ne disposant pas d'un outil théorique permettant de trouver et justifier la réponse, l'élève est appelé (selon l'énoncé) à effectuer une recherche graphique.

Dans ce cas, nous avons cherché un opérateur de transformation du côté du savoir de référence (savoir savant) : déterminer le lieu des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires revient à déterminer l'image réciproque par l'application f (indiquée dans le tableau ci dessus) de l'ensemble $E = \{ \overrightarrow{AM} \in \vec{P} / \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires$\}$.

5.2.2. Deuxième problème primitif

Le deuxième problème primitif (*Calculer et représenter graphiquement la somme de deux vecteurs*) a donné lieu à cinq problèmes dérivés obtenus à partir de trois opérateurs de transformation, présentés dans le ***Tableau 10*** :

$2^{ème}$ problème primitif	Opérateurs de transformation	Problèmes dérivés
Calculer et représenter graphiquement la somme de deux vecteurs.	1) Relation de Chasles	1) Décomposer un vecteur en la somme de deux autres.
	2) Opposé d'un vecteur (+ Relation de Chasles)	2) Calculer la différence de deux vecteurs.
	3) Connecteurs logiques d'implication ou d'équivalence.	• Reconnaître une configuration géométrique à l'aide d'une relation vectorielle (utilisant la somme de deux vecteurs) et inversement. 3) (ABCD est un parallélogramme) $\Leftrightarrow$ ($\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$). 4) (I milieu de [AB]) $\Leftrightarrow$ ($\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$). 5) Résolution dans P d'équations vectorielles

[9] Extrait du manuel scolaire (page 184, Premier programme d'étude)

Commentaire

Expliquons à l'aide d'un exemple, comment le problème dérivé : « Calculer la différence de deux vecteurs » peut se ramener au problème primitif 2 en utilisant les opérateurs de transformation 1 et 2.

Considérons pour cela l'exercice suivant[10] :

Soit A et B deux points du plan. Montrez que pour tout point M du plan : $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}$

Résolution ***Tableau 11 :***

Problème à résoudre	**Première transformation**	**Deuxième transformation**	**Résultat**
Montrer que la différence $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}$ est indépendante de M.	Remplacer le vecteur ($-\overrightarrow{MB}$) par le vecteur $\overrightarrow{BM}$ (Opérateur 2). On se ramène au problème primitif 2 : « calculer la somme $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM}$ »	Appliquer la relation de Chasles (Opérateur 1)	$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}$

5.2.3. Troisième problème primitif

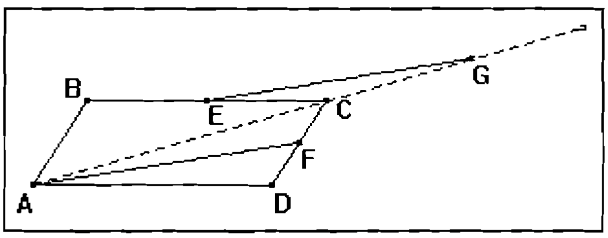
Le troisième problème primitif (*Déterminer, graphiquement et par le calcul, le produit d'un vecteur par un réel donné*) a donné lieu à six problèmes dérivés obtenus à partir de quatre opérateurs de transformation.

Commentaire

Expliquons ici comment interviennent les opérateurs de transformation dans la résolution de l'exercice suivant[11] :

On considère un parallélogramme ABCD. E *est le milieu du segment* [BC] *et* F *est le milieu du segment* [CD]. *Soit* G *le point défini par* $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$. *Montrer que les points* A, C *et* G *sont alignés.*

Illustration



[10] Extrait du manuel scolaire (page 202, Deuxième programme d'étude)

[11] Extrait du manuel scolaire (page 227, Quatrième programme d'étude)

Tableau 12 :

<table>
<tr><th>3^{éme} problème primitif</th><th>Opérateurs de transformation</th><th>Problèmes dérivés</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Déterminer, graphiquement et par le calcul, le produit d'un vecteur par un réel donné.</td><td>1) Opérateurs de calcul vectoriel :
• Addition des vecteurs
• Multiplication d'un vecteur par un réel.
2) Relation de Chasles.</td><td>1) Simplifier une combinaison linéaire de vecteurs.
2) Représenter un vecteur, combinaison linéaire de <u>deux vecteurs colinéaires</u>.</td></tr>
<tr><td>3) Connecteurs logiques d'implication ou d'équivalence.</td><td>• Interprétation géométrique de la multiplication d'un vecteur par un réel , ou interprétation vectorielle de propriétés géométriques.
3) A, B et C sont trois points distincts , les propriétés suivantes sont équivalentes :
i) Il existe $k \in \mathbf{R}$, tel que : $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$.
ii) A, B, C sont trois points alignés
iii) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
iv) Les droites (AB) et (AC) sont parallèles.
4) (I milieu de $[AB]$) $\Leftrightarrow$ ($\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$)
5) Soit ABC un triangle, A' milieu de [BC] et G un point du plan.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :
• G centre de gravité d'un triangle ABC
• $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
• $\overrightarrow{GA'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$
• $\overrightarrow{GA'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$
• $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$</td></tr>
<tr><td>4) Bijections entre des parties de l'ensemble R et les parties correspondantes d'une droite affine.</td><td>6) Déterminer un sous-ensemble de points M d'une droite Δ ($A,\overrightarrow{AB}$) connaissant l'ensemble décrit par l'abscisse de M.</td></tr>
</table>

Position du problème

Tableau 13

Problème dérivé	Opérateur de transformation	Problème primitif 3
Montrer que les points A, C et G sont alignés.	Connecteur logique : ($\Leftrightarrow$)	Obtenir à l'aide des points A, C et G une égalité vectorielle exprimant un vecteur comme produit par un réel d'un autre vecteur.

Exemple de résolution

Tableau 14

Hypothèses	Problèmes dérivés	Opérateurs de transformation	Résultats
$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$	Décomposer un vecteur en la somme de deux autres.	Relation de Chasles	1) $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}$
E milieu de [BC] et F milieu de [CD]	Interprétation vectorielle du milieu d'un segment	Connecteur logique : ($\Leftrightarrow$)	2) $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$
ABCD parallélogramme	Interprétation vectorielle du parallélogramme	Connecteur logique : ($\Leftrightarrow$)	3) $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$
Résultats 1), 2) et 3)	Simplifier une combinaison linéaire de vecteurs.	Opérateurs de calcul vectoriel	4) $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})$
$\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})$	Simplifier une combinaison linéaire de vecteurs.	Relation de Chasles	5) $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$
$\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$	Simplifier une combinaison linéaire de vecteurs.	Opérateurs de calcul vectoriel	6) $\overrightarrow{AG}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{AG}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AC}$	Interprétation géométrique de la multiplication d'un vecteur par un réel	Connecteur logique : ($\Leftrightarrow$)	7) A, C et G sont alignés

5.2.4. Quatrième problème primitif

Le quatrième problème primitif (*Calculer la mesure algébrique d'un vecteur*) a donné lieu à quatre problèmes dérivés obtenus à partir de trois opérateurs de transformation, ici dans le ***Tableau 15 :***

$4^{ème}$ problème primitif	Opérateurs de transformation	Problèmes dérivés
Calculer la mesure algébrique d'un vecteur	1) Application valeur absolue	1) Calculer la distance de deux points.
	2) Bijection entre la droite affine et la droite réelle.	2) Déterminer (par son abscisse) et/ou placer sur une droite Δ un point M inséré dans une relation vectorielle.
	3) Connecteurs logiques d'implication ou d'équivalence.	• Déterminer le milieu I d'un segment [AB]. 3) (I milieu de [*AB*]) $\Leftrightarrow$ $\overline{AI}=\frac{1}{2}\overline{AB}$ 4) (I milieu de [*AB*]) $\Leftrightarrow$ $x_I=\frac{x_A+x_B}{2}$

5.2.5. Cinquième problème primitif

Le cinquième problème primitif (*Traduire vectoriellement la donnée des coordonnées d'un point dans un repère cartésien du plan*) a donné lieu à trois problèmes dérivés obtenus à partir de trois opérateurs de transformation.

Tableau 16 :

$5^{ème}$ problème primitif	Opérateurs de transformation	Problèmes dérivés
Traduire vectoriellement la donnée des coordonnées d'un point dans un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan : *M(x,y)* dans $(O,\vec{i},\vec{j})$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OM}=x.\vec{i}+y.\vec{j}$	1) Relation de Chasles + Opposé d'un vecteur	1) Exprimer un vecteur $\overrightarrow{AB}$ à l'aide des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ du repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ connaissant les coordonnées des points *A* et *B* dans ce repère. On utilise la relation : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.
	2) Bijection entre le plan affine P et l'ensemble $\mathbf{R}^2$	2) Placer un point M dans un plan rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, connaissant les coordonnées de M dans ce repère et inversement.
	3) Connecteurs logiques d'équivalence ou d'implication	3) Trouver les coordonnées du milieu d'un bipoint. (M est le milieu de [AB]) $\Leftrightarrow$ $x_M=\frac{1}{2}(x_A+x_B)$ et $y_M=\frac{1}{2}(y_A+y_B)$

Commentaire

Comme nous l'avons remarqué au 5.2.1, les connecteurs logiques d'implication et d'équivalence sont supposés des opérateurs de transformation dans la mesure où ils permettent à un sujet en cours de résolution d'un problème de passer directement d'un énoncé (indiquant un problème primitif ou dérivé) à un autre.
Les étapes qui justifient ce passage nécessitent dans certains cas d'autres opérateurs qui restent implicites dans la réponse donné par le sujet. Nous proposons de montrer ceci avec un exemple permettant d'effectuer le passage du problème primitif 5 au problème dérivé 3.

Problème

Dans le plan rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, on donne les points : $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$, on se propose de déterminer les coordonnées (x_M,y_M) du point M milieu de [AB].

Résolution

Tableau 17 :

Hypothèses	Problèmes utilisés	Opérateurs de transformation	Résultats
$A(x_A,y_A)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$	Problème primitif 5	Connecteur logique : ($\Leftrightarrow$)	1) $\overrightarrow{OA} = x_A.\vec{i} + y_A.\vec{j}$
$B(x_B,y_B)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$	Problème primitif 5	Connecteur logique : ($\Leftrightarrow$)	2) $\overrightarrow{OB} = x_B.\vec{i} + y_B.\vec{j}$
	Problème 1 dérivé du problème primitif 2	Relation de Chasles	3) $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}$
	Problème 1 dérivé du problème primitif 3	Opérateurs de calcul vectoriel	4) $2.\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}$
M milieu de [AB].	Problème 4 dérivé du problème primitif 2	Connecteur logique : ($\Leftrightarrow$)	5) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$
Résultats 4) et 5)	Problème 1 dérivé du problème primitif 3	Opérateurs de calcul vectoriel	6) $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$
Résultats 1), 2) et 6)	Problème 1 dérivé du problème primitif 3	Opérateurs de calcul vectoriel	7) $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(x_A+x_B).\vec{i}+\frac{1}{2}(y_A+y_B).\vec{j}$
Résultat 7)	Problème primitif 5	Connecteur logique : ($\Leftrightarrow$)	8) $x_M=\frac{1}{2}(x_A+x_B)$ et $y_M=\frac{1}{2}(y_A+y_B)$

Ainsi, le passage du problème primitif 5 au problème dérivé 3 requiert l'utilisation de trois opérateurs de transformation : les connecteurs logiques, les opérateurs de calcul vectoriel et la relation de Chasles.

Le détail de ces étapes est généralement omis dans la résolution des problèmes, et le passage s'effectue directement en utilisant l'opérateur d'équivalence (ou d'implication).

Considérons par exemple le problème suivant :

Dans le plan rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, on donne les points : A(2, 3), B(-2, 2), C(-4, 1) et D(0, 2). Montrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

Désignons par I et J les milieux respectifs des segments [AC] et [BD].

Une solution peut être détaillée dans le ***Tableau 18 :***

Hypothèses	Opérateurs de transformation	Résultats
I milieu de [AC]	$\Rightarrow$	I(-1, 2)
J milieu de [BD]	$\Rightarrow$	J(-1, 2)
I et J ont les mêmes coordonnées	$\Rightarrow$	I = J
Les segments [AC] et [BD] ont le même milieu	$\Rightarrow$	ABCD est un parallélogramme.

Nous voyons que pour rédiger la solution du problème, l'opérateur d'"implication" suffit, à lui seul, pour justifier le passage d'un énoncé à un autre. Cet opérateur peut aussi être remplacé dans ce cas par l'expression « donc »[12].

5.2.6. Conclusion

Les analyses conduites dans ce paragraphe ont révélé la présence de 10 opérateurs qui ont permis la transformation des 5 problèmes primitifs, éléments de l'ensemble $\mathcal{P}$, à 25 nouveaux problèmes. Ces opérateurs sont les suivants :

1) Relation d'égalité.
2) Addition des vecteurs.
3) Opposé d'un vecteur.
4) Multiplication d'un vecteur par un réel.
5) Relation de Chasles.
6) Application valeur absolue.
7) Connecteurs logiques d'implication ou d'équivalence.
8) Bijection entre le plan affine $\boldsymbol{P}$ et l'ensemble $\mathbf{R}^2$.
9) Application $f:P \to \vec{P}$, $M \mapsto \overrightarrow{AM}$, où A est un point donné du plan.
10) Bijections entre des parties de l'ensemble $\mathbf{R}$ et les parties correspondantes d'une droite affine.

Les six premiers opérateurs sont explicitement indiqués par les auteurs et sont suffisamment représentés dans le corpus des quatre programmes d'étude sur les vecteurs. Le connecteur logique d'implication est désigné dans le manuel par « *si...alors...* », et celui de l'équivalence par « *...équivaut à...* ». Ceci est conforme aux instructions des programmes officiels qui interdisent l'utilisation des symboles "$\Rightarrow$" et "$\Leftrightarrow$" dans les deux premières classes du lycée. Vu le nombre élevé de problèmes dont la résolution utilise l'un ou l'autre de ces connecteurs (13 problèmes dérivés sur un total de 25, soit une fréquence de 52%), il nous semble qu'une attention particulière doit être accordée à leur emploi dans les praxéologies mathématiques des différents programmes d'étude.

De ce côté, nous avons constaté, à travers les analyses praxéologiques, que les démonstrations utilisant le connecteur logique d'équivalence sont réalisées et rédigées dans le manuel de plusieurs façons, dont certaines ne reflètent pas pleinement le sens logique de cet opérateur.

Ainsi, sur les sept démonstrations présentées (pp 185-186, 187, 195, 214, 217, 217-218, 218), nous trouvons que dans trois cas (pp 195, 214, 217, voir annexe), les auteurs se contentent de proposer des activités qui justifient seulement les conditions nécessaires et, sans faire aucune allusion concernant les conditions suffisantes, concluent à chaque fois par l'énoncé d'une équivalence. Dans trois autres cas (pp 185-186, 187, 217-218), les démonstrations sont complètes, mais nous remarquons que les auteurs ne mettent pas en relief la structure de la démonstration par équivalence. Ainsi, pour chacune de ces démonstrations, les conditions nécessaire et suffisante sont démontrées chacune dans une activité à part, et les auteurs ne remarquent pas que ces deux conditions sont réciproques l'une de l'autre ou que l'équivalence énoncée à la fin résulte des démonstrations de ces deux conditions. Dans le dernier cas (p 218), la

---

[12] Voir les différents sens de "l'implication" dans Durand-Guerrier & al (2000) : 'Le statut logique des énoncés dans la classe de mathématiques'. pp 28.

démonstration est soigneusement effectuée par "*équivalence*" (les deux conditions nécessaire et suffisante simultanément). Il nous semble que cette façon de procéder n'aide pas les élèves à acquérir les techniques des démonstrations par équivalence, ni de saisir le statut logique de ce connecteur. Ceci qui pourrait entraîner chez les élèves des problèmes de compréhension lorsqu'ils se trouvent dans des situations où ils seront appelés à démontrer une équivalence ; ou encore engendrer des conceptions erronées ou non conformes concernant les propriétés relatives au vecteur qui s'obtiennent au moyen de ce connecteur logique.

Concernant les trois derniers opérateurs, utilisant les propriétés de certains exemples d'applications, nous les rencontrons dans le manuel de façon implicite. Les problèmes qui en dérivent sont donnés sous des formes rhétoriques qui indiquent pleinement leurs sens.Ainsi, pour l'application $f : P \to \vec{P},\ M \mapsto \overrightarrow{AM}$ (où A désigne un point du plan), dont l'image réciproque d'une partie de $\vec{P}$ serait à l'origine de la détermination d'une droite affine, comme lieu de points vérifiant une condition vectorielle donnée, les auteurs donnent l'énoncé suivant :

$\overrightarrow{AB}$ étant un vecteur non nul donné, l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont la même direction, est la droite (AB).

De même, pour les bijections entre des parties de l'ensemble **R** et les parties correspondantes d'une droite affine, qui représentent les opérateurs permettant la détermination de sous-ensemble de points M d'une droite $\Delta(A,\overrightarrow{AB})$ connaissant l'ensemble décrit par l'abscisse de M, les auteurs dans ces cas, se contentent de poser le problème par l'énoncé suivant :

Soient A et B deux points distincts et k l'abscisse d'un point M dans le repère (A, B) de la droite (AB).

*1) Lorsque k décrit **R**, quel est l'ensemble des points M ?*

2) Lorsque k décrit l'intervalle [0,1], quel est l'ensemble des points M ?

3) Lorsque k décrit $\mathbf{R}_+$, quel est l'ensemble des points M ?

Si nous trouvons que les problèmes dérivant de ces trois derniers opérateurs sont convenablement explicités de façon rhétorique, nous remarquons cependant que le nombre de tâches proposées dans le manuel, et qui vont permettre leur application, est trop faible, eu égard à l'importance que ces problèmes présentent dans la recherche d'ensembles de points[13] ainsi que dans la mise en évidence de l'articulation entre les domaines ponctuel/vectoriel d'une part, et les domaines ponctuel/numérique d'autre part.

5.3. Système $\mathcal{L}$ de représentations des éléments de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{R}$

Nous résumons dans les tableaux ci-dessous les différentes façons utilisées par les auteurs pour désigner les éléments de l'ensemble $\mathcal{P}$ des problèmes primitifs et ceux de l'ensemble $\mathcal{R}$ des opérateurs de transformation.

---

[13] 4 tâches sur un total de 153 tâches (soit environ 0,03 % des tâches). Notons que l'un des objectifs de l'enseignement de la géométrie dans cette classe est d' « *initier l'élève aux problèmes de recherche d'ensembles de points* ». (Texte des programmes officiels, p 7)

5.3.1. Représentation des éléments de l'ensemble P des problèmes primitifs.

Tableau 19 :

Problèmes primitifs	Désignation
1) Reconnaître et représenter un vecteur sous ses diverses formes graphiques et symboliques.	- Désignation rhétorique (direction, sens et longueur) - Représentation graphique : segment orienté - Représentation symbolique : $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$. - Utilisation des coordonnées.
2) Calculer et représenter graphiquement la somme de deux vecteurs.	- Désignation rhétorique : calculer (ou représenter) la somme des vecteurs ... - Désignation symbolique : calculer (ou représenter) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, $\vec{u} + \vec{v}$.
3) Déterminer, graphiquement ou par le calcul, le produit d'un vecteur par un réel donné.	Déterminer (graphiquement ou par le calcul), le vecteur $k.\overrightarrow{AB}$ (ou $k.\vec{u}$), où k désigne un réel.
4) Calculer la mesure algébrique d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$.	- Calculer la mesure algébrique de $\overrightarrow{AB}$. - Calculer $\overline{AB}$
5) Traduire vectoriellement les coordonnées d'un point dans un repère cartésien du plan.	(O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) étant un repère cartésien du plan. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ à l'aide de $\vec{i}$ et $\vec{j}$, sachant que M a pour coordonnées (x, y) dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

5.3.2. Représentation des éléments de l'ensemble R des opérateurs de transformation.

Tableau 20 :

Opérateurs de transformation.	Désignation.
1) Relation d'égalité.	Symbole : « = »
2) Addition des vecteurs.	Symbole : « + »
3) Opposé d'un vecteur $\vec{u}$.	$-\vec{u}$
4) Multiplication d'un vecteur $\vec{u}$ par un réel k.	$k.\vec{u}$
5) Relation de Chasles.	Forme d'écriture : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
6) Application valeur absolue.	$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \lvert x \rvert$
7) Connecteurs logiques d'implication ou d'équivalence.	« si...alors... », « ...équivaut à... »
8) Bijection entre le plan affine ***P*** et l'ensemble $\mathbf{R}^2$.	Désignation implicite.
9) Application $f:P \to \vec{P}$, $M \mapsto \overrightarrow{AM}$, où A est un point donné du plan.	Désignation implicite.
10) Bijections entre des parties de l'ensemble **R** et les parties correspondantes d'une droite affine	Désignation implicite.

5.3.3. Commentaire

Nous constatons à travers ces deux tableaux, que les problèmes primitifs, ainsi que chacun des opérateurs de transformation utilisés pour assurer le passage des problèmes primitifs aux problèmes dérivés, sont convenablement désignés. Et ceci, soit à l'aide de symboles, soit de façon rhétorique ou encore de façon implicite. Nous remarquons toutefois que pour le cas de la « *bijection entre le plan affine P et l'ensemble* $\mathbf{R}^2$ » la propriété réciproque qui résulte de cette bijection n'est pas mentionnée dans l'énoncé du problème dérivé donné par les auteurs. Ainsi, nous lisons (page 216) :

A tout point M du plan, on peut associer un unique couple de réels (x, y) tel que $OM = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$

5.4. Structure Σ de contrôle minimal

Selon Balacheff, la structure Σ doit constituer un système de contrôle qui assure la non-contradiction de la conception $\mathcal{C}$.

Dans notre cas, nous interprétons la non-contradiction de $\mathcal{C}$ par la nécessité de satisfaire à deux conditions :

- L'insertion du nouveau savoir dans les acquis antérieurs des élèves. (Contrôle externe)
- La cohérence dans la construction du savoir relatif à la notion de « *vecteur* ». (Contrôle interne)

Concernant la première condition, nous considérons que la géométrie affine euclidienne étudiée par les élèves jusqu'à ce niveau d'apprentissage, pourrait constituer une structure de contrôle externe pour la conception de *vecteur*. Quant à la deuxième condition, elle pourrait être satisfaite en établissant, entre autres, les équivalences entre les différentes propriétés caractérisant vectoriellement certaines configurations géométriques.

Les problèmes les plus significatifs pouvant justifier cette hypothèse, sont ceux qui mettent en œuvre l'articulation entre le cadre vectoriel (nouveau savoir) d'une part, et le cadre affine (acquis antérieur) d'autre part. Dans les praxéologies mathématiques qui composent les programmes d'étude relatifs au chapitre « *Les vecteurs du plan* », ces problèmes intéressent quatre situations essentielles, à savoir :

a) La situation du parallélogramme

A, B, C et D sont quatre points distincts. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (ABCD est un parallélogramme)
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$
- $\frac{x_A + x_C}{2} = \frac{x_B + x_D}{2}$ et $\frac{y_A + y_C}{2} = \frac{y_B + y_D}{2}$ (relativement à un repère donné du plan)

b) La situation du milieu d'un bipoint

A, I et B sont trois points distincts. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- I milieu de [AB]
- $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$
- $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
- $x_I=\frac{1}{2}(x_A+x_B)$ et $y_I=\frac{1}{2}(y_A+y_B)$

c) La situation de l'alignement de trois points, ou du parallélisme de deux droites

A, B et C étant trois points distincts, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- Il existe $k\in \mathbf{R}$, tel que : $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$.
- (A, B, C sont trois points alignés)
- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- Les droites (AB) et (AC) sont parallèles.

d) La situation du centre de gravité d'un triangle

Soit ABC un triangle, A' milieu de [BC] et G un point du plan. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- G centre de gravité d'un triangle ABC
- $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{GA'}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{GA}$
- $\overrightarrow{GA'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$
- $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$

Pour chacune de ces quatre situations, la propriété caractéristique d'une figure géométrique est énoncée sous plusieurs formes et dans différents registres. Les propriétés graphiques de ces figures étant étudiées par les élèves dans les classes antérieures, ceci va permettre de prouver la non-contradiction de la conception $\mathcal{C}$ et en même temps de montrer l'efficacité de l'outil vectoriel pour la description des situations géométriques.

Nous proposons d'analyser ce point de vue avec la situation du parallélogramme. Les élèves de première année secondaire ont étudié dans les classes antérieures les propriétés suivantes, caractérisant graphiquement un parallélogramme :

Tout quadrilatère <u>convexe</u>[14] vérifiant l'une des quatre propriétés (équivalentes[15]) suivantes est un parallélogramme, et inversement:

[14] Dans l'enseignement secondaire tunisien, un polygone est dit "convexe" lorsqu'il est convexe et "*non aplati*".

[15] C'est nous qui précisons que ces propriétés sont équivalentes. Jusqu'au neuvième année de l'école de base, la notion de propositions équivalentes n'est pas enseignée aux élèves.

1) Les côtés opposés sont parallèles.
2) Les côtés opposés sont isométriques.
3) Les diagonales se coupent en leurs milieux.
4) Deux côtés opposés sont parallèles et isométriques.
5)Les angles opposés sont isométriques.

Essayons de voir comment chacune des propriétés caractéristiques d'un parallélogramme, données dans 5.4-a (nouveau savoir), est synonyme à l'une des propriétés graphiques données ci-dessus.

Considérons l'équivalence :

(ABCD *est un parallélogramme*) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

Pour confirmer l'insertion du nouveau savoir dans les acquis antérieurs des élèves, l'enseignant pourrait demander aux apprenants d'indiquer la propriété graphique caractérisant un parallélogramme et qui soit synonyme de l'égalité $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

En comparant les informations données par chacune des propriétés graphiques caractérisant un parallélogramme avec celles que renferme l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, les élèves pourraient constater que l'égalité $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ est synonyme de la propriété : *Deux côtés opposés sont parallèles et isométriques.*

A ce propos, les élèves pourraient apercevoir l'efficacité de l'outil vectoriel dans la description de la situation qui caractérise un parallélogramme. Et ceci :

- pour l'économie que le vecteur apporte sur le plan des représentations sémiotiques
- pour la précision dans la détermination du parallélogramme.

En effet, considérons par exemple la situation (S) suivante :
A, B, C et D sont quatre points distincts et non alignés tels que :
(AB) // (CD) et AB = CD
qui satisfait aux conditions de l'énoncé :

(E) : (*Deux côtés opposés sont parallèles et isométriques*)

Avec cet énoncé, le sujet pourrait constater que les points A, B, C et D forment un parallélogramme, mais il ne va pas pouvoir décider si ce parallélogramme est ABCD ou ABDC. Pour trancher, le sujet est appelé à effectuer une vérification graphique (autrement dit il doit visualiser la configuration géométrique formée par les points A, B, C et D). Ce problème ne se pose pas si la situation (S) était décrite par exemple par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, puisque dans celle-ci, nous lisons (dans le sens des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$) l'ordre des points dans la figure du parallélogramme.

Passant maintenant à l'équivalence :

(ABCD est un parallélogramme) $\Leftrightarrow$

$$\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{x_B+x_D}{2} \text{ et } \frac{y_A+y_C}{2}=\frac{y_B+y_D}{2}$$

Nous remarquons ici que la condition $\left(\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{x_B+x_D}{2} \text{ et } \frac{y_A+y_C}{2}=\frac{y_B+y_D}{2}\right)$ est équivalente à : Les segments [AC] et [BD] ont le même milieu, laquelle est synonyme de la propriété : *les diagonales du quadrilatère se coupent en leurs milieux.* Ici aussi, les élèves pourraient constater la simplicité qu'apporte la condition ($\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{x_B+x_D}{2}$ et $\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{y_B+y_D}{2}$) pour vérifier l'égalité des milieux des deux diagonales.

Finalement, l'équivalence :

(ABCD est un parallélogramme) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

pourrait donner aux élèves une occasion pour tester la cohérence interne du domaine vectoriel, et ceci en cherchant à prouver, en utilisant l'outil vectoriel, l'équivalence entre les égalités $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

Les trois autres situations (celles du milieu d'un bipoint, de l'alignement de trois points et du centre de gravité d'un triangle) peuvent aussi être traitées de manière analogue pour confirmer (selon le sens que nous avons précisé) la non-contradiction de la conception $\mathcal{C}$.

6. Conclusion générale

Selon Balacheff, la conception d'un sujet (relative à une notion mathématique donnée) en situation d'apprentissage peut être modélisée de façon formelle par la détermination des ensembles $\mathcal{P}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ et Σ, qui caractérisent (selon le modèle cK¢) un état du système en interaction sujet/milieu dont l'adaptation optimale est générateur de cette conception (Balacheff, 1995, p224).

En reformulant ce modèle dans le cas particulier de l'analyse d'un contenu mathématique, nous avons montré que les éléments constitutifs des ensembles $\mathcal{P}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ et Σ sont, dans un certain sens, présents dans les programmes d'étude relatifs à l'enseignement du concept *vecteur* donnés le manuel scolaire. Tenant compte de l'importance de ce manuel (officiel) dans la détermination des situations d'apprentissage qui vont être vécues par le sujet au moment de l'étude, et qui représentent de ce fait un facteur déterminant dans la constitution des conceptions de l'apprenant, nous considérons que le quadruplet ($\mathcal{P}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, Σ) déterminé par référence aux connaissances et savoirs donnés dans le manuel scolaire, défini une « *conception a priori* » résultante des épistémologies des auteurs et influencée par des contraintes institutionnelles. Cette « *conception a priori* », pourrait être supposée comme la conception de base qui va engendrer la (ou les) conception(s) réelle(s) d'un sujet, laquelle sera bien sûr influencée, au moment de l'apprentissage, par plusieurs autres facteurs constituant le système sujet/milieu, comme les connaissances antérieures du sujet, les situations effectives d'enseignement/apprentissage, les épistémologies des enseignants...

L'intérêt que nous a apporté cette analyse est, à notre avis, double : d'une part elle nous a montré que les programmes d'étude que renferme le chapitre « *les vecteurs du plan* » sont, dans leur ensemble, conformes aux objectifs fixés par les programmes officiels et présentent une construction mathématique complète et cohérente de la structure vectorielle visée par l'institution ; d'autre part, cette analyse a mis en évidence des faiblesses relatives au travail de certains outils (notamment les connecteurs logiques d'implication et d'équivalence), ainsi que des insuffisances dans la présentation de certaines connaissances. Ce manque apparaît surtout dans les tâches faisant intervenir certains opérateurs de transformation qui vont permettre l'articulation entre les domaines ponctuel et vectoriel d'une part, et les domaines ponctuel et numérique d'autre part (Nous citons principalement les problèmes dérivant de certains opérateurs de transformation tels que : la bijection entre le plan affine $\boldsymbol{P}$ et $\mathbf{R}^2$, l'application f : $\mathbf{P} \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{P}}$ et les bijections entre des parties de $\mathbf{R}$ et les parties correspondantes d'une droite affine). Ceci pourrait gêner une construction claire et satisfaisante de la conception de « *vecteur* » chez les apprenants

Ainsi, en identifiant les difficultés éventuelles d'enseignement résultantes de l'organisation des connaissances proposées dans le manuel scolaire, cette « *analyse conceptuelle* » fait apparaître le rôle dévolu à l'enseignant pour gérer en classe l'aspect implicite de certains savoirs et remédier aux insuffisances et faiblesses pouvant apparaître dans le manuel.

Finalement, ce travail nous a donné l'occasion de réaliser la mise en relation de deux modèles d'analyse des connaissances : le modèle cK¢ de Balacheff et celui des praxéologies de Chevallard. Une telle mise en relation entre différents cadres théoriques devient actuellement une méthodologie de recherche qui ne cesse de se développer en didactique des disciplines.

Bibliographie

ALLANI MOHSEN, & al. (2002) *Mathématiques. 1^e Année de l'enseignement secondaire*. Tunis : CNP, (Code 222 102).

ASTOLFI, J.P., & al. (1997) *Mots-clés de la didactique des sciences*. De Boeck Université, Bruxelles.

BALACHEFF, N. (1995) Conception, Connaissance et Concept. In : *Didactique et technologies cognitives en mathématiques. Séminaires 1994-1995*. Dida Tech. Laboratoire de structures discrètes et de didactique. CNRS-IMAG : Université Joseph Fourier, Grenoble.

CHEVALLARD, Y. (1991) *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD, Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : La notion d'organisation praxéologique. *Actes de l'université d'été de la rochelle, juillet 1998.*

DURAND-GUERRIER, V. & al. (2000) : *Le statut logique des énoncés dans la classe de mathématiques*. IREM de Lyon.

Ministère de l'éducation. (1998) *Programmes officiels de l'enseignement secondaire. Annexe XI. Mathématiques*. Tunis : CNP

NAJAR RIDHA. (2004) *Étude mathématique et didactique de l'enseignement de la notion de vecteur. Analyse praxéologique, sémiotique et conceptuelle du manuel scolaire tunisien de première année secondaire (édition 2002).* Mémoire de DEA Université de Tunis.