SUR LE MANQUE D'UNE THEORIE ALGEBRIQUE DE LA FACTORISATION: LE CAS DU PGCD

Nawal ABOU RAAD
Université de Provence

Alain MERCIER
INRP

Résumé : Les réponses standards des élèves français de la classe de Troisième aux questions de « factorisation des expressions algébriques par un facteur commun k de la forme ax^n / $n \in$ IN» mettent en œuvre un objet mathématique absent des programmes pour ce travail, le PGCD. Nous proposons l'observation d'un épisode didactique en classe de Troisième en France où l'enseignant, en poussant la factorisation au maximum, se retrouve en difficulté. Sa gestion didactique consiste à faire comme si les idées techniques correspondantes existaient tout naturellement, mais il ne peut rendre compte de ce qu'il fait ni aux élèves ni à lui-même.

Mots cles : PGCD, factorisation, facteur commun, registre combinatoire, registre signifiant.

1. Introduction

Cet article porte sur une question très particulière des problèmes de factorisation : la factorisation des expressions algébriques par ce qui est nommé un *facteur commun*, de la forme ax^n, $n \in$ IN. Il s'agit d'une question que nous rencontrons au collège français, en Troisième (neuvième année, quatrième secondaire). Nous ne demanderons pas immédiatement ce qu'est une « expression algébrique » et nous prendrons ce terme comme le font tous les professeurs et leurs tutelles expertes : nous ferons comme si nous en avions une définition. De fait, le terme est défini par ses conditions d'usage : il est employé au Collège et en Seconde, justement pour désigner l'objet des exercices où il est demandé de factoriser. En ces lieux, il semble équivalent aux « expressions littérales » qui sont des « écritures mathématiques, avec des lettres ».

Nous allons montrer que, pour qu'un contrat didactique soit passé à propos des réponses standards aux questions de factorisation, les enseignants mettent en œuvre un objet très utile, le PGCD, qui pourtant demeure implicite. Car le PGCD est *un outil* de factorisation : « être un outil pour » est une relation de dépendance entre un problème et un outil théorique. Un objet de savoir (comme par exemple, le PGCD) ne peut vivre durablement dans l'enseignement que s'il est utilisé par plusieurs autres, s'il les outille, servant par exemple à construire une théorie de plus grande ampleur (comme la factorisation des polynômes, qui permet elle-même de traiter des problèmes plus larges comme la résolution des équations). Inversement, sa présence fait vivre des questions de plus faible niveau mais d'usage fréquent, relatives par exemple à la divisibilité des entiers ou aux tables de multiplication. Nous pouvons qualifier cette relation de dépendance comme une *relation trophique*[1] d'un objet de savoir à un autre : ce terme, qui appartient à l'écologie scientifique, signifie que « l'un se nourrit de l'autre, dans une chaîne alimentaire » et il a été introduit dans l'analyse des organisations de savoirs par Rajoson (1988). La factorisation se nourrit donc du PGCD. Ainsi après avoir disparu en Cinquième[2] où il faisait partie d'un morceau de théorie des nombres qui outillait théoriquement et techniquement la simplification des fractions, le PGCD est revenu quelque temps plus tard... en Troisième, pour compléter théoriquement la construction des fractions plus que pour ses usages techniques : car il est bien tard, la mise en place du travail sur les fractions est faite, les techniques enseignées et apprises ont changé (Mercier, 1993). De plus, le PGCD n'est nommé en Troisième que dans le cadre numérique où il n'a plus son environnement précédent. Il n'appartient plus à un système théorique (l'arithmétique de la divisibilité des entiers) et cela le rend d'autant plus fragile, dans cette classe, qu'il demeure implicite dans le travail des expressions algébriques.

Nous montrons donc comment cela pose des problèmes. Le professeur de notre observation se trouve bien embarrassé et ses élèves restent sur leur faim. Certains de leurs problèmes pourraient pourtant être résolus si le PGCD trouvait toute sa place, nous tenterons de comprendre pourquoi il ne le fait pas. Pourquoi, malgré la place insuffisante qui lui est attribuée, il ne trouve pas le moyen de se développer et de répondre au besoin. Nous avons validé nos analyses en observant comparativement deux professeurs en France et deux au Liban, sur toute la période de leur enseignement de la factorisation, mais nous n'en rendrons pas compte dans cet article, où nous ne travaillerons que sur le cas français.

2. Factorisation et PGCD dans l'enseignement des mathématiques au collège

Les programmes fixent des savoirs pour lesquels l'institution liste les objets à connaître. Pour certains savoirs, nous retrouvons des indications sur les techniques attendues, que l'enseignant introduira suivant ses objectifs. Nous allons donc les étudier comme « les habitats » des deux objets qui nous intéressent dans les programmes actuels du collège et dans les manuels scolaires français, la factorisation et le PGCD.

2.1 La factorisation

Entre les textes des programmes et les manuels de la classe de Troisième, il y a une grande conformité dans l'organisation de l'enseignement de la factorisation. Le premier type de problèmes intitulé « factorisation » fait partie du chapitre « Ecritures littérales ; Identités remarquables ». Deux méthodes de factorisation sont nommées et sont donc des techniques officielles : 1) utiliser *la distribution inverse* pour factoriser des expressions littérales 2) utiliser *les identités remarquables* sur des expressions numériques ou littérales simples. Signalons que la factorisation n'a pas de place dans les programmes de la classe de quatrième, en France.

[1] La relation « utilisation d'un objet mathématique o comme outil pour le travail à propos d'un autre objet mathématique O » est une relation trophique de O à o.

[2] A l'occasion de la révision des programmes par une « commission de réflexion » qui, pressée par un ministre en sursis, avait réfléchi à autre chose.

La première méthode nommée appelle des pratiques anciennes et un objet de savoir qui en rend compte, présenté dès la classe de cinquième, l'identité

$$ka \pm kb = k(a \pm b)$$

Cette identité, qui avait en cinquième une fonction théorique sans usage nouveau puisqu'elle désignait uniquement des pratiques numériques, est utilisée dorénavant sur deux classes de questions :

- Des exemples littéraux de « simplification » des écritures ou « expressions ». Cette simplification est utilisée dans le sens de « réduire » les écritures de façon à donner une écriture « plus courte » c'est-à-dire comportant moins de signes :

$$3x + 5x = (3 + 5)x = 8x$$

  Ainsi, *k* représente là un monôme de la forme : ax^n / a =1 et n $\in \{1;2\}$, sa trace peut donc être suivie, il se conserve dans une réduction.

- Des exemples numériques dans un « calcul mental » qui se situe officiellement dans l'ensemble des décimaux[3] :

$$12 \times 7 + 12 \times 3 = 12(7 + 3) = 12 \times 10 = 120.$$

  Ici *k*, bien qu'il représente un monôme de la forme ax^n / a $\neq$ 1 et n = 0, demeure apparent dans le résultat obtenu, 12 est visible dans 120. Mais en principe, il disparaît dans le « calcul ».

Ainsi en Troisième, **k** est devenu le représentant d'un monôme (sur $\mathbb{R}$?) de la forme ax^n / a $\geq$ 1 et n $\in \mathbb{N}$ Mais dans un calcul arithmétique les noms des nombres ne se conservent pas (12 + 35 = 47) tandis que, si les nombres sont représentés par une lettre, cette lettre demeure dans les transformations algébriques. Ainsi, une première ambiguïté est immédiatement visible parmi les tâches proposées : officiellement, *k*, représente toujours « un nombre ». Mais il ne va pas de soi d'opérer de même sur une formule de calcul comprenant des nombres « connus », « donnés mais non déterminés » ou « quelconques et inconnus ». Tous sont désignés par une lettre considérée comme leur nom et cela ne permet d'opérer de la même manière que si nous opérons sur « une formule de calcul impliquant des nombres donnés ». Le professeur se conduit donc comme si le travail algébrique consistait en une « extension » du travail arithmétique au cas où l'un des nombres demeure incomplètement déterminé (ce qui empêcherait seulement de « terminer la simplification de l'écriture » que produit le calcul mais ne devrait pas poser d'autre problème).

Serfati (2005) sépare, dans l'analyse d'une « formule » ou « forme », le registre combinatoire du registre signifiant. Le registre *combinatoire* traite de la forme : « 12 + 35 » est une *forme* à deux places crées par la « croix » qui les sépare. Cette écriture, qui se lit « ajouter le signe 12 au signe 35 », relève l'idée d'une action à exécuter, une *procédure*[4]. Tandis que le registre *signifiant* traite de ce que la forme signifie : le signe 47 est le *résultat* chiffré du nombre signifié par le signifiant « 12 + 35 ». L'écriture a + b = 47 est de la même forme que 12 + 35 = 47. Les deux assemblages 12 + 35 et a + b conduisent au même résultat, mais dans le second assemblage, nous pouvons substituer

[3] BOEN spécial 10 du 15 octobre 1998, pour la classe de Troisième.

[4] Les trois assemblages 3.3 et 11 – 2, ou encore 72/8 conduisent au même résultat (le résultat est l'entier de signe 9), mais différent quant à la procédure, selon Serfati (2005), p. 76.

de nombreuses valeurs numériques à l'*amont* « a » et à l'*aval* « b » de la « croix » qui est le signifiant d'une addition lorsqu'on travaille dans l'ensemble des nombres. Nous pouvons aussi *substituer* des formes algébriques comme « $3n^5$ » et « nc » et conserver la même interprétation de la forme[5].

Serfati parle de « Révolution symbolique » pour ce phénomène, présenté dans l'enseignement comme « tout naturel ».

La définition de la factorisation donnée par les manuels de Troisième, est la suivante : « Factoriser une somme algébrique, c'est l'écrire sous la forme d'un produit ». Cette phrase annonce clairement qu'il s'agit bien de faire des *transformations combinatoires* de *formes* ; (ζ) : *Somme* $\rightarrow$ *Produit*. Cependant la transformation (ζ) conserve « l'égalité » entre l'expression algébrique du départ (Somme) que nous appellerons dans la suite « forme-énoncé » et celle de l'arrivée (Produit) que nous appellerons « forme-produit » : elles ne désignent plus la même *procédure*, mais appellent le même nombre potentiel qui en serait le *résultat*. Faute d'une théorie des transformations conformes, les seuls contrôles à disposition des élèves passent soit, par une vérification numérique de l'égalité de deux formes considérées alors comme formules de calcul, soit par la transformation inverse de (ζ) appliquée au résultat, ce qui est fort peu ergonomique.

En effet, ces vérifications ne permettent pas de contrôler le cours de l'action et ne donnent qu'un contrôle a posteriori : les élèves vont donc développer des techniques personnelles de contrôle combinatoire, efficaces dans le cours même de leur action. Ces techniques seront fondées sur leurs expériences du travail des formes, se développeront très lentement, mais seront souvent résistantes et erronées : elles sont le fardeau des professeurs qui les voient, pendant des années, conduire aux mêmes erreurs. Nous interprétons ainsi la « règle d'action » que se donnent les élèves et que Tonnelle (1980) a identifiée comme « règle de conservation de la complexité ostensive » qui marque la différence entre le calcul arithmétique (qui donne pour résultat la forme normale chiffrée d'un nombre) et le calcul algébrique (qui conserve les noms des nombres que sont les lettres).

Au niveau de la classe de Troisième, l'enseignement de la factorisation se limite donc à deux règles de réécriture qui font passer l'élève, par la transformation (ζ), d'une « forme » à une autre qui lui est équivalente parce que dans le registre signifiant, elle produirait dans tous les cas le même résultat numérique. Mais sur le plan combinatoire, ces deux « formes » sont différentes : la « forme-énoncé » est une « Somme », alors que la « forme-produit » est un « Produit ». Les deux règles de réécriture sont :

- Celle qui fait appel à la notion de carré.
  La notion de carré est pertinente dans les règles de factorisation utilisant les identités remarquables carrées. Pour factoriser, par exemple $25x^2 - 9$, l'élève doit expliciter les racines de $25x^2$ et de 9 en utilisant la formule productive, qui pourtant n'est jamais écrite, ni par l'enseignant, ni par l'élève : $A - B = (\sqrt{A} - \sqrt{B})\ (\sqrt{A} + \sqrt{B})$ (Tonnelle 1980). Les deux écritures séparées par le signe « deux–traits » écrit =, dans le registre combinatoire ne sont pas de

[5] C'est le sens de « l'explication » que donnent de nombreux professeurs en remplaçant dans les expressions « a » par « mobylette » ou « casquette », un nom quelconque prenant place dans une expression dite algébrique, considérée comme une phrase au sujet indéterminé. Un professeur observé a dit « livre plus livre égale deux livres et non livre au carré » afin d'expliquer que « $a+a=2a$ et non a^2 ».

même « forme », mais elles ont le même sens. C'est par la transformation (ζ) que l'élève transforme à coup sûr $25x^2 - 9$ en quelque chose qui s'écrit explicitement $(5x - 3)(5x + 3)$.

Arrivé à cette « forme », l'élève est conscient que c'est la réponse standard visée par l'enseignement, puisque c'est à travers une règle universelle que la transformation (ζ) se fait. Mais il ne peut valider sa production par lui-même que s'il dispose en privé de la formule productive implicite qui énonce les propriétés à vérifier : $5x$ est la racine de $25x^2$ et 3 est la racine de 9, au delà de la « forme » de deux assemblages agrégés chacun par un couple de parenthèses rondes, séparés par un « blanc linéaire »[6] et qui interprète la transformation (ζ) : « La Somme est bien transformée en un Produit » :

- Celle qui fait appel à un facteur commun.

La mise en facteur d'un diviseur commun est importante dans la factorisation des expressions algébriques qui ne font pas appel à la notion de carré. Il faut alors déterminer « le facteur » qui est le diviseur commun à tous les coefficients numériques de tous les termes de l'expression.

Pour factoriser, par exemple $25x - 75$, l'élève explicitera un ou plus qu'un déchiffrement pour interpréter la forme « Somme ». Il a le choix de déchiffrer suivant

i) 25, qui est le plus grand diviseur commun à 25 et à 75, ce qui lui permet de transformer $25x - 75$, par (ζ), en $25(x - 3)$

ii) 5, ce qui lui permet de transformer $25x - 75$, par (ζ), en $5(5x - 15)$. Arrivé à ce résultat, l'élève se trouve devant un double choix : a) déchiffrer $(5x - 15)$ et l'interpréter jusqu'à avoir le résultat[7] $25(x - 3)$, b) considérer que $5(5x - 15)$ est la réponse visée puisque c'est une « forme-produit ».

La réponse $25(x - 3)$ est acceptée par tout enseignement, et sera récompensée par la note entière. Par contre, la réponse $5(5x - 15)$, bien que la transformation (ζ) y soit parfaitement manipulée, est considérée fausse et sera pénalisée, soit de la note entière soit pour d'autres professeurs, déclarée factorisation incomplète notée à moitié.

- x, l'élève de Troisième qui pense n'être plus à la manipulation de nombres explicites mais de formes algébriques, est dans une impasse.

Revenons à $25x - 75$: lorsqu'il est demandé à l'élève de « Factoriser une telle expression », cela signifie « Transformer l'expression de sa « forme-énoncé » en une « forme-produit » ». L'enseignant, pour tenter de diriger l'action des élèves, explique. Il faut pousser *la factorisation au maximum*, dit-il. La « forme-produit » ne doit plus donner lieu à un déchiffrement, dans un des assemblages, dont l'interprétation puisse mener à une nouvelle factorisation (ce qui signifie que les termes de chacun des assemblages de la « forme-produit » sont premiers entre eux). L'élève qui s'arrête à une pareille réponse $5(5x - 15)$ est en situation de « rupture de contrat » (Brousseau 1989), puisqu'il a mené une factorisation partielle. Il ne s'en rend pas compte, justement parce que 1) il a bien manipulé la transformation (ζ) : la « forme-énoncé » est bien

[6] Le « blanc linéaire » se reconnaît par l'absence du signe sur la « ligne » (d'où son nom), il interprète une multiplication. Serfati (2005), pp 108

[7] Elle consiste à rechercher un diviseur commun puis un autre « pas à pas » à partir des divisions successives en appliquant les règles de divisibilité. Le facteur commun sera le produit de tous ces diviseurs communs.

transformée en une « forme-produit », mais désormais, elle n'est pas la « forme-produit » visée par l'enseignant, 2) il n'y a aucun texte qui le dirige vers la factorisation au maximum. Comment l'élève peut-il être sûr qu'il n'y a plus de manipulations à faire ?

D'où l'importance d'une technique qui serait fondée sur le PGCD, un outil permettant de standardiser toutes les réponses, en donnant d'un seul coup le plus grand facteur commun possible et qui lève toutes les ambiguïtés. Il est important de remarquer que les élèves en présence des nombres familiers petits, multiples de deux, de trois, de cinq, etc, recherchent le plus grand facteur commun par un calcul mental ou par tâtonnement[8]. Par contre, pour les coefficients élevés (supérieur à 25), l'élève se trouve dans une situation où le PGCD lui *manque* (Mercier 1995).

2.2 Le PGCD

L'examen des programmes du collège montre que le PGCD, explicitement, n'outille que la simplification des fractions numériques. Il apparaît aussi que le texte ne donne aucun statut à la décomposition primaire : le PGCD n'a plus l'arithmétique pour habitat, mais plutôt les propriétés numériques : les élèves du collège ont simplifié des écritures fractionnaires dès la classe de sixième, c'est en Troisième seulement qu'ils apprennent ce qu'est une fraction irréductible et une technique pour la trouver. Pour cela, les textes des programmes de Troisième préconisent donc l'algorithme d'Euclide et non pas la décomposition en facteurs premiers, qui est longue pour des nombres assez grands. Les manuels eux aussi déconseillent de calculer le PGCD par la recherche des diviseurs communs. Ils détaillent deux algorithmes d'Euclide : celui des soustractions successives et celui des divisions successives.

3. Le rapport entre un objet arithmétique « Le PGCD » et un objet algébrique « la factorisation »

Nous allons, dans ce qui suit, montrer sur des exemples, comment la gestion didactique du PGCD dans la factorisation des expressions algébriques comme des nombres entiers, dont la relation est institutionnellement invisible, se présente comme « toute naturelle ».

3.1 Simplification

Pour simplifier la fraction **A** = $\frac{725}{870}$, une technique arithmétique permet de définir l'action de l'élève, elle s'appuie sur le calcul du PGCD de 725 et 870 par l'une des méthodes d'Euclide 870-725=145, 725-145=580, 580-145=435, 435-145=290, 290-145=145, 145-145=0. On en déduit une réécriture de la fraction qui se réfère implicitement à la factorisation, puisque l'écriture des entiers 725 et 870 en produits de facteurs (**A** = $\frac{5 \times 145}{6 \times 145}$) sert à démontrer la simplification par 145. L'élève agit dans le milieu des savoirs arithmétiques sur la factorisation des nombres.

[8] Abou Raad (2003).

3.2 La recherche du facteur commun

La recherche du facteur commun pour factoriser l'expression algébrique $A = 64x - 16$, place l'élève en situation de devoir déchiffrer A (c'est-à-dire, en reconnaître la structure combinatoire), puis de l'interpréter (c'est-à-dire lui apporter des significations). Ces opérations supposent la manipulation de la division et des règles de divisibilité pour transformer la « forme-énoncé » en « forme-produit », qui fait sortir l'élève de la situation de déchiffrement. Le traitement par deux factorisations parallèles à l'image de ce que l'on fait pour les fractions, $A = 2\times 32x - 2\times 8 = 2(32x - 8)$, semble pertinent si la réponse n'est pas explicitement reliée à la factorisation des nombres entiers par leur PGCD. Pourtant, cette transformation ne répond pas aux attentes des enseignants et l'élève est amené à factoriser de nouveau. Le nombre des étapes à franchir dépend alors de la grandeur du facteur privilégié : plus le premier facteur commun est petit, plus le nombre des étapes grandit, tandis que le calcul du PGCD demeure implicite.

4. Le PGCD absent de l'enseignement de la factorisation ?

Nous allons, dans le cas de la factorisation de l'expression $B = 6x^2 + 18x$, montrer comment un enseignant, pour factoriser au maximum, enseigne le PGCD sans le nommer. Il nous a semblé que cet exemple est révélateur d'un phénomène récurrent. Nous l'attestons plus particulièrement ici dans les quatorze séances successives d'enseignement sur le Chapitre « Identités remarquables-Equations-Produits » réalisées par un même enseignant qui a plus de quinze années d'expérience. L'enseignant était muni d'un micro-cravate d'un enregistreur digital, un enregistreur classique était placé parmi les élèves pour capter le son de toute la classe. Assis au fond de la classe, nous avons noté toutes les écritures au tableau. Nos déplacements pour observer le travail individuel des élèves étaient rares pour ne pas perturber certains élèves qui refusaient de nous laisser voir leur production. Nous avons enregistré et transcrit toutes les séances. Nos observations ont été faites pendant le premier trimestre de l'année scolaire 2004/2005, dans une des classes de Troisième d'un collège public à Lyon. Nous avons choisi cette classe parce qu'elle regroupait, pour le temps de la présence en France de leur famille, des élèves d'un bon niveau culturel et social, issus de tous pays : ce qui engageait le professeur à expliciter certaines procédures qui semblent spécifiques à l'enseignement français et qui autrement sont naturalisées. On notera que certains élèves ont une difficulté à s'exprimer correctement en français, ceci réduit la plupart du temps l'interaction professeur/élève et la limite aux élèves des pays francophones.

Le corpus présenté ici porte sur un épisode didactique de la deuxième période de la quatrième séance d'enseignement. C'est le cas où les élèves ne peuvent réussir la factorisation au maximum de la « forme-énoncé » en une seule étape. Il s'agit d'une action conjointe professeur/ élève pour faire réussir le contrat didactique : trouver le plus grand facteur commun dans le cas de $6x^2 + 18x$. L'enseignant va devoir admettre toutes les tentatives des élèves et les accompagner pour les pousser à trouver le plus grand facteur commun à $6x^2$ et à $18x$.

Mais reprenons du commencement. Deux périodes de cinquante minutes sont séparées par une pause de cinq minutes. L'enseignant, pour trois minutes, a fait un rappel sur le développement et la factorisation par usage de la distribution dans le sens contraire $k(a + b) = ka + kb$. Puis il est passé à la correction orale suivie d'une correction, écrite au tableau, du devoir du jour dont les exercices sont préparés sur une feuille distribuée à tous les élèves en photocopie (Doc 1).

En seconde période, pour huit minutes, l'enseignant a continué le travail sur le développement pour passer ensuite, à la factorisation par un monôme. Il a fait un deuxième rappel de la formule avant d'entamer les expressions de l'exercice 3 du Doc 1 qui parlent de la factorisation par un facteur commun monôme (le corpus est tiré de cette partie). A la vingtième minute, le **k** change de statut dans le même exercice, il devient maintenant un binôme de la forme $(ax + b)$ et la factorisation est menée par identification à la « forme » $ka + kb = k(a + b)$.

Conventions de notation

Dans tous le corpus, nous avons identifié par

P	L'enseignant
El	Un élève non identifié
Els	Plusieurs élèves s'exprimant en même temps
An ;Mar ;.	Les élèves de la classe sont identifiés par deux ou trois lettres
[......]	Mot ou phrase que nous n'avons pas compris
..//..	Suite d'un tour de parole

Nous n'avons pas utilisé le codage habituel pour transcrire les discours. Nous avons choisi :

i) la virgule, pour un arrêt d'une seconde
ii) le point pour un arrêt entre une seconde et quatre secondes.
iii) de passer à une nouvelle ligne pour un arrêt de plus de quatre secondes.

Signalons aussi que les écrits entre parenthèses décrivent l'action simultanée avec le discours que nous avons noté sur notre cahier.

Min 13 sec 40 Travail d'Eq, factorisation de $6x^2 + 18x$

L'enseignant a adopté une stratégie qui ressemble à une 'surenchère'. Il reprend les propositions à chaque fois sans aucune interprétation et sans dire le nom de l'élève, accompagne les élèves pour donner leur « forme-produit », corrige les erreurs de calcul et pousse l'ensemble classe à factoriser *encore* pour qu'ils trouvent collectivement le plus grand facteur commun, sans le déclarer tel.

41	**P**	…//… **Eq** eh ben, viens faire le suivant.
42	**Ch**	Lequel ?
43	**P**	C'est six x au carré plus dix huit x. (**Eq** écrit en même temps que **P** dicte)
44	**Eq**	Ça fait (et elle écrit : x(6x + 18))
45	**P**	Alors, tu nous écris x facteur de six x plus dix huit. Donc, c'est une factorisation. On peut, peut-être pousser l'élégance en allant un tout petit peu plus loin ! (il regarde l'ensemble classe, deux secondes après **Be** lève le doigt) Oui

Dans ce dialogue, nous pouvons observer que ce qui est une factorisation au maximum pour l'enseignant, ne l'est pas pour les élèves. **Eq** est une élève d'origine espagnole, qui est bonne selon l'enseignant. Elle n'hésite pas devant la « forme-énoncé » qu'elle déchiffre mentalement et interprète rapidement pour produire une « forme-produit »que l'enseignant accepte en un premier temps en disant « *c'est une factorisation* ». Il a trouvé que **Eq** a manipulé correctement la transformation (ζ). Mais, il semble que ce n'est pas cette réponse qu'il attendait, et demande à **Eq** de pousser un peu plus loin la factorisation, pour « l'élégance », puisqu'il ne peut pas dire qu'il faut rechercher le PGCD (qui n'a pas été encore expliqué). **Eq**, ne réalise pas la demande de **P**. Elle se trouve incapable de changer sa réponse, puisque la transformation (ζ) est faite correctement et que $x(6x + 18)$ est bien une « forme-produit ».

Min 14 sec 23

46	**Be**	C'est deux x entre parenthèses
47	**P**	Alors, on propose deux x
48	**Be**	Deux x, entre parenthèses trois x plus six (elle dicte et **Eq** écrit : $2x\,(3x + 6))$
49	**P**	Plus six, je ne vous vends pas six, hein ! Neuf, plus neuf
50	**Eq**	Ah ! Oui
51	**El**	Six

Be est une américaine, qui est en France depuis deux mois. Elle a déjà étudié la factorisation dans son pays en quatrième. Elle répond, en partie, aux attentes de **P**, puisqu'elle propose $2x$ pour facteur. Elle a déchiffré la « forme-énoncé » et l'a interprétée différemment de **Eq. P** ne lui laisse pas le temps d'annoncer sa réponse en entier. Il lui coupe la parole pour reprendre à haute voix devant l'ensemble classe le nouveau facteur commun proposé, pour dire implicitement « *donnez moi d'autres facteurs communs* » comme fait le commissaire-priseur dans les ventes aux enchères. Ce faisant, il centre l'attention sur le facteur et laisse de côté le produit. **Eq** réagit et écrit au tableau les énoncés de **Be**. Elle a réussi à savoir l'emplacement des parenthèses rondes, puisque **Be** a dit « *entre parenthèses* » après $2x$, mais elle n'a pas remarqué l'erreur de calcul de sa camarade. Au TP 49, **P** avait l'occasion de motiver la technique qui produit *9* à partir de *18* et de *2*, mais il la manque. Ses demandes d'explication ne sont donc pas à prendre au sérieux, puisqu'il y renonce au moment où il pourrait les satisfaire en décomposant *18* ; tous les élèves le savent et il pourrait le rappeler, mais cette technique (concurrente du PGCD) appartient comme le PGCD au monde des pratiques numériques, elle se trouve donc interdite comme ce dernier. L'explication alambiquée au TP 63 montre bien comment cela se passe.

Pendant que **P** s'occupait de la correction de l'erreur du calcul numérique, un élève crie « *six* ». Observons ensemble le reste de ce dialogue.

Min 14 sec 41

52	**P**	Alors, on propose une autre factorisation, on propose ça et j'entends une autre proposition
53	**Er**	Six x
54	**P**	On propose avec six. Six x.
55	**Er**	Six x entre parenthèses

56	P	Alors, si tu mets six x en facteur
57	Er	Six x entre parenthèses x plus trois

P accepte la Troisième proposition « six ». **Er** a surenchéri et il propose un autre facteur commun « six x », et avec ce facteur commun, **Er** a retrouvé la « forme-produit » qu'attendait **P**. Il a transformé par (ζ) la « forme-énoncé » $6x^2 + 18x$ en « forme-produit » $\mathbf{6}x(x + 3)$ en utilisant le plus grand facteur commun à $6x^2$ et $18x$, sans dire que c'est la factorisation maximale. Avec cette réponse, **Er** a répondu à la demande implicite de **P** qui n'a pas commenté, mais qui l'a accompagné pour donner la « forme-produit » visée. Nous voyons que **Er** et **P** convoquent le PGCD sans l'évoquer. L'absence du PGCD comme fondement explicite d'une technique efficace dans l'enseignement de la factorisation n'interdit pas à cet élève de s'en emparer, mais cela appartiendra à son rapport privé à la factorisation et l'enseignant fera comme s'il n'avait rien vu, l'élève comme s'il n'y avait rien à dire.

Min 15 sec 21

63	**P**	Ahh !! Alors là, on va s'arrêter là, se pose un petit problème, mais j'avoue, je ne sais pas leee, donc, on peut mettre x en fac, bon ce sont trois factorisations. Les trois factorisations sont correctes, d'accord. Alors, euuhh ! On est toujours, un tout petit peu, embêté quand on est à ça, …//…Je dirais, me semble-t-il, j'ai pas lu les textes en France, on est moins clair à ce niveau là. Mais, disons qu'on va plutôt privilégier cette écriture là (il montre **6x(x + 3)**), c-à-d on va essayer de mettre en, de mettre en facteur le plus, la plus grande quantité, le le, le terme le plus grand possible, d'accord, mais néanmoins, les trois réponses sont des factorisations qui sont corr, sont des factorisations, on a factorisé, vous comprenez. Alors là (**x (6x + 18)**) on a mis x en facteur. Là, (**2x(3x + 9)**) on s'est rendu compte qu'il y avait des facteurs communs, donc j'ai bien aimé qu'on trouve le deux, on l'a pas trouvé tout de suite. On aurait pu mettre le trois aussi, hein, trois x facteur de deux plus six (il le dicte mais ne l'écrit pas au tableau), on aurait pu mettre ça aussi. Donc différentes factorisations, disons que l'usage veut qu'on mette, qu'on essaye de mettre en facteur le plus grand, le nombre le plus grand possible, d'accord. C'est plutôt, je dirai c'est plutôt un usage, car plus tard quand vous factorisez, vous factoriserez, vous essayeriez deee, deeee, ben ça sera pour étudier les équations, donc je dirai, les trois fonctionnent, même si on veut résoudre des équations du genre six au carré plus dix huit égal à zéro, on peut prendre les différentes expressions. Mais ce qu'on attend plutôt, c'est de mettre, ce qu'on va privilégier c'est le six x facteur de x plus trois (**6x(x + 3)**).

Ici, **P** propose un arrêt du temps. En disant « *j'avoue, je ne sais pas* », il s'engage comme personne travaillant des mathématiques et non plus comme enseignant donnant la parole officielle. Il interprète les trois transformations du début : «*Les trois factorisations sont correctes, d'accord* » mais dans le même tour de parole, il les considère bientôt comme des possibles. Il affirme que ces trois réponses sont toutes des factorisations, et il s'apprêtait à dire correctes, mais il y renonce, et reprend son affirmation qu'elles sont des factorisations. Il s'est contenté de dire publiquement que ce sont bien des factorisations, puisque chacune d'elles représente la transformation

(ζ) : « *les trois réponses sont des factorisations qui* <u>*sont corr*</u>*, sont des factorisations,* <u>*on a factorisé*</u>*, vous comprenez* ».

Par un jeu de langage, jouant au sein du contrat didactique propre à la factorisation, il demande par « *privilège* » d'aller au plus loin possible en mettant « *la grande quantité* » en facteur. Il n'arrive pas à prononcer le plus grand diviseur commun en disant « *le, le, le terme le plus grand possible* ». Il annonce devant le groupe classe que, aucun texte dans les curriculums ne précise que la factorisation doit être poussée au maximum.

Il faut factoriser par le plus grand facteur commun possible, par effet d'« usage », « *l'usage veut qu'on mette, qu'on essaye de mettre en facteur le plus grand, le nombre le plus grand possible* ». **P** évite à chaque fois de prononcer le « PGCD », ou le « plus grand diviseur commun », il tourne son discours au « nombre le plus grand possible ». Par un mouvement qui le replace en position d'analyste de la production des élèves, l'enseignant légitime les productions obtenues « *on a mis x en facteur* », « *j'ai bien aimé qu'on trouve le deux* », etc.

Et à la fin de son discours, pour mettre en évidence la réponse voulue, il parle avec le pronom « on », un « on » qui groupe non pas l'enseignant et les élèves comme dans « *on s'est rendu compte qu'il y avait des facteurs communs* », mais l'enseignant et l'institution « *ce qu'on attend plutôt, c'est de mettre, ce qu'on va privilégier c'est le six x facteur de x plus trois* **:** *$6x(x + 3)$* ».

Min 18 sec 24

69	**P**	..//.. Mais, on pourrait mettre en facteur douze x aussi, facteur de x sur deux, enfin bon. Je veux dire, on peut mettre le coefficient qu'on veut à la limite.

La remarque sur le fait qu'on pourrait tout aussi bien mettre *12* en facteur commun est intéressante à plus d'un titre : elle montre que pour l'enseignant, la factorisation n'est pas ici sous le contrôle d'une théorie comme celle de la divisibilité dans l'anneau des entiers relatifs. Pourtant, il n'envisage pas qu'on puisse factoriser par x^2 ou x^3 tout aussi bien et « il oublie » qu'on le fera en classes terminales pour démontrer la tendance asymptotique de la fonction : mais alors on ne sera plus dans l'anneau des polynômes, où la question de la divisibilité se pose. On ne peut donc pas « mettre le coefficient qu'on veut » puisqu'on décompose les entiers en facteurs premiers et les monômes ax^n en monômes élémentaires.

5. Conclusion

L'action de l'enseignant a amené les élèves à trouver le plus grand facteur commun sans l'annoncer, par « un jeu implicite de 'surenchère' ». La trouvaille de **Er** pour *$6x$* montre que certains élèves peuvent répondre, dans les cas simples et poussés par la situation. Et l'interaction de l'enseignant avec les élèves pour rechercher des facteurs autres que x, et $2x$ montre que lui pense avec le PGCD. Comme on dit dans le sud, « il a manqué prononcer le mot », pour convaincre les élèves en nommant la clé de la technique et leur facilitant ainsi la tâche de factoriser : l'objet a ici une niche écologique. Mais, il s'est interdit de confier son nom, puisque dans les programmes, l'objet n'a pas d'habitat dans le travail de factorisation. L'absence du PGCD dans ces questions est, pensons nous au terme de nos observations, un effet de l'absence de toute technologie relative aux techniques de factorisation.

C'est qu'un discours technologique supposerait que l'on nomme d'un terme pertinent les objets dont on parle : les « expressions algébriques à une seule lettre ». Ce sont en fait des polynômes de cette lettre, les « facteurs » cherchés sont des polynômes de degré zéro (des coefficients numériques), ou un (des monômes et des binômes). La factorisation des polynômes en binômes permet de déterminer les zéros du polynôme, et le problème de la factorisation est en fait le problème théorique de la divisibilité de ces objets organisés en anneaux. L'interdiction absolue de toute référence théorique qui est la conséquence des contre-réformes des années quatre-vingt a produit, par un phénomène de disparition en cascade, une catastrophe écologique : professeur et élèves n'ont plus les moyens de légitimer cette pratique élémentaire, ainsi déstabilisée après bien d'autres ; la timide réintroduction du PGCD, il y a quelques années, n'y change rien et nous disons que c'est là un des phénomènes *d'implosion du curriculum mathématique du Collège* dont nous observons les effets depuis maintenant vingt ans.

Bibliographie

ABOU RAAD N. (2003), *Difficultés rencontrées par les élèves de la classe de E.B.8 à la fin de l'apprentissage de la factorisation*, DEA, Université Libanaise, Faculté de Pédagogie

BROUSSEAU G. (1989), *Le contrat didactique.* RDM vol 9/3, La Pensée sauvage.

CHEVALLARD Y. (1992), *Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique*, RDM vol 12/1, La Pensée sauvage.

MERCIER A. (1995), *Le traitement d'éléments privés du rapport des élèves aux objets de savoir mathématiques*, *In* G. Arsac., D. Grenier D. & A. Tiberghien (dir.) *Différentes formes du savoir.* Grenoble, La Pensée Sauvage, pp. 145-169.

RAJOSON L. (1988), *L'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique : trois étude de cas*, Thèse Université d'Aix-Marseille II.

SERFATI M. (2005), *La révolution symbolique : La constitution de l'écriture symbolique mathématique*, Editions PETRA.

TONNELLE J. (1980), *Le monde clos de la factorisation au premier cycle*, DEA, Université d'Aix-Marseille II.