DES GRAINES ET DES SOURIS

Eugène COMIN
Professeur Lycée Arnaut Daniel
Riberac (Dordogne)

Introduction

Pourquoi enseigner la proportionnalité ?

La proportionnalité est une connaissance ancienne qui a joué un rôle moteur dans la construction des mathématiques. En décrivant des relations de dépendance entre grandeurs à l'aide des rapports, elle est à l'origine de l'étude des relations fonctionnelles : fonction linéaire[1] , fonction quadratique[2], etc. … L'arrivée de l'algèbre a rendu caduque l'usage et le vocabulaire des proportions en mathématiques mais les structures numériques de la linéarité ignorent les fonctions sociales de la proportionnalité : le vocabulaire des fonctions n'est pas utilisé pour décrire la proportionnalité des grandeurs. (On ne dit pas couramment de « deux quantités proportionnelles » qu'elles sont « linéairement dépendantes »).
Dans l'enseignement élémentaire, l'étude des grandeurs et de la proportionnalité est à la base des différents apprentissages mathématiques mais dans l'organisation scolaire française actuelle, les connaissances de la proportionnalité n'alimentent pas correctement l'étude algébrique des relations fonctionnelles faite dans le secondaire. Elèves et professeurs éprouvent des difficultés à établir un lien entre proportionnalité et fonction linéaire. Le passage du cadre[3] arithmétique de la proportionnalité au cadre algébrique de la linéarité nécessite une adaptation du modèle proportionnel. La situation « des graines et des souris » s'inscrit dans un processus d'apprentissage à long terme où la fonction linéaire apparaîtrait comme une abstraction qui modélise et réfléchit les connaissances de la proportionnalité entre grandeurs.

Les connaissances mathématiques actuelles permettent de traiter la linéarité indépendamment des grandeurs et les calculs sur les rapports et proportions peuvent être considérés comme de banales applications des connaissances sur les structures numériques mais les élèves de l'école primaire ne connaissent pas les nombres abstraits. Pour qu'ils puissent donner du sens aux différents objets mathématiques, il faut qu'ils réalisent des opérations sur des objets matériels connus. Il est donc nécessaire de modéliser la connaissance initiale de la linéarité dans son rapport avec les grandeurs. Par conséquent le milieu de référence pour l'école primaire est le domaine des grandeurs. La création de situations didactiques ne peut pas faire intervenir la proportionnalité dans toute sa généralité car les élèves apprennent les nombres entiers avant d'aborder les rationnels et

---

[1] Une fonction est linéaire si les rapports scalaires homologues sont égaux.

[2] Une fonction est quadratique si le « taux d'accroissement » est proportionnel à la « variable générative ».

[3] Régine Douady ; *« Jeux de cadre et dialectique outil - objet »* ; R.D.M. vol.7 n°2.

les décimaux. Leur répertoire s’enrichit progressivement de connaissances par une conversion des structures du milieu des grandeurs (rapport, mesures) en structures numériques (nombres entiers, décimaux, rationnels).
Par ailleurs, une fonction met en relation des quantités variables où toute variation de l’une entraîne ou accompagne une variation de l’autre, donc les notions de fonctions et de variables sont indissociables. Par conséquent pour abstraire la fonction linéaire de la proportionnalité des grandeurs, il est nécessaire d’établir une dialectique entre les notions de grandeurs et de variables numériques, d’une part, et les notions de rapports et de nombres, d’autre part. Mais l'épistémologie génétique nous enseigne que les opérations formelles nécessitent de 11 à 12 ans d’âge. Il faut donc attendre le collège pour abstraire de la proportionnalité une formalisation telle que la fonction linéaire en tant que relation numérique avec les propriétés qui la caractérisent. Néanmoins, on peut dès l’école primaire, organiser un enseignement qui prépare les élèves au saut de complexité que suppose cette abstraction. Celle-ci nécessite une connaissance même modeste sur les nombres rationnels, une pratique des techniques de la linéarité, une familiarité dans l’usage implicite des fonctions en relation avec l’idée de variable.

La situation « des graines et des souris » a pour objet de construire les savoirs sur la proportionnalité et de familiariser les élèves de CM1 avec les notions de variables, de fonctions et de nombres rationnels.

Pourquoi des graines et des souris ?

Nous souhaitons proposer aux élèves des situations propices à l’émergence de raisonnements arithmétiques :

- qui apportent à chaque élève les connaissances nécessaires à son intégration sociale et professionnelle,
- qui soient adaptées aux développements génétique et cognitif du sujet,
- qui s’inscrivent dans un processus d’algébrisation à long terme.

Dans la recherche de situations didactiques, l’action objective est le fondement de la situation de référence. La mise en place d’une heuristique nécessite un milieu matériel qui problématise cette action de telle sorte que les techniques de la proportionnalité apparaissent comme moyens pertinents de résoudre le problème.

Les raisons d’utiliser la proportionnalité

Nous avons repéré trois raisons d'utiliser la proportionnalité : les lois physiques (la proportionnalité entre la masse et le volume exprime que le corps étudié est homogène), les nécessités logiques (l'agrandissement du puzzle est un exemple connu de similitude) et les conventions sociales (les prix sont ou ne sont pas proportionnels aux quantités).
Dans les deux premiers cas, les opérations effectives sur les objets matériels permettent aux élèves des validations perceptives mais ils sont confrontés aux difficultés de mesurages. La dispersion des mesures qu'ils obtiennent les conduit à mettre en doute l'adéquation de leurs stratégies et à en changer. Résoudre implicitement les problèmes d'approximation pour construire une structure numérique satisfaisante nous a paru une condition didactique difficile et onéreuse. Pour échapper aux contraintes de mesurage nous avons choisi de faire émerger le modèle linéaire de la considération de rapports de naturels auxquels les élèves auraient recours pour des raisons d'équité. Pour savoir si cette convention sociale est suffisamment forte et motivante pour provoquer chez les élèves l’usage des techniques de la linéarité, il fallait l’expérimenter. Dans la situation « des graines et des souris », on demande aux élèves de distribuer des paquets de graines à des

groupes de souris d'effectifs différents (ou projeter de le faire) ; on attend d'eux qu'ils utilisent de manière implicite les propriétés de la proportionnalité pour réaliser l'équité.

Le concept d'équité

L'idée d'utiliser la proportionnalité comme modèle social pour réaliser l'équité nécessite un premier niveau d'abstraction de la part des élèves (qu'est-ce que l'équité ?) avant même l'élaboration du modèle. En effet, l'équité ne fait pas référence à une règle universelle. Aristote distinguait la « justice distributive » de la « justice corrective ». Selon lui la justice distributive repose sur une égalité non absolue, mais proportionnelle qui intègre l'idée de mérite. Platon avait distingué « deux égalités, qui portent le même nom, mais qui en pratique s'opposent presque sous bien des rapports. …la plus vraie et la plus excellente attribue davantage au plus grand et moins au plus petit, donnant à chacun en proportion de sa nature ».
Les premières expérimentations de la situation étudiée montrent que chez les enfants l'**équité** c'est « **l'égalisation des parts** », c'est le premier palier d'abstraction.
Pour égaliser les parts, les élèves vont élaborer les techniques de la proportionnalité. C'est en réalisant une distribution « régulière » que naît l'idée de **ration**, de part invariante de graines par souris. Le concept de ration nécessite donc un deuxième palier d'abstraction qui doit réfléchir l'idée de régularité, de « quantité de nourriture par souris » même quand cette quantité n'est pas un nombre entier de graines, c'est-à-dire n'est pas un nombre pour les élèves de cet âge. Il y a une nécessité de relation circulaire et d'étayage entre les idées de ration, d'équité, de distribution régulière. La validation d'une distribution équitable ne peut être que raisonnée.

Le concept de ration

Dans une distribution équitable, la ration est une quantité, une grandeur, qui peut être codée par différents couples (nombre de graines, nombre de souris) équivalents ; deux couples sont équivalents s'ils forment une proportion (7 graines pour 3 souris équivaut à 14 graines pour 6 souris). La classe d'équivalence est le nombre qui mesure cette ration. La ration est une grandeur dérivée, sa mesure est aussi le coefficient de l'application linéaire qui au nombre de souris associe le nombre de graines.
Il n'y a pas dans ce milieu géré par l'équité de difficultés de mesurage ; mais le concept de ration nécessite deux niveaux d'abstraction. L'équivalence des couples représentant une ration ne peut pas être validée par un mesurage mais par un raisonnement qui s'appuie sur la notion d'équité préalablement modélisée par « l'égalisation des parts ».

Comparaison de deux rations

L'idée que des souris peuvent manger plus ou moins de graines suggère que la ration soit une grandeur variable. Les stratégies de comparaison dérivent de raisonnements sur ces variations. La ration d'une distribution est supérieure à la ration d'une autre distribution si chaque souris de la première mange plus que chaque souris de la seconde. Or la mesure d'une ration étant une classe d'équivalence, les élèves sont conduits à élaborer des techniques de comparaison de deux couples (nombre de graines (g), nombre de souris (s)) ; la ration dépend du nombre de graines et du nombre de souris. Les élèves ont à construire un pré ordre sur les couples grâce au raisonnement de base suivant : la ration est d'autant plus grande qu'il y a plus de graines ou moins de souris. Les cas particuliers sont ceux où les couples ont soit un même nombre de souris soit un même nombre de graines (même dénominateur ou même numérateur pour les fractions correspondantes).

Somme de deux rations

C'est l'idée « spontanée » d'équité qui est à l'origine du concept de ration et qui permet la comparaison de deux rations. Mais la somme de deux rations correspond à la somme de deux fonctions linéaires puisque le nombre qui mesure une ration est aussi le coefficient d'une fonction linéaire. On peut imaginer des situations pour engendrer la somme de deux rations, mais ce n'est plus l'équité qui contrôle cette opération. Il faut que les mêmes souris mangent deux fois. Par exemple, comment additionner les rations (3 graines pour 7 souris) et (8 graines pour 13 souris) ? Remarquons que la tentation serait grande chez les élèves de dire que 20 souris mangent 11 graines puisque additionner c'est grouper les objets.
On peut raisonner de la manière suivante : la première ration peut être définie par 13 équipes de 7 souris (soit 91 souris) qui s'approprient 13 parts de 3 graines. La deuxième ration peut être définie par 7 équipes de 13 souris qui s'octroient 7 parts de 8 graines. Il faut ensuite expliquer que les mêmes 91 souris mangent 3 × 13 graines puis 8 × 7 graines soit en deux fois 39 + 56 = 95 graines. La ration somme est donc représentée par 91 souris qui mangent 95 graines.

Reste la question de la compatibilité de l'addition avec la relation d'équivalence.

> Exemple : le couple (21 souris ; 9 graines) représente la même ration que le couple (7 souris ; 3 graines) et le couple (26 souris ; 16 graines) représente la même ration que le couple (13 souris ; 8 graines). La procédure précédente donne : 21×26 souris ou 26×21 souris mangent $(9 \times 26 + 16 \times 21)$ graines, donc 546 souris mangent 570 graines. De même 7×13 souris ou 13×7 souris mangent $(3 \times 13 + 8 \times 7)$ graines, donc 91 souris mangent 95 graines. L'idée d'équité permet de vérifier l'équivalence des deux couples (91 souris ; 95 graines) et (546 souris ; 570 graines) puisque les rapports internes $\frac{546}{91}$ et $\frac{570}{95}$ sont égaux.

La complexité didactique s'ajoutant à la complexité mathématique, nous avons renoncé à la construction de la somme de deux rations.

Le milieu matériel

L'objectif général de la situation est de faire apparaître le modèle proportionnel comme une convention socialement équitable. Pour que les élèves puissent réaliser l'idée qu'ils se font de l'équité on leur demande de distribuer des paquets de graines à des groupes de souris d'effectifs différents (ou projeter de le faire).

Pourquoi des souris ?

On pourrait impliquer plus directement les élèves en leur demandant par exemple de se répartir des sucreries ; mais ce serait prendre le risque de les entraîner dans des querelles qui même après une issue favorable ne seraient pas sans laisser une certaine amertume. Pour qu'ils soient directement impliqués nous avons tenté de les placer en position de « législateur ». En même temps il est nécessaire de « dramatiser » la situation pour éveiller chez les élèves un sentiment de justice sociale qui fasse naître la nécessité d'élaborer des règles tout en gardant une certaine distance par rapport au milieu de référence qui oblige à objectiver ces règles.

Pourquoi des groupes de souris ?

Si on demande aux élèves de distribuer des graines à l'ensemble des souris, leur tâche se résume à effectuer une division euclidienne (comme au CE). Dans la situation considérée, il y a obligation de faire correspondre une quantité de graines à chaque groupe de souris, la quantité de graines étant fonction du nombre de souris.

Pourquoi des paquets de graines ?

Les paquets de graines et les groupes de souris contribuent à matérialiser la correspondance entre des « grandeurs mesurées ». Chaque paquet concrétise la « quantité de graines » que l'élève doit prévoir pour un « groupe de souris » afin de réaliser l'idée qu'il se fait de l'équité. C'est cette obligation de faire des prévisions sur des quantités qui contribue à construire l'idée de « variable » et de « fonction ». La « dépendance d'origine intellectuelle », dictée par l'équité, entre les deux types de variables « quantité de graines » et « quantité de souris » conduit à considérer la « fonction » comme l'explicitation d'une dépendance entre ces deux grandeurs et non comme une simple correspondance terme à terme.

Pourquoi des graines ?

Pour obliger l'élève à expliciter un nombre rationnel avec un couple d'entiers, il faut que ces entiers soient des mesures de grandeurs discrètes (non fractionnables). Les élèves ont des difficultés à concevoir que 3 souris puissent se partager équitablement 7 graines. Il serait plus confortable pour eux d'imaginer que 3 souris se partagent 7 biscuits car les biscuits sont sécables. Mais sous ces conditions les élèves pourraient expliciter la ration sous la forme « deux biscuits et un tiers de biscuit par souris ». Or ce n'est pas l'écriture standard à laquelle nous voulons aboutir. Nous souhaitons obliger les élèves à expliciter cette ration par un couple d'entiers : 7 graines pour 3 souris.

Traitement didactique de la proportionnalité

La complexité du projet nécessite de discriminer les variables des situations dans lesquelles la proportionnalité va fonctionner : grandeurs ou variables numériques, éléments d'une grandeur ou d'une structure numérique, relations entre grandeurs homogènes ou hétérogènes, grandeurs proportionnelles ou fonction linéaire, etc. L'élaboration d'une situation adaptée au projet suppose l'analyse didactique des objets qui constituent l'environnement de la proportionnalité, pour une articulation logique et fonctionnelle qui leur permet d'entrer progressivement dans le répertoire des élèves en suivant une complexité croissante de leurs structures. Nous résumons maintenant les principales variables didactiques, qui ont régi la construction de la situation « des graines et des souris ».

Les cadres

La proportionnalité simple modélise une contrainte physique, logique ou sociale entre deux grandeurs[4]. Nous dirons que deux grandeurs sont proportionnelles si tout rapport entre deux éléments de l'une d'elles est égal au rapport entre les deux éléments correspondants de l'autre. Pour décrire la proportionnalité entre deux grandeurs, il faut donc disposer d'un moyen de définir les rapports dans chacune d'elles (rapports internes). Cette condition est réalisée quand les grandeurs sont mesurables[5].

[4] Nous ne considérons que des grandeurs arithmétiques telles que : masse, volume, longueur, température, etc.

[5] Nous dirons qu'une grandeur est mesurable si elle a une structure additive de semi-groupe archimédien. Certaines grandeurs ne sont pas mesurables car elles ne sont pas additives : c'est le cas des échelles (potentiel électrique, température en degrés Celsius, échelle de Richter, …) et des indicateurs (audience médiatique, intelligence, pollution, …).

Dans la situation envisagée, les grandeurs en correspondance sont des quantités de souris et des quantités de graines. L'équité est réalisée si au double, au triple, etc., de souris correspond le double, le triple, etc., de graines :

$$\begin{tikzcd}
\text{Quantités de souris} & \text{Quantités de graines} \\
s \arrow[r] \arrow[d, "\times q"'] & g \arrow[d, "\times q"] \\
s' \arrow[r] & g'
\end{tikzcd}$$

Le « rapport interne »[6] q (2 ou 3…) est conservé dans le passage d'une grandeur à l'autre.

Le rapport « externe » entre les quantités de souris et les quantités de graines n'est pas explicitable pour des élèves de CM quand ce rapport n'est pas entier.

Par exemple si 3 souris mangent 7 graines alors on obtient :

$$\begin{tikzcd}
\text{Nombre de souris} & \text{Nombre de graines} \\
\text{3 souris} \arrow[r] \arrow[d, "\times q"'] & \text{7 graines} \arrow[d, "\times q"] \\
(3\times q)\text{ souris} \arrow[r] & (7\times q)\text{ graines}
\end{tikzcd}$$

Le rapport externe (7 graines pour 3 souris) est une nouvelle grandeur que nous appelons « ration ». Chacune de ses valeurs est spécifique d'une distribution équitable et est codée par un couple (nombre de souris, nombre de graines).

Cette correspondance induit elle-même une fonction linéaire de l'ensemble des nombres réels dans lui-même, de coefficient $\frac{7}{3}$:

$$\begin{tikzcd}
3 \arrow[r, "\times \frac{7}{3}"] \arrow[d, "\times q"'] & 7 \arrow[d, "\times q"] \\
3\times q \arrow[r, "\times \frac{7}{3}"] & 7\times q
\end{tikzcd}$$

[6] Le rapport de deux éléments d'une même grandeur est dit interne (ou scalaire) alors que le rapport de deux éléments issus de deux grandeurs distinctes est dit externe (ou fonctionnel). Les anciens ne considéraient que des rapports de grandeurs homogènes, ce qui créait un obstacle dit « de l'homogénéité ». On pourra consulter RENE DE COTRET Sophie; 1985 ; « *Étude historique de la notion de fonction* ».

Dans cette correspondance, le rapport externe $\frac{7}{3}$ est devenu un coefficient (un opérateur) sans « dimension». Cette formalisation s'accompagne d'une perte d'information. Le retour à la relation de proportionnalité précédente nécessite la connaissance des grandeurs étudiées.

Ces approches successives permettent de passer du cadre des grandeurs mesurées où les quantités sont exprimées par des couples (mesure ; unité), au cadre des variables numériques (ou algébriques) où il est possible d'étudier formellement les propriétés de la fonction linéaire qui à tout nombre associe le produit de ce nombre par $\frac{7}{3}$. Bien sûr, le cadre conditionne la mise en œuvre des moyens pour la reconnaissance d'une situation de linéarité et la détermination des éléments manquants.
Pour montrer que deux grandeurs sont proportionnelles, il faut trouver une raison de décider que tout rapport de deux éléments de l'une est égal au rapport des deux éléments correspondants de l'autre ; la difficulté est la justification de cette universalité. Quand les rapports externes sont explicitables, on dispose d'un autre moyen de décider s'il y a proportionnalité entre deux grandeurs : il faut que le rapport externe soit constant. Dans le cadre numérique, il n'y a aucune raison pour que deux variables réelles x et y soient proportionnelles mais on peut construire de manière formelle une relation du type $y = kx$. On définit ainsi une fonction linéaire dont les propriétés résultent de la structure algébrique de l'ensemble des nombres réels.

Remarque : Si deux variables réelles n'ont pas lieu d'être proportionnelles, à plus forte raison deux ensembles finis de nombres (réels) ne sont pas proportionnels. Mais si un système organisateur établit une correspondance biunivoque entre les éléments de ces deux ensembles de telle sorte que le rapport de deux nombres homologues soit constant, alors on peut considérer que l'ensemble des couples ainsi obtenus est une partie du graphe d'une fonction linéaire. Si de plus ces nombres sont positifs alors on peut les considérer comme des mesures de deux grandeurs proportionnelles. Ainsi, une fonction linéaire peut réfléchir une relation de proportionnalité entre grandeurs, mais ces changements de cadres sont délicats.

Les objets mathématiques

La complexité de la structure mathématique joue un rôle dans la genèse. L'exploration de cette structure en termes de variables, fonctions et rapports permet d'ordonner cette complexité. La construction des nombres rationnels passe par l'étude des rapports et les rapports prennent du sens dans la manipulation des grandeurs. De plus, la proportionnalité entre grandeurs permet d'établir une relation dialectique entre les notions de fonction, de variable et de nombre, favorable à leur genèse. En effet, dans la notion de grandeur, il y a l'idée de comparaison et de variation ; or la notion de fonction prend son origine dans l'idée qu'il existe une relation de dépendance entre deux grandeurs telle que toute variation de l'une entraîne ou accompagne une variation de l'autre. Ainsi l'idée de fonction garde, dans la plupart de ses usages, une idée de variable. La proportionnalité peut donc être un outil pour la genèse des notions de variables, de fonctions, de nombres. La recherche d'une articulation fonctionnelle de ces objets pour un processus d'apprentissage nécessite une analyse de leurs structures mathématiques.

Variables

Nous distinguons trois types de variables : les grandeurs (longueur, masse, …), les variables numériques, les variables algébriques (celles qui entrent dans le calcul formel). L'idée de grandeur comme « qualité variable d'un objet » (par exemple : la longueur d'une règle) semble être un des premiers objets de pensée chez les enfants. Dans la situation envisagée, les milieux matériels seront des collections de graines ou de souris et les mesures des nombres entiers. Différents objets d'étude relatifs aux grandeurs et aux nombres interviennent dans une relation didactique pour une genèse de l'idée de variable. L'ordre d'apparition de ces objets dans un processus d'apprentissage est dicté par leur complexité mathématique croissante. On peut les décrire en termes d'action pour des élèves en situation adidactique, par exemple :

- comparer, ordonner, additionner plusieurs éléments d'une même grandeur (ordonner les lots de souris par ordre croissant de leurs effectifs) ;
- déterminer l'élément inconnu d'une grandeur réalisant certaines contraintes matérielles de la situation. (rechercher une quatrième proportionnelle) ;
- proposer des grandeurs mesurées répondant aux contraintes d'une situation. (proposer des couples équivalents à 7 graines pour 3 souris) ;
- évaluer qualitativement l'effet de la variation d'une grandeur sur une autre grandeur (s'il y a plus de souris il faut plus de graines) ;
- évaluer quantitativement l'effet de la variation des mesures d'une grandeur sur d'autres mesures (des calculs sont possibles : si on double le nombre de souris il faut doubler le nombre de graines).

Fonctions

La tentative de description précédente montre que l'idée de « variable » est étroitement liée à celle de « fonction ». Dans les situations d'action, les élèves peuvent être conduits à :

- considérer plusieurs couples de grandeurs mesurées donnés au « hasard » mais avec une intention didactique. (5 souris mangent 16 graines et 7 souris mangent 13 graines ; est-ce équitable ?) ;
- considérer un couple de grandeurs mesurées comme caractéristique d'une relation entre grandeurs. (le couple (3 souris ; 7 graines) caractérise une relation de proportionnalité de coefficient $\frac{7}{3}$ ou une classe d'équivalence de tels couples ou la ration d'une distribution équitable) ;
- proposer des couples de nombres faisant partie du graphe d'une fonction numérique définie par un algorithme. On oublie que ces nombres peuvent être des mesures de grandeurs pour faire fonctionner uniquement le modèle numérique. (le couple (3 ; 7) est un élément du graphe de la fonction linéaire de coefficient $\frac{7}{3}$) ;
- déterminer cet algorithme (ou le graphe de la fonction).

Nombres

Dans ces tentatives de description des différents objets qui peuvent intervenir dans une relation didactique, il y a toujours la présence des nombres qui est à la base de toute activité mathématique. Les nombres naissent de l'étude des rapports et de leur comparaison. Rappelons que le rapport de deux éléments d'une **même** grandeur est dit interne (c'est un scalaire, c'est-à-dire un nombre sans unité) alors que le rapport de deux éléments issus de **deux** grandeurs distinctes est dit externe (c'est un rapport fonctionnel, il n'est explicitable qu'avec les unités de mesures des deux grandeurs). C'est la situation qui discrimine la fonction du rapport. Nous souhaitons construire la notion de nombre rationnel à partir du concept de ratio : tant de graines pour tant de souris. Il s'agit donc d'articuler des situations didactiques pour construire progressivement cette notion en même tant que celles de variables et de fonctions.

La proportionnalité à l'école primaire

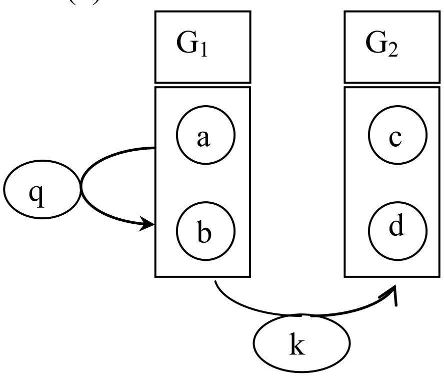
La progression, dans les situations envisagées, est contrôlée principalement par trois variables didactiques : la nature des nombres (naturels, rationnels), la fonction des rapports (interne ou externe) et le statut des connaissances mises en œuvre (implicites, explicites, formelles).
Avant la mise en place des leçons sur la proportionnalité à l'école primaire, nous essayons d'adapter la complexité mathématique des concepts de fonction, de variable et de nombre à ses différents cycles pour une genèse de ces notions du cours préparatoire au cours moyen.

Qu'est-ce que concevoir la proportionnalité ?

Au C.P. la proportionnalité prend ses racines dans le comptage.
Au C.E., les sources de « relation de proportionnalité » sont la multiplication (éventuellement la division) ; mais les quantités en relation ne sont pas perçues comme des variables où l'une serait fonction de l'autre ; par exemple pour déterminer une quatrième proportionnelle, il suffit d'effectuer une multiplication : si une souris mange 3 graines alors 5 souris en mangent 5 fois plus, soit 15 graines.
Au C.M., nous souhaitons trouver des situations où il y a obligation de considérer un terme comme une valeur particulière d'une grandeur qui varie en fonction d'une autre grandeur (le nombre de graines est une fonction du nombre de souris). Il ne suffit pas de donner quelques valeurs particulières à une grandeur mais de faire prendre conscience aux élèves de tous les « possibles » d'une variable. Pour eux, une variable sera l'ensemble des mesures possibles d'une grandeur. Cet ensemble doit donc être engendré par quelque chose qui agit sur cette grandeur. L'hypothèse heuristique dans les situations envisagées est que l'idée de variable va émerger, dans une relation dialectique avec l'idée de fonction, de l'obligation de faire des prévisions sur les mesures à obtenir (les élèves devront prévoir quelles quantités de graines il faut attribuer à des lots de souris d'effectifs différents pour que la distribution soit équitable). Pour avoir quelques chances de succès, l'élève devra poser la proportionnalité comme hypothèse. Les différentes mesures possibles apparaîtront alors comme une nécessité pour faire fonctionner et vérifier le modèle envisagé.

Qu'est-ce que résoudre un exercice de proportionnalité ?

Le modèle de base s'appuie sur la conservation des rapports internes (q). La structure mathématique standard est donc la proportion. La question standard est la détermination de la quatrième proportionnelle (d).



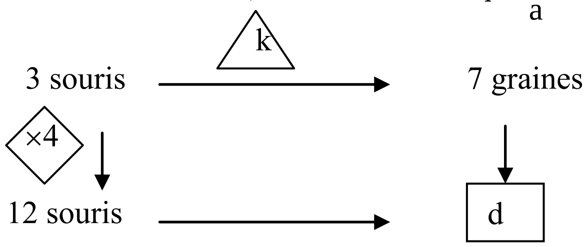
Les stratégies de résolution vont dépendre de la nature du rapport externe (k), de la nature du rapport interne (q) et des répertoires de connaissances des élèves. Réciproquement les techniques résolutoires vont engendrer des connaissances qui vont enrichir ces répertoires.

Au CE la base des calculs est la multiplication et la division ($a = 1$, $k = c$, $q = b$).
Au CM, la base des calculs est la proportion ($a \neq 1$).

La recherche d'une quatrième proportionnelle nécessite l'explicitation soit du rapport interne (q), soit du rapport externe (k).
Trois cas peuvent se présenter :

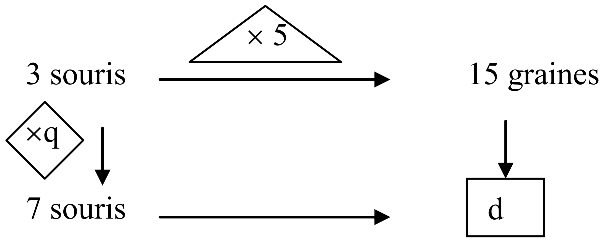
- le rapport interne est calculable ; c'est un entier : $q = \frac{b}{a}$ alors $d = q \times c$.

Exemple :



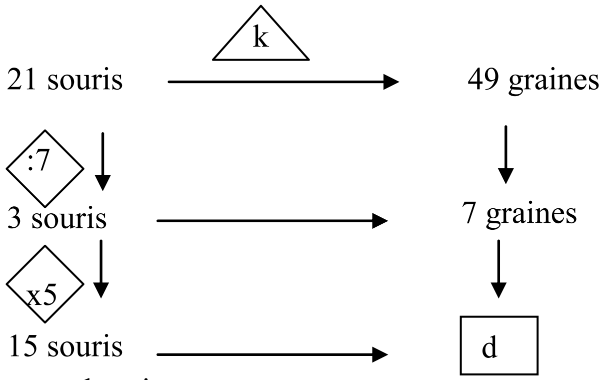
- le rapport externe est calculable ; c'est un entier : $k = \frac{c}{a}$ alors $d = k \times b$.

Exemple :



- Aucun de ces deux rapports n'est calculable :
  Si on peut déterminer un « couple intermédiaire » grâce à la première procédure alors on peut ensuite déterminer le correspondant de b en réitérant cette même procédure :

Exemple :



Sinon on ne peut pas aboutir.

Les leçons et leurs observations

L'articulation fonctionnelle dans la construction des connaissances de la proportionnalité est dictée par la complexité croissante des différents objets décrits dans les analyses précédentes. L'ordination des différentes tâches de type « relation fonctionnelle » conduisant à la genèse de l'idée de fonction linéaire et de variable fait apparaître trois degrés de liberté didactique qui permettent une certaine souplesse dans l'articulation fonctionnelle (l'ordre sur les situations didactiques n'est pas total) :

- le rapport externe peut être entier ou fractionnaire dès les premières leçons ;
- on peut permuter l'apprentissage des différentes techniques avec la recherche de couples hypothétiques ;

- il n’y a pas d’ordre privilégié dans l’introduction des différentes techniques : rapports interne ou externe, addition ou soustraction.

Nous nous proposons d’expliquer les choix qui ont conduit à la construction de cinq leçons, en les accompagnant de larges extraits des fiches didactiques[7]. Chaque leçon sera suivie de commentaires et de résultats d’analyses. Il n’est pas possible dans le cadre d’un article de rendre compte de deux ans d’expérimentation mais quelques comportements d’élèves et de professeurs peuvent être révélateurs de certains facteurs de cette situation. Nous allons tenter de les décrire en explorant les leçons une à une. La longueur des trois premières leçons nécessite deux séances d’une heure, les deux autres sont réalisables en une séance d'une heure chacune.
Enfin, il est très important de noter que par souci de simplification, les données (nombre de souris, nombre de graines) figurent systématiquement sous forme de tableaux dans le présent article ; mais, lors de l'expérimentation, le professeur disposait de paquets de graines réels et de fiches cartonnées sur lesquelles étaient dessinées les souris. Il lui était aussi conseillé de faire des dessins au tableau noir en disposant « au hasard » les différentes représentations de graines et de souris. Il incombait aux élèves de réorganiser les données, éventuellement en s'aidant d'un tableau. Celui-ci apparaît dans ces conditions comme un outil de réorganisation de données et non comme un instrument de pensée pouvant induire un fonctionnement algorithmique non contrôlé par le sens que porte la situation. Nous reviendrons ultérieurement sur l'usage que font les élèves des tableaux.
Enfin, il est très important de noter que par souci de simplification, les données (nombre de souris, nombre de graines) figurent systématiquement sous forme de tableaux dans le présent article ; mais, lors de l'expérimentation, le professeur disposait de paquets de graines réels et de fiches cartonnées sur lesquelles étaient dessinées les souris. Il lui était conseillé de faire des dessins au tableau noir en disposant « au hasard » les différentes représentations de graines et de souris. Il incombait aux élèves de réorganiser les données, éventuellement en s'aidant d'un tableau. Celui-ci apparaît dans ces conditions comme un outil de réorganisation de données et non comme un instrument de pensée pouvant induire un fonctionnement algorithmique, non contrôlé par le sens que porte la situation. Nous reviendrons ultérieurement sur l'usage que font les élèves des tableaux.

La proportionnalité comme élément de justice ; coefficient de proportionnalité entier

Description de la leçon 1

Dans cette leçon, on attend des élèves qu’ils choisissent à la suite d’un débat la « proportionnalité » comme modèle d’équité. Dès la première approche, les élèves cherchent à égaliser les parts. On pourrait créer la nécessité d’utiliser les rapports internes dès la première leçon en imposant une ration non entière. La complexité de la situation nous a conduit à choisir une progression où les élèves découvrent en premier lieu l’efficacité du coefficient de proportionnalité (la ration est entière) pour réaliser ce modèle. Les raisons en sont les suivantes :

- les élèves sont confrontés à un milieu nouveau avec lequel ils doivent se familiariser ;
- la mise en scène est complexe, certains élèves ne comprennent pas ce qu’on attend d’eux ;

[7] Les fiches didactiques des leçons figurent en annexe de la thèse COMIN Eugène (2000) « *Proportionnalité et fonction linéaire ; caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire* ».

- la tâche des élèves comprend deux étapes : concevoir l'équité puis la réaliser ;
- les élèves doivent s'approprier un vocabulaire nouveau et précis pour communiquer l'idée qu'ils se font de l'équité et les raisons de leurs actions pour la réaliser. Par exemple, la différence entre « part » et « ration » est délicate ; si ces « parts » et « rations » sont entières alors les élèves pourront utiliser ces nombres entiers pour les désigner à l'occasion des exemples traités. Quand ces concepts seront institutionnalisés les élèves pourront utiliser les mots « part » et « ration » pour désigner, expliquer, décrire les rapports non entiers correspondants.

Vocabulaire : On veut préciser le sens que l'on donnera aux mots suivants :

- *attribuer* : déterminer la part qui revient **à un** bénéficiaire ;
- *distribuer* : donner **à plusieurs**, réitérer l'attribution ; la distribution est régulière si on donne la même part à chacun ;
- *répartition* : distribution dont **le total est fixé** ; pour faire une répartition régulière on fait une division ; c'est l'égalisation des parts ;
- *partage* : met l'accent sur le **nombre de personnes** ; un partage équitable avec des objets qui ne sont pas identiques, nécessite un calcul ou une évaluation pour égaliser les parts ;
- *part* : quantité de graines que mange une souris ;
- *ration* : quantité de graines qui revient à chaque souris quand la distribution est équitable.

Matériel :

- des feuilles cartonnées où sont dessinées des souris (chaque fiche représente un lot) ;
- des paquets de graines sur lesquels est inscrit le nombre de graines.

Première séance

Dans la première phase de cette séance, on provoque un débat entre élèves qui les conduit à produire des arguments pour rejeter une répartition inéquitable.

> ***Le maître** : Des bandes de souris à la recherche de nourriture, se sont emparées de paquets de graines et les ramènent au village sans les ouvrir, pour pouvoir les transporter. De retour au camp une dispute s'est élevée entre les souris de la bande bleue et celles de la bande jaune.* (Le maître montre les bandes*).*
> ***Dans la république des souris, on aime que toutes les souris soient égales et reçoivent la même chose.** Pourquoi croyez-vous qu'elles se sont disputées ?*
> (réponse espérée : « parce que les unes avaient plus de graines que les autres »).
> *Appelé à la rescousse, Sourissot blâme sévèrement la bande bleue qui a 10 graines et la bande jaune qui a, elle aussi, 10 graines, le même nombre. Mais Sourissage continue à prétendre que la distribution entre les bleus et les jaunes n'est pas équitable.*
> *Pourquoi ?* (réponse espérée : « Les bandes n'ont pas le même nombre de souris »).
> *Alors la tribu de souris décide de comparer toutes les parts et de faire une loi qui dira quand les distributions ne sont pas équitables. Nous allons les aider et dire si la distribution des graines est équitable ou s'il faut la refaire.*
> ***Consigne*** : Chaque groupe d'élèves reçoit un dessin qui représente les souris d'une bande et le paquet de graines qu'elles ont ramené.
> ***Le maître*** : *Dans chaque groupe, vous écrivez sur la partie gauche de la feuille vos noms ainsi que les nombres de souris et de graines que je vous ai confiées. Sur la partie droite de la feuille, vous écrivez les noms des élèves du groupe que je vais vous indiquer. Vous demandez à ce groupe combien il a de souris et de graines et*

*vous reportez ces nombres sur votre feuille. Vous comparez les deux attributions. Sur votre feuille, vous écrivez : « répartition équitable » ou « répartition inéquitable » ; puis une explication, un argument (pourquoi ?). ****[8]

Remarque : Il est important que chaque groupe élabore un argument indépendamment des autres groupes pour que les élèves ne s'en tiennent pas au premier argument proposé.

Le maître* : *Vous comparez votre réponse avec celle de l'autre groupe et vous essayez de vous mettre d'accord. ***

Recueil des arguments :

Le maître interrogera successivement les cinq paires de groupes pour faire apparaître les **raisons sociales** de la contestation. Il notera au tableau **les paires de couples** (nombre de graines, nombre de souris) avec en vis-à-vis l'argument avancé par les élèves.

La recevabilité de chaque argument fera l'objet d'un débat général.

Exemples :

Nombre de souris dans la bande	3	4	Pour un même nombre de graines il faut un même nombre de souris.
Nombre de graines dans le paquet	10	10	

Nombre de souris dans la bande	5	7	S'il y a plus de souris il faut plus de graines.
Nombre de graines dans le paquet	16	13	

Nombre de souris dans la bande	3	6	S'il y a le double de souris, il faut le double de graines.
Nombre de graines dans le paquet	11	15	

Nombre de souris dans la bande	4	7	7 x 3 mais 4 x 3 =12. Les souris n'ont pas la même part.
Nombre de graines dans le paquet	17	21	

Nombre de souris dans la bande	2	2	Un même nombre de souris doit avoir un même nombre de graines
Nombre de graines dans le paquet	11	13	

Dans la deuxième phase, les élèves réalisent des répartitions équitables en utilisant une quantité fixe de graines par souris qu'on appellera « ration ».

Le maître : *Puisque la distribution des graines avec les paquets n'est pas équitable, on va ouvrir les paquets pour les refaire (On ne change pas la constitution des groupes de souris).*

Nous voulons distribuer le plus de graines possible, toutes si nous pouvons. Comment faut-il ***refaire les paquets*** *pour que la distribution soit équitable et utilise le plus de graines possible ? Vous faites les calculs sur vos feuilles. Quand vous aurez fini, on recueillera vos propositions au tableau.*

Ces deux premières phases font l'objet d'une séance d'une heure.

Deuxième séance

Dans la séance suivante, on fait varier les grandeurs « nombre de souris », « nombre de

---

[8] *** indique que le maître doit marquer un temps d'attente.

graines », « ration ». L'une des trois grandeurs étant fixée, la variation d'une autre grandeur détermine la variation de la troisième grandeur.
Exemples :

> ***Le maître :*** *On a attribué 28 graines à 7 souris. Combien faut-il attribuer de graines à 6 souris pour que la distribution soit équitable ? ****
> *On attribue toujours 4 graines à chaque souris. Trouver combien il faut de graines pour 20, 40, 15, 60 souris ? ****
> *En attribuant 4 graines par souris, on a distribué 480 graines. Combien a-t-on nourri de souris ?*

Commentaires

- Le débat scientifique dans une classe ne s'improvise pas, il suppose une culture. Dans cette leçon, nous avons choisi de faire travailler les élèves par paires de groupes. Chaque groupe compare les quantités de graines et de souris qui lui sont confiées à celles de l'autre groupe et élabore un argument qui explique pourquoi un groupe de souris est désavantagé par rapport à l'autre. Puis les deux groupes confrontent leurs arguments pour en débattre avant la phase collective où seul un rapporteur présentera un argument à la classe entière.

  Pourquoi faire travailler les élèves en groupes ?
  Il y a des raisons d'ordre didactique, pédagogique et idéologique.
  La situation doit permettre l'élaboration d'arguments et l'organisation d'une plaidoirie où chaque groupe est partie plaignante et doit élaborer son réquisitoire.
  Par ailleurs, la difficulté à gérer un débat avec la classe entière contribue à choisir une organisation démocratique où chaque individu peut participer à la recherche de l'équité en confrontant ses arguments à ceux des camarades du groupe avant de les soumettre au jugement du savoir scientifique de la classe. Le groupe joue un rôle de tri et de mise au point en écrivant les arguments qui entreront dans le débat collectif. Cette procédure a en outre l'avantage de limiter le nombre de propositions à traiter par le maître face à la classe entière.

  Pourquoi faire travailler les groupes d'élèves par paires ?
  Dans une première expérimentation nous avions demandé aux élèves de comparer « les graines et les souris » qui leur étaient confiées à toutes les autres attributions de la classe. Cette situation avait deux défauts : il faut beaucoup de temps aux élèves pour se familiariser avec l'ensemble des attributions ; le débat collectif sur les arguments proposés par les élèves est entièrement à la charge du professeur, il est très lourd à gérer quand il n'y a pas dans la classe une culture du débat scientifique.

- La ration entière est un outil efficace mais aussi un obstacle didactique. On veut faire postuler aux élèves que l'équité passe par l'égalisation des parts, tout en évitant un usage algorithmique prématuré du coefficient de proportionnalité qui nie la raison sociale du choix de la proportionnalité. On va faire en sorte que ce coefficient ne soit pas apparent en choisissant des couples (nombre de graines, nombre de souris) où ce rapport n'est pas entier.
  Mais la méthode la plus utilisée par les élèves pour rejeter une distribution inéquitable ou pour construire une distribution équitable est l'usage d'une part invariante de graines par souris ; c'est cette « quantité à l'unité » que nous appelons « ration ».
  En même temps, cette ration étant fixée, elle devient le coefficient de proportionnalité qui permet aux élèves de faire fonctionner le modèle linéaire entre deux grandeurs variables « les nombres de souris » et « les nombres de graines » ; ce qui développe

chez eux, l'idée de variable et de fonction. Mais, l'usage répété du coefficient de proportionnalité va s'ériger en obstacle pour les autres techniques de la linéarité. Les leçons suivantes auront pour objet de le combattre en mettant les élèves dans l'obligation de « transporter les structures ».

Résultats

La principale limitation de la première phase de la première séance est que tous les élèves ne travaillent pas sur toutes les attributions inéquitables et donc ne peuvent pas élaborer tous les arguments. La phase collective de communication ne peut pas remplacer la phase d'action, la possibilité d'entendre les arguments ne remplace pas leur découverte. Néanmoins tous les élèves ont vécu une expérience et ont conscience d'avoir contribué au rejet de cette répartition inéquitable. Ils auront l'occasion de voir les différentes techniques de la proportionnalité dans les leçons suivantes.

Les arguments des élèves sont très contextualisés et formulés avec les mesures qui sont à leur disposition. Il est plus facile pour eux de faire référence à des règles de calcul que de rechercher des « raisons sociales » pour leur argumentation. Les arguments issus de la première phase doivent être des prétextes pour l'élaboration d'une distribution équitable et non des techniques pour construire cette distribution. Or le fait de recopier ces arguments au tableau pour les soumettre à la critique de la classe entière a un effet institutionnalisant qui tend à les faire apparaître d'emblée comme des règles de calcul qui occultent les raisons sociales desquelles ils sont issus.

Dans la deuxième phase, trois procédures sont prépondérantes :

- certains élèves attribuent une quantité de graines arbitraire au groupe de souris de plus petit effectif puis ajoutent un nombre fixe de graines à chaque souris supplémentaire. Cette procédure additive va réapparaître de manière prégnante chez certains élèves dans les leçons suivantes ;

  Illustration produite par un groupe d'élèves :

Souris	*3*	*3*	*4*	*4*	*5*	*6*	*6*	*7*	*7*	*8*	
Graines	*6*	*6*	*7*	*7*	*8*	*10*	*10*	*11*	*11*	*13*	*Proposition 1*
Graines	*6*	*6*	*8*	*8*	*10*	*15*	*15*	*19*	*19*	*23*	*Proposition 2*

- d'autres essaient d'utiliser une part invariante arbitraire de graines par souris puis ajustent cette ration pour essayer d'utiliser le maximum de graines possible ;
- enfin d'autres encore divisent le nombre total de graines par le nombre total de souris pour déterminer la ration.

A l'issue de cette leçon les élèves disposent d'un vocabulaire précis : « part, ration, équitable, inéquitable ». Les jeux des enfants dans la cour de récréation ont montré que le mot « équitable » était institué dès la première leçon.

Il est difficile de savoir ce que les élèves ont réellement appris à l'issue de cette leçon. Il y a probablement des apprentissages implicites qui prennent de la consistance sur plusieurs leçons et nécessitent un processus long, de quelques semaines à plusieurs mois voire plusieurs années. Les notions de variable et de fonction ne peuvent pas prendre corps sur une leçon. On ne peut espérer qu'une conception protomathématique de ces objets à l'issue de ce processus.

Mais ces apprentissages à long terme risquent d'être négligés car ils ne se manifestent pas de manière suffisamment immédiate pour être gratifiants, d'autant plus que les enseignants des classes en aval qui les « récupèrent » ont souvent l'illusion d'être les seuls initiateurs des connaissances qui permettent la construction des savoirs qu'ils enseignent.

Remarque

L'institutionnalisation est un phénomène complexe et un moment sensible pour le maître. Au cours des séquences, le rôle de l'élève évolue : « d'avocat de la défense » il va devoir se poser en « législateur » en construisant progressivement les « règles de l'équité » qui ne sont autres que les techniques caractéristiques de la proportionnalité. Mais les activités ne sont pas auto institutionnalisantes et c'est au professeur de dire ce qu'est l'équité (dans la situation étudiée…) pour créer les moyens collectifs de construction de ces techniques. L'exemple suivant montre comment le maître a été obligé de procéder à des institutionnalisations locales pour réduire l'espace de liberté des élèves.

> Le maître distribue à chaque groupe d'élèves un lot de souris et un paquet de graines ; mais le nombre de graines de chaque paquet n'est pas proportionnel au nombre de souris du lot correspondant. On espère ainsi faire naître un sentiment d'injustice chez les élèves qui devraient réagir en choisissant la linéarité comme modèle satisfaisant l'idée d'équité.
> Le maître : *Vous voulez que vos souris soient toutes bien nourries*.
> Un élève : *Il suffit de partager les graines du paquet entre les 7 souris*.
> Le maître ajuste la consigne : *Vous voulez que dans votre groupe les souris n'aient pas moins à manger que dans un autre groupe*.
> Un autre élève : *Il faut que tous les groupes aient le même nombre de graines*.
> Le maître réajuste : *Il faut que dans la classe chaque équipe puisse nourrir ses souris de la même façon que dans les autres équipes ; sinon il y en a qui vont devenir énormes et d'autres qui vont rester toutes maigres. Il faut que toutes les souris soient traitées de la même façon..., on dira dans ce cas que la distribution est équitable*.
> Chaque intervention d'élève apparaît comme un événement auquel le maître répond par une institutionnalisation locale et crée progressivement une condition nécessaire pour faire émerger l'idée que toutes les souris doivent manger la même quantité de graines sans le dire. C'est cet argument qui fonde l'usage de la proportionnalité entre le nombre de souris et le nombre de graines. C'est parce que le constructeur d'une leçon ne peut pas projeter dans le détail son déroulement que le maître est obligé de prendre des décisions en situation didactique pour fermer la porte à des aventures, à des évolutions non désirées du système.

La conservation des structures pour réaliser l'équité : les rapports internes

Description de la leçon 2

Première séance

On veut obliger les élèves à transporter les structures d'une grandeur sur une autre grandeur. Les élèves n'ont pas la possibilité d'utiliser le coefficient de proportionnalité car il n'est pas entier.
Dans une première phase, on leur demande d'ajuster une distribution pour qu'elle respecte la croissance.

> ***Le maître*** : *Aujourd'hui nous allons aider 4 groupes de souris à se répartir 4 paquets de graines.*
> Le maître affiche au tableau noir les cartons représentant les groupes de souris et les paquets de graines, sans les ordonner.
> ***Le maître*** : *Pour commencer nous allons attribuer aux groupes de souris ces paquets de graines (sans ouvrir les paquets et sans modifier les groupes de souris),*

de façon la moins injuste possible**. Ecrivez sur vos feuilles une répartition qui soit la moins inéquitable possible. *

Comparez votre proposition avec celle de votre voisin et mettez-vous d'accord.

L'écriture du tableau suivant n'aura lieu qu'après validation d'une stratégie par les élèves :

nombre de souris à nourrir	3	6	15	21
nombre de graines dans le paquet	8	20	31	54

Dans la deuxième phase, la non-conservation des rapports internes permet de vérifier que la croissance ne suffit pas pour réaliser l'équité d'une distribution. Les élèves doivent alors répartir un maximum de graines entre les lots de souris en respectant les rapports internes. Le rapport externe n'étant pas entier, la ration est définie par un couple (nombre de souris ; nombre de graines).

Le maître : *Maintenant, est-ce que, quand il y a plus de souris il y a plus de graines ?* (réponse attendue : « oui »)

Est-ce que la répartition obtenue est équitable ? (réponse attendue : « non »).

Le maître : *On peut maintenant ouvrir les paquets. Trouvez une distribution équitable qui utilise le plus possible de ces graines et écrivez-la sur votre feuille.****

Recueil des distributions proposées :

Le maître choisira en premier lieu une distribution inéquitable s'il y en a une et la fera critiquer par les élèves. **Il suffit d'un seul argument pour prouver qu'une distribution est inéquitable** mais l'enseignant pourra laisser les élèves en fournir plusieurs.

Puis le maître montrera le cas d'un élève qui ne tient pas compte du nombre de graines disponibles :

nombre de souris à nourrir	3	6	15	21
nombre de graines dans le paquet	9	18	45	63

Le maître fait expliciter par l'élève la construction de ce tableau ; il est possible que l'élève ait utilisé le rapport externe 3.

Le maître : *Est-ce que cette répartition est équitable ? Est-ce qu'il y a assez de graines pour la réaliser ?*

Commentaire : le maître peut compter effectivement les graines ou simuler de le faire.

Le maître : *Alors, qui parmi vous a trouvé une répartition équitable qui n'utilise pas plus de 113 graines ?*

Remarque : S'il n'y a que quelques élèves dans ce cas, le maître relance l'activité et propose : *Maintenant, vous savez qu'il faut faire une distribution équitable avec 113 graines au maximum, essayez à nouveau.*

On peut espérer la distribution suivante[9] :

nombre de souris à nourrir	3	6	15	21
nombre de graines dans le paquet	7	14	35	49

Le maître fera alors expliciter la méthode ; on attend la technique suivante : envisager pour le plus petit lot de souris un certain nombre de graines puis utiliser les rapports internes pour les autres lots de souris. On compte alors le total des graines :

[9] Pour aider les élèves il faut faire des dessins faisant apparaître les groupes de souris avec leurs graines.

- s'il y en a trop on enlève une graine au plus petit lot et on complète le tableau comme précédemment ;
- s'il reste des graines on en ajoute une au plus petit lot de souris et on complète le tableau.

Commentaires :
Il se peut que certains élèves disent que c'est impossible, la ration n'étant pas entière. Le maître demandera aux élèves d'accepter qu'au sein de chaque groupe les souris se débrouillent entre elles ou bien dira que les graines sont écrasées avant la distribution effective.
Il faut faire valider la distribution voulue par un raisonnement sur la conservation des rapports. C'est au maître d'organiser le débat pour obtenir une validation raisonnée :
Le maître : *Est-ce que toutes les souris mangent la même quantité de graines ?*
Est-ce que 14 graines pour 6 souris c'est la même chose que 7 graines pour 3 souris ou que 35 graines pour 15 souris ou que 49 graines pour 21 souris ?

La phase 3 doit rassurer les élèves en leur donnant la possibilité d'appliquer les rapports multiples dans les exercices suivants :

Exercice 1 : (équité)
Le maître : *Si je donne 5 graines à 2 souris, combien dois-je donner de graines à 4 souris ?*

Exercice 2 : (ration)
Le maître : *Dans un élevage de souris, la ration est 11 graines pour 4 souris ; combien de graines mangent 12 souris ?*

Exercice 3 (distribution)
Le maître : *Voici une distribution :*

nombre de souris à nourrir	4	8	40	12
nombre de graines dans le paquet	6	12	45	51

Le maître : *Est-ce une distribution équitable ? Pourquoi ? ****
Sans modifier les groupes de souris trouvez une répartition équitable qui utilise le maximum de graines possible et écrivez-la sur votre feuille.
La solution sera écrite au tableau.

nombre de souris à nourrir	4	8	12	40
nombre de graines dans le paquet	7	14	21	70

Le maître : *Quelle est la ration ?****

Exercice 4 : (usage du coefficient de proportionnalité)
Le maître : *J'ai donné 15 graines à 3 souris, complétez le tableau suivant pour que la distribution soit équitable :*

nombre de souris à nourrir	7	6	3	1
nombre de graines dans le paquet			15	

Le maître : *Quelle est la ration ?*

Ces trois phases occupent une séance d'une heure.

Deuxième séance

Une deuxième séance permet au maître de contrôler l'acquisition de ces connaissances et aux élèves de réinvestir leurs découvertes pour qu'elles entrent dans un processus d'apprentissage qui en fera un savoir.

« Le contrôleur »

Pour chaque partie de cette séance, le maître distribue une demi feuille du type suivant :

<table>
<tr><td colspan="3">Je dis que cette distribution est équitable.
<table><tr><td>Nombre de souris</td><td>49</td><td>49</td></tr><tr><td>Nombre de graines</td><td>75</td><td>83</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Nom :</td><td>Vrai □
Faux □</td><td>Justifications</td></tr>
<tr><td>Contrôleur :</td><td>D’accord □
Pas d’accord □</td><td>D’accord □
Pas d’accord □</td></tr>
</table>

Partie 1 : distributions inéquitables

Le maître : *Voici la distribution qui figure sur vos feuilles.*

Afficher au tableau :

Nombre de souris	49	49
Nombre de graines	75	83

Le maître : *Je dis que cette distribution est équitable. Sur vos feuilles, vous cochez vrai ou faux et vous écrivez une justification. ****

Le maître : *Vous échangez vos feuilles. Sur la feuille de votre voisin, vous cochez d’accord ou pas d’accord.*

Le maître recueille les arguments puis écrit au tableau la propriété suivante : « Si une distribution est équitable alors un même nombre de souris mange toujours une même quantité de graines. »

Partie 2 : distributions équitables

Même activité que précédemment avec chacun des exemples suivants :

Nombre de souris	6	18
Nombre de graines	4	12

Recueil des arguments :

« Dans le premier groupe 6 souris mangent 4 graines. Dans le deuxième groupe, 18 souris mangent 12 graines donc 6 souris mangent 4 graines comme dans le premier groupe. »

Consigne : Le maître écrira au tableau la définition suivante :

« Une distribution est équitable si toutes les souris mangent la même quantité de graines, cette quantité est appelée la ration. Dans cette distribution, la ration est 15 graines pour 5 souris ou 3 graines pour 1 souris ou 24 graines pour 8 souris. »

Partie 3 : Construire des distributions équitables

Le maître : *Je veux fabriquer une distribution équitable. Je donne 15 graines à 9 souris, combien dois-je donner de graines à 3 souris ? à 6 souris ?*

Le maître écrit en même temps au tableau :

Nombre de souris	3	9	6
Nombre de graines		15	

Commentaires

- Le paradoxe de la ration non entière.
  Un des objectifs de la leçon précédente était de valider l’idée que l’équité passe par l’égalisation des parts. Les élèves avaient découvert à cet effet l’efficacité du coefficient de proportionnalité quand il est entier.

On veut maintenant obliger les élèves à réaliser une distribution équitable en utilisant les rapports internes. La difficulté est la suivante : si on accepte les restes de graines, il est toujours possible de réaliser une distribution équitable en utilisant une ration entière.

Nous savions que cette ration entière allait s'ériger en obstacle pour les rations non entières d'autant plus qu'il est difficile pour des enfants de concevoir que 3 souris puissent se partager équitablement 7 graines. C'est un paradoxe de la situation : nous souhaitons créer l'obligation d'expliciter une ration (non entière) par un couple d'entiers, ce qui explique le choix des paquets de graines et des lots de souris mais la réalisation de l'équité suppose qu'il est possible de fabriquer des parts égales. Pour permettre aux élèves d'imaginer que c'est possible, le maître leur demandera d'accepter qu'au sein de chaque groupe, les souris se débrouillent entre elles parce que les graines sont écrasées avant la distribution effective.

La possibilité de faire des distributions équitables entre lots de souris sans que la ration soit un entier est un saut informationnel incontournable dans la situation envisagée. La contrainte « attribuer des graines à des lots de souris » et non à des souris est l'instrument *ad hoc* pour faire apparaître les propriétés de la linéarité comme conditions nécessaires et adaptées à une répartition équitable.

Résultats

- Nécessité de l'institutionnalisation.

  L'effet observé de la nature des rapports et des valeurs numériques sur les décisions des élèves confirme qu'il s'agit là de variables didactiques fondamentales. Il y a beaucoup d'implicite chez les enfants qui ont compris. Ils ne disposent pas de vocabulaire pour communiquer comment ils égalisent les parts et pourquoi ils le font. Le fait d'utiliser les mesures disponibles pour formuler leurs arguments fait naître chez d'autres élèves l'idée que la leçon consiste à construire un « jeu de règles sur les nombres » et empêche ainsi une argumentation contradictoire sur la notion d'équité.

  Illustration marginale produite par un élève :

Nombre de souris	7	6	4	10
Nombre de graines	35	13	10	14

  On peut suspecter le « jeu » suivant : 7 + 6 = 13 ; 6 + 4 = 10 ; 4 + 10 = 14

  La recherche d'arguments oblige les élèves à raisonner. Il est souhaitable qu'ils valident à plusieurs reprises les règles pour « égaliser les parts » avant de les institutionnaliser en tant que théorèmes locaux à la situation. Or c'est le rapport au réel qui non seulement illustre mais explique les conditions de l'équité sociale. Il permet d'engager les élèves sur l'idée fondamentale « à un même nombre de souris doit correspondre un même nombre de graines », propriété qui va engendrer et valider celles de ration et de linéarité. C'est donc cet argument qu'il faut officialiser car il sert de référence tout au long du débat. L'élève doit distinguer l'équité institutionnelle de l'idée qu'il s'en faisait. Le maître peut l'y aider en manifestant son soutien aux efforts d'appropriation des différents répertoires ; mais le respect de l'individu est contraire à l'idée de connivence et c'est au maître qu'incombe l'institutionnalisation des savoirs.

  - Désignation de la ration par un couple.

    A l'issue de cette leçon, nous pensons avoir rendu opérationnel le répertoire suivant :

    - une distribution est équitable si toutes les souris mangent la même quantité de graines ;

- quand une distribution est équitable, le double, le triple,... de souris mangent le double, le triple,... de graines ;
- la quantité de graines que mange chaque souris d'une distribution équitable est appelée la ration de cette distribution ;
- pour désigner une ration il faut deux nombres, le nombre de souris et le nombre de graines que mangent ces souris. Par exemple : 7 graines pour 3 souris ou 14 graines pour 6 souris ou 21 graines pour 9 souris, etc.

La conservation des structures pour réaliser l'équité : additions et soustractions

Description de la leçon 3

Première séance

Dans la phase 1 de cette séance on veut obliger les élèves à transporter les structures d'une grandeur sur une autre grandeur en privilégiant l'usage des sommes ou des différences. Les regroupements de grandeurs se traduisent numériquement par des sommes ou des différences de mesures.

Exemple 1 :

Le maître : *Nous avons 3 lots de souris à nourrir. Dans chaque groupe, vous complétez la distribution suivante pour qu'elle soit équitable. Je vous demanderai comment vous avez fait.*

Le maître affiche le tableau suivant :

nombre de souris à nourrir	4	8	16
nombre de graines	10		

puis distribue une feuille sur laquelle figure ce tableau à chaque groupe d'élèves.***

Le maître : *On doit transporter ces souris et ces graines avec 3 cages qui contiennent au plus 10 souris chacune. On veut que la distribution reste équitable pendant le transport. Ecrivez sur vos feuilles une distribution équitable qui permet ce transport. ****

La contrainte matérielle conduit à imaginer deux étapes :

- enlever 6 souris au lot de 16 souris et les graines correspondantes. Le passage par le couple intermédiaire (2 ; 5) est incontournable pour déterminer combien de graines mangent 6 souris ;
- rajouter les 6 souris et les graines correspondantes au lot de 4 souris.

nombre de souris	10	8	10
nombre de graines	25	20	25

Exemple 2 :

Même activité avec la distribution suivante et un transport avec 4 cages d'au plus 15 souris chacune :

nombre de souris	6	15	21	9
nombre de graines	14	35		

Dans la phase 2 les élèves doivent comparer les rations des deux distributions équitables qu'ils viennent de construire ; mais ces rations ne sont pas calculables pour des élèves de CM1. Ils vont devoir chercher des mesures communes aux deux distributions.

Le maître : *Nous avons fabriqué deux distributions équitables.* (montrer ces distributions au tableau)

nombre de souris à nourrir	4	8	16
nombre de graines	10	20	40

nombre de souris à nourrir	6	15	21	9
nombre de graines	14	35	49	21

Le maître** : Dans quelle distribution la ration est-elle la plus grande ? *
*Laquelle de ces deux distributions donne le plus à manger à chaque souris ? ****

Remarques :

- On a choisi les données des tableaux de telle sorte que les élèves soient obligés de passer par un ou plusieurs couples intermédiaires afin de faire fonctionner les connaissances antérieures de multiples manières. Les possibilités sont nombreuses et peuvent être confrontées.
- Il y a une symétrie dans la manière de comparer les rations : on peut comparer les quantités de graines attribuées à un même nombre de souris ou bien les nombres de souris nourries par une même quantité de graines. (Pour comparer deux fractions, on peut réduire au même dénominateur ou au même numérateur).

Deuxième séance

Dans une deuxième séance, le maître demande aux élèves de faire des attributions équitables à des lots de souris hypothétiques (notion de variable) de manière à préparer la recherche d'un couple intermédiaire pour construire une distribution équitable ou prouver qu'une distribution est équitable ou inéquitable. Les techniques et le vocabulaire sont institutionnalisés afin de faciliter les explications.

Exemple :

> **Le maître** : *On veut faire un élevage de souris. Un élevage ce sont des cages dans lesquelles il y a des souris avec leurs graines de telle sorte que la distribution soit équitable. Une distribution équitable, c'est quoi ?*
>
> Consigne : Le maître recueillera puis écrira au tableau la définition suivante :
> « Une distribution est équitable si toutes les souris mangent une même quantité de graines, ont la même part ».
>
> ***Le maître** : Dans la première cage il y a : « 18 souris et 42 graines ». Proposez d'autres cages que je pourrais accepter dans cet élevage. Chaque groupe prépare une cage. Pour gagner un point, vous devrez prouver que vos souris mangent la même quantité de graines que ces 18 souris. Si un autre groupe prouve que votre proposition n'est pas bonne, ce groupe gagne 2 points.*
>
> Recueil des propositions. ***
>
> ***Le maître** : Toutes les souris de cet élevage mangent la même quantité de graines : 18 souris qui mangent 42 graines, c'est la même chose que … 3 souris qui mangent 7 graines, … car avec 18 souris on peut faire 6 lots de 3 souris et avec 42 graines on peut faire 6 paquets de 7 graines, …*
>
> Institutionnalisation : *La quantité de graines (écrasées) que mange chaque souris de cet élevage est appelée la ration. Pour désigner une ration il faut deux nombres : le nombre de souris et le nombre de graines qu'elles mangent ; on dit un couple : « nombre de souris ; nombre de graines ».*

Commentaires

- Des nécessités contradictoires.
  Dans une première phase, les élèves doivent compléter des distributions, sous certaines contraintes, qui les obligent à additionner ou soustraire terme à terme des couples équivalents de graines et de souris. Mais on ne peut pas exiger des élèves qu'ils complètent la deuxième distribution sans leur demander au préalable de vérifier l'équivalence des couples qui y figurent. Or, pour effectuer cette vérification, dans l'exemple 2, ils utilisent le « couple intermédiaire » (3 ; 7) dont les termes sont diviseurs ou multiples communs des termes homologues de deux autres couples à comparer. La connaissance de ce couple intermédiaire permet alors de construire les couples cherchés avec des rapports internes multiples, ce qui rend inutile l'addition et la soustraction. Pour pallier cette contradiction, nous avons imaginé des « contraintes matérielles » qui conduisent les élèves à faire des manipulations de graines et de souris qui nécessitent l'addition ou la soustraction de couples équivalents.
  La deuxième phase a pour projet de faire comparer les rations des deux distributions précédentes. Or, ces rations non entières ne sont pas calculables par des élèves de CM1. Les élèves sont donc obligés de chercher dans chacune des distributions, des couples où figurent des mesures communes de graines ou de souris qui permettent des procédés de comparaison.

- L'importance de la consigne.
  La formulation de la consigne a beaucoup d'importance. Dans la deuxième phase, pour comparer les rations de deux distributions, certains élèves comparent les quantités totales de graines des deux distributions sans se soucier des nombres de souris. Il faut donc choisir des nombres qui ne permettent pas de répondre juste avec un argument faux : le nombre total de graines de la distribution qui utilise la plus grande ration doit être inférieur au nombre total de graines de la distribution qui utilise la plus petite ration.

Résultats

Dans la première phase, le maître demande aux élèves de compléter deux distributions pour qu'elles soient équitables. La première distribution ne pose aucune difficulté. La deuxième distribution nécessite le calcul du nombre de graines pour 3 souris (ou 30 souris) pour justifier l'équité entre les deux premiers couples. Certains élèves s'aident de dessins pour « partitionner » un groupe de souris en sous-groupes afin de faire apparaître un couple intermédiaire de souris et de graines ; le dédoublement de 6 souris et 14 graines donne le couple (3 souris, 7 graines). Les élèves utilisent ensuite l'addition et la soustraction ou les rapports internes.
Pour modifier la distribution afin de permettre le transport, les élèves peuvent utiliser le couple (3 ; 7) puis les rapports internes. Mais la réalisation effective sur les graines et les souris nécessite des manipulations qui infèrent une soustraction puis une addition de souris et de graines :

nombre de souris	6 + 6	15	21 - 6	9
nombre de graines	14 + 14	35	49 - 14	21

Il est ensuite utile d'institutionnaliser la méthode pour éviter des retours incessants sur des explications lourdes qui entravent la progression de la leçon : « Si une distribution est équitable alors tout groupement qui conserve les correspondances (les attributions) donne une distribution équitable. ».

Dans la deuxième phase, les élèves doivent comparer les rations des deux distributions précédentes. Ils utilisent deux méthodes de comparaison :

- Pour 4 + 2 souris la première distribution donne 10 + 5 graines donc 15 graines pour 6 souris alors que la seconde distribution donne 14 graines pour 6 souris.
- Dans la première distribution, 70 graines nourrissent 28 souris alors que dans la seconde distribution 70 graines nourrissent 30 souris.

Remarque : L'usage d'un « couple intermédiaire » n'est pas spontané chez les élèves. Les différentes situations étudiées ont fait apparaître des distributions avec un nombre fini de couples. Les contraintes matérielles s'opposent à l'idée que l'ensemble des couples possibles est infini. La recherche d'un « couple intermédiaire » suppose que les élèves ont compris que l'équité ne dépend pas du nombre de souris ou du nombre de graines mais de l'invariance du rapport entre ces deux grandeurs, l'une d'elles pouvant être choisie arbitrairement. Pour familiariser les élèves avec l'idée que ces grandeurs peuvent varier arbitrairement pourvu que ce rapport soit conservé, on demande aux élèves de proposer des couples imaginaires qui font fonctionner le modèle indépendamment des contraintes matérielles qui ont donné naissance à la situation.

L'équité pour la genèse des rationnels : comparer des rations

Description de la leçon 4

L'équité va servir de prétexte pour construire des rationnels. L'idée de ration est présente tout au long du processus. Les élèves se sont familiarisés avec cette notion et ont appris à la désigner avec différents couples équivalents. Ils ont aussi comparé les rations de deux distributions équitables (leçon 3) et découvert deux techniques : comparer les quantités de graines attribuées à deux lots de souris de même effectif ou comparer les effectifs de deux lots de souris à qui on a attribué la même quantité de graines.
Ces comparaisons nécessitent la recherche de couples intermédiaires donc de faire varier les nombres de souris et de graines avec la contrainte de respecter l'équité, c'est-à-dire les rapports externes. Il y a là l'idée de variable et de fonction. On essaie d'habituer les élèves à considérer des quantités arbitraires de graines ou de souris pour pouvoir faire des comparaisons de rations en utilisant les stratégies décrites précédemment.

Dans la première phase, les élèves « complètent » deux distributions avant de comparer les deux rations :

Organisation : On partage la classe en deux. Chaque moitié de classe complète un tableau.
Le maître : *Dans chaque groupe vous vous mettez d'accord pour proposer un couple (nombre de souris, nombre de graines) (60 souris maximum) qui représente la même ration que le couple que je vous propose, qui pourrait figurer dans la même distribution et vous l'écrivez sur vos feuilles. Cette moitié de classe complète le tableau bleu et celle-ci le tableau vert.*

BLEU

nombre de souris			12						
nombre de graines			28						

VERT

nombre de souris						20			
nombre de graines						45			

Recueil des propositions et justifications. ***

Le maître *: Dans quelle distribution la ration est-elle la plus grande ? Est-ce qu'il vaut mieux être souris dans la distribution bleue ou dans la distribution verte ?*

Recueil des propositions et justifications. ***

Institutionnalisation : *Pour comparer deux distributions :*

- *on compare le nombre de graines attribuées à deux lots de souris de même effectif ;*
- *on compare le nombre de souris de deux lots qui ont reçu le même nombre de graines.*

Dans la deuxième phase, chaque « distribution » est représentée par un seul couple, les élèves doivent trouver les distributions qui utilisent la même ration. Dans une première étape, la ration est entière.

Le maître : *Je vais confier à chaque groupe d'élèves un lot de souris et un paquet de graines. Vous devez trouver le couple (nombre de souris ; nombre de graines) qui représente la même ration que votre couple parmi les couples que j'affiche au tableau.*

Consigne pour le maître :
Affichage des couples (nombre de souris ; nombre de graines) au tableau noir.
Attribution des couples aux élèves qui les recopient sur leurs feuilles.
Le maître : *Quand vous aurez trouvé ce couple, vous irez voir les élèves qui ont ce lot de souris et ces graines pour voir s'ils sont d'accord.*
S'ils sont d'accord, vous devez désigner un rapporteur qui viendra expliquer au tableau. S'ils ne sont pas d'accord, vous revenez à votre place et vous recommencez.

Dans la première étape, la ration est entière :

A

Nombre de souris	4
Nombre de graines	28

F

Nombre de souris	9
Nombre de graines	45

B

Nombre de souris	5
Nombre de graines	15

G

Nombre de souris	2
Nombre de graines	12

C

Nombre de souris	3
Nombre de graines	12

H

Nombre de souris	8
Nombre de graines	24

D

Nombre de souris	7
Nombre de graines	35

I

Nombre de souris	11
Nombre de graines	77

E

Nombre de souris	6
Nombre de graines	36

J

Nombre de souris	7
Nombre de graines	28

Dans la deuxième étape, le rapport interne est entier ; la troisième étape nécessite l'usage d'un couple intermédiaire.

Commentaires

Dans le langage ordinaire, la ration peut désigner plusieurs objets qui, dans la situation étudiée, correspondent à la quantité de graines pour une souris, pour un lot de souris, pour une distribution, etc. … Pour que le maître et les élèves puissent s'exprimer, il faut que le vocabulaire désigne les objets avec précision. Nous avons choisi d'étiqueter la quantité de graines que mange chaque souris d'une distribution équitable par le mot « ration » et de coder cette ration par n'importe quel couple de cette distribution.

Les couples d'entiers équivalents (nombre de souris, nombre de graines) représentent une même grandeur « ration » en même temps que la mesure de cette grandeur qui est un nombre rationnel. Comparer deux rations consiste donc à comparer les deux classes d'équivalence de couples qui représentent ces rations. Pour réaliser cette tâche complexe les élèves doivent disposer officiellement des techniques de la linéarité sans avoir à justifier systématiquement leur usage.

Résultats

La notion de variable

L'équité relève plus de la pensée que de l'action. Elle a nécessité raisonnements, confrontations d'idées et débats entre élèves pour justifier le choix du modèle linéaire. Ce modèle, maintenant institutionnalisé, est un moyen de réaliser des extensions hypothétiques de distributions équitables nécessaires aux activités de cette leçon. On demande aux élèves de proposer des couples de graines et de souris qui pourraient figurer dans deux distributions puis de comparer les rations de ces distributions. Ils doivent faire l'hypothèse que le nombre de souris et le nombre de graines peuvent varier, pourvu que leur rapport soit conservé.

Mais les élèves sont alors conduits à rechercher des multiples et des diviseurs, à faire du calcul mental et à réduire la situation à un jeu sur les entiers au détriment du sens. On est donc confronté à deux nécessités contradictoires :

- éviter un recours excessif aux algorithmes qui risquent d'occulter le sens que donne la situation ;
- multiplier les occasions de faire des calculs pour habituer les élèves à faire des hypothèses sur les grandeurs.

Cette algorithmisation est renforcée par la nécessité d'institutionnaliser les deux méthodes standard car si une découverte n'est pas validée et institutionnalisée dans un laps de temps assez court, elle est perdue.

La comparaison de rationnels

Un couple (nombre de graines, nombre de souris) représente une distribution potentielle (ou formelle) et sa ration. Comparer deux rations consiste donc à comparer deux couples. Pour réaliser cette comparaison, il peut être nécessaire de comparer ces deux couples à un couple intermédiaire dont l'un des termes est un multiple ou un diviseur commun aux termes homologues des deux autres couples.

Cette technique qui consiste à passer par un couple intermédiaire doit être rapidement institutionnelle pour que les élèves puissent s'y référer sans avoir recours à une explication fondée sur l'équité. L'institutionnalisation des techniques permet aux élèves de concentrer leur effort intellectuel sur la comparaison de deux rations. Nous sommes alors confrontés à un paradoxe que nous allons tenter de décrire.

L'institutionnalisation et ses difficultés

Les techniques

Pour comparer des rations, les élèves doivent disposer librement des techniques de la linéarité pour libérer leur pensée. En institutionnalisant « prématurément » les algorithmes, on encourage les élèves à y recourir de manière excessive au risque d'occulter le sens ; mais, si on renonce à institutionnaliser, on doit aussi renoncer à certains apprentissages.

Par exemple, il est difficile pour les élèves de percevoir que la ration est une grandeur variable, que tout couple qui code cette ration est aussi une mesure de cette ration et que, pour comparer deux mesures de rations, on compare deux couples quelconques (nombre de graines, nombre de souris), qu'il faut choisir, dans leur distribution respective, de telle sorte que la comparaison soit possible. Ces différents objets ne peuvent pas être appréhendés simultanément. L'apprentissage de chacun d'eux nécessite une situation spécifique indépendante des autres ou perçue comme telle ; on peut y parvenir par des institutionnalisations locales. Mais l'institutionnalisation ne se décrète pas ; elle ne peut se réaliser que sous certaines conditions. Or, elle se fait parfois indépendamment de la volonté du maître, de manière fortuite et diffuse. Par exemple, l'usage impromptu des flèches surmontées des opérations facilite la description de la technique utilisée, prend rapidement un caractère institutionnel, tend à se substituer aux explications et peut cacher un jeu sur les nombres aux dépens du sens porté par la situation.

Le vocabulaire

Les moments de formulation permettent aux élèves de communiquer leurs découvertes, d'expliquer ce qu'ils ont compris, de préciser et d'ajuster les résultats de leurs recherches. Le manque de vocabulaire les oblige à utiliser les valeurs numériques et les algorithmes pour expliquer, débattre et communiquer. Il y a alors beaucoup d'implicite chez les élèves qui ont compris ; cet implicite augmente avec la complexité mathématique des tâches. L'explication de cette complexité mathématique induit une complexité syntaxique. Il faut donc institutionnaliser des mots précis pour désigner les objets et faciliter la communication dans la classe et les explications qui vont permettre de faire partager les découvertes aux élèves en difficulté. Cependant, il faut trouver un équilibre entre des nécessités contradictoires. Une exigence excessive ou prématurée dans l'énonciation conduit les élèves à utiliser des phrases stéréotypées. Elles résument et réfléchissent la complexité mathématique pour ceux qui ont compris mais contribuent à occulter le sens pour ceux qui sont en phase d'apprentissage. Le maître ne peut pas faire la différence entre l'élève qui utilise une phrase correcte en ayant compris sa signification mathématique et l'élève qui fournit la même phrase sous l'effet du contrat didactique. Les contraintes institutionnelles ne produisent pas que du savoir ; elles peuvent aussi avoir des effets Jourdain.

Le moment

La difficulté dans l'institutionnalisation est de déterminer et de percevoir des indices qui disent quand le sens est acquis pour faire un plan d'usage et de fixation des techniques et du vocabulaire qui facilite l'énonciation, la prise en compte de la complexité mathématique, sans entraver les apprentissages.

Dans les leçons précédentes, les apprentissages successifs avaient permis de fixer les mots et expressions suivantes : « distribution équitable, distribution inéquitable, ration, couple » et les techniques : « nombre de fois, addition et soustraction ». Les instruments de pensée se traduisent alors par des énonciations qui puisent dans les registres institutionnalisés.

Le tableau et les flèches qui sont apparus de manière diffuse restent des instruments de communication et ne sont pas considérés comme des ostensifs de travail de recherche ou de construction de concepts. Il est donc souhaitable d'en éviter l'utilisation avant que les élèves ne comprennent la question à résoudre. Ils ont pour raisonner d'autres ostensifs à leur disposition, tels que dessins et opérations, stratégies standard ou opportunistes suivant les situations et leur niveau de connaissance ou de compréhension.

Institutionnalisation de la proportionnalité

Description de la leçon 5

On souhaite maintenant abstraire de la situation « des graines et des souris » le « concept de proportionnalité » ; on veut construire une connaissance sur des connaissances.
Pour permettre aux élèves d'avoir une activité réflexive sur la « situation des graines et des souris », on leur propose d'autres milieux objectifs qui nécessitent ou non l'usage des techniques déjà rencontrées dans cette situation. C'est une nécessité d'origine logique, physique ou sociale, qui permet de décider s'il y a lieu ou non de conserver les rapports internes et donc d'utiliser ces techniques. C'est en référence à l'égalité de ces rapports que les élèves comparent des situations et donnent un sens au concept de proportionnalité.

La première phase, « la fabrication de tartelettes », fournit un exemple puis un contre-exemple.

> ***Le maître*** : *Pour faire 15 tartelettes toutes pareilles un restaurateur a employé 6 œufs. Combien doit-il prévoir d'œufs pour fabriquer 45 tartelettes ? Faites les calculs sur vos feuilles. ****
> ***Le maître*** : *En fait le restaurateur s'est trompé, il doit fabriquer 50 tartelettes. Combien doit-il prévoir d'œufs ? Faites les recherches sur vos feuilles. ****
> ***Le maître*** : *Ce restaurateur fait cuire les tartelettes dans un grand four de boulanger. Pour faire cuire 15 tartelettes, il a fallu 30 minutes. Le restaurateur met les 50 tartelettes dans le four en même temps. Combien de minutes de cuisson doit-il prévoir ?*
> Commentaires **:** Il faut un peu de mise en scène pour faire comprendre aux élèves que toutes les tartelettes cuisent en même temps**.**
>
> Institutionnalisation :
> *Quand une distribution de graines à des souris est équitable, on dit que les quantités de graines sont <u>proportionnelles</u> aux nombres de souris.*
> *Dans la fabrication des tartelettes, les quantités d'œufs sont <u>proportionnelles</u> aux nombres de tartelettes mais les temps de cuisson ne sont pas <u>proportionnels</u> aux nombres de tartelettes.*

Dans la deuxième phase, « grandeurs proportionnelles ou non », les élèves doivent reconnaître les conditions d'usage de la proportionnalité.

> Exemple 1 :
> *Dans un élevage de lapins, 5 lapins ont reçu 8 carottes et 15 lapins ont reçu 24 carottes. La distribution est-elle équitable ? ****
>
> Exemple 2 :
> *L'an dernier, pour la fête de l'école, une classe de 30 élèves a mis 2 heures pour préparer 300 programmes. Cette année la directrice a décidé que deux classes de 30 élèves se réuniraient pour fabriquer 300 programmes comme l'an dernier. Combien de temps faut-il prévoir ?* (Réponse attendue : « une heure »)
> *Les temps pour préparer les 300 programmes sont-ils proportionnels aux nombres d'élèves ? ****
>
> Exemple 3 :
> *Pour traverser un lac, chaque bateau met 10 minutes. Deux bateaux partent ensemble de la même rive. Combien de temps leur faut-il pour traverser ce lac ?* (Recueil des réponses puis explications du maître. Le maître pourra faire

expérimenter les élèves en faisant traverser la classe à un élève puis deux élèves, etc. …)
*Les temps de traversée sont-ils proportionnels aux nombres de bateaux ? ****

Exemple 4 :
*Une directrice veut distribuer des biscuits proportionnellement aux nombres d'élèves de trois classes de CM1. Elle donne 63 biscuits à la classe de 18 élèves. Combien doit-elle attribuer de biscuits à la classe de 24 élèves puis à celle de 26 élèves ? ****

Institutionnalisation :
C'est en essayant d'utiliser les techniques de la linéarité que les élèves décident d'accepter ou de rejeter le modèle proportionnel. Par conséquent le maître ne peut faire qu'une institutionnalisation « locale » contextualisée aux grandeurs étudiées dans chaque exemple.

Commentaires

L'institutionnalisation est une activité réflexive sur les connaissances qui contribue à fermer la situation d'apprentissage. Elle ne peut réussir que si les élèves ont conscience de leurs connaissances. En construisant une connaissance sur les connaissances, elle libère les élèves de l'environnement didactique des apprentissages antérieurs et leur permet de concentrer leur effort sur le nouvel objet d'apprentissage.
On souhaite, dans cette leçon, institutionnaliser la proportionnalité, c'est-à-dire conduire les élèves à abstraire de la « situation des graines et des souris » des techniques pour agir, un vocabulaire pour communiquer et valider leurs actions mais aussi les moyens de déterminer leurs domaines d'utilisation.
Comment ?
La situation « des graines et des souris » a fait apparaître les techniques de la proportionnalité (usage des rapports internes ou externes, de l'addition ou de la soustraction, d'un couple intermédiaire) comme moyen de réaliser l'équité. Si les techniques de calculs pour résoudre une autre question sont les mêmes que pour cette situation alors les grandeurs étudiées sont proportionnelles. En particulier on demande aux élèves s'il y a lieu ou non de conserver les rapports internes pour les grandeurs correspondantes. Les élèves doivent aussi connaître les termes qui accompagnent ces calculs ainsi que leur usage. Or, à l'issue des quatre premières leçons, les techniques et le vocabulaire sont très contextualisés. Il s'agit donc de ménager des transitions en proposant aux élèves d'autres milieux qui nécessitent l'usage des techniques étudiées dans la situation des graines et des souris. On leur demandera de reconnaître ces techniques et de les accompagner d'un vocabulaire général ou adapté à chacun de ces nouveaux milieux. Par exemple « proportionnel » va remplacer « équitable » mais le « coefficient de proportionnalité » ou la « quantité à l'unité » est désigné par un nom de grandeur dérivée spécifique à chaque situation.
Le choix du milieu est délicat. Par exemple : le prix est-il proportionnel à la quantité[10] ? La convention sociale voudrait que oui ; le prix de n objets devrait être n fois le prix d'un objet si la base du prix des choses est la matière et le travail qu'il faut pour leur fabrication. Mais des raisons commerciales font que non ; n clients qui prennent un objet induisent un

[10] Remarquons que le mot "prix" désigne deux objets :
- la quantité de francs pour une quantité donnée de marchandise.
- le prix à l'unité qui est une grandeur dérivée.

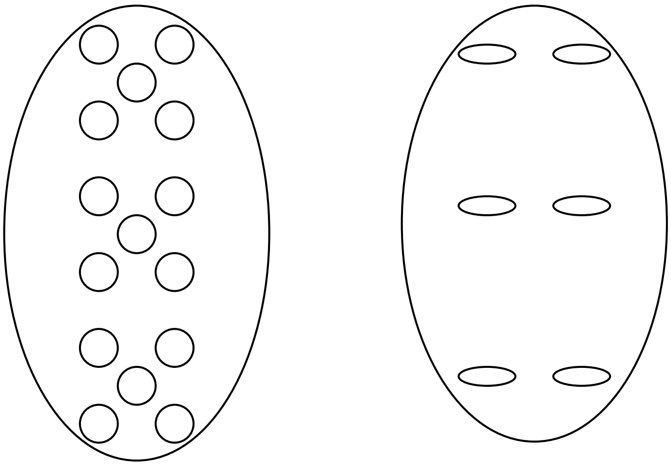
coût de vente supérieur à un client qui prend n objets en même temps ; de plus un commerçant gagne d'autant plus qu'il vend plus ; il va donc essayer de vendre plus en agissant sur le prix. Il y a un conflit entre les idées de prix à l'unité et de prix dégressif.
Dans la fabrication d'objets, les quantités des ingrédients sont proportionnelles aux nombres d'objets fabriqués. On a donc choisi un exemple de fabrication coutumier à beaucoup d'enfants : la fabrication de gâteaux.

Résultats

La première phase de cette leçon conduit les élèves à réutiliser implicitement les techniques de la proportionnalité, en particulier les rapports internes en raisonnant sur un milieu matériel nouveau mais familier qui étend le champ d'utilisation de la proportionnalité en remobilisant l'attention des élèves. Mais nous avons observé que l'environnement didactique ne produit pas toujours les effets attendus. Dans les illustrations suivantes les élèves n'utilisent pas le dessin, le signe « = » ou le tableau de manière idoine.

Le dessin

Pour illustrer la première situation des tartelettes, la maîtresse fait le dessin suivant :



Elle produit ensuite des gestes qui miment la production de la collection des 45 tartelettes et la collection des 18 œufs correspondants. Elle illustre l'usage du rapport interne « 3 ». Mais la disposition choisie rend le dessin opératoire et procure une aide différente aux élèves que certains d'entre eux utilisent directement alors que d'autres refont les calculs « 15 : 3 = 5 et 6 : 3 = 2 ». L'élève qui passe au tableau pour la correction entoure 5 dessins de tartelettes et 2 dessins d'œufs pour montrer la correspondance et donc réinvestit au sein du dessin un modèle opératoire indépendant des ostensifs intentionnels de la maîtresse. Autrement dit les ostensifs graphiques et gestuels de la maîtresse n'ont pas été utilisés comme elle l'espérait. Il semble que certains élèves ne voient dans l'ostension que ce qu'ils ont déjà compris.

Le signe « = »

Un élève écrit au tableau : « 15 + 15 = 30 + 15 = », la maîtresse intervient, efface et écrit « 15 + 15 + 15 = ». Une autre élève réécrit au tableau : « 30 + 15 = 45 » et pose l'opération « 12 + 6 = 18 ».
L'usage algébrique du signe « = » que veut faire la maîtresse n'est pas compris par les élèves qui utilisent le signe « = » comme un sténogramme de l'arithmétique.

Le tableau

On souhaite que les élèves reconnaissent les conditions d'usage du rapport multiple pour accepter ou rejeter le modèle proportionnel et qu'ils formulent en utilisant le mot « proportionnel » à l'occasion de quelques exemples familiers. Les trois premiers exemples sont réussis par 90% des élèves. Mais la proposition d'un tableau fermé au dernier exercice a été une entrave à la recherche du couple intermédiaire (2 ; 5) :

> ***Le maître*** : *Une directrice veut distribuer des biscuits proportionnellement aux nombres d'élèves des différentes classes de l'école. Compléter le tableau suivant :*

Nombre d'élèves dans la classe	18	24	26
Nombre de biscuits	45		

Les élèves n'osent pas rajouter un couple dans un tableau fermé. Ils semblent donner un statut différent à ce couple intermédiaire qui ne fait pas partie du milieu et qu'ils écrivent souvent en dehors du tableau. La maîtresse consciente du blocage essaie d'aider les élèves en privé en évoquant la table de multiplication par 9 : *« Dans la table de 9, il y a 18 et 45* ». Mais certains élèves ne voient pas quel usage ils peuvent bien faire de cette table et restent perplexes. La tentative de la maîtresse qui cherche à induire ou à rappeler l'usage d'un algorithme de calcul échoue auprès des élèves qui ne lui ont pas encore attribué de sens. Une technique ne peut pas être institutionnelle tant que les élèves n'ont pas vu la finalité de son usage.

Néanmoins, l'appropriation du mot « proportionnel » comme englobant et unifiant les différentes situations de proportionnalité semble réussi ; certains élèves ont repris les formulations de la maîtresse en les adaptant aux nouveaux milieux matériels.

Le processus d'institutionnalisation

Nous avons noté, à propos des différentes leçons, la nécessité de l'institutionnalisation et ses difficultés. Elle joue un rôle fondamental dans la construction des connaissances.

L'institutionnalisation n'est pas seulement un moment crucial où le maître doit prendre la responsabilité d'officialiser et de pérenniser un savoir. Elle est aussi un outil qui permet de contrôler l'évolution de la situation en gérant l'espace de liberté des élèves. Elle s'inscrit dans un processus complexe[11] qui conduit les élèves à prendre progressivement conscience de leurs connaissances en leur donnant du sens par une attitude réflexive sur leurs actions.

Le plan suivant décrit le vocabulaire et les techniques qui doivent être connues des élèves et reconnues officiellement dans la classe à l'issue de chacune des cinq leçons.

Leçon 1 :
Une part est une quantité de graines que mange une souris.
Une répartition ou distribution est équitable, si toutes les parts sont égales.
Chacune des parts d'une distribution équitable représente la ration. La ration est caractéristique d'une distribution équitable ; c'est la quantité de graines que mange chaque souris de cette distribution.

Leçon 2 :
Les élèves doivent savoir utiliser les rapports internes pour construire une distribution équitable, valider l'équité d'une distribution, expliquer qu'une distribution est inéquitable. Une ration est maintenant désignée par un couple (nombre de souris, nombre de graines).

[11] Une étude de ce processus figure dans COMIN,(2000).

Leçon 3 :
A l'issue de cette leçon, les élèves doivent savoir :
- construire des couples équivalents hypothétiques ;
- rechercher un « couple intermédiaire » pour vérifier l'équité d'une distribution avec les rapports internes ;
- additionner ou soustraire des couples d'une distribution équitable pour obtenir un autre couple de cette distribution.

Leçon 4 :
Pour comparer les rations de deux distributions équitables, il suffit de comparer un couple d'une distribution à un couple de l'autre distribution.
On peut faire l'hypothèse qu'un couple provient d'une distribution équitable donc peut désigner la ration de cette distribution.
Pour comparer deux rations désignées chacune par un couple, il peut s'avérer nécessaire d'utiliser un couple intermédiaire.

Leçon 5 :
A l'issue de cette leçon, les élèves doivent savoir :
- accepter ou rejeter le modèle proportionnel sur des grandeurs familières en essayant d'utiliser les techniques de la linéarité, en particulier les rapports internes comme le double ;
- formuler en utilisant le mot « proportionnel ».

Conclusions

Les différentes observations ont montré que les élèves ont su construire les techniques de la proportionnalité pour réaliser l'équité, reconnaître la validité du modèle proportionnel sur différentes situations objectives, utiliser des techniques adaptées pour déterminer les éléments manquants et les accompagner d'un vocabulaire idoine. Les comparaisons de rations sont moins bien réussies mais les élèves ont compris que le mot « ration » désigne une grandeur variable, mesurée par deux nombres entiers. Quelques indices laissent penser que les notions de variable et de relation fonctionnelle ont été « perçues » : plusieurs élèves ont proposé des couples hypothétiques en respectant le rapport externe.

Perspectives

L'originalité de la situation « des graines et des souris » ne réside pas dans son milieu matériel mais dans son fondement qui rend opératoire les techniques de la proportionnalité pour réaliser l'équité. Cette notion apparaît comme une raison sociale de construire le modèle proportionnel dont la validation raisonnée échappe aux contraintes et aléas du mesurage. En même temps, la situation « des graines et des souris » réunit toutes les conditions pour construire des rationnels et apporter des connaissances sur les notions de variable et de fonction qui préparent la formalisation différée de ces concepts et leur institutionnalisation. Les idées de variable et de fonction ne peuvent pas apparaître pertinentes sur une seule situation. Ces concepts prennent de la consistance sur des processus d'apprentissage qui à long terme les font apparaître comme des objets « algébriques » qui réfléchissent et synthétisent les relations entre grandeurs. La difficulté de leur institutionnalisation est de déterminer le moment où les élèves sont aptes à leur donner le sens idoine.

BIBLIOGRAPHIE

BOISNARD Danièle, HOUDEBINE Jean, JULO Jean, KERBOEUF Marie Paule et MERRI Maryvonne. (1994). *La proportionnalité et ses problèmes.* Hachette éducation.

BROUSSEAU Guy et Nadine. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire.* IREM de Bordeaux.

COMIN Eugène. (2002). *L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège.* R.D.M. vol. 22/2.3.

COPREM. (1985). *L'enseignement de et autour de la proportionnalité.* Bulletin de liaison des Professeurs de Mathématiques : numéro 38.

DE COTRET Sophie René. (1985). *Etude historique de la notion de fonction : analyse épistémologique et expérimentation didactique.* Université du Québec.

DOUADY Régine. *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*. R.D.M. vol.7 n°2.

LEBESGUE Henri. (1975). *La mesure des grandeurs.* Albert Blanchard.

LEVAIN Jean Pierre et VERGNAUD Gérard. (1994-1995). *Proportionnalité simple et proportionnalité multiple.* Grand N n° 56, pp 55 à 66.

NADI Mustapha.(2000). *Grandeur de la mesure.* APMEP n° 428, pp. 292 à 299.

NOELTING Gerald. (1980). *The development of proportionnal reasoning and the ratio concept.* Educational Studies in Mathématics, 11-2.

PIAGET Jean, GRIZE Jean Blaise, SZEMINSKA Alina et BANG Vin. (1968). *Epistémologie et psychologie de la fonction.* Presse Universitaire de France.

PLUVINAGE F. et DUPUIS C. (1980). *La proportionnalité et son utilisation.* IRMA : Université Louis Pasteur, Strasbourg.

ROUCHE Nicolas.(1992). *Le sens de la mesure.* Didier Hatier.

ROUCHIER André. (1980). *Situations et processus didactiques dans l'étude des nombres rationnels positifs.* RDM vol 1-2 ; p 225.

SOKONA Sidi-Bekaye. (1989). *Aspects analytiques et aspects analogiques de la proportionnalité dans une situation de formulation..* Petit X n° 19 ; pp 5 à 27.

VERGNAUD Gérard. (1981). *L'enfant la mathématique et la réalité.* Peter Lang, Berne.

WHITNEY Hassler. (1968). *The mathematics of physical quantities.* Part I : mathematical models for mesurement. Part II : quantity structures and dimensional analysis.