

# LE NEZ DE PINOCCHIO, UN PROBLEME DE MATHEMATIQUE “INVERSE”

Lucia Grugnetti (Parma)  
Catherine Dupuis (Suisse romande)

Cet Article<sup>1</sup> est tiré des Actes des journées d'études 2001<sup>2</sup> sur le Rallye mathématique transalpin qui se sont déroulées en 2001 à Siena et Neuchâtel, sur le thème *RMT : évolution des connaissances et évaluation des savoirs mathématiques*.

Le rallye Mathématique Transalpin (RMT) rassemble chaque année, depuis 11 ans, environ 2000 classes d'écoles de Suisse, Italie, France, Luxembourg et Israël. Au-delà de la confrontation et de la fête, ses objectifs sont résolument orientés vers l'apprentissage et l'enseignement par résolution de problèmes. Les journées d'études sont elles aussi annuelles. Le rallye Mathématique Transalpin sera présenté plus longuement dans un prochain numéro de Grand N, mais de plus amples renseignements peuvent être trouvés auprès de la revue suisse *Math-Ecole*<sup>3</sup>.

## Le problème

### LE NEZ DE PINOCCHIO

Le nez de Pinocchio a 5 cm de long. Quand Pinocchio dit un mensonge, la Fée aux cheveux bleus l'allonge de 3 cm, mais quand il dit la vérité, la Fée le raccourcit de 2 cm. A la fin de la journée, Pinocchio a dit 7 mensonges et son nez a 20 cm de long.

**Combien de fois Pinocchio a-t-il dit la vérité à la Fée au cours de la journée ?**

*Expliquez comment vous avez fait pour trouver la réponse.*

## Introduction

Comme la plupart des problèmes du RMT, le nez de Pinocchio, qui fait partie de la seconde épreuve de la 7<sup>ème</sup> édition dudit rallye, était proposé à des classes de différents niveaux scolaires, soit en 3<sup>ème</sup>, en 4<sup>ème</sup> et en 5<sup>ème</sup> année<sup>4</sup>.

<sup>1</sup> Cet article a été publié dans la revue *Math-Ecole* n° 200, décembre 2001, pp. 13-19. Nous le reproduisons avec l'aimable accord du comité de rédaction de cette revue.

<sup>2</sup> Actes des Journées d'études sur le Rallye mathématiques transalpin « *RMT : évolution des connaissances et évaluation des savoirs mathématiques* » - 2001 – pp 140-156 – Math-école.

<sup>3</sup> *Math-école*, Institut de Mathématiques, 11 rue Emile Argand CH-2007 Neuchâtel / [admin@math-ecole.ch](mailto:admin@math-ecole.ch) / <http://www.math-ecole.ch>

<sup>4</sup> La 1<sup>ère</sup> année pour les enfants de 6 ans à 7ans ...

Comme tous les problèmes du RMT, le nez de Pinocchio a mis en évidence plusieurs stratégies de résolution. L'analyse des épreuves permet de mettre en relation les procédures de résolution des élèves et leur développement cognitif. De plus, on peut constater une évolution des connaissances mathématiques requises dans ce problème selon qu'il est résolu par des élèves de 3<sup>ème</sup>, de 4<sup>ème</sup> ou de 5<sup>ème</sup> année. Étant international, le RMT permet de comparer les effets éventuels du système scolaire ou des différents choix méthodologiques sur les stratégies de résolution mises en place par les élèves. La recherche qui suit se base sur les travaux d'élèves de 3<sup>ème</sup>, 4<sup>ème</sup> ou 5<sup>ème</sup> année des différentes régions italiennes engagées dans le RMT (82 épreuves) et des épreuves des classes de Suisse romande (102 épreuves). On peut confronter lesdites épreuves à celles de la République tchèque réalisées par des élèves du même âge (10 épreuves).

## **Analyse de l'énoncé et contenu mathématique**

Le contexte de ce problème permet aux élèves de se l'approprier facilement, du moins dans sa phase initiale car presque tous les enfants de par le monde connaissent le personnage de Pinocchio ainsi que son problème de nez qui s'allonge lorsqu'il ment. De même, les enfants connaissent aussi la Fée Bleue qui récompense ou pardonne les mensonges de notre sympathique pantin. De ce fait, l'énoncé du problème contient tous les ingrédients d'une fable. Comme chacun le sait, les phrases simples ainsi qu'un énoncé relativement bref conviennent bien à des élèves de 8 à 9 ans, ce qui implique une bonne compréhension de la tâche à accomplir et par conséquent de grandes chances de réussite dans la résolution d'un problème. La longueur finale du nez à la fin de la journée, compte tenu des mensonges et vérités, est mentionnée dans l'énoncé. En outre, à un certain stade de la procédure de résolution, la longueur du nez est supérieure à celle qui est donnée dans l'énoncé, ce qui nécessite un retour en arrière afin de retrouver le nombre de vérités dites au cours de la journée. C'est là que réside toute la difficulté de ce problème. Il est donc possible de classer ce problème parmi ceux qui nécessitent le recours à l'addition et à la multiplication. Il met également en jeu des connaissances de numération.

## **Analyse a priori**

### **Domaine de connaissances**

Arithmétique : suite des nombres naturels, addition, soustraction et multiplication

### **Analyse de la tâche**

- déterminer que, pour 7 mensonges, le nez de Pinocchio s'allonge de 21 cm ( $7 \times 3$ ), qui, ajoutés aux 5 cm d'origine pourrait atteindre 26 cm ( $21 + 5$ ) ; si le nez de Pinocchio n'a que 20 cm, cela signifie qu'il s'est raccourci de 6 cm, ( $26 - 20$ ) et que, par conséquent, il a dit 3 fois la vérité ( $6 : 2$ ) ;
- dessiner une bande numérique et effectuer 7 déplacements de 3 en 3 à partir de 5 pour arriver à 26 et retourner à 20 en 3 déplacements de 2 en 2 ;
- effectuer par essais des déplacements alternés, (ou additions et soustractions) pour arriver à 20 avec 7 déplacements de 3 en avant (ou  $7 \times 3$ ).

### **Attribution des points**

- 4 : Réponse correcte avec une explication claire et détaillée (opérations ou repères sur la suite des nombres) ;
- 3 : Réponse correcte avec une explication partielle ou peu convaincante ;

- 2 : Réponse correcte sans explication ou réponse ne contenant qu'une erreur, avec explications ;
- 1 : Début de recherche ;
- 0 : Incompréhension du problème.

## Analyse a posteriori

L'analyse des protocoles permet d'affirmer que le problème a été bien compris et résolu correctement, tant en Suisse qu'en Italie, par environ 70% des classes. Sur les 30% restant, les cas d'incompréhension ou de réponses complètement fausses sont rares dans les différentes régions, mais symptomatiques d'erreurs, difficultés ou conceptions inadéquates bien connues de la recherche en didactique. Nous choisissons de présenter d'abord l'analyse de ces aspects avant de s'intéresser aux stratégies correctes.

### Incompréhension du problème

Certains élèves ont « résolu » le problème comme s'ils utilisaient les données au hasard, en recourant implicitement à quelques « théorèmes-élèves » : *un problème doit avoir une solution en tout cas - il est nécessaire d'utiliser toutes les données - il faut faire des opérations.*

Exemple :

*On a fait  $20 - 7 = 13$        $13 - 5 = 8$        $13 + 8 = 21$        $21 - 1 = 20$   
donc le total est  $13 + 7 = 20$ . (Catégorie 4 - CH).*

Dans un cas, on arrive à un nombre non entier de « vérités » :

*$7 \times 5 = 35$  (mensonges durant toute la journée)       $35 - 20 = 15$   
 $15 : 2 = 7,5$  qui sont les vérités. (Catégorie 5 - I)*

L'explication de la procédure, qui suit la liste des opérations, met en évidence dans ce cas (mais nous le verrons encore dans d'autres protocoles) la priorité des « nombres purs » sur les « grandeurs » et sur leur « mesure » qui en perd toute signification. On a relevé la phrase personnelle d'un élève et non d'un groupe (comme on devrait l'attendre dans une épreuve du RMT) : *« l'opération n° 1 est 7 mensonges fois 5, la mesure du nez, et comme cela j'ai trouvé 35 mensonges en tout. Puis j'ai fait l'opération n° 2 : les mensonges dits dans toute la journée moins la mesure du nez de Pinocchio à la fin de la journée et alors le résultat 15 est la mesure de combien le nez de Pinocchio s'est raccourci. Enfin, pour l'opération n° 3, j'ai divisé par 2 la mesure de combien le nez s'est raccourci, la mesure de combien chaque vérité fait raccourcir le nez et j'ai trouvé le nombre de vérités : 7,5 ».*

Dans plusieurs cas, les données sont utilisées dans le but évident d'obtenir le nombre 20 ou de centrer la recherche sur le nombre 20 qui est la dernière donnée du problème et qui représente (en cm) la longueur finale du nez, même si les calculs n'ont rien à voir avec l'énoncé :

- *« Nous avons enlevé aux 20 cm du nez de Pinocchio (à la fin de la journée) les 7 mensonges qu'il avait dits et nous avons trouvé 13 comme résultat. Nous avons fait une soustraction pour vérifier que nous trouvons comme résultat, 7, qui sont les mensonges qu'il avait dits. Pinocchio a dit 13 vérités. » (Catégorie 4 - I)*
- *« Pinocchio a dit 10 fois la vérité. La réponse a été trouvée en faisant une ligne de 20 cm, puis elle s'est allongée de  $3 \times 7 = 21$ . Après il a fallu retirer 2 cm pour arriver à 20 cm. » (Catégorie 3 - I)*
- Une classe de troisième année (Suisse romande) déclare avoir fait des tentatives inutiles pour trouver la réponse et fait appel à une condition d'équilibre :

« Pinocchio a dit 7 mensonges et a dit la vérité à la fée aux cheveux bleus mais comme il a dit 7 mensonges il aura dit 7 fois la vérité. »

- Une classe italienne de quatrième année ne considère que les nombres de la dernière phrase des données et écrit : « Réponse  $20 - 7 = 13$ . Pinocchio a dit 13 fois la vérité. Raisonement : Nous avons pensé à une soustraction très simple et en enlevant les 7 mensonges on arrive à 13 vérités »

Selon un autre « théorème implicite » de l'élève, il faut utiliser les dernières notions scolaires étudiées. La tendance est forte de se référer aux sujets traités en classe au moment de la passation des épreuves du rallye.

Une classe de troisième année de la région de Parme, par exemple, aux prises avec la division à l'époque de l'épreuve et n'ayant pas compris l'énoncé, a utilisé les nombres en jeu et les quatre opérations, en commençant précisément par la division.

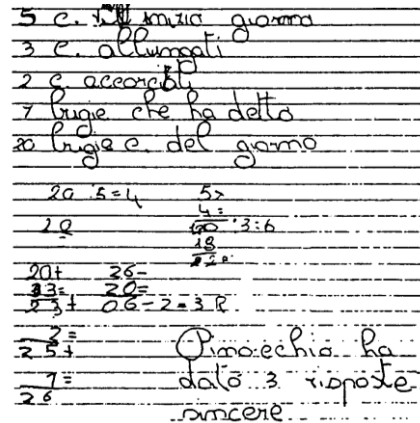


Figure 1

### Stratégies partiellement correctes

Dans quelques cas, suite à une procédure globalement correcte, la réponse n'est pas explicitée car l'attention se focalise, encore une fois, sur la longueur finale du nez.

«  $7 \times 3 = 21$        $21 + 5 = 26$        $26 - 2 = 24$        $24 - 2 = 22$   
 $22 - 2 = 20$

dàbor nous avons fait des + x - et on à ecri les calcules en haut et en groupan tous sa sa nous a donné le résultat = 20. » (Categoria 4 - CH).

Dans un autre cas, on se concentre sur la longueur du nez, mais pas celle de la fin de la journée mais celle acquise après les 7 mensonges, sans prendre en compte la réduction due aux vérités énoncées. (« Pinocchio est un menteur » et, peut-être, cet aspect émotionnel l'emporte sur d'autres considérations.) :

«  $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 21$ , ou  $3 \times 7 = 21$ ,  
 augmentation d'un jour,  $21 + 5 = 26$

Réponse : Le nez de Pinocchio a 26 cm de long. » (Catégorie 3 - I).

D'autres stratégies partiellement correctes sont celles qui contiennent une erreur de type « ajouter 3 cm comme longueur initiale du nez » au lieu de 5 cm ou encore de confondre l'allongement avec le raccourcissement.

### Stratégies correctes

Contrairement à ce qui arrive dans d'autres problèmes du RMT, pour *Le nez de Pinocchio*, lorsque la réponse est correcte, la procédure suivie apparaît claire et structurée - au moins en substance, si ce n'est dans la forme. C'est un problème qui ne peut se résoudre par essais non organisés, dont les enjeux doivent être perçus entièrement avant de passer à la phase de calcul.

C'est en plus un problème qui offre une grande variété de stratégies résolutives, qui recourent seulement au modèle additif ou simultanément aux modèles additif et multiplicatif, ou qui s'appuient sur une représentation graphique efficace, ou encore qui

font appel à une perception globale des informations, exploitées pas à pas ou par compensation entre mensonges et vérités.

### Stratégies purement arithmétiques

La plus grande partie des stratégies, que ce soit en Suisse, en Italie ou encore en République tchèque, sont de type arithmétique, et parmi celles-ci figurent :

- Les stratégies qui recourent à une succession d'additions et de soustractions (pas à pas) jusqu'au moment où l'on arrive un nombre 20, comme :

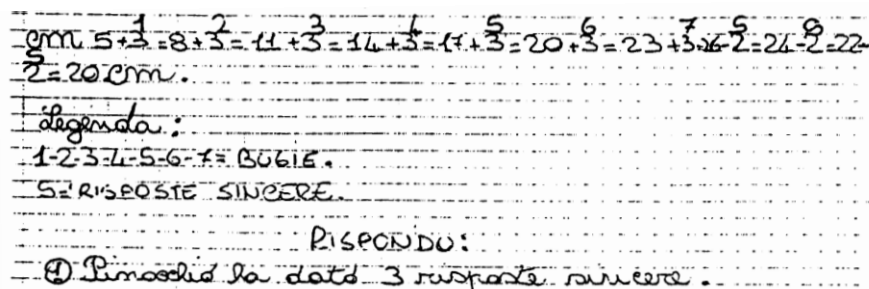


Figure 2

ou qui donnent directement l'explication, mais sur une base additive comme la suivante :

« En tout, il a dit trois vérités.

*Nous avons ajouté aux 5 cm du nez de Pinocchio 7 fois 3 cm, les sept fois correspondent aux mensonges et les 3 cm à l'allongement du nez à chaque mensonge et nous avons trouvé 26 cm et aux 26 cm nous avons retiré les 2 cm des vérités jusqu'à ce que nous arrivions à 20. Nous avons compté combien il y avait de 2 et nous avons trouvé trois nombres 2 et alors il a dit trois fois la vérité. »*  
(Catégorie 5 - I)

Dans cette description du raisonnement, on relèvera que, à l'exception du dernier nombre 20, les élèves ont fait référence aux longueurs en jeu et n'ont donc pas utilisé seulement les nombres mais aussi les centimètres. Ceci n'arrive en général pas dans les procédures explicitées comme une succession d'opérations :

$$\ll 5 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 26 \quad 26 - 2 = 24 \quad 24 - 2 = 22 \quad 22 - 2 = 20$$

*Réponse. Pinocchio a dit 3 fois la vérité dans la journée. »* (Catégorie 4 - I)

Par rapport au nombre total des stratégies correctes, celles qui se fondent sur un modèle purement additif sont peu nombreuses (environ 10%), mais plus fréquentes en Italie (réparties dans les différentes régions) qu'en Suisse.

- Les stratégies qui, comme le prévoyait l'analyse a priori, cherchent à « déterminer que, pour 7 mensonges, le nez de Pinocchio s'allonge de 21 cm (7 x 3), qui, ajoutés au 5 cm d'origine pourrait atteindre 26 cm (21 + 5); si le nez n'a que 20 cm, cela signifie qu'il s'est raccourci de 6 cm (26 - 20) et que, par conséquent, il a dit 3 fois la vérité (6 : 3). »

On soulignera que, en ce qui concerne la dernière opération, c'est-à-dire la recherche du nombre de vérités sachant que le nez s'est raccourci de 6 cm, tous les groupes n'ont pas fait appel à la division mais, en particulier ceux de troisième année, de Suisse comme d'Italie, ont contourné l'obstacle par les soustractions successives : « 26 - 2 - 2 - 2 = 20 ».

A partir de la quatrième année (surtout en Suisse) on voit apparaître la division (6 : 2 = 3), qui sera plus fréquente en cinquième année sans encore être utilisée par tous les élèves, surtout en Italie.

Parmi les groupes qui ont fait appel à la multiplication, certains ont effectué les opérations successives :

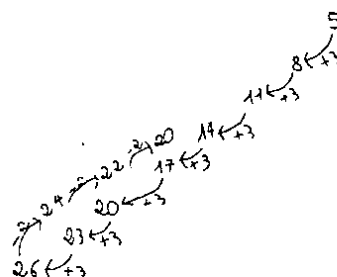
$$\ll 7 \times 3 = 21 \quad 21 + 5 = 26 \quad 26 - 20 = 6 \quad 6 : 2 = 3 \gg$$

alors que d'autres ont présenté la chaîne d'opérations du genre :

$$\ll 7 \times 3 = 21 + 5 = 26 - 20 = 6 : 2 = 3 \gg.$$

Il faut relever, dans la majorité des copies examinées (des différents pays), un usage plutôt « désinvolte » du signe « = », qui apparaît déjà dans l'exemple précédent.

La copie d'une classe italienne de quatrième année met bien en évidence la manière dont se déroule la chaîne « temporelle » des opérations, à l'aide de flèches.



$$7 \times 3 = 21 + 5 = 26 - 20 = 6 : 2 = 3$$

Spiegazione

Per trovare la risposta abbiamo tenuto conto di un'informazione: Pinocchio ha detto sette bugie, quindi il suo naso si è allungato di  $3 \times 4 = 21$  cm, poi abbiamo fatto  $21 \text{ cm} + 5 \text{ cm}$  che lui aveva prima e poi si siamo chiesti: perché ha  $26$  cm alla fine della giornata? Perché ha allungato 3 volte.

Figure 3

Dans quelques cas, il est fait un usage correct des parenthèses, en particulier dans les copies de Prague et dans quelques-unes d'Italie (une seule fois dans les copies de Suisse). La collègue de Prague, que nous avons interrogée à ce sujet, nous a expliqué que, en République tchèque, les parenthèses sont introduites très tôt dans la scolarité. Dans un cas, le problème a été résolu dans une perspective globale où le calcul se réfère aux changements des longueurs et non sur les longueurs elles-mêmes, ainsi que l'expliquent les élèves de cette classe italienne de cinquième année :

*« Pinocchio a dit trois fois la vérité à la fée. Nous avons trouvé ce résultat en trouvant de combien de centimètres le nez s'est allongé au cours de la journée ( $7 \times 3$ ) en disant des mensonges. Puis nous avons trouvé, en faisant l'opération  $20 - 5 = 15$ , les centimètres de nez allongé par les réponses justes et fausses. Avec l'opération  $21 - 15 = 6$ , nous avons trouvé les centimètres qui ont été raccourcis. Après ceci, en divisant par 2 (les cm qui ont été raccourcis) nous avons obtenu le nombre 3 qui est la réponse exacte. »*

Nous avons pu observer que les procédures résolutive données par argumentations et non par une succession d'opérations sont plus fréquentes en Italie qu'en Suisse et qu'elles n'apparaissent jamais dans les copies de Prague.

### Stratégies graphiques et mixtes (arithmétiques et graphiques)

Six copies présentent une résolution de type purement graphique et sept de type mixte, dont trois reproduisent la droite numérique, comme si c'était a posteriori car il semble qu'elle n'a pas été utilisée. L'une de ces sept solutions à stratégie mixte a déjà été présentée précédemment (figure 3) ; une autre, bien qu'elle ne soit pas correcte, est traitée ici (figure 4).

Il semble, dans ce cas, que lors de l'appropriation de l'énoncé à travers la représentation graphique, la question du problème a été réinterprétée de manière différente. L'attention est concentrée sur les 15 cm d'augmentation dus aux mensonges. Comment faire pour les retirer ? Les élèves ont alors compensé les 7 mensonges par 7 vérités.

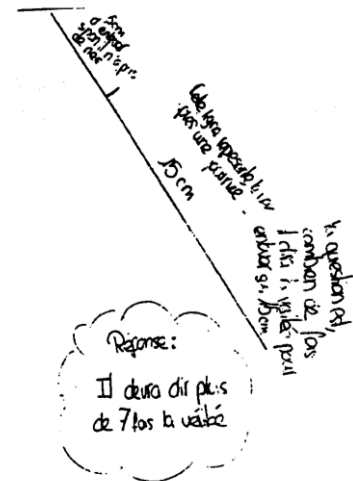


Figure 4

Trois des stratégies de type graphique respectent la procédure prévue dans l'analyse a priori : « dessiner une bande numérique et effectuer 7 déplacements de 3 en 3 à partir de 5 pour arriver à 26 et retourner à 20 en 3 déplacements de 2 en 2. ».

Une autre représente le nez dans ses différentes situations

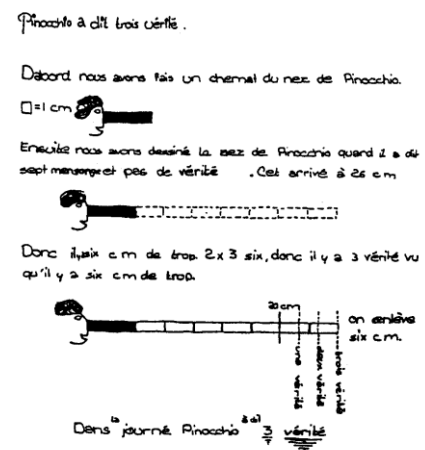


Figure 5

Une autre encore, de troisième année, présente les longueurs en jeu sur un axe en combinant les différents mensonges et vérités.

Les enfants expliquent qu'ils ont commencé par un mensonge. Au point d'abscisse 8 apparaît le premier mensonge (lettre B pour « bugia » en italien), au point d'abscisse 6 est notée la première vérité (V), puis vient un mensonge (abscisse 9) et encore une vérité (abscisse 7), puis un mensonge (10) et encore un mensonge (13), suivi d'une vérité (11) et pour arriver à 20, encore 3 mensonges pour obtenir un total de 7.

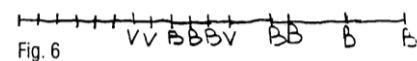


Fig. 6

Dans les copies de type mixte, les élèves utilisent aussi la droite numérique, mais ils se sentent obligés de reporter aussi leurs calculs.

## Quelques considérations sur la problématique de l'évaluation

L'analyse des copies a inévitablement rouvert, au sein du groupe de travail, la problématique de l'évaluation des épreuves du RMT.

L'analyse a priori cherche à prévoir les différentes stratégies possibles et à définir un barème de points. Naturellement, il arrive très souvent, pour ne pas dire toujours, que certains élèves s'écartent de nos raisonnements d'adultes (même des enseignants

praticiens). Il est ainsi difficile d'établir des barèmes intégrant déjà toutes les procédures qui seront effectivement adoptées.

Nos recommandations aux différentes équipes est que l'attribution définitive des points devrait se faire dans une ultime étape de la correction, après avoir analysé toutes les copies et compris les stratégies et procédures des élèves et non pas strictement d'après une liste pré-établie, selon des critères "adultes".

Un autre type de considération, pour les évaluations conduites dans le cadre du RMT, concerne en particulier le cas des problèmes de type arithmétique. La problématique est de savoir si on va s'en tenir seulement à la substance de la procédure ou aussi à la forme. Là où les élèves proposent une procédure au cours de laquelle - comme nous l'avons vu précédemment et comme le montre encore l'exemple de la figure 7 - apparaît un usage abusif de l'égalité, nous nous posons la question suivante : voulons-nous évaluer ce qui, en dernière analyse, est un « phénomène didactique » commun à des réalités très diverses et qui provient peut-être du passage d'une succession temporelle d'actions à leur traduction en terme de chaîne d'opérations ou voulons-nous évaluer les capacités de raisonnement des élèves et leur développement intellectuel ?

#### 4. PINNOCCHIŮV NOS (3 - 4 - 5)

Pinocchiův nos měří 5 cm. Když Pinocchio zalže, nechá Féé nos prodloužit o 3 cm, ale když řekne pravdu, nechá ho zkrátit o 2 cm. Za den Pinocchio 7krát zalhal a jeho teď měří 20 cm.

Kolikrát za den řekl Pinocchio pravdu? *3 x řekl pravdu.*

Vysvětlete, jak jste našli odpověď. *3 · 7 = 21 + 5 = 26* ~~26 - 5 = 21~~ ~~26 - 6 = 20~~ *26 - 2 = 24 - 2 = 22 - 2 = 20*

Figure 7