CONSTRUIRE UN POINT OU UN VECTEUR A PARTIR D'UNE RELATION VECTORIELLE, UNE TACHE PROBLEMATIQUE

Nina HAYFA
Université Saint-Joseph, Beyrouth
Claude TISSERON
LIRDHIST, Université Lyon 1

Résumé : Au cours de notre recherche sur l'enseignement et l'apprentissage de la notion de vecteur au Liban, nous avons constaté que la tâche : "Construire un point ou un vecteur à partir d'une relation vectorielle" est une tâche problématique pour les élèves. Dans cet article, nous identifions quelques variables didactiques de cette tâche et leur lien avec des conceptions. Nous décrivons trois types de conceptions à partir des types de problème et des techniques correspondantes. Nous mettons en évidence que l'enseignement explicite de l'aspect libre du vecteur autorise de meilleures performances sur la tâche en question.

Mots clés : Vecteur, conception, vecteur lié/libre.

Introduction

Ce travail rend compte d'une recherche menée dans le cadre d'une thèse[1] sur les effets de la réforme de l'enseignement des mathématiques au Liban. Plus précisément, il s'agit d'étudier la réalisation et les effets de la réforme relativement à l'enseignement des vecteurs. Depuis cette réforme, commencée en 1998, l'enseignement des vecteurs au Liban se réalise dans les classes de $4^{\text{ième}}$ (EB8 au Liban, 13-14 ans), $3^{\text{ième}}$ (EB9, 14-15 ans) et seconde (ES1, 15-16 ans), Auparavant, l'enseignement des vecteurs se réalisait en une année seulement, en seconde. La réforme a donc profondément modifié cet enseignement dans un désir de progression mais aussi de simplification.

Dans le cadre de ce travail de thèse, nous avons constaté chez des élèves des difficultés importantes et inattendues à propos d'exercices du type « construire un vecteur ou un point à partir d'une relation vectorielle ». Nous avons alors cherché à préciser ces difficultés et les connaissances des élèves, puis à mettre ces difficultés en relation avec l'enseignement des vecteurs tel qu'il est présenté dans les manuels utilisés. C'est cette partie de notre travail que nous présentons dans cet article. Pour mieux cerner les difficultés que nous avions repérées, nous avons construit un test qui a été

[1] Thèse sous la direction de Claude Tisseron et Georges Nahas, en cotutelle entre le laboratoire LIRDHIST de l'Université de Lyon I et la Faculté de Sciences de l'Université Saint Joseph de Beyrouth.

réalisé par 300 élèves de seconde. Pour mettre en relation les difficultés des élèves avec l'enseignement, nous n'avons pas observé des classes, mais nous avons fait l'hypothèse que les types et quantités d'exercices proposés par les enseignants sont proches de ceux proposés par les manuels. Nous avons alors limité notre comparaison à la mise en relation des formes de travail proposées par les programmes et les manuels avec les performances des élèves. Nous avons ensuite affiné cette comparaison en observant 14 binômes d'élèves en recherche sur des exercices du même type. Les résultats obtenus avec ces binômes confirment nos interprétations, mais ils ne sont pas présentés ici.

Plusieurs chercheurs se sont intéressés à l'enseignement et à l'apprentissage de l'objet « vecteur ». Par exemple, Hoài Châu Lê Thi (1997) a montré dans sa thèse, entre autres, que :

> *« La démarche française, où le vecteur est lié à une information contenant trois composantes inséparables (direction, sens, longueur) par lesquelles une translation est entièrement définie, facilite le passage à la classe d'équivalence et minimise les risques de confusion entre vecteur et représentant. » (Lê Thi, 1997, p : 255)*

Nous montrons dans cet article qu'il y a des variables en jeu autre que les caractéristiques géométriques du vecteur. Au Liban la notion de « vecteur » est introduite à partir de la translation en $4^{\text{ième}}$, mais il n'y a pas d'utilisation des classes d'équivalence ; ce choix – destiné à simplifier l'enseignement – ne facilite pas la distinction entre vecteur et représentant. Cette difficulté est permanente, Marilena Bittar (1998) a montré que l'élève (français) a du mal à penser qu'un vecteur a plusieurs représentants, également, elle a mis en évidence

> *« la place et la fonction des différents registres de représentations sémiotiques dans l'enseignement des vecteurs et sur la fonction des vecteurs dans la résolution des problèmes de géométrie. »(Bittar, 1998, résumé de la thèse).*

Dans le § 1 nous présentons la façon dont nous utilisons la notion de conception (Vergnaud, 1990 et Balacheff, 2002) comme un modèle pour interpréter les connaissances des élèves et les mettre en relation avec les formes de travail proposées par les manuels. Au § 2, nous présentons et analysons en détail le test que nous avons proposé à 300 élèves pour préciser leurs difficultés pour « construire un vecteur ou un point à partir d'une relation vectorielle ». L'objectif de ce test est de mettre en évidence les limites des connaissances des élèves par un jeu sur des variables didactiques. Nous avons noté que les variables didactiques en question ne sont pas identifiées par les enseignants libanais avec lesquels nous avons travaillé ni par les manuels. Pour mettre en relation les résultats du test avec les conditions d'enseignement, nous faisons (aux paragraphes 3.2 et 3.3) une étude de la façon dont les manuels font travailler les exercices du même type que ceux du test. Nous interprétons ensuite les erreurs des élèves comme une conséquence d'un manque de diversité dans les exercices proposés par les manuels et de la non prise en compte par leurs auteurs des variables que nous avons mises en évidence.

1. Le modèle des conceptions

Précisons comment nous utilisons la notion de conception. Pour Brousseau (1986) une conception est

> *"un ensemble de règles, de pratiques, de savoirs qui permettent de résoudre une classe de situations et de problèmes de façon à peu près satisfaisante, alors qu'il existe une autre classe de situations où cette conception échoue".*

Plus tard, Vergnaud (1990) modélise un concept mathématique comme un triplet constitué de *"l'ensemble des situations qui lui donnent sens"* ; *"l'ensemble des invariants opératoires qui interviennent dans les schèmes de traitement de ces situations"* ; *"l'ensemble des représentations langagières et symboliques qui permettent de représenter le concept, ses propriétés."*

Par analogie, Artigue (1990) propose de décrire une conception du côté du sujet à un niveau donné comme :

> *"un triplet constitué de la classe des situation-problèmes qui donnent sens au concept ; l'ensemble des signifiants associés (images mentales, représentations, expressions, symboliques) ; les outils (règles d'action, théorèmes en acte, algorithmes) dont on dispose pour manipuler le concept."*

Ainsi, une conception n'est pas une propriété de l'élève (connaissance), ce n'est pas une connaissance que le chercheur attribue à l'élève ; c'est un *modèle* explicitant une (ou plusieurs) classes de problème sur lequel un certain système de traitement (associé à un certains systèmes de représentation) est valide.

Si on se place dans une perspective d'étude de l'activité effective d'un sujet, on explicite les invariants opératoires qui permettent de modéliser ses actions sur le type de problèmes envisagé. Mais on peut aussi regarder a priori les régularités des situations d'apprentissage proposées, car comme le dit Vergnaud (1995, p. 184),

> *"la plupart de nos connaissances sont, à l'image d'un iceberg, immergées à 90% dans l'organisation de la conduite ".*

Or, cette organisation de la conduite s'acquiert par la mise en œuvre réussie et répétée d'actions associées à certains contextes. Le choix des problèmes et des situations proposées est donc essentiel : ce sont les modalités des interactions des actions proposées au sujet et des types d'exercices destinés à les mobiliser qui vont contribuer à la construction de connaissances que le chercheur peut interpréter comme une certaine conception sur le savoir en jeu. Comme l'écrit avec un point de vue voisin Balacheff (2002, p. 1)

> « [...] *j'ai choisi de caractériser les conceptions* [...] *comme une propriété émergente des interactions au sein du système [Sujet <> Milieu] et non comme une propriété attribuée à l'élève qui apprend.* »

C'est une autre façon de voir une conception comme un *modèle explicitant le type de problème sur lequel un système de traitement est valide.* C'est ce point de vue que nous utiliserons en 3. pour parler des conceptions susceptibles d'être mobilisées dans un type d'exercice ou des conceptions susceptibles d'émerger des activités proposées par les manuels. Par un abus de langage – courant dans l'usage des modèles et fréquent en didactique – on est amené à confondre dans le langage le modèle et ce à quoi il s'applique et ainsi à parler de la conception de l'élève, ou ci-dessous dans cet article de la conception des manuels.

Concernant notre objet d'étude, la notion de vecteur, et à partir de l'étude des manuels, nous distinguons trois types de conceptions susceptibles d'émerger à partir des types de problèmes et des méthodes de résolution proposées dans les manuels : la conception « *vecteur lié* », la conception « *vecteur libre* », et une conception que nous appelons « *intermédiaire* ». Ces conceptions se caractérisent par des règles d'action, elles se différencient par ces règles et les types de problèmes que ces règles permettent de résoudre. Une conception sera dite « moins élaborée » si les classes de problèmes qu'elle permet de résoudre sont inclus strictement dans ceux d'une conception plus élaborée qui permet de résoudre, outre ces problèmes, d'autres plus complexes. Nous présentons ces conceptions en prenant comme exemple des problèmes de construction de vecteur que nous étudierons plus précisément en 2.

1.1 La conception « vecteur lié ».

C'est la conception dont les règles d'action consistent à considérer un vecteur seulement comme le bipoint désigné dans l'énoncé.

Exemple : soit l'exercice « construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ où A, B et C sont des points donnés ». La technique consiste à compléter le parallélogramme ACBD. Ainsi, l'aspect lié du vecteur (c'est-à-dire la considération du bipoint) suffit pour résoudre cet exercice de façon satisfaisante. Nous appelons la conception émergente de ce type d'exercice la conception « vecteur lié ».

1.2 La conception « vecteur libre »

C'est la conception dont une des règles d'action consiste à pouvoir tracer en chaque point du plan ou de l'espace un vecteur égal à un vecteur donné. Exemple : cette conception est nécessaire pour réussir la tâche « construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$ où A, B, C, D et E sont des points donnés ». Une construction graphique directe consiste en la mise bout à bout des représentants des vecteurs existant dans le second membre à partir du point A ; la dernière extrémité est le point M. Dans tous les cas, il faut utiliser la construction intermédiaire de vecteurs égaux aux vecteurs donnés au second membre. Nous appelons la conception correspondante la conception « vecteur libre ». La conception « vecteur lié » ne permet pas de résoudre ce problème, mais nous allons préciser ce point ci-dessous en resserrant les relations entre une technique et une classe de problèmes où elle réussi.

1.3 La conception que nous avons choisi de nommer « intermédiaire »

C'est la conception dont une règle d'action permet de « tracer en chaque point du plan ou de l'espace un vecteur égal à un vecteur donné », mais la référence de la mise en œuvre de cette règle est constituée d'un petit ensemble d'exercices stéréotypés où elle est utilisée sans nécessité d'adaptation à d'autres types et parce que la technique correspondante est enseignée sans se référer à l'aspect libre du vecteur. Par exemple, le type d'exercices « construire le vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ où $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont représentés par des flèches disjointes » est enseigné en troisième avec la règle d'action ci-dessus, mais son usage reste limité en troisième à quelques types d'exercices, celui donné en exemple ci-dessus, et la construction de M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$ où A, B, C sont donnés. Ainsi, lorsque l'usage de cette règle est limité à ce type d'exercices, la conception correspondante apparaît intermédiaire. Dans le *processus* d'apprentissage, son acquisition constitue un passage entre la conception « vecteur lié » et la conception « vecteur libre », d'où le nom que nous avons choisi. Du point de vue d'un observateur d'un élève de troisième, l'usage occasionnel de cette règle peut être interprété (à tort) comme un indicateur de l'acquisition de la conception vecteur libre, c'est-à-dire de la capacité à mobiliser cette règle en dehors du type d'exercice où elle est observée[2], alors que la conception de l'élève – c'est-à-dire les règles d'action dont il dispose – risque de rester conforme à la conception « vecteur lié ». Nous verrons, au paragraphe III, 3, que la technique enseignée en seconde n'est pas la même dans les deux manuels étudiés.

Notons que, dans l'enseignement actuel au Liban, l'objet « vecteur » est utilisé usuellement par les élèves dans le cadre de la géométrie euclidienne avec sa représentation par le dessin d'une flèche joignant deux points. Cette représentation peut réduire dans les débuts de cet enseignement l'objet « vecteur » à cette flèche, c'est-à-dire au bipoint. Son usage fréquent tend à stabiliser cet aspect du vecteur c'est-à-dire la conception « vecteur lié », d'autant plus que la majorité des exercices qui existent dans les manuels se basent sur cette représentation du vecteur par une flèche. Ainsi, le système de représentation sémiotique adopté dans les textes des manuels renforce la conception vecteur lié.

2. Analyse du test

2.1 Nos critères de choix pour les classes retenues

Pour comprendre les origines des difficultés des élèves, il s'avère important de savoir quel enseignement ils suivent et dans quel contexte. En fait, au Liban toutes les écoles publiques utilisent le manuel national écrit par une équipe choisie par la commission officielle de mathématiques. Par contre les écoles privées, qui sont nombreuses, ont le choix entre le manuel national et d'autres manuels privés écrits par d'autres auteurs, mais chacun de ces manuels est soumis à une vérification officielle afin d'avoir l'autorisation de publication. Nous avons donc eu deux variantes pour le choix de notre échantillon, l'école et le manuel.

- En ce qui concerne le manuel, nous avons choisi le manuel national et un manuel privé « Collection Puissance » utilisé dans 60% des écoles privées[3] ; ces deux manuels présentent en fait l'objet « vecteur », en classe de seconde, de deux façons

---

[2] L'expert mathématicien (enseignant ou chercheur) a vite tendance à ne voir que l'usage de la règle, en oubliant le contexte de son observation, contexte qui est pourtant le plus souvent le déclencheur de cet usage.

[3] Ce pourcentage est donné par les auteurs et par les éditeurs du manuel.

différentes ; ceci constitue pour nous un autre intérêt déterminant de ce choix. Nous reviendrons sur les manuels au paragraphe IV, 3.

- La deuxième variante du choix de l'échantillon est l'école. Nous avons choisi des écoles publiques et des écoles privées qui utilisent soit le manuel national soit le manuel privé choisi, mais dans des régions proximales afin d'éviter au maximum les variantes sociales non contrôlables par nous. Nous résumons dans un tableau l'échantillon qui a fait le test.

Tableau 1 : « L'échantillon qui a fait le test »

Type école	Manuel utilisé	Nombre d'élèves
National	National	43
National	National	53
Privé	National	16
Privé	National	61
Privé	Privé	71
Privé	Privé	56

2.2 Analyse a priori

Une classe d'exercices de construction courante dans l'apprentissage des vecteurs consiste, à partir d'un point donné A, à construire un point M ou un vecteur $\overrightarrow{AM}$ vérifiant une relation du type $\overrightarrow{AM}$ égale une combinaison linéaire d'un ou deux vecteurs donnés. C'est la situation de base pour passer à la somme de trois vecteurs et plus. Dans notre test nous allons faire varier les coefficients et les vecteurs du second membre. Nous présentons maintenant le test tel qu'il a été soumis aux élèves.

<u>Exercice I</u> : Construire le point M dans chacun des cas suivants :

a) $\overrightarrow{AM} = 2\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{AM} = 3\,\overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{AM} = 2/3\,\overrightarrow{AB} + 1/4\,\overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{AM} = 3\,\overrightarrow{AB} + 5\,\overrightarrow{BC}$

e) $\overrightarrow{AM} = 3\,\overrightarrow{BC}$

f) $\overrightarrow{AM} = 3\,\overrightarrow{BD} + 2\,\overrightarrow{BC}$

g) $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CD}$

<u>Exercice II</u> : Construire le vecteur $\vec{w}$ *dans le cas suivant :*

h) $\vec{w} = 2\,\vec{u} + 3\,\vec{v}$ *(ayant tracé deux flèches disjointes à gauche de la feuille de façon à éviter la construction à partir de l'origine de l'une des flèches)*

Il s'agit de la même tâche posée dans le même registre ; les variables sont les coefficients (nature et signe) et la désignation de chaque vecteur. Ce type d'exercice est posé en classe de 4$^{\text{ème}}$ sans coefficients et en seconde sans ou avec coefficients.

Tout d'abord, l'énoncé demande de *construire* le point M (ex. I) ou le vecteur $\vec{w}$ (ex. II) ce qui renvoie à des procédures géométriques de construction. Mais, dans le premier exercice, les vecteurs sont désignés par deux lettres, la donnée du point à construire est exprimée en termes de bipoints avec des opérations algébriques (somme et produit par un scalaire) à partir de points marqués dans le plan. Dans ce cas, le registre de représentation et la consigne renvoient à deux grands types de procédures :

I- une construction graphique, à la règle, appuyée sur l'expression vectorielle donnée, avec ou sans explication de type géométrique (utilisant un parallélogramme ou une translation).

II- une construction appuyée sur une modification de l'expression algébrique donnée dans l'énoncé en utilisant la règle de Chasles, accompagnée ou non d'une explication, ceci pour simplifier, éventuellement, l'expression à obtenir et la mettre sous la forme : $\vec{XM} = a\,\vec{YZ}$ où X, Y et Z sont des points donnés ou des points construits et a est un réel. La résolution consiste donc à se ramener à la procédure de base de construction d'un vecteur égal à un autre ayant ou non la même origine.

Toutefois, dans tous ces cas, la réponse peut se limiter à désigner sur le dessin le point M sans tracer la flèche $\vec{AM}$.

2.2.1 L'exercice I

- Les cas a), b) et c) sont du type $\vec{XM} = a\vec{XZ} + b\vec{XU}$ où tous les vecteurs ont la même origine ; mais nous avons joué sur les valeurs des coefficients : entiers positifs pour a), un entier positif et un négatif pour b) et des fractions positives pour c). La nature et les signes des coefficients sont des variables didactiques, c'est-à-dire, des modifications dans la nature des coefficients et leurs signes peuvent modifier la réussite des procédures des élèves.
  Dans les cas a) et b), un calcul peut être fait pour ramener ces cas au type : $\vec{XM} = a\vec{YZ}$.

  Précisons comment : dans le cas a), on a : $\vec{AM} = 2\vec{AB} + \vec{AC}$ alors

  $\vec{AM} - \vec{AC} = 2\vec{AB}$ par suite : $\vec{CM} = 2\vec{AB}$

  Dans le cas b), on a : $\vec{AM} = 3\vec{AB} - 2\vec{AC}$ alors: $\vec{AM} = 2\vec{CB} + \vec{AB}$ puis :

  $\vec{AM} - \vec{AB} = 2\vec{CB}$ d'où : $\vec{BM} = 2\vec{CB}$.

  - Les difficultés et erreurs possibles dans les cas a), b) et c) sont les suivantes :

* Dans le cas a), l'élève risque de ne pas tenir compte du coefficient « 2 » du premier bipoint de la somme vectorielle ; il construit alors le vecteur $\vec{AB} + \vec{AC}$.

* Dans le cas b), $\vec{AM} = 3\vec{AB} - 2\vec{AC}$ des erreurs à trois niveaux sont possibles :

- des erreurs dans la construction : l'élève risque de tracer en C le bipoint : $(-2\overrightarrow{AC})$ puis, soit il marque M son extrémité (M_1 sur la figure 1), soit il complète le parallélogramme construit sur les parties des segments tracés et il marque M l'extrémité de la diagonale issue de A (M_2 sur la figure 1).
- erreur dans le calcul : l'élève risque de calculer les coefficients ensemble et les vecteurs ensemble : il obtient : $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = (3 - 2)(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{CB}$
- erreur sur le sens du bipoint $(-2\overrightarrow{AC})$: l'élève risque de ne pas tenir compte du signe "moins" : il trace ce bipoint dans le même sens que $\overrightarrow{AC}$

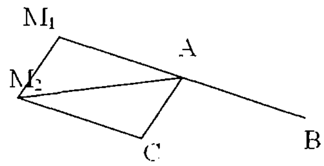

Figure 1

- Dans le cas c), $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, la première source de difficulté réside dans la détermination d'une fraction d'un segment ; donc c'est une difficulté d'ordre algébrique. A moins d'avoir une difficulté dans la construction de la somme de deux vecteurs ayant la même origine ; cependant, cette dernière difficulté se manifestera également pour les cas a) et b).

Dans les autres cas de l'exercice I, nous avons fixé la variable « coefficient » à des entiers positifs. En effet d'après les exercices des manuels c'est le cas le plus connu des élèves d'une part et, d'autre part, la présence des coefficients nous économise le nombre de points donnés et nous permet de proposer une suite de lettres (pour désigner les vecteurs dans la relation vectorielle) qui appelle visiblement un calcul ; ceci pour mettre en lien les techniques utilisées par les élèves et le manuel qu'ils utilisent. Par exemple, dans les cas d) et g), la désignation des vecteurs appelle la règle de Chasles.

A partir des réponses à ces divers cas nous pouvons mettre en évidence les conceptions des élèves sur les vecteurs, à savoir, comment la dénomination du vecteur modifie les schèmes utilisés par l'élève et par suite la technique suivie. En particulier, ces cas montrent si l'élève possède une technique, relative à la tâche proposée, stable et toujours efficace.

Nous analysons maintenant les cas d) à g) ; nous faisons suivre chaque cas des erreurs et difficultés possibles.

- Le cas d) : $\overrightarrow{AM} = 3\ \overrightarrow{AB} + 5\ \overrightarrow{BC}$. Dans ce cas, les deux vecteurs de la somme vectorielle ont des origines différentes mais l'origine du premier vecteur est la même que celle du vecteur à construire. Dans ce cas, la technique consiste à mobiliser la conception « vecteur lié » pour tracer le vecteur $3\ \overrightarrow{AB}$ en A, puis il faut mobiliser la conception « vecteur libre » pour tracer le vecteur 5 $\overrightarrow{BC}$ en A (pour utiliser la règle du parallélogramme) ou à l'extrémité de la flèche tracée (pour appliquer la règle de Chasles).

> ➢ Les erreurs possibles sont :

- dans le calcul : ayant les vecteurs dénommés consécutivement, c'est-à-dire l'extrémité de l'un est l'origine de l'autre, la règle de Chasles apparaît utile et un calcul erroné du même type que pour b) sera : $\overrightarrow{AM} = 3\ \overrightarrow{AB} + 5\ \overrightarrow{BC} = 8\ \overrightarrow{AC}$. Ainsi le cas sera amené au type $\overrightarrow{XM} = a\overrightarrow{XZ}$ qui est le plus connu des élèves.
- une erreur dans la construction a son origine dans la réduction du vecteur à son aspect lié, mais qui donne une position correcte du point M : l'élève trace chaque bipoint à partir de sa propre origine, complète le parallélogramme construit sur les parties des flèches tracées à partir de leur point d'intersection B et nomme le quatrième sommet M puis relie A à M. Ainsi la place de M est correcte mais la technique appliquée n'est pas bonne.

La figure ne permet pas de décider quelle est la procédure réellement suivie par l'élève. C'est une erreur cachée que nous n'avions pas anticipée lorsque nous avons préparé le test.

En effet, nous pouvons aussi supposer que l'élève a tracé le bipoint 5 $\overrightarrow{BC}$ à partir de B puis il l'a reporté en l'extrémité du bipoint 3.$\overrightarrow{AB}$ tracé en A et il a marqué M.

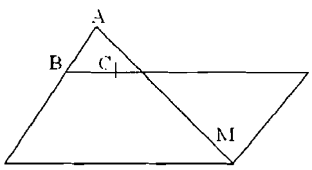

Figure 2

- ❖ Le cas e) $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BC}$. Ce cas peut être réussi avec la conception que nous avons nommée « intermédiaire ».

  > ➢ L'erreur possible consiste à tracer le vecteur 3$\overrightarrow{BC}$ à partir du point B et à nommer M son extrémité, si on laisse de côté les erreurs possibles dans la longueur et le bon parallélisme en reportant le vecteur 3$\overrightarrow{BC}$ au point A.

- ❖ Le cas f) $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{BC}$; les vecteurs du second membre ont la même origine qui est différente de l'origine du vecteur à construire. Dans ce cas, la mobilisation de la conception « vecteur libre » est nécessaire soit directement si la construction de la somme se fait directement en A, soit en deuxième étape si la construction de la somme se fait en B.

  > ➢ L'erreur possible est de tracer le vecteur somme en B et marquer son extrémité M. Ainsi L'élève est dans la conception « vecteur lié ».

- Le cas g) $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CD}$, dans ce cas les vecteurs ont des origines différentes deux à deux ; donc, la conception « vecteur libre » est la conception en jeu. En revanche, un calcul peut être fait et qui ramène ce cas au cas précédent, de la façon suivante :

  $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{AM} = 2(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{BC}$ d'où : $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}$

  - Les erreurs possibles sont de deux types :

- erreur dans le calcul qui amène le cas à celui $\overrightarrow{XM} = a\overrightarrow{YZ}$: $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CD} = 5\overrightarrow{BD}$
- erreur dans la construction, qui a son origine dans la réduction du vecteur à son aspect lié : tracer chaque bipoint de la somme à partir de sa propre origine, puis, compléter le parallélogramme construit sur les segments tracés à partir de leur point d'intersection C et nommer le 4ième sommet M.

Il est possible que l'élève trace chaque bipoint à partir de sa propre origine avant ou après un calcul qu'il fait et arrête le travail à cette étape. Dans ce cas, nous considérons que l'élève mobilise la conception « vecteur lié ».

2.2.2 L'exercice II

Dans cet exercice, il est demandé de construire le vecteur $\overrightarrow{w}$ à partir d'une relation vectorielle dans le registre algébrique et du dessin de deux flèches tracées et nommées par une seule lettre chacune. Les flèches tracées sont disjointes, tracées à gauche de la feuille de façon à empêcher la construction de $\overrightarrow{w}$ à partir de l'origine de l'une de ces flèches. Dans ce cas, l'élève est amené à choisir le point à partir duquel il trace la flèche qui représente le vecteur $\overrightarrow{w}$ et qui répond à la condition proposée par la relation vectorielle donnée. Le sens de la flèche est à indiquer dans ce cas, sinon le sens du vecteur proposé et nommé $\overrightarrow{w}$ ne sera pas bien identifié.

3. Résultats

Les résultats du test sont évidemment en lien avec les connaissances des élèves. En dépouillant les productions des élèves, nous avons remarqué une différence de réussite entre les élèves qui utilisent l'un ou l'autre des manuels choisis. Nous présentons tout d'abord les résultats du test, ensuite nous présentons les contenus des manuels qui nous paraissent expliquer les différences soulevées.

3.1 Les réponses au test

Précisons, tout d'abord, que les erreurs sur la longueur et le parallélisme ne sont pas prises en compte car elles sont en nombre négligeable par rapport aux autres erreurs et il y a des élèves qui ont fait la construction à main levée ; de plus, ce type de choix n'intéresse pas notre recherche, bien qu'il puisse donner des informations éventuelles sur les contrats de construction.

Nous présentons, dans un tableau, le pourcentage de réussite de chaque cas du test, tout d'abord dans tout l'échantillon puis dans chacun des échantillons formés des élèves qui utilisent le manuel national, que nous codons « EMN », et les élèves qui utilisent le manuel privé que nous codons « EMP ».

Tableau 2 : « Pourcentage de réussite de chaque cas »

Cas proposé	Pourcentage de réussite		
	Tout l'échantillon	EMN	EMP
a) $\overrightarrow{AM} = 2\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$	79,3 %	81,5 %	76,4 %
b) $\overrightarrow{AM} = 3\,\overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AC}$	59,0 %	65,3 %	50,4 %
c) $\overrightarrow{AM} = 2/3\,\overrightarrow{AB} + 1/4\,\overrightarrow{AC}$	37,0 %	48,6 %	21,3 %
d) $\overrightarrow{AM} = 3\,\overrightarrow{AB} + 5\,\overrightarrow{BC}$	45,0 %	59,5 %	25,2 %
e) $\overrightarrow{AM} = 3\,\overrightarrow{BC}$	79,7 %	78,0 %	81,9 %
f) $\overrightarrow{AM} = 3\,\overrightarrow{BD} + 2\,\overrightarrow{BC}$	43,7 %	48,6 %	37,0 %
g) $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CD}$	37,0 %	44,5 %	26,8 %
h) $\vec{w} = 2\,\vec{u} + 3\,\vec{v}$	43,0 %	56,6 %	24,4 %
Réussite totale	**12 %**	**18,5 %**	**3,1%**

Ce tableau montre que l'ordre décroissant de réussite dans tout l'échantillon testé, est la suivante : e), a), b), d), f), h), c) et g). Mais cet ordre n'est pas le même quand cet échantillon est partagé en deux selon le manuel utilisé. En effet :

L'ordre décroissant de réussite pour EMN est : a), e),... b),... d), h),... f) = c), g). (Les trois points montrent qu'il y a une différence de plus de 5%).

Par contre, l'ordre décroissant de réussite pour EMP est : e), a),... b),... f),... g), d), h), c).

Nous remarquons que le pourcentage de réussite chez les EMN est plus élevé que chez les EMP, dans tous les cas sauf e) où les pourcentages sont du même ordre. De plus, le pourcentage de réussite totale est six fois plus grand pour les EMN que pour les EMP. La question est de savoir si les EMN sont entraînés sur des exercices de ces divers types ou sinon s'ils sont capables d'adapter leurs schèmes sur de nouveaux exercices.

Par ailleurs, les cas f), c) et g) apparaissent comme les cas les plus difficiles pour les EMN, quand les cas g), d), h) et c) le sont pour les EMP. Ceci montre que le degré de difficulté de chaque cas n'est pas le même pour les EMN et les EMP si nous prenons en compte les variables de chaque cas explicitées dans le paragraphe I.

Nous explicitons dans la suite nos remarques sur divers items.

Variables didactiques cachées :

Il n'y a que 12% des élèves (18,5% pour EMN et 3,1% pour EMP) qui ont pu réussir tous les cas proposés. Pour les autres, la différence de pourcentage de réussite de chaque cas montre que les cas proposés sont des tâches différentes pour les élèves. Ainsi, la nature des coefficients, leurs signes et la désignation des vecteurs sont des variables didactiques pour la construction de vecteurs. Pourtant, du point de vue des enseignants, tous les cas proposés sont éventuellement vus comme désignant une même tâche. Un des enseignants de la classe de seconde, qui est en même temps coordinateur des mathématiques depuis plus que 15 ans, nous a d'ailleurs dit : « *... je ne comprends pas pourquoi vous avez donné plusieurs fois la même chose.* »

Remarquons que le pourcentage de réussite du cas c) est moins de la moitié de celui du cas a) pour tout l'échantillon. La différence réside dans la nature des coefficients qui sont des entiers dans a) mais des fractions dans c), les signes étant conservés positifs. Notons que 11,7 % de tous les élèves ont commis l'erreur dans le module ; mais nous ne pouvons pas affirmer que la détermination du segment qui désigne une fraction d'un autre n'est source de difficulté que pour ces 11,7 % d'élèves ; il est possible que la même source de difficulté ait prévalu pour les 26,7 % des élèves qui n'ont pas traité ce cas.

Dans le cas b), quand seul le signe d'un coefficient entier est devenu négatif, relativement au cas a), le taux de réussite est diminué de presque 20 % ; toutefois, un calcul est fait par 24,0 % (72 élèves au total) de tous les élèves dont 59,7 % l'ont réussi, et ce calcul ramène le cas b) au cas e) donc au type $\overrightarrow{XM} = a\overrightarrow{YZ}$ qui est considéré comme une tâche routinière. Donc, au moins pour ces 20 %, la difficulté de construction a ses origines dans la conception du vecteur qui est réduite à sa désignation.

Impact du manuel et de l'école :

Nous avons cherché comment sont répartis les 12% de réussite totale entre les écoles ; nous avons eu les résultats suivants :

Tableau 3 : « Pourcentage de réussite totale par école »

<table>
<tr><th>Type école</th><th>Manuel</th><th colspan="2">Pourcentage</th><th>Effectif /effectif total</th></tr>
<tr><td>Publique</td><td>National</td><td>11,4%</td><td rowspan="2">18,5%</td><td>11 / 96</td></tr>
<tr><td>Privé</td><td>National</td><td>27,3 %</td><td>21 / 77</td></tr>
<tr><td>Privé</td><td>Privé</td><td colspan="2">3,1 %</td><td>4 / 127</td></tr>
</table>

Nous constatons qu'il y a une différence considérable entre les pourcentages de réussite dans les écoles qui utilisent le manuel national et celles qui utilisent le manuel privé. Là où le manuel national est utilisé, le pourcentage est plus grand dans les deux genres d'école publique et privée.

D'autre part, les pourcentages de réussite dans les écoles qui utilisent le manuel national sont remarquablement différents entre les écoles publiques et les écoles privées. Nous pouvons attribuer cependant cette différence au fait que le système privé impose, en général, un meilleur suivi de l'élève, ce dernier obtient alors un résultat meilleur.

Prégnance de la conception « vecteur lié » :
Nous donnons ici des détails sur les procédures utilisées par les élèves.

Nous avons trouvé 47,0 % des élèves qui, pour nous, ont mobilisé des schèmes conformes à la conception « vecteur lié ». Ce sont les élèves qui ont tracé dans l'un ou l'autre cas le vecteur somme à partir de l'origine du premier bipoint de la somme ou bien ils ont tracé chaque bipoint à partir de sa propre origine. Notons que ce pourcentage ne recouvre pas les élèves qui ont fait une figure correcte pour certains cas où l'origine intervient[4] et qui ont fait pour les autres[5] une figure fausse non justifiée ou n'ont pas fait de figure.

Les figures : 13,3 % des élèves, soit n'ont pas fait une figure, soit ont fait une figure fausse non justifiée pour les cas d), g) et f). Nous avons étudié ces cas parce qu'en fait, nous estimons que le problème de l'origine se manifeste fortement là ; en effet, dans les trois premiers cas les bipoints de la relation vectorielle ont tous la même origine ; le cas e) est en fait une tâche routinière pour les élèves et le cas h) impose à l'élève de choisir l'origine car les vecteurs sont nommés par une seule lettre chacun. Ainsi, nous considérons que les 13,3 % des élèves qui n'ont pas pu produire une figure (éventuellement justifiée) sont incapables de mobiliser la conception « vecteur libre ». Presque la moitié des élèves (47 %) mobilisent des schèmes conformes à la conception « vecteur lié » qui n'est pas suffisante pour réussir. Ces élèves sont alors incapables de mobiliser la conception « vecteur libre » quand elle est nécessaire.

Existence du calcul : certains élèves ont procédé par calcul avant de construire le point cherché. En fait, ce calcul est destiné à avoir la forme $\vec{u} = k\,\vec{v}$ [6]. Dans les copies de 32 % des élèves, le calcul existe – qu'il soit réussi ou non. Ce pourcentage est comme le montre le tableau ci-dessous.

Tableau 4 : « Existence du calcul par manuel et par genre d'école »

Manuel	Ecoles	Effectif total		% d'élèves ayant effectué un calcul	
National	Publiques	96	173	17,7 %	16,2 %
	Privées	77		14,3 %	
Privé	privées	127		53,5 %	

Ainsi, nous remarquons que la réalisation d'un calcul destiné à produire la forme $\vec{u} = k\,\vec{v}$ est bien plus présent chez les élèves (des écoles privées) qui utilisent le manuel privé que chez ceux qui utilisent le manuel national.

Technique sollicitée :
Nous avons cherché la technique la plus utilisée, celle de Chasles ou du parallélogramme, dans chaque cas. Rappelons que dans les cas a) et b) un calcul peut

[4] Les cas : b), d), e), f) et h).
[5] Les cas : a) et c).
[6] Cela est confirmé par les élèves dans le travail observé des binômes au chapitre V de la partie B de la thèse.

être fait et transforme ces cas en $\overrightarrow{XM} = a\overrightarrow{YZ}$, relation qui rend inutile l'usage de Chasles ou du parallélogramme. Notons que 7,7 % ont réussi le calcul en a) et 14,3 % l'ont réussi en b). Dans le tableau suivant, nous présentons les pourcentages de chaque technique utilisée sans ambiguïté pour chaque cas, que cette technique ait réussi ou non.

Tableau 5 : « Technique utilisée par cas »

Cas	Chasles	Parallélogramme
a)	33,7 %	46,3 %
b)	42,0 %	12,0 %
c)	26,0 %	23,0 %
d)	45,7 %	6,0 %
f)	44,3 %	20,3 %
g)	43,3 %	10,7 %
h)	43,0 %	8,0 %

Nous constatons que la technique de Chasles est la plus utilisée sauf quand les bipoints ont même origine et ont des coefficients entiers positifs (cas a). Dans le cas c) où les coefficients sont positifs mais sont des fractions, les pourcentages sont du même ordre de grandeur. Dans tous les autres cas, le pourcentage d'utilisation de Chasles est plus du double de celui de l'utilisation du parallélogramme.

En comparant les résultats de a), b), c), il apparaît que la présence d'une origine commune pour tous les vecteurs écrits ne suffit pas à mobiliser l'usage du parallélogramme, sans doute à cause de la présence de coefficients dont la nature (entiers positifs, fractions positives ou entiers négatifs) influence notablement l'usage de cette technique. La présence d'un coefficient négatif apparaît comme le plus dissuasif.

Pourtant, dans les manuels, la technique du parallélogramme est bien indiquée pour être utilisée quand les bipoints ont la même origine ; mais les coefficients sont absents dans ces cas. Encore une fois, nous voyons l'effet de la nature des coefficients et de leurs signes dans la tâche de construction de vecteurs à partir d'une relation vectorielle.

Existence d'une technique qui réussit toujours la construction d'un vecteur :

Pour découvrir si les élèves disposent d'une technique qui réussit « toujours » la construction d'un vecteur à partir d'une relation vectorielle, nous avons cherché les résultats du croisement d), f) et g). Dans les cas a) et b), d'une part les vecteurs commencent par la même lettre donc la mobilisation du vecteur libre n'est pas nécessaire et, d'autre part, par l'intermédiaire d'un calcul ces cas seront analogue au cas e) qui est considéré comme une tâche routinière car elle est beaucoup travaillée dans les manuels. Dans le cas c), la difficulté dérive majoritairement de celle des fractions.[7] Le cas h) fait mobiliser mathématiquement l'aspect libre du vecteur mais pratiquement il peut être réussi avec une mémorisation d'une technique enseignée dans les manuels[8].

---

[7] Qui ne sont pas notre propos ici.

[8] Au lecteur intéressé, nous renvoyons à la thèse, partie B chapitres II et III.

Nous donnons dans la suite, un tableau qui met en relief tous les pourcentages quand un des cas d), f) et g) au moins est juste. Dans la deuxième colonne, et pour faciliter la lecture, nous codons « 0 » pour faux et « 1 » pour juste.

Tableau 6 : « Croisement de réalisation des cas d), f) et g) »

Catégorie	Code : d, f, g	Pourcentages Manuel N		Manuel P		Tout l'échantillon	
d) juste et f) juste et g) juste	1, 1, 1	29,5 %		12,6 %		22,3 %	
d) juste et f) juste et g) faux	1, 1, 0	4,0 %	30 %	0 %	12,6 %	2,3 %	22,6 %
d) juste et f) faux et g) juste	1, 0, 1	3,5 %		2,4 %		3,0 %	
d) juste et f) faux et g) faux	1, 0, 0	22,5 %		10,2 %		17,3 %	
d) faux et f) juste et g) juste	0, 1, 1	9,2 %	17,3 %	9,4 %	26,8 %	9,3 %	
d) faux et f) juste et g) faux	0, 1, 0	5,8 %		15 %		9,7 %	
d) faux et f) faux et g) juste	0, 0, 1	22,3 %		2,4 %		2,3 %	

Les ensembles d'élèves des catégories de la colonne de gauche sont deux à deux disjoints donc chaque élève, qui a réussi l'un des cas d), g) ou f), appartient à une catégorie et une seule.

Les élèves qui ont réussi simultanément les trois cas d), f) et g) constituent 22,3 % des élèves testés quand 12 % ont réussi tous les cas proposés dans le test. Nous voyons que 10,3 % des élèves ont commis des erreurs dans les autres cas. En fait, dans les cas d), f) et g) la mobilisation des schèmes relatifs à la conception « vecteur libre » est nécessaire sans qu'elle soit induite explicitement comme dans le cas h). Toutefois, la réussite simultanée des trois cas chez les EMN est plus du double que chez les EMP.

D'autre part, 17,3 % des élèves ont réussi le cas d) et échoué dans les cas f) et g) : 22,5 % des EMN et 10,2 % des EMP. Ceci peut s'expliquer comme étant en partie à cause de la prégnance de la conception « vecteur lié » qui la rend facile à être mise en œuvre par les élèves, et en partie à cause d'une habitude de classe, d'après les techniques proposées dans les manuels, dans la construction d'un vecteur en suivant la technique de Chasles, d'autant que la première lettre du premier vecteur de la somme coïncide avec celle du vecteur à construire.

Enfin, 30 % des EMN réussissent au moins d) parmi d), f) et g), contre 12,6 % des EMP. Ceci montre que les EMP sont plus influencés par la conception « vecteur lié » que les EMN.

Nous remarquons que 15 % des EMP ont réussi seulement le cas f) sur les trois cas, c'est d'ailleurs le plus haut pourcentage des EMP dans le tableau 6. Nous verrons dans le tableau 7, que la tâche f) existe deux fois dans le manuel privé mais elle est absente dans le manuel national. D'ailleurs, ce pourcentage a contribué à faire une différence remarquable dans les pourcentages des trois dernières catégories ensemble entre les EMN et les EMP.

Ces trois dernières catégories du tableau qui correspondent au fait de rater le cas d) et de réussir l'un ou l'autre ou les deux cas f) et g), montrent que 22,3 % des élèves testés, répartis 17,3% des EMN et 26,8% des EMP, ne possèdent sûrement pas une technique fiable pour la construction d'un vecteur à partir d'une somme vectorielle dans le champ de problèmes testés. Les élèves s'avèrent majoritairement incapables d'adapter les techniques dont ils disposent à des exercices que la culture scolaire juge identiques, mais qui s'avèrent en fait d'après notre étude, bien plus difficiles.

3.2 Les exercices analogues des manuels

Nous présentons ci-dessous un tableau récapitulant les types d'exercices appartenant au type choisi dans notre test ; nous le commenterons par la suite.

Tableau 7 : « la tâche dans les manuels »

Tâche		Nombre	
		National	**Privé**
1)	$M / \vec{AM} = k\,\vec{AB}$ ou $k\,\vec{u}$	30 et 10 après calcul	30 et 19 après calcul
2)	$M / \vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC}$	5 et 2 après calcul	8
3)	$M / \vec{AM} = \vec{AB} - \vec{AC}$	0	2
4)	$M / \vec{AM} = \alpha\,\vec{AB} + \beta\,\vec{AC}$	0	4 et 1 après calcul
5)	$M/ \vec{AM} = \vec{AB} + \vec{CD}$	3 et 1 après calcul	0
6)	$M / \vec{AM} = \alpha\,\vec{BC} + \beta\,\vec{BD}$	0	2
7)	$M/ \vec{AM} = \vec{AB} - \vec{u}$	1	0
8)	$M / \vec{AM} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v} + \ldots$	4	0
9)	$M/ \vec{AM} = \vec{u} \pm \vec{v}$	3	2
10)	$\vec{u} \pm \vec{v}$	0	4
11)	$\vec{v} \,/\, \vec{v} = \vec{AB} - 2\,\vec{AC}$	0	1

<u>Commentaire :</u>

Le premier type du tableau 7 est le plus travaillé dans les deux manuels ; 40 fois dans le manuel national dont 10 s'obtiennent après calcul (via la règle de Chasles en général), et 49 fois dans le manuel privé dont 19 après calcul. La grande différence entre la fréquence de ce type et les autres explique l'existence du calcul dans les copies d'un bon nombre d'élèves ; probablement pour se ramener à la forme de la tâche 1) qui, à force d'être la plus rencontrée, parait la plus facile.

3.3 Mise en relation des réponses avec l'enseignement des manuels

3.3.1 Les manuels

Nous présentons tout d'abord les définitions de l'objet « vecteur » dans chacun des manuels de la classe de ES1 :

Le manuel national le définit de façon suivante :

« Le vecteur est un objet mathématique caractérisé par :

1- une direction, 2- un sens, 3- une longueur »

Le manuel privé choisi, le définit à partir de deux points, plus concrètement de la façon suivante :

« ***On suppose que l'on a choisi une unité de longueur dans le plan.*** A et B sont deux points du plan. Le ***vecteur*** $\overrightarrow{AB}$ a pour origine le point A et pour ***extrémité*** le point B. Le support de $\overrightarrow{AB}$ ou toute droite qui ***lui est parallèle*** est la ***direction*** de ce vecteur. Le ***sens*** de $\overrightarrow{AB}$ est celui ***de A vers B***. La ***norme*** ou le ***module*** de $\overrightarrow{AB}$ est la ***distance*** entre les points A et B dans l'unité choisie, qu'on note $\|\overrightarrow{AB}\|$; on a donc : $\|\overrightarrow{AB}\| = d(A, B)$.

Tout vecteur est caractérisé par ***sa direction, son sens et sa norme***» [9]

Récapitulons dans un même tableau le cheminement suivi dans chaque manuel, en termes de conceptions, à partir du nombre d'exercices d'un type proposé dans chacune des trois classes : EB8 ($4^{ième}$) où la notion de vecteur est introduite à partir de la translation et ses trois caractéristiques ; EB9 ($3^{ième}$) où le vecteur est défini, dans les deux manuels, à partir de deux points et ES1 (seconde) où les définitions de vecteur sont explicitées ci-dessus.

Tableau 8 : « Conceptions comparées dans les deux manuels »

Classe	Conceptions	Manuel national	Manuel privé
EB8 $4^{ième}$	« vecteur lié »	25	11
	« intermédiaire »	6	4
	« vecteur libre »	**0**	**0**
EB9 $3^{ième}$	« vecteur lié »	15	36
	« intermédiaire »	7	24
	« vecteur libre »	**0**	**0**
ES1 seconde	« vecteur lié »	> 100	> 100
	« intermédiaire »	18	25
	« vecteur libre »	10	**0**

Ainsi, nous remarquons que la conception « vecteur libre » qui peut être construite en seconde à partir de 10 exercices du manuel national, ne peut pas être construite dans le manuel privé. Les deux manuels proposent des situations qui permettent de construire la conception « intermédiaire » en même temps que celle de « vecteur lié ». En fait, nous pensons que la conception « intermédiaire » peut désigner, dans l'enseignement, une étape qui permet le passage du concept en acte « vecteur lié » au concept du vecteur particulièrement dans le cadre de la géométrie, c'est-à-dire le cadre auquel le vecteur appartient dans l'enseignement. Toutefois, le concept de « vecteur » dans le cadre géométrique, que nous avons appelé « vecteur libre » désigne toujours le concept du vecteur *en acte* si nous considérons le vecteur dans sa définition mathématique *savante* au sens de Chevallard.

3.3.2 Le Curriculum

Nous nous sommes demandée si les manuels sont conformes au curriculum du point de vue des conceptions dominantes qu'ils favorisent. Pour cela, nous avons cherché si notre modèle des trois conceptions du vecteur pouvait s'appliquer sur le texte du curriculum à partir de son explicitation des objectifs pour chaque niveau.

---

[9] Soulignés par les auteurs.

Ces objectifs sont parfois formulés en termes d'invariants opératoires, mais souvent en des termes qui ne permettent pas d'utiliser notre modèle, lequel a été construit pour s'appliquer sur des exercices dont les énoncés sont beaucoup plus précis. Par exemple, en lien avec notre test : l'item « Savoir placer un point défini par une égalité vectorielle » ou l'item « Construire un vecteur $\vec{V'}$ égal au produit d'un vecteur $\vec{V}$ par un nombre réel k non nul », est susceptible de nombreuses formulations d'exercices dont notre test donne des exemples et montre l'influence sur la réussite des élèves. Ainsi, les choix des auteurs apparaissent parfaitement légitimes vu ce qu'on pourrait appeler l'imprécision des objectifs en termes de variables didactiques.

3.4 Différence entre le signe « égal » et la conception « vecteur libre »

Dans notre modèle de conception, nous avons classé les exercices de construction du type e) ($\vec{AM} = 3\ \vec{BC}$) du test, comme susceptibles d'être réussis avec la conception « intermédiaire », et donc de ne pas nécessiter la conception « vecteur libre ». Plus généralement il nous semble que la capacité d'utilisation du signe 'égal' pour l'écriture algébrique des vecteurs peut être présente chez un élève sans que la conception « vecteur libre » soit pour autant disponible pour cet élève. Pourtant, dans le cas e) où les origines des bipoints de chaque membre sont différentes les règles d'utilisation du signe « égal » sont conformes à la conception « vecteur libre », mais cet usage peut être une technique associée à ce type d'exercice. Pour préciser la possibilité pour un élève d'utiliser de façon juste certaines techniques conformes au « vecteur libre » sans cependant que la conception correspondante soit disponible, nous avions proposé d'introduire une conception « intermédiaire » que nous souhaitons maintenant mettre en évidence chez certains élèves.

Pour cela nous avons cherché le pourcentage des élèves qui ont réussi le cas e) et qui, dans les cas d), f) ou g), ont tracé chaque bipoint à partir de sa propre origine ou ont tracé le vecteur somme à partir de l'origine du premier bipoint de la somme vectorielle. Nous avons eu 37,0 % de 238 élèves. Ainsi, ces élèves utilisent le signe 'égal' dans son sens usuel, c'est-à-dire une égalité entre deux objets différents mais qui a ses propres applications pour les vecteurs : deux bipoints sont égaux s'ils sont sur deux droites parallèles, ont le même sens et la même longueur mais, cela ne veut pas dire que ce sont les représentants d'un même vecteur.

Conclusion

Les résultats du test nous ont permis de conclure plusieurs faits relatifs à la façon dont les élèves mobilisent leurs connaissances dans des exercices du type « construire un point ou un vecteur » à partir d'une relation vectorielle. Le jeu sur les variables didactiques que sont la nature des coefficients et les extrémités des vecteurs du second membre montre que l'aspect libre du vecteur est absent ou au moins n'est pas consistant pour plus de la moitié des élèves de l'échantillon. Notamment, la technique relative à la tâche h) est enseignée dans le cours et demandée dans un bon nombre d'exercices souvent sans coefficient. La présence des coefficients rend la tâche plus difficile.

Par ailleurs, ce test a montré la prégnance de la conception « vecteur lié ». En effet, les 47% des élèves qui, soit ont tracé chaque bipoint à partir de sa propre origine, soit ont tracé le vecteur somme à partir de l'origine du premier bipoint de la somme (en suivant des gestes enseignés) sont certainement dans la conception « vecteur lié ».

D'autre part, la forme la plus fréquente dans les manuels donc sans doute la plus travaillée en classe est le recours au calcul avant de construire le point demandé pour avoir la forme $\vec{u} = k.\vec{v}$. Nous avons constaté qu'un grand nombre d'élèves ont reproduit sans succès cette méthode enseignée et majoritairement pratiquée en classe.

Par ailleurs, la différence de pourcentage des élèves qui utilisent la technique de Chasles ou celle du parallélogramme surtout dans les cas a) et b) où seul le signe d'un coefficient est changé est instructive. Dans le cas a) c'est la technique du parallélogramme qui l'emporte (de peu) mais dans le cas b) c'est celle de Chasles et la différence est plus remarquable (42% contre 12%). En fait, un bon nombre d'élèves a transformé le signe «-» en « + » pour pouvoir appliquer Chasles, et ainsi les bipoints n'ont plus la même origine. Or, c'est justement la technique de Chasles qui est conseillée dans les manuels sans insister sur le fait qu'il est possible de représenter chaque vecteur en n'importe quel point du plan. Cela explique d'ailleurs la prédominance de la technique de Chasles dans les autres cas du test.

Le croisement de réussite et d'échec pour les cas d), f) et g)[10] montre également qu'un bon nombre d'élèves, EMN ou EMP, ne disposent pas d'une technique permettant de réussir toutes les tâches proposées dans le test sur la construction de vecteurs.

Enfin, le test montre que la capacité d'utiliser l'égalité de deux vecteurs, n'est pas nécessairement un indice de la conception "vecteur libre". La distinction entre les schèmes construits à partir du principe de l'égalité de deux vecteurs et ceux relatifs à la conception "vecteur libre", nous paraît appropriée.

Globalement, les résultats du test montrent ainsi comment la plupart des élèves de l'échantillon associe trop étroitement un type d'exercice et la technique enseignée pour le résoudre ; ceci est sans doute la conséquence d'un enseignement encore très axé sur l'acquisition d'automatismes sur les types d'exercices posés aux évaluations institutionnelles. Du point de vue de notre étude, l'introduction de ce que nous avons appelé conception « intermédiaire » permet ainsi de mieux délimiter le rôle de certaines techniques (que l'expert associe à la connaissance du vecteur libre) mais qui pour l'élève sont des techniques locales mobilisées sur des exercices très stéréotypés.

Nous avons constaté sur notre échantillon que l'usage du manuel national est corrélé avec une réussite plus grande que l'usage du manuel privé. Nous faisons l'hypothèse que ce fait peut être expliqué par la plus grande importance que le manuel national de ES1 (seconde) attribue à l'aspect libre du vecteur. Cette importance apparaît dans la définition et dans les exercices où les règles d'action nécessitent la conception "vecteur libre" (cf. tableau 8). Par contre, le manuel privé définit le vecteur à partir de deux points en seconde, donc le lie aux points qui le dénomment, et les exercices proposés dans le manuel contribuent globalement plutôt à l'émergence de la conception "vecteur lié". Notons que nous avons remarqué également qu'un usage systématique d'un calcul est plus prégnant chez les élèves qui utilisent le manuel privé que chez ceux

---

[10] Cf. le tableau 7.

qui utilisent le manuel national. Ainsi, même si la conception "vecteur lié" est dominante dans les exercices et problèmes proposés dans les deux manuels, les élèves de notre échantillon qui utilisent le manuel national sont capables de mettre en œuvre la conception "vecteur libre" plus facilement que les élèves qui utilisent le manuel privé.

Dans la perspective d'amélioration de l'enseignement de la notion de vecteur au Liban, notre étude tend à montrer que l'acquisition de la conception "vecteur libre" – celle qui est visée dans l'apprentissage futur de la géométrie vectorielle – exige davantage d'exercices jouant sur les variables didactiques, et qui nécessiteraient de mobiliser, à l'initiative de l'élève, les vecteurs dans leur fonctionnalité opératoire "vecteur libre".

Bibliographie

ARTIGUE M. (1990) « Ingénierie et didactique ». *Recherche en didactique des mathématiques*, vol 9/3 ; pp : 281 – 308.

BALACHEFF N. (2002) Cadre, registre et conception. *Les cahiers du laboratoire Leibniz*, n°58.

BITTAR M. (1998) *Les vecteurs dans l'enseignement secondaire – Aspect outil et objet dans les Manuels – Etude de difficultés d'élèves dans deux environnements : papier crayon et cabri géomètre II.* Thèse, Université Joseph Fourier – Grenoble 1.

BOSCH M. et CHEVALLARD Y. (1999) « La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs ». *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol 19/1, pp : 77 – 124.

BROUSSEAU G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, La pensée sauvage. vol 7/2, pp : 33 – 115.

BROUSSEAU G. (1989) Le contrat et le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 9/3.pp. 309- 336.

BROUSSEAU G. (1997) Theory of didactical situations in Mathematics. *Mathematics Education Library.* Volume 19. Kluwer Academic Publishers.

CHEVALLARD Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : la notion d'organisation praxéologique. *Actes de l'université d'été de la Rochelle, juillet 1998.*

CHEVALLARD Y. (1991) *« La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné ».* La Pensée Sauvage Editions, Grenoble.

DORIER J. L. et al (1997) *« L'enseignement de l'algèbre linéaire en question ».* Grenoble, la Pensée Sauvage Editions, Grenoble.

DORIER J. L. (1998) « A propos de l'enseignement de l'algèbre linéaire », *Recherche en didactique des mathématiques.* Vol 18/2, pp 191 – 230.

DUVAL R. (1993) Registres de représentation sémiotique et Fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactiques et de sciences cognitives* vol 5, IREM de Strasbourg, 37-65

HAYFA N. (2006) *L'enseignement de la notion de vecteur au Liban après la réforme de 1998. Analyse anthropologique et cognitive sur un échantillon de manuels et d'élèves francophone.* Thèse, Université Saint-Joseph de Beyrouth et Université Claude Bernard, Lyon.

LE THI H. C. (1997) *Etude didactique et épistémologique sur l'enseignement du vecteur dans deux institutions : la classe de dixième au Viêt-nam et la classe de seconde en France.* Thèse, Université Joseph Fourier – Grenoble 1.

VERGNAUD G. (1990) La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques,* vol 10/2.3 pp 133-170.

VERGNAUD G. (1995) Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation *VIII°* *école d'été de didactique des mathématiques,* pp 174- 185.

Références libanaises

Curriculum libanais ; Ministère de l'éducation libanaise.

CRDP libanais (1998-2001) : *Construire les mathématiques.* Classe : EB8, EB9, 1ES, 2ES, 3ES (SV). Ministère de l'éducation libanais.

Collection puissance (1998-2002) : *Mathématiques.* Classe : EB8, EB9, 1ES, 2ES, 3ES (SV). AL-AHLIA