ELEMENTS D'ANALYSE SUR LE PROGRAMME DE 2000 CONCERNANT L'ENSEIGNEMENT DES FONCTIONS EN SECONDE

Sylvie Coppé, IUFM de Lyon, équipe Coast, UMR ICAR
Jean-Luc Dorier, IUFM de Lyon, équipe DDM, Laboratoire Leibniz
Ilyas Yavuz, équipe Coast, UMR ICAR

Résumé : Cet article, issu de la thèse de Yavuz (2005) s'intéresse aux évolutions récentes des programmes de Seconde sur les fonctions, où une plus grande importance est accordée aux divers modes de représentation : courbes, tableaux de valeurs et tableaux de variations. Nous présentons tout d'abord une synthèse succincte des premiers résultats sur l'usage qui est fait de ces trois ostensifs liés aux fonctions et des effets sur l'apprentissage. Nous analysons ensuite deux expérimentations : la première vise à installer une réflexion sur les limites de la représentation d'une fonction par une courbe ou un tableau de valeurs. La seconde aborde la question de la non-univocité de la représentation par les trois modes. Notre analyse tente de dégager les apprentissages que ces exercices peuvent permettre, mais aussi les questions qu'ils soulèvent.

Mots clefs : fonction, tableau de valeurs, tableau de variations, courbe, registre de représentation sémiotique, anthropologie du didactique, classe de seconde.

1. Introduction

Le concept de fonction joue un rôle majeur dans les mathématiques. Il constitue en particulier un des objets fondamentaux du travail dans le domaine de l'analyse mathématique. L'évolution historique de ce concept est complexe et a été analysée dans plusieurs travaux.

Nous ne rentrerons pas dans le détail de ceux-ci, mais nous contenterons ici de cette citation issue du travail de Comin :

> L'analyse épistémologique nous a conduit à poser que *c'est l'idée de* ***dépendance*** *qui* ***fonde*** *les concepts de* ***fonction et de variable***. Rappelons seulement que chez Leibniz (1646-1716), le mot « fonction » désigne une relation entre grandeurs dont les variations sont liées par une loi. L'approche ensembliste de la notion de fonction par une mise en correspondance terme à terme des éléments des deux ensembles modélisés par un graphe, évacue cette idée de contrainte entre deux grandeurs. Dieudonné (1972) gomme même la distinction entre correspondance et graphe qu'il taxe de psychologique. (Comin, 2005, p. 38)

De fait, la fonction a subi une évolution dans les mathématiques savantes, qui l'a, en partie, coupée de son origine épistémologique comme modèle d'une « dépendance entre variables en décrivant une correspondance terme à terme entre les valeurs prises par ces variables » (ibid., p. 37). Au niveau de l'enseignement, depuis les mathématiques modernes, la fonction occupe en France une niche importante en $3^{ème}$, et surtout en 2^{nde}. Cependant, les dernières évolutions des programmes ont eu, en particulier, deux effets sur cette niche. D'une part, l'appauvrissement du travail algébrique au collège a réduit considérablement le bestiaire des formules algébriques étudiables à ce niveau ; d'autre part, l'entrée dans une démarche spécifique de l'analyse a été repoussée entièrement à la classe de Première. Ainsi, l'enseignement des fonctions occupe-t-il actuellement une place nouvelle et particulière dans la classe de seconde. Il ne peut en effet s'appuyer en amont que sur les exemples des fonctions linéaires et affines, à peine formalisées, et n'a plus vocation à nourrir immédiatement un travail dans le domaine de l'analyse.

A partir d'un questionnaire proposé à des élèves de seconde, avant l'enseignement des fonctions, Comin (2005) a pu ainsi montrer « qu'une partie importante des élèves de seconde ne sont pas prêts à recevoir un enseignement formel du concept de fonction ». Il définit à la suite les grandes lignes d'un projet curriculaire permettant de mieux organiser l'enseignement des fonctions au collège et au lycée. Ce projet nous paraît tout à fait intéressant, mais nécessiterait un changement important dans les programmes actuels.

Par ailleurs, plusieurs travaux ont permis de mieux comprendre et préparer l'enseignement des fonctions comme entrée dans le domaine de l'analyse : Bloch (2002), Hauchart et Schneider (1996), René de Cotret (1985), Schneider (1992), Sierpinska (1992) ... Pour les raisons que nous avons évoquées plus haut, ces propositions sont de moins en moins compatibles avec les évolutions des programmes français actuels de seconde.

C'est pourquoi, parallèlement à ces études qui montrent les difficultés et les obstacles et font des propositions curriculaires, il nous a semblé important de mieux mesurer les effets, dans les programmes, sur les pratiques enseignantes et in fine dans les apprentissages, des dernières modifications de programme. Ainsi les questions qui ont motivé cette recherche sont : si l'on respecte les programmes français de 2000, que peut (doit ?)-on enseigner sur les fonctions en seconde ? Que proposent les manuels et les enseignants ? Que sont alors susceptibles d'apprendre les élèves ?

Ces questions sont bien sûr trop vastes pour qu'on puisse espérer y répondre entièrement. Nous allons donc, dans un premier temps, mettre en évidence des points saillants dans les dernières évolutions des programmes, qui nous permettront de mieux préciser notre objet.

Précisons tout de suite que nous ne nous plaçons nullement en défenseurs des choix de changements de programmes actuels. Les travaux que nous avons cités plus haut montrent la pertinence d'autres choix plus fondés épistémologiquement et didactiquement. Cependant, il nous a semblé pertinent d'analyser les effets possibles des changements récents le plus objectivement possible.

2. Sur les évolutions récentes des programmes

Depuis le début de la contre-réforme des mathématiques modernes, l'enseignement des fonctions à la fin du collège et au début du lycée en France a subi de profondes mutations (cf. Le Van, 2001 et Bloch, 2002). Une des tendances les plus importantes concerne le renforcement progressif de l'utilisation des divers modes de représentation dès l'introduction de la fonction en seconde. Ainsi, parallèlement à une diminution de la suprématie du registre algébrique, on a pu constater que, notamment, le registre graphique prenait une importance grandissante. De même, les tableaux de valeurs et de variations, qui n'ont longtemps joué qu'un rôle d'auxiliaires dans le passage de l'algébrique au graphique, apparaissent à présent de plus en plus explicitement dans les programmes et semblent promus pour jouer un rôle plus important.

Ainsi, on trouve dans le dernier programme de seconde qui date de 2000 :

Identifier la variable et son ensemble de définition pour une fonction *définie par une courbe, un tableau de données ou une formule* [...][1]

Le terme « définie » est ici ambigu, dans la mesure où ce qui suit sont des représentations de la fonction. L'objet serait donc défini par sa représentation.

Ce glissement est assez classique quand il s'agit de la formule. En effet, on définit classiquement une fonction de la façon suivante : « Soit f la fonction définie pour tout x de I par $f(x) = \ldots$ ». Ce mode de définition permet sans ambiguïté d'obtenir (au moins en théorie) pour chaque valeur de la variable explicative, la valeur de la variable expliquée. Notons toutefois, qu'au-delà de la formule, il faut spécifier la nature des variables et le domaine de définition de la fonction, ce qui est justement la tâche proposée dans le programme. On mesure là toute l'ambiguïté de la démarche, puisque la fonction ne sera réellement définie par une formule que si on a précisé le domaine de définition.

Quand la représentation en jeu est la courbe, la question est encore plus piégée. En effet, dans quelle mesure une courbe définit-elle une seule fonction ? Selon quelles conventions ? Les travaux de Chauvat, 1999, Lacasta, 1995, Falcade, 2002 et Bloch, 2002 ont abordé ce problème, nous y reviendrons.

Enfin, sauf dans le cas d'une fonction définie sur un domaine fini, il est clair qu'un tableau de valeurs ne permet pas de définir une fonction. En particulier, un tableau de valeurs prenant en compte toutes les valeurs entières d'une variable variant sur un intervalle de $\mathbb{R}$ ne donne bien sûr pas une définition de la fonction. C'est cependant ce qu'ont tendance à croire beaucoup d'élèves.

On trouve encore dans ce programme, la citation suivante :

Décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe. Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variations[2]

[1] C'est nous qui soulignons.

Outre la reprise de l'idée d'une fonction définie par une courbe, on voit ici que le tableau de variations devient potentiellement objet d'étude. Il est en tout cas considéré comme un mode de représentation (partielle) de la fonction. Le programme incite alors à travailler, dans les deux sens, le passage courbe / tableau de variations.

Ces deux courts extraits montrent une tendance à l'œuvre depuis les années 80, qui s'est affirmée avec le programme de 1999 consistant à mettre en avant plusieurs ostensifs liés à la fonction (courbe, tableau de valeurs, tableau de variations) appartenant à des cadres supposés plus intuitifs (graphique, numérique, tableau et flèche) et donc plus faciles à appréhender que les cadres formel ou algébrique.

Ce point de vue est très explicite dans les accompagnements de programmes, dont nous donnons ci-dessous quelques extraits :

Au sujet des fonctions, l'accent est mis sous les *différents aspects* sous lesquels apparaît la notion de fonction : *graphiques, numériques, qualitatifs*. Là encore, il est proposé d'insister sur les apports respectifs des *différents cadres d'étude.*

Le programme demande explicitement de traiter des exemples de fonctions *données à l'aide d'une courbe* (elles sont fréquentes dans les documents des autres disciplines ou dans les médias : la légende accompagnant la courbe permet d'identifier les deux grandeurs en jeu) ainsi que celles *fournies par un tableau de données* (type « tarif postaux »). A propos de *fonctions définies par une courbe*, il importe que les élèves sachent lire de façon critique l'information contenue dans la courbe (lectures approchées d'image et d'antécédents ou lectures exactes dans certains cas précisés par le graphique, *variations*, etc.) ; on pourra convenir ici que l'information est exhaustive et on montrera la nécessité d'une telle convention à l'aide de courbes tracées avec un grapheur à partir d'une formule (des changements de fenêtre peuvent modifier l'allure de la courbe, mais il ne s'agit plus là de fonction définie par une courbe). [3]

Dans cet extrait, il est à noter la prolifération d'expressions du type : « différents aspects sous lesquels apparaît...», « différents cadres d'étude», fonctions « données à l'aide de... », « fournies par ... », « définies par... ». Ces locutions renvoient plus ou moins à l'idée de représentation, sans que ce terme ne soit jamais employé et entretiennent, de fait, l'ambiguïté dans la distinction entre l'objet et ses représentations. Ce qui est mis en avant est la multiplicité des représentations possibles de la fonction et de leurs apports respectifs ainsi que l'importance qu'il y a à faire le lien entre elles. Ce qui est finalement absent, c'est l'objet lui-même et la partialité que chaque mode de représentation comporte.

Dans ce sens, la fin de la dernière citation soulève l'épineuse question de l'exhaustivité de la représentation graphique. Néanmoins, la solution proposée montre la difficulté du problème, puisqu'on y suggère l'utilisation d'un grapheur, qui permet un contrôle sur la précision d'un tracé via une formule algébrique. C'est certainement un aveu implicite des limites mêmes de la représentation graphique.

Il semble que le programme tente ici de trouver de nouvelles approches des fonctions, faute d'un travail algébrique antérieur suffisant et d'un but immédiat pour

---

[2] C'est nous qui soulignons.

[3] C'est nous qui soulignons.

l'analyse. La multiplicité des modes de représentation permet alors une entrée censée être plus intuitive. Or le risque, souligné par d'autres auteurs avant nous, est que faute de travail sur l'objet, on ne travaille que sur les ostensifs. Soulignons que sur ce point, la généralisation des calculatrices graphiques permet aussi une plus grande accessibilité au tracé graphique et aux grands tableaux de valeurs. Or, le fait qu'un tableur ou une calculatrice puissent tracer une courbe seulement à partir d'un tableau de valeurs pose des difficultés d'ordre tant épistémologique, cognitif que didactique, quant à la relation de ces ostensifs à la notion de fonction. Le fait même qu'une courbe sur un écran de calculatrice ou d'ordinateur ne soit que l'assemblage d'un grand nombre de points pose bien entendu déjà ce problème.

Ce qui apparaît aussi dans ces quelques lignes, c'est le rapport des fonctions avec les autres disciplines, les médias et le monde extérieur. Ainsi, la dimension civique est invoquée, pour que « les élèves sachent lire de façon critique l'information contenue dans la courbe ». On voit bien ici que le travail ne porte plus explicitement sur la fonction, mais sur sa représentation, censée enfermer une information, qui porte en fait sur la fonction. C'est une réponse du programme à une injonction de la société pour que les mathématiques s'ouvrent sur les autres disciplines et sur le monde extérieur. Au niveau de la seconde, le chapitre de généralités sur les fonctions semble donc tout destiné à jouer partiellement ce rôle. Avec les fonctions, on peut dépasser le seul domaine mathématique ce qui peut avoir pour conséquence, voire justifier, la légitimité du repli de leur enseignement sur les modes de représentation.

Du point de vue didactique, on peut voir ici une interprétation à la lumière des travaux de Duval, 1993 portant sur les registres de représentation sémiotique. En effet, celui-ci souligne que dans l'utilisation de différents registres, les activités de traitement[4] et surtout les activités de conversion[5] sont essentielles dans le processus de conceptualisation des objets mathématiques. Ainsi, concernant le concept de fonction, si les courbes, les tableaux de valeurs et pourquoi pas les tableaux de variations peuvent être considérés comme des représentations sémiotiques de registres différents, les injonctions du programme peuvent être vues comme une possibilité de faire justement travailler ces tâches de traitement et de conversion et donc, selon Duval, comme un bon moyen de faire apprendre aux élèves ce qu'est une fonction. Néanmoins, la légitimité de ces représentations à appartenir à des registres suffisamment constitués et la possibilité de mettre en place des activités de traitement et de conversion épistémologiquement fondées restent bien entendu à démontrer.

A la lumière de ces premières analyses, nous allons à présent affiner notre questionnement. Les changements de programmes mettent en avant l'utilisation de divers modes de représentation d'une fonction, censés être plus intuitifs et préconisent un travail interactif entre ces différents modes pour faire accéder aux notions élémentaires liées aux fonctions (image, antécédent, domaine de définition, parité, variations, etc...). Comment ces injonctions sont-elles mises en œuvre dans les manuels et par les enseignants ? Les modes de représentation utilisés sont-ils questionnés en tant qu'objet (mode de codages, conventions, etc...) ou bien sont-ils considérés comme transparents et laissés à la charge de l'élève ? La nature des représentations est-elle

[4] Les transformations à l'intérieur d'un registre

[5] Les transformations entre deux registres différents

soulevée (unicité, exhaustivité, ...) ? Des tâches permettant de faire le lien entre les différents modes de représentations sont-elles proposées ? Quels en sont les enjeux ?

Nous centrerons notre attention sur l'usage qui est et peut être fait des courbes, tableaux de valeurs et tableaux de variations dans l'enseignement des généralités sur les fonctions selon le programme actuel de seconde en France et des effets que ces usages peuvent avoir sur les apprentissages des élèves sur de la notion de fonction.

Dans un premier temps, en nous basant sur des travaux antérieurs, mais aussi sur nos propres analyses de manuels, d'un questionnaire passés auprès de 22 enseignants de seconde et d'un test passé dans 10 classes de seconde réparties entre 6 établissements (voir Yavuz, 2005 et Coppé, Dorier et Yavuz, à paraître), nous allons faire une synthèse succincte des premiers résultats dont on dispose sur l'usage qui est fait de ces trois ostensifs liés aux fonctions et des effets sur les apprentissages.

Nous présenterons ensuite deux expérimentations composées d'exercices qui sont en accord avec les nouveaux programmes. La première vise à installer une réflexion sur les limites de la représentation d'une fonction par une courbe ou un tableau de valeurs. La seconde aborde la question de la non univocité de la représentation par les trois modes et les rapports qu'ils entretiennent.

Notre analyse tentera de dégager les apprentissages qu'elles peuvent permettre, mais aussi les dangers qu'elles soulèvent.

3. Réflexions préliminaires sur : courbe – tableau de valeurs – tableau de variations

3.1 La courbe

Plusieurs travaux de recherche (Chauvat, 1999, Lacasta, 1995, Falcade, 2002 et Bloch, 2002) ont abordé la question de la représentation graphique d'une fonction. En particulier, Chauvat dégage trois modes de fonctionnements du graphique :

- le mode nomographique : « Le graphique est alors un moyen effectif, algorithmisé, d'obtenir des résultats numériques (en général approchés) par des procédures locales. Il est construit de façon à contenir toute l'information nécessaire à l'action du sujet et à la production de la réponse. » (Op.cité p. 25)
- le mode idéogrammatique : « Ce mode correspond au fonctionnement du graphique comme idéogramme, c'est-à-dire comme signe qui renvoie à une idée : dessin d'une parabole pour représenter des variations quadratiques [...]. » (Ibid., p.26)
- le mode opératoire : « Ce mode correspond au fonctionnement du graphique comme processus interactif non algorithmisé : la tâche ne peut pas être effectuée sans le graphique, mais la réponse n'est pas donnée directement par le graphique, elle doit être construite par le sujet en interaction avec le graphique sans disposer d'un algorithme standardisé. » (Ibid., p.26).

Le graphique représente la fonction, il est un signifié du signifiant. Le rapport au graphique peut alors être opaque quand il est considéré comme chose indépendamment de ce qu'il représente (mode nomographique) ou transparent si c'est le signe qui est considéré en priorité (mode idéogrammatique). Le mode opératoire repose sur un rapport au graphique ni trop opaque, ni trop transparent.

Les différents auteurs soulignent que la courbe a pu constituer, dans l'histoire, un obstacle épistémologique à la notion de fonction (Schneider, 1990). De plus, celui-ci peut être renforcé par des pratiques d'enseignement. Or, à l'école primaire et au collège; les élèves apprennent à tracer des courbes à partir de relevés de points dans des situations issues de la vie courante ou d'autres disciplines (sciences physiques, histoire, géographie, etc), mais aussi à lire des informations sur une courbe. Néanmoins, à ce niveau, pour les élèves, ces courbes ne représentent pas des fonctions puisque, d'une part, la notion de fonction n'est introduite qu'en $3^{ème}$ et de façon très partielle et, d'autre part, les tâches ou les questions posées ne nécessitent qu'un fonctionnement dans le mode nomographique.

Par ailleurs, Bloch (2002) souligne que « traditionnellement le registre graphique n'est pas un registre de validation. Pour qu'il le devienne, il faut l'outiller de façon significative. » (p. 33). De plus, « le registre graphique n'est pas suffisant pour opérer sur des fonctions et valider ces opérations, il doit donc être couplé avec des outils qui permettent de restituer un mode opératoire. » (p. 34). Ce que l'auteur propose avec la notion de chemins.

Tous ces écrits montrent bien que l'avantage lié au côté soi-disant intuitif de la courbe est largement contrebalancé par des difficultés liées aux rapports entre les divers modes de représentation et l'objet fonction. Ainsi, si la courbe peut paraître un moyen attractif pour aborder la notion de fonction, elle ne peut, à elle seule, permettre un travail suffisant sur cette notion et doit au moins être conjuguée avec d'autres modes de représentation. Bloch, 2002, Chauvat, 1999 ou Falcade, 2002 ont fait des propositions dans ce sens que nous ne reprendrons pas ici mais qui méritent attention.

Notre propos est avant tout de voir comment le registre graphique est utilisé dans le cadre des programmes actuels de seconde et en particulier comment il interagit avec les tableaux de valeurs et les tableaux de variations.

3.2 Le tableau de valeurs

Pour une fonction, un tableau de valeurs donne un « échantillon » des couples formés par une valeur de la variable et la valeur correspondante de son image. C'est donc une représentation partielle (sauf dans le cas très particulier d'un ensemble fini) de la correspondance entre la variable et son image. Elle donne donc une vision finie pour quelque chose qui est en général infini. Qui plus est, dans la majorité des cas, c'est une discrétisation d'un phénomène continu. En outre, le tableau de valeurs n'a aucune raison, a priori, de contenir des valeurs remarquables de la fonction au regard de ses variations. Dans ce sens, c'est une représentation très partielle et arbitraire. A contrario, partant d'un tableau de valeurs, par nature fini, il existe une infinité de fonctions qui peuvent le satisfaire. Dans le cadre graphique, ceci se traduit par les différents choix possibles pour rejoindre certains points par des lignes. Si, théoriquement, la variabilité est infinie, en pratique, il existe certains implicites ou usages qui limitent ce choix, pouvant même laisser croire à l'unicité. D'un point de vue algébrique, l'interpolation est un domaine inabordable au niveau de la seconde dans toute sa généralité, même si la recherche de la droite représentant au mieux un nuage de points est abordée dans des cas simples. L'usage de la modélisation de phénomènes extra-mathématiques par des fonctions dans d'autres disciplines pourrait être un point d'entrée intéressant permettant d'aborder la question du rapport d'un tableau de valeurs à une courbe ou une fonction. Il reste que les pratiques de tracé d'une courbe représentant au mieux un nuage de point sont courantes dans plusieurs domaines et que l'enseignement des mathématiques a du mal à s'en départir.

A l'entrée en seconde, les élèves ont déjà l'habitude de tableaux comprenant deux lignes de valeurs, en mathématiques comme dans d'autres disciplines ou dans des situations extérieures à l'école. De plus, ils ont eu à représenter graphiquement les données d'un tel tableau, par le tracé de points dans un repère et même éventuellement en reliant ces points, en général par des segments de droites.

Par exemple, dans le programme de physique-chimie de 5ème / 4ème de 1997, on trouve :

A l'issue du cycle central des collèges, l'élève doit également être capable de :

- construire un graphique en coordonnées cartésiennes à partir d'une série de données, les échelles étant précisées par le professeur ;
- le graphique étant donné, interpoler une valeur. (BO n° 5 du 30-1-1997)

En classe de mathématiques, en 3ème, le travail sur les fonctions linéaires et affines conduit à la représentation des tableaux de proportionnalité (travaillés depuis le primaire) par des droites, mais aussi par des formules algébriques, sous forme fonctionnelle. C'est ici que se situe la première rencontre des élèves avec l'idée qu'il peut exister une formule permettant de passer de la première à la seconde ligne d'un tableau, modélisant ainsi la relation fonctionnelle sous-jacente.

Ainsi, en classe de seconde, le tableau de valeurs n'est pas un objet nouveau pour les élèves. De même, le lien avec les courbes a déjà été fait, mais sans forcément l'associer avec l'idée de fonction, objet encore flou dans la tête des élèves. Ces diverses expériences autour des tableaux de valeurs ont certainement formaté leur représentation de cet objet. Ceci peut, de plus, être accentué par l'usage de calculatrices et de tableurs, qui renforcent un certain stéréotype et notamment l'idée qu'un tableau suffit pour tracer une courbe et qu'il y a un rapport doublement univoque entre une courbe et « son » tableau de valeurs.

Nos premières analyses (de manuels, d'un questionnaire enseignant et d'un test élève) montrent qu'en début d'enseignement sur les fonctions en seconde, peu d'activités sont proposées aux élèves pour les faire réfléchir sur le rapport qui existe entre une courbe et un tableau de valeurs et sur la représentativité d'une fonction qu'ils permettent. Une grande majorité d'élèves pensent qu'il n'existe qu'une seule courbe compatible avec un tableau de valeurs donné et ils ne sont effectivement pas capables d'en donner une autre sur un exemple précis. Dans les manuels analysés et dans ce qui ressort de notre questionnaire des pratiques des enseignants, le tableau de valeurs apparaît avant tout comme un outil pour travailler les notions d'images et d'antécédents et pour tracer des courbes. Son usage peut paraître simple et donc les règles de son utilisation restent implicites dans l'enseignement. La difficulté est de comprendre qu'il existe une fonction associée à ce tableau, qui en dit plus que ce tableau lui-même, mais cette difficulté reste occultée.

Des questions élémentaires semblent donc devoir être abordées avec les élèves, telles que : savoir dans quelle mesure un tableau d'une dizaine de valeurs peut rendre compte de façon pertinente d'une fonction définie sur un intervalle de IR ou s'interroger sur la variabilité dans le choix d'un tableau de valeurs pour une fonction donnée, sur ce qui peut se passer entre les valeurs du tableau, sur le fait que deux tableaux peuvent représenter une même fonction, ou, au contraire, un même tableau peut représenter deux fonctions différentes. Dans notre test aux élèves, nous donnions dans un tableau les valeurs de deux actions au 1er de chaque mois, sur 6 mois. Nous demandions alors s'il y avait un moment dans ces six mois où les deux actions avaient eu la même valeur. La réponse majoritaire a bien sûr été celle induite par un tracé « simple » des courbes à partir de points, qui conduit à dire que les deux actions ont eu une fois et une seule la même valeur. Cet exemple peut être un point d'entrée sur la question de la validité de la représentation graphique à partir de quelques points. Les questions de continuité et de modélisation peuvent même être soulevées.

3.3 Le tableau de variations

Contrairement aux courbes et aux tableaux de valeurs, les tableaux de variations sont des objets tout à fait nouveaux pour les élèves de seconde, puisqu'ils ne vivent que dans l'habitat des fonctions. Comme le relève Bloch, 2000 dans sa thèse, le tableau de variation n'a pour « fonction [que] d'être une transition entre l'étude d'une fonction et la représentation graphique ». Traditionnellement, c'est un outil permettant de résumer (sorte de sténographie) l'étude du signe de la dérivée, avant de passer à la représentation graphique. Néanmoins, dans les nouveaux programmes de seconde, il est introduit avant la notion de dérivée. Sa fonction reste cependant de résumer, par un codage adapté, les variations d'une fonction avec la donnée des valeurs des extremums et des valeurs ou limites aux bornes du domaine de définition. Dans certains cas, on peut y rajouter quelques autres valeurs particulières, mais ce n'est qu'une facilité d'écriture, évitant de donner en plus un tableau de valeurs. Ce n'est donc pas un simple tableau à double entrée, il est régi par un codage plus complexe qui embarque beaucoup plus de connaissances mathématiques sur les fonctions. Il permet certes la lecture d'images et d'antécédents comme un tableau de valeurs, mais surtout, il synthétise de façon exhaustive toutes les informations sur les variations et les extremums de la fonction, ainsi que les valeurs ou limites aux bornes du domaine. De fait, l'utilisation du tableau de variations engage nettement plus de connaissances que le tableau de valeurs, non seulement parce qu'il nécessite de savoir déterminer les variations de la fonction, mais aussi parce qu'il nécessite des aptitudes plus spécifiques de codage et donc de décodage. Par ailleurs, le tableau de variations prend implicitement en compte l'aspect continu de la variable, puisqu'il résume les variations et ne se contente pas d'un échantillonnage discret comme le tableau de valeurs.

Ainsi, à quelques différences superficielles près, à une fonction donnée correspond un seul tableau de variations. C'est une différence essentielle avec le tableau de valeurs. Par contre, plusieurs fonctions peuvent correspondre à un même tableau de variations.

Nos analyses de manuels et du questionnaire aux enseignants montrent que la construction d'un tableau de variations ne fait généralement pas l'objet d'une définition dans le cours. On la considère comme transparente et les règles de codages restent au niveau des consignes orales. Rien n'est dit par exemple sur le fait que les flèches ne signifient pas que la courbe est une droite, mais que ce sont des symboles indiquant le sens de variations (ceci constitue pourtant une erreur classique chez les élèves). Il semble donc que la complexité dans la constitution d'un tableau de variation soit en partie sous-estimée dans l'enseignement, et de ce fait, la compréhension du symbolisme du tableau de variations reste à la charge des élèves, ce qui veut dire que le professeur n'a que peu de moyens d'accès au fonctionnement de ce qui est, pour l'élève, un bloc de connaissances privées. Dans la nouvelle écologie du chapitre sur les généralités sur les fonctions de la classe de seconde, le tableau de variations est cependant amené à avoir une nouvelle place. D'outil transitoire, il est de plus en plus devenu un ostensif indépendant. Il n'est ainsi pas rare que l'on demande de tracer un tableau de variations à partir d'une courbe, ou encore que l'on demande de tracer plusieurs courbes, à partir du seul tableau de variations. Néanmoins, notre test aux élèves montre qu'une grande majorité d'élèves pensent qu'il n'existe qu'une courbe associée à un tableau de variations donné et qu'il n'y a qu'un seul tableau de variations compatible avec un tableau de valeurs donné.

3.4 Conclusions

Pour les raisons énoncées plus haut, les nouveaux programmes de seconde sur les fonctions ont recentré l'introduction de cette notion sur un travail à partir d'un jeu sur différents modes de représentation, où les formules algébriques ne peuvent plus jouer un rôle central. Ainsi des ostensifs tels que, la courbe, le tableau de valeurs ou le tableau de variations se trouvent-ils porter plus de poids dans la représentativité des notions introduites. Un tel enseignement se prévaut de l'avantage de pouvoir s'appuyer sur des situations plus intuitives et sur des acquis antérieurs des élèves dans et hors les mathématiques. Nous avons cependant souligné, à l'appui de nombreux travaux, les dangers d'un travail qui, ne portant que sur les signifiés et leurs liens, ne permettrait peut-être pas d'atteindre le signifiant. Outre cette difficulté essentielle, sur laquelle nous reviendrons, nous avons vu que des difficultés plus locales subsistent. Comment initier une réflexion des élèves sur les rapports (dans les deux sens) entre courbes et tableaux de valeurs ? Quel rôle peut alors jouer le tableau de variations ? Dans quelle mesure un tel travail peut-il aider à dépasser l'idée de la représentation point par point et faire entrevoir la spécificité d'une relation numérique prenant en compte une variation continue de la variable ? Quels sont les apports et les limites d'un tel travail pour l'apprentissage de la notion de fonction numérique ?

Notre étude des manuels de 2000 et du questionnaire aux enseignants laisse apparaître une grande variabilité dans la prise en compte de ces questions, qui montre qu'aux débuts de ce nouveau programme, la profession a eu des difficultés à trouver comment prendre en compte les nouvelles injonctions. Ceci se traduit, entre autres, par une inertie dans le déroulement du temps didactique. Le traitement du chapitre sur les généralités sur les fonctions s'étend ainsi sur les rappels de 3ème et patine à trouver de nouvelles tâches faute d'un contenu mathématique suffisant. Il faut attendre le chapitre sur les fonctions de référence pour que le temps s'accélère en particulier grâce à une reprise du travail algébrique, permettant des tâches « plus classiques ».

Or, si nous oublions un peu l'usage des fonctions pour l'analyse mathématique et si nous nous centrons sur l'usage plus commun qui en est fait pour modéliser des données entre deux grandeurs dans les autres disciplines ou dans la « vie courante » (en particulier pour un public d'élèves qui ne se destinent pas à des études scientifiques), il nous semble qu'alors, le travail sur les ostensifs et les rapports qu'ils entretiennent entre eux peut être un point d'entrée intéressant qui peut justifier un premier travail dans ce sens, qui ne remplacera toutefois pas un travail ultérieur à faire sur la notion même de fonction. On peut peut-être par là trouver un terrain plus intuitif, mais surtout plus motivant, en particulier pour des élèves rebelles au formalisme. C'est une piste tentante que les programmes actuels de seconde ont peut-être ouverte et qui mérite réflexion. Ainsi, nous voulons apporter quelques éléments de réflexion à l'appui de cette question, en présentant maintenant les résultats de deux expérimentations que nous avons conduites en classe de seconde.

4. Première expérimentation

Cette première expérimentation se situe en tout début d'enseignement sur les fonctions, à la deuxième séance. Lors de la première séance, élaborée par le professeur de la classe, les élèves ont revu des notions déjà rencontrées en classe de 3ème (image, antécédent, lecture graphique, etc) et le professeur a introduit et institutionnalisé certaines premières définitions liées aux fonctions (définition d'une fonction, lien avec la courbe représentative). Pour ce faire, il s'est appuyé sur une situation de la vie courante (concentration du paracétamol dans le sang en fonction du temps après absorption). Il s'est servi d'un tableau de valeurs, dont il a extrapolé une représentation graphique, par une courbe « lisse » non rectiligne. L'analyse des manuels montre que c'est une séance d'introduction classique.

Lors de la deuxième séance, nous avons proposé un jeu de message à partir d'une courbe tracée dans un repère avec quadrillage, représentant une fonction « imaginaire ». Notre but était de mettre à plat les connaissances antérieures et les conceptions des élèves sur ce qu'est une courbe, comment et sous quelles conditions elle permet de représenter une fonction, quels sont les liens entre courbe, tableau de valeurs et fonction et enfin de déboucher sur une première mise en évidence des variations comme phénomène important et nouveau pour l'étude des fonctions. Le choix d'une courbe suffisamment complexe devait empêcher toute tentative pour retrouver une expression algébrique.

Dans ce jeu de message, une moitié de la classe (groupes émetteurs) doit décrire une courbe à l'autre moitié (groupes récepteurs) qui doit ensuite la reproduire le plus fidèlement possible.[6] Après ce travail de groupes, le professeur collecte sur transparents les messages et les courbes produites et organise une mise en commun visant à faire discuter les élèves sur les messages produits, sur les différences entre les courbes obtenues et les limites des différents moyens possibles pour décrire une courbe. Dans ce sens, la formulation « la plus ressemblante possible », volontairement ambiguë, doit permettre d'initier une discussion. Ainsi, pendant ce moment de mise en commun, l'enjeu porte bien sur la différence de statut entre le signifiant (la fonction) et les signifiés possibles, dont la courbe (qui est en jeu ici). Le professeur pourra donc montrer par exemple la non exhaustivité des données du tableau de valeurs pour

---

[6] Pour ne pas laisser la moitié de la classe inactive, nous avons proposé un autre exercice aux groupes récepteurs, puis aux groupes émetteurs. Cet exercice consistait, à partir d'une courbe donnée sur quadrillage, à tracer d'autres courbes passant par trois points communs avec la première courbe.

représenter une fonction et l'importance de la prise en compte des variations, qui restent toutefois insuffisantes à définir la fonction. Le rôle du professeur est alors déterminant lors de la mise en commun pour choisir les messages et les courbes qui posent problème, afin de faire discuter les élèves. Ainsi, ce jeu de message doit déboucher sur un travail de comparaison des informations données, sur une fonction, par des représentations de natures différentes. En ce sens, ce travail apparaît institutionnellement conforme au programme de seconde et tout à fait important pour un bon usage des ostensifs liés à une fonction.

4.1 L'exercice proposé

Voici la courbe et la consigne que nous avons données aux élèves des groupes émetteurs, alors que les groupes récepteurs recevaient des quadrillages vierges à la même échelle.

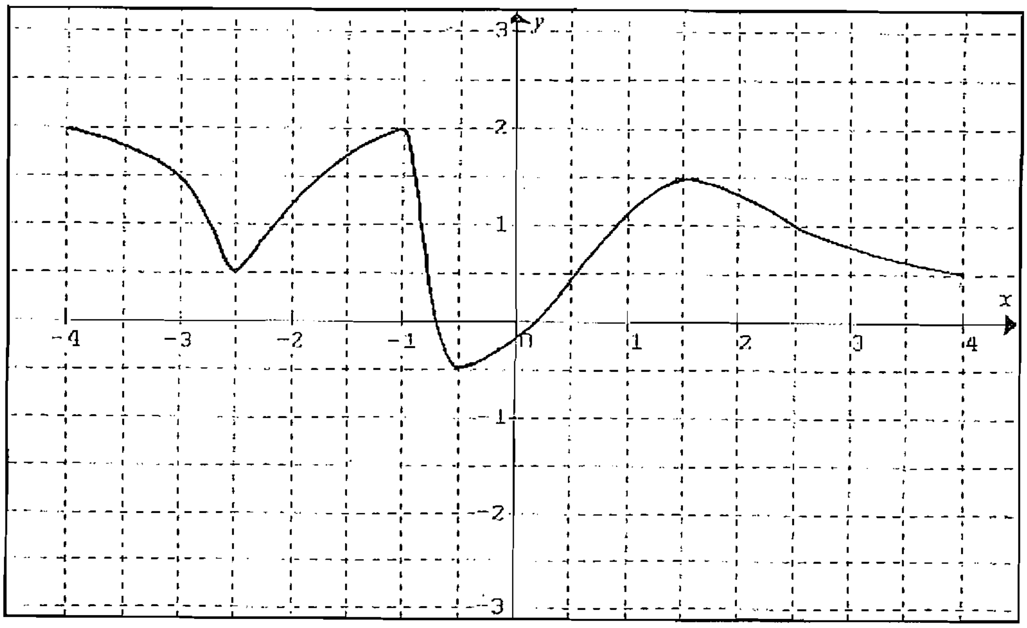
Voici la consigne donnée aux groupes émetteurs :

La courbe ci-dessous représente une fonction f de [-4,4] dans $\mathbb{R}$. Vous devez donner, sur un seul transparent, des informations (tout sauf une courbe), de sorte que vos camarades tracent une courbe qui ressemble le plus possible à celle-ci.

Au vu des remarques précédentes, on sait que les élèves auront tendance à favoriser un tracé point par point de la courbe. Ainsi, les groupes émetteurs auront tendance à donner des points, ou un tableau de valeurs, et les groupes récepteurs seront confrontés à la tâche de tracer une courbe à partir de la donnée de certains de ces points. Néanmoins, comme la courbe initiale n'est pas trop simple et selon les stratégies des groupes émetteurs, on peut avoir des différences significatives dans les réponses produites par les groupes récepteurs, notamment sur la place des extremums.

Les différences sur la place des extremums et donc sur les variations peuvent faire émerger, dans la phase de mise en commun, l'idée d'une description de la courbe en termes de variations, débouchant à terme sur le tableau de variations. Néanmoins, même dans le cas où les variations sont identiques, deux courbes décrites point par point sont toujours différentes (ce qu'on peut voir par superposition des transparents). On vise donc bien ici à mettre en défaut la stratégie de description et de tracé point par point, même améliorée par la donnée des variations.

Au delà, comme la courbe est censée représenter une fonction, ce qui est en jeu touche à la représentativité de la fonction par la seule courbe. Or, dans le seul cas connu des élèves des fonctions affines, deux points déterminent entièrement la courbe, ce qui se pose en obstacle à la problématisation de ce qui peut se passer sur une courbe entre deux points d'un tableau de valeurs.



Notre expérimentation vise donc à tenter de problématiser cette question, en mettant en avant le fait que la fonction détermine bien de façon univoque le comportement entre deux points, d'une façon que la courbe ne peut représenter que de façon approximative. En effet, au delà de l'insuffisance d'un tableau de valeurs pour déterminer une fonction, nous voudrions également faire toucher du doigt l'insuffisance même de la courbe, à remplir la même fonction.

4.2 Choix des variables didactiques

Nous avons choisi de fournir un quadrillage pour permettre une certaine lisibilité des points nécessaire pour écrire les messages. Nous avons également choisi comme domaine [-4 ; 4], de façon à avoir une amplitude comprenant un nombre de valeurs entières assez grand (mais pas trop) pour permettre, sans trop la favoriser, une technique de description et de tracé point par point.

Pour favoriser une description en termes de variations continues, il fallait avoir un nombre suffisant d'extremums locaux, nous avons choisi d'en mettre 4 en plus des bornes. De plus, nous avons placé 3 des 4 extremums locaux en des abscisses non entières pour qu'il n'y ait pas de confusion possible entre valeurs entières et extremums. Toutefois, pour des questions de lisibilité, nous avons placé les 6 points correspondant aux extremums en des nœuds du quadrillage.

Au vu des variables didactiques précédentes, il fallait introduire des points de la courbe qui soient des nœuds du quadrillage sans être ni des points à coordonnées entières, ni des extremums, de façon à pouvoir discriminer les différentes procédures par des observables suffisamment distincts. Sur les 17 points à abscisse demi-entière, 9 correspondent à des nœuds du quadrillage, dont les 6 extremums. Par ailleurs, 2 nœuds sur la courbe ne correspondent ni à des extremums, ni à des abscisses entières.

4.3 Analyse a priori des procédures des élèves

4.3.1 Procédures possibles pour les groupes émetteurs

Si l'on considère une courbe indépendamment du fait qu'elle représente une fonction, c'est-à-dire comme une simple ligne tracée dans le plan, on peut, pour la décrire, utiliser du vocabulaire relatif à sa forme (par exemple, la courbe est arrondie, il y a un pointu, ça ressemble à, ...) ou bien on peut relever des points qui semblent déterminants pour la forme (comme dans les jeux où l'on reproduit un dessin en reliant des points). Dans ce cas, le quadrillage joue un rôle essentiel dans les descriptions.

Prendre en compte l'aspect représentation d'une fonction peut conduire aussi à donner des points, qui ne seront alors pas forcément choisis selon les mêmes critères que dans le premier cas. En effet, ici, les connaissances antérieures sur les tableaux de valeurs peuvent jouer un rôle important : par exemple, en favorisant un échantillonnage par des valeurs régulièrement espacées. Comme nous l'avons prévu dans le choix de la courbe, cette stratégie est remise en cause par le fait que les ordonnées de plusieurs points d'abscisses entières de la courbe ne sont pas entières et conduisent donc à la donnée de valeurs approchées. De plus, des points remarquables de la courbe (la plupart des extremums) ne sont pas pris en compte si on ne considère que les points d'abscisse entière. La mise en défaut de la stratégie précédente peut amener à basculer sur la première stratégie, mais elle peut aussi conduire à introduire des informations relatives à l'idée de variation. Dans une version discrète, cela peut conduire à donner systématiquement tous les points qui correspondent à des extremums ; dans ce cas, il sera difficile de distinguer cette procédure de celle, relative à la description de forme, dans la mesure où les extremums sont aussi des points remarquables pour la forme. De plus, le fait qu'ils soient des extremums peut rester implicite dans le message, voire même pour les élèves des groupes émetteurs. Dans une version continue, on peut décrire globalement les variations par des expressions telles que « la courbe monte, descend, entre telle et telle valeur... ».

Les élèves peuvent avoir également tendance à donner un maximum d'informations sur la courbe : soit un tableau de valeurs avec des informations en langue naturelle (ça monte, ça descend, ça ressemble à une montagne, ce n'est pas régulier, ce ne sont pas des morceaux de droites, etc.), soit un maximum de points sur la courbe, par exemple toutes les coordonnées entières avec les points du quadrillage ou toutes les coordonnées demi-entières.

4.3.2 Procédures possibles pour les groupes récepteurs

Les procédures possibles pour les groupes récepteurs dépendent bien sûr des messages reçus. Ainsi, s'ils ne reçoivent qu'un tableau de valeurs (ou des couples de valeurs données en termes fonctionnels tels que $f(\ldots) = \ldots$) il s'agira dans un premier temps de placer ces points sur le quadrillage, puis de les relier soit par des segments de droites, soit par une ligne courbe. La question des extremums est ainsi posée. En effet, dès que trois points successifs se trouvent dans une configuration non monotone, le point du milieu sera vraisemblablement implicitement interprété comme un extremum, et les extremums de la courbe seront uniquement pris parmi ces points. Ce qui revient à considérer que la fonction ne change pas de sens de variation entre deux valeurs successives du tableau. Plusieurs façons de tracer la courbe à partir de ces points sont alors possibles. Nous les caractérisons ainsi :

- « *courbe simple rectiligne* » en reliant les points par des segments de droites.
- « *courbe simple lisse* » en arrondissant les angles pour lisser la courbe.

Cette stratégie peut conduire à s'interroger sur l'unicité de la réponse puisqu'il n'y a pas qu'une seule façon de faire. Cependant la variabilité est suffisamment limitée pour qu'il y ait un semblant d'unicité.

Les autres stratégies ne respectent plus la monotonie entre deux points donnés :

- soit de façon locale, en introduisant « une vague » seulement entre deux points successifs d'une courbe simple lisse (« *courbe vague* »)
- soit de façon plus globale et radicale, en traçant une courbe qui n'a plus comme seule contrainte que de passer par certains points qui ne sont pas ses extremums (« *courbe libre* »).

On peut envisager d'autres stratégies, qui nous semblent cependant peu probables ici, par exemple de tracer des courbes qui ne respectent plus la continuité.

Quel que soit le tableau de valeurs donné par le groupe émetteur, nous pensons que les groupes récepteurs auront plutôt tendance à utiliser les stratégies *courbe simple rectiligne* ou *lisse*, surtout si le tableau de valeurs comporte beaucoup de valeurs peu éloignées les unes des autres, ce qui est en conformité avec les pratiques habituelles des classes précédentes. Cependant, l'exercice qu'ils auront eu à traiter pendant le travail des groupes émetteurs pourra avoir éveillé chez eux un certain questionnement.

Les stratégies « *courbe vague* » et « *courbe libre* » sont plus difficilement envisageables par les élèves. Elles ont toutefois plus de chance d'apparaître si les valeurs du tableau de valeurs sont assez éloignées les une des autres. L'apparition d'une de ces stratégies chez un des élèves d'un groupe récepteur peut conduire à une discussion au sein du groupe qui peut amener à remettre en cause la possibilité de trouver « la » bonne réponse. Mais la conviction qu'il faut trouver « une » bonne réponse peut au contraire faire écran de façon très forte et empêcher ces stratégies d'émerger.

Les informations qui pourraient être données par les groupes émetteurs, autres qu'un tableau de valeurs, auront comme effet de mieux circonscrire l'allure de la courbe. Soit en spécifiant les extremums, soit en précisant que la courbe est « lisse » (le choix du vocabulaire peut être très varié sur ce point). Elles auront donc pour effet de faire barrière à d'éventuelles stratégies. Par exemple, un groupe émetteur peut dire que la courbe doit être « tracée à la main sans faire de droites » ou « qu'elle est arrondie » ce qui bloque la stratégie « *courbe simple rectiligne* ». Ils peuvent aussi donner un programme de construction en disant que l'on doit descendre à partir de tel point jusqu'à tel autre, puis monter jusqu'à tel autre, etc. Ceci bloque les stratégies « *courbe vague* » ou « *courbe libre* ».

4.4 Analyse a posteriori

Cette activité s'est déroulée en module (deux séances d'une heure concernant chacune une demi-classe). Pour chaque demi-classe, nous avons constitué 3 groupes, divisés en deux demi-groupes « émetteur » et « récepteur » (binôme ou trinôme). A chacune des deux séances, nous avons filmé 2 des 3 groupes.

4.4.1 Groupes Emetteurs

Les messages des groupes émetteurs sont très semblables sur la forme puisque quatre des six groupes ont produit un tableau de valeurs sans autre information, alors que les deux autres ont donné des points de la courbe en ajoutant chacun une indication sur la forme de la courbe (respectivement « tracez cette courbe à la main sans faire de droite » et « le résultat final devra ressembler à une courbe non régulière »).

On peut donc considérer que pratiquement tous les groupes utilisent la stratégie « point par point ». Ainsi, en début d'apprentissage sur les fonctions, il semble que la technique consistant à tracer un tableau de valeurs avec un nombre de cases (et donc de couples de valeurs) assez important est complètement naturalisée pour la plupart des élèves. De plus, aucune information n'est donnée sur les variations de la fonction que les élèves ne semblent donc pas percevoir comme pertinent sur la courbe même dans une perspective de communication visant à la reproduction de cette courbe. En reprenant les catégories de Chauvat, on peut donc dire que tous les élèves fonctionnent dans le mode nomographique.

En revanche, pour le choix des points, nous avons constaté que plusieurs stratégies différentes ont été utilisées.

Dans chacun des groupes 1 et 2, un des deux élèves trace immédiatement un tableau vierge, dans lequel il veut mettre tous les points d'abscisses entières de façon systématique. C'est lui qui écrit dans le tableau, il ne regarde pas la courbe, pendant que l'autre élève lit les ordonnées et les lui dicte. Or, ce deuxième élève souhaite rajouter soit des points de la courbe qui sont des nœuds du quadrillage (groupe 2), soit les extremums qui n'ont pas des abscisses entières, comme –2,5 (groupe 1). Dans le groupe 1, le deuxième élève tente même de supprimer les points d'abscisse entière qui ne sont pas des extremums, comme le point d'abscisse –2. Ainsi, au moment de lire l'ordonnée du point d'abscisse 2, il dit clairement « Mais non, on s'en fout de celui-là [...] Parce que ça suit, si on fait ça, ça passe aussi par là, donc c'est obligé » ou bien quand il constate qu'il y a beaucoup de distance entre deux points extremums ou un changement de concavité (ce qui est le cas entre les extremums d'abscisses –0,5 et 1,5), il cherche à rajouter des points de la courbe qui sont des nœuds du quadrillage. De même, à la fin de la séance, quand le premier élève commence à recopier le tableau de valeurs sur le transparent, il demande à l'autre de compter combien de points ils ont mis dans le tableau au brouillon (l'élève compte 12 points) et il indique pour lui (en aparté) que 8 points suffiraient « normalement 8 points, normalement [...] ». Dans le groupe 2, les élèves rajoutent aux points d'abscisses entières les points (-0,5 ; -0,5) et (0,25 ; 0).

Deux de ces élèves semblent donc guidés par des connaissances antérieures et des techniques de remplissage d'un tableau de valeurs qui les amènent à remplir de façon quasi automatique, en lisant sur la courbe, les points d'abscisses entières ou régulièrement espacées avant même de se poser des questions sur l'allure de la courbe. Il semble donc que cette technique risque de faire obstacle à l'idée de continuité ou de variation et que la référence à une fonction est totalement absente. Rappelons que nous avions fait exprès de bloquer cette stratégie de relevé systématique des points d'abscisse entière, néanmoins, il est intéressant d'observer qu'un élève insiste, jusqu'à la fin de séance, pour l'utiliser et qu'il résiste malgré la difficulté de lecture des ordonnées. Ainsi, il semble que pour lui, le remplissage automatique d'un tableau de valeurs ne comprenant que les abscisses entières est LA seule façon de décrire une courbe.

En revanche, dans les groupes 3 et 4, les élèves n'ont pas de procédure systématique contrairement aux groupes 1 et 2. Ils ne produisent pas de tableau mais plutôt une liste de points. Ces deux groupes ont également anticipé ce que le groupe récepteur pouvait faire : en essayant explicitement de tracer la courbe à partir des points choisis (groupe 3) ou en demandant des précisions sur le support vierge donné au groupe récepteur (groupe 4).

Dans le groupe 3, les élèves donnent des points qui correspondent aux extremums et aux points de la courbe qui sont des nœuds du quadrillage. De plus, ils indiquent quelques remarques sur la forme de la courbe : « tracez cette courbe à la main sans faire de droite ». Comme vérification, ils tracent une courbe « simple lisse » à partir de leurs points et constatent que, sur certains intervalles, leur courbe est différente de la courbe originale. Ceci les conduit alors à rajouter d'autres points. Ceci montre que pour ces élèves la non univocité dans la correspondance entre graphique et le tableau de valeurs n'était pas problématisée, ce qui confirme l'analyse des réponses des élèves dans notre questionnaire, mais que l'enjeu de communication a permis ce début de questionnement.

Dans le groupe 4, les élèves donnent tous les points dont les coordonnées sont toutes les deux entières sans d'ailleurs respecter l'ordre croissant des abscisses. On peut noter que dans leur dialogue, les deux élèves emploient des termes qui renvoient à une idée de variation ou de continuité comme « ensuite ça monte » ou « elle monte à –1 » ou encore « après on va directement là » mais ils ne notent que des points pour les autres élèves, sans référence à cet aspect de leur discussion.

Enfin, une expérimentation dans une autre classe, a montré que quelques élèves donnent des descriptions en termes de variation continue sur la courbe. Par exemple :

La courbe commence par un point de coordonné -4 sur la droite des abscisses et 2 en ordonnée. Faire une courbe jusqu'à -2,5 en abscisse et 0,5 en ordonnée en passant par -3 en abscisse et 1,5 en ordonnée. La courbe va remonter en passant par -1,5 en abscisse et 1 en ordonnée. La courbe redescendra à partir du petit espace (le 2$^{\text{ème}}$ en partant du bas) se trouvant sur le carré entre 1 et 1,5 ordonnée. La courbe redescend à -0,5 sur abscisse et -0,5 sur ordonnée. Elle remonte en 1 sur ordonnée et 1 sur abscisse, remonte légèrement et redescend à -1 en ordonnée et 2 en abscisse. Puis finit à 0,5 en ordonnée et 4 en abscisse.

Cette deuxième expérimentation nous a donc permis de mieux voir que les stratégies des groupes émetteurs n'étaient pas uniformes et qu'elles étaient certainement influencées par des connaissances antérieures sur les tableaux de valeurs ou sur des techniques de collecte de données. Les stratégies « point par point » sont bien sûr majoritaires mais la prise en compte de l'allure de la courbe est différente suivant les élèves, ce qui explique les choix des points.

Nous avons aussi pu mesurer les limites de ce qu'on peut faire en partant de la représentation graphique d'une fonction. On pourrait avoir l'idée que la représentation graphique offre plus de liberté que l'expression algébrique pour faire comprendre certaines notions sur les fonctions. Mais le cadre graphique répond à ses propres codes, en particulier en début d'apprentissage, les élèves sont très marqués par une vision point par point du tracé, qu'il est difficile de déstabiliser.

4.4.2 Groupes récepteurs

Nous avons vu que les groupes récepteurs n'avaient reçu que des messages comportant un tableau de valeurs ou des listes de points. Dans ce contexte, ils auraient pu se poser la question de savoir comment arriver à tracer une courbe à partir de ces seules données et, par là, remettre en cause la faisabilité de la tâche. Mais il apparaît que ce questionnement ne se produit pas et que les élèves ont placé directement les points donnés sur le repère, sans plus se questionner. Tout s'est donc passé comme s'ils considéraient le tableau de valeurs comme pertinent par rapport au problème posé. Ceci montre que, comme dans le cas des groupes émetteurs, la non univocité dans la correspondance entre le registre tableau de valeurs et le registre graphique n'est pas encore problématisée.

Parmi les quatre groupes n'ayant reçu qu'un tableau de valeurs, trois tracent une courbe « simple lisse » sur le transparent à partir des points du tableau de valeurs. Un de ces groupes trace deux courbes au brouillon, une courbe « simple lisse » et une courbe « simple rectiligne », mais ils préfèrent finalement reporter la courbe « simple lisse » sur le transparent en disant « généralement une courbe est plus tordue ».

Seul le groupe 5 trace deux courbes. Ce trinôme d'élève produit en effet une courbe « simple lisse » et une courbe « libre », c'est-à-dire avec des changements de variation entre deux points du tableau qu'ils ont reçu de leur groupe émetteur.

Et voici un extrait des échanges au sein de ce groupe:

E1 : ... oui mais à ce moment-là, **la** courbe ne passe pas comme ça !

E2 : oui il est clair...

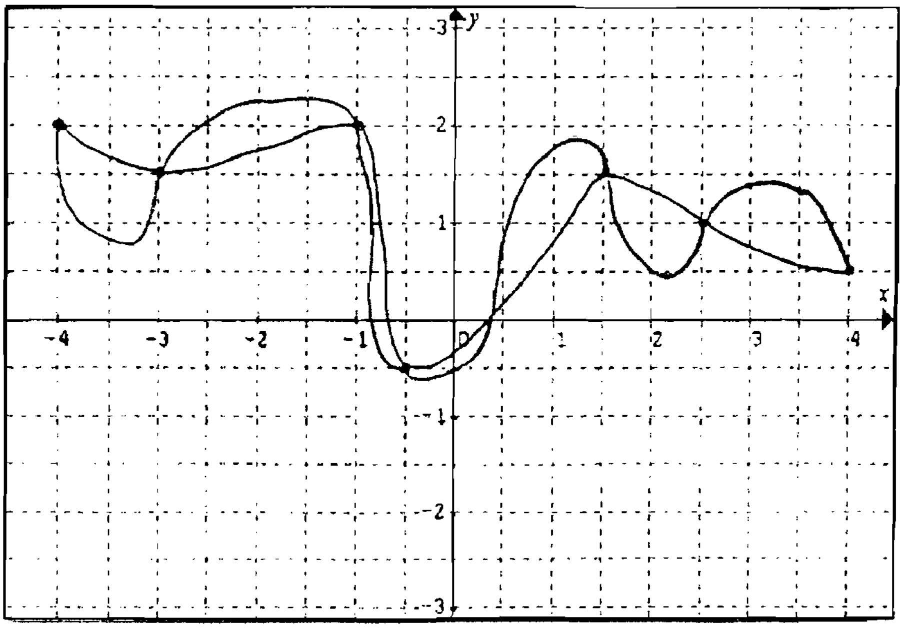
E3 : oui comme l'exercice d'avant (*donné pendant le travail des groupes émetteurs*) où il y avait plusieurs façons de la tracer

E2 : oui mais bon *y en a une courbe...*

E3 : j'sais pas. Parce que l'exercice d'avant on l'a bien vu que avec trois points tu peux en tracer plusieurs.

E1 : mais **la** courbe elle doit passer **sur** les points, pas **par** les points.

Voici les deux courbes qu'ils ont tracées :



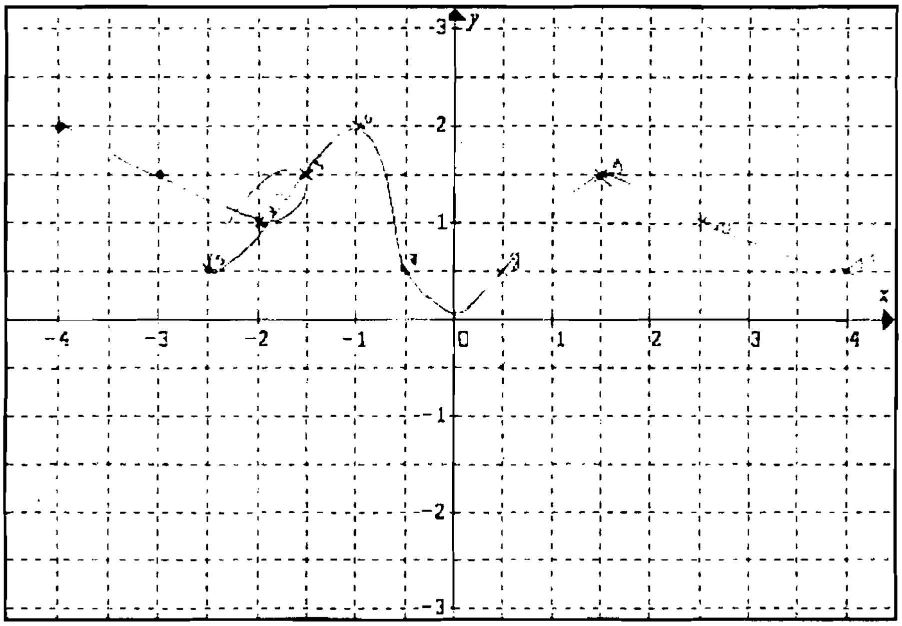
On peut penser que E3 (qui est aussi redoublant) rattache cette activité à l'exercice fait pendant le travail des groupes émetteurs. C'est le seul qui envisage ainsi de tracer une courbe en introduisant de nouveaux extremums entre deux valeurs du tableau. Les autres élèves (E1 et E2) ne contredisent pas E3, mais elles disent qu'il y a une bonne réponse, qui est la courbe simple lisse qu'elles ont tracée et refusent l'idée qu'il puisse y en avoir une autre. Notons que dans ce groupe, l'opinion de ces deux élèves l'aurait emporté et qu'une seule courbe serait apparue sur le transparent final si l'observateur n'était pas intervenu pour inciter les élèves à garder les deux courbes.

De plus, E1 dit « la courbe elle doit passer **sur** les points, pas **par** les points ». Ici le terme « sur » semble vouloir dire que la courbe ne fait pas que passer par le point mais en quelque sorte repose 'dessus', ce qui traduit l'idée de la configuration d'un extremum. Ainsi, cette élève explicite, avec son vocabulaire, ce qui a l'air d'être implicite chez beaucoup d'autres, c'est-à-dire que les valeurs du tableau sont considérés en général (voire toujours) comme des extremums.

A part E3, aucun élève n'interroge la variabilité de la courbe par rapport à un ensemble de points donnés. Ceci semble s'expliquer par le fait que les élèves ont agi comme s'il n'y avait qu'une bonne réponse (effet de contrat) et que, de plus, la stratégie courbe simple lisse s'est imposée. D'autre part, il semble que les élèves ne considèrent pas comme important les changements de concavité de la fonction, ce qui est important pour eux c'est de lier les points par une courbe.

Enfin, dans le groupe 6, les élèves font un « boucle » sur une partie de la courbe, suite à une inversion dans l'ordre des points dans les informations données par leurs camarades. Ce groupe a donc pris les informations dans l'ordre où elles étaient écrites en les traitant de façon chronologique, ce qui les a conduits à faire une boucle. La phrase supplémentaire « tracez cette courbe à la main sans faire de droite » semble simplement avoir bloqué la stratégie « courbe simple rectiligne » comme nous l'avions prévu dans notre analyse a priori. Notons également que ce groupe a numéroté les points tracés.

Voici leur production :



Le fait que la courbe ne représente pas une fonction ne les a pas gênés, ce qui confirme la prégnance d'un cadre graphique indépendant de l'idée de représentativité d'une fonction.

Au final, dans les cas où les groupes émetteurs n'ont pas fait d'erreur, les groupes récepteurs arrivent presque à tracer la même courbe que l'originale. On peut donc dire que la stratégie « point par point » n'est pas facilement mise en défaut (sauf dans la stratégie « abscisse entière »), et qu'il est donc très difficile d'aller contre cette conception. L'analyse détaillée des échanges dans les groupes montre que certains élèves, ont transformé le but de l'exercice (retrouver la même courbe) en comment placer les points sur le repère. D'ailleurs, quelquefois les discussions ont porté sur comment décoder le tableau de valeurs en termes de position des points dans le repère.

Une fois qu'ils avaient terminé de placer tous les points donnés, les élèves s'arrêtaient pratiquement de discuter pour tracer une courbe simple lisse de façon consensuelle. Ces éléments nous montrent d'abord que la maîtrise des connaissances liées au placement des points dans un repère est encore suffisamment problématique à ce niveau pour prendre le pas sur la suite de l'activité. Mais il semble aussi que certains élèves traitent cette activité comme un jeu où l'on reproduit un dessin en reliant des points. Ils pensent ainsi que relier les points après les avoir marqués sur le repère est une tâche simple, sans ambiguïté.

4.4.3 Conclusion

Nous avons constaté que, pour les élèves, ce qui est prédominant c'est une description et un tracé point par point en utilisant le quadrillage. Les points caractéristiques qui sont donnés le sont essentiellement par rapport à la facilité de lecture des coordonnés, mais pas toujours par rapport à la forme de la courbe. Il apparaît donc que les élèves se situent avant tout dans le cadre graphique, sans faire référence à la représentation d'une fonction. Ils travaillent sur la courbe comme si c'était un dessin dans un quadrillage indépendamment de la référence à la fonction, ceci rejoint les résultats des autres études déjà citées. Ainsi les élèves, dans leur message final, n'ont pas employé d'expressions qui rendraient compte des variations de la courbe comme « elle monte », « elle descend », « il y a un sommet », etc. Il y a certainement plusieurs types d'explication à cela : des connaissances fortement marquées par un vision point par point, des procédures utilisées dans d'autres disciplines (relevés de points) pour tracer des courbes, des difficultés à combiner plusieurs registres de description, la donnée du quadrillage qui favorise la description point par point, des effets de contrat qui empêchent d'utiliser ces termes qui ne relèvent pas du savoir mathématique.

Ce jeu de message nous a montré que l'idée de la courbe comme une série de points qu'on réunit est très forte, alors que l'idée des variations (et donc d'une certaine globalité) reste absente ou minoritaire chez les élèves au début de l'étude des fonctions. Ainsi, les variations ne s'imposent pas comme un critère de description d'une courbe même si l'expérimentation supposait que la contrainte de communication entre groupes pouvait favoriser cette description et aller contre la description point par point.

4.4.4 Mise en commun

Comme nous l'avons précisé, le rôle de la mise en commun et donc du professeur est très important puisqu'à ce moment-là la professeur doit organiser un dialogue avec toute la classe sur les messages et les courbes produites visant à discuter l'exhaustivité des informations données et reçues, ce qui doit permettre de faire naître un questionnement mathématique chez les élèves sur la nature et les particularités des objets rencontrés pour une entrée dans la notion de fonction.

En effet, cette dernière phase de l'activité a permis de mettre à jour un certain questionnement. Les courbes produites étaient suffisamment différentes pour que la discussion soit riche. Il est apparu très clairement que les élèves avaient du mal à se départir de l'idée qu'il y avait une bonne réponse et à comprendre que le bilan conduisait à l'idée qu'une courbe ne pouvait se laisser entièrement décrire, ni par un tableau de valeurs, ni même par une description de ses variations. La séance a débouché sur les définitions de la croissance et de la décroissance, d'un extremum et sur le tableau de variations. Le professeur a ainsi montré comment tracer le tableau de variations de la fonction représentée par la courbe donnée et les élèves ont été invités à construire d'autres courbes ayant un tableau de variations identique.

Cette séance a donc permis d'initier un questionnement sur la nature des liens entre courbe, tableau de valeur et tableaux de variations. Cependant le rôle de l'enseignant reste prédominant. En effet, faute d'une référence suffisante à la notion de fonction (impossible en ce début d'apprentissage), le milieu à disposition est certainement trop pauvre pour permettre un questionnement autonome de l'élève. Il y a bien apprentissage sur la nature des liens entre les ostensifs, la question reste de savoir ce que cet apprentissage permet de nourrir sur l'apprentissage de la notion de fonction elle-même.

5. Seconde expérimentation

La seconde expérimentation se situe un peu plus tard dans la progression, après que les notions de croissance et de décroissance, d'extremum et de tableaux de variations ont été introduites. Elle vise à revenir sur la question de la non-univocité de la représentation par un tableau de valeurs, en lien avec la représentation graphique, mais aussi à tester la compréhension du fonctionnement d'un tableau de variations, en particulier dans ses rapports avec les courbes et les tableaux de valeurs.

5.1 Description

Cette expérimentation comporte deux exercices liés entre eux. Cependant les élèves ne le savent pas au début. Elle se déroule en quatre temps avec la classe entière, les élèves travaillant individuellement, pendant un peu moins d'une séance.

Outre des connaissances spécifiques au codage d'un tableau de variations, elle vise à l'institutionnalisation des connaissances suivantes :

- Un tableau de valeurs ne donne que des informations partielles et arbitraires sur une fonction. Donc à un tableau de valeurs peut correspondre plusieurs courbes et plusieurs tableaux de variations.
- De même, à un tableau de variations peuvent correspondre plusieurs fonctions donc plusieurs courbes et plusieurs tableaux de valeurs. Par contre, à une fonction ne correspond qu'un seul tableau de variations. Dans ce sens, un tableau de variations donne des informations partielles mais pas arbitraires.

La séance s'organise autour des deux exercices suivants :

Exercice 1

« Soit une fonction f définie sur l'intervalle [-3; 3] dont on connaît le tableau de valeurs suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2	1	-1	0	0.5	1	2

a) Tracer une courbe compatible avec ce tableau de valeurs.
b) Peut-on en tracer d'autres ? Si oui, utiliser le dos de la feuille pour donner votre réponse. Si non, expliquer ».

Exercice 2

« Soit une fonction f définie sur l'intervalle [-3; 3] dont on connaît le tableau de valeurs suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	2	1	-1	0	0.5	1	2

a. Complétez le tableau de variations ci-dessous pour qu'il soit compatible avec ce tableau de valeurs.

	3	-3	-1	?	2	?
(x)	2	? ↘ ?		?	? ↘ ?	↗

b. Y a-t-il d'autres façons de le compléter ? Si oui, lesquelles ? Si non, expliquez ».

Le scénario proposé est le suivant. Les élèves répondent individuellement à l'exercice 1, puis l'enseignant ramasse leurs réponses. Ils répondent ensuite individuellement à l'exercice 2. Enfin l'enseignant rend les réponses de l'exercice 1, sans ramasser l'exercice 2, en donnant explicitement la possibilité aux élèves de modifier ou de compléter leurs réponses à l'exercice 1, en utilisant une autre couleur et sans effacer leur première réponse. Enfin, une mise en commun des réponses aux diverses questions est organisée par l'enseignant qui, pendant les phases de travail individuel, a distribué des transparents à certains élèves ayant des réponses caractéristiques. Ces élèves recopient sur le même transparent une courbe et un tableau de variation qu'ils ont produits. Cette mise en commun a pour but de mettre en évidence les diverses représentations de la fonction considérée pour permettre aux élèves de voir leurs liens et leurs limites.

5.2 Analyse a priori

5.2.1 Premier temps : exercice 1

C'est une tâche de réinvestissement de ce qui a été initié dans la première expérimentation, à savoir l'idée qu'un tableau de valeurs ne détermine pas une seule courbe. La question de l'unicité est explicitement posée. Nous avons choisi de donner un tableau de valeurs « classique », c'est-à-dire conforme à la pratique habituelle à ce niveau d'enseignement d'après notre analyse des manuels. Nous avons donné un repère orthonormal quadrillé pour la question a) et trois repères (après avoir laissé assez de place pour ceux qui disent « non » et leurs explications) au dos de la feuille pour la question b). Ceci pour faciliter la tâche des élèves et pour laisser assez de temps pour l'exercice 2.

Il est assez facile de tracer une première courbe correcte pour la question 1a) (que nous appellerons la « courbe initiale »). Suite à la première expérimentation, la plupart des élèves devraient être capables de trouver d'autres courbes. Il existe cependant plusieurs stratégies :

Courbes ressemblant à la courbe initiale :

Dans cette stratégie, c'est la courbe initiale qui guide le tracé des autres courbes. On fait un léger changement sur une partie ou sur toute la courbure de la courbe initiale en gardant sa globalité. La stratégie consiste toujours à faire un tracé point par point en reliant les points donnés dans le tableau de valeurs. Les extremums de la courbe initiale sont conservés.

Introduction de nouveaux extremums :

On trace des courbes en changeant « significativement » la courbe initiale, mais seulement entre deux points successifs pour n'introduire qu'un nouveau minimum ou maximum (ceci peut ou non être répété plusieurs fois). Ceci nous montre que ces élèves ont clairement pris conscience qu'entre deux valeurs successives d'abscisses entières du tableau de valeurs, la fonction peut changer du sens de variation.

Courbes « libres » :

On trace des courbes indépendamment de la courbe initiale qui n'a alors plus aucune influence sur le nouveau tracé. Ainsi le tracé de la courbe n'a plus comme seule contrainte que de passer par les points du tableau de valeurs et les extremums se trouvent à peu près n'importe où. Plusieurs extremums peuvent apparaître, les points du tableau de valeurs qui ne sont plus nécessairement considérés comme des extremums.

Courbes ne représentant pas une fonction :

On trace des courbes qui ne correspondent pas à des fonctions : segments verticaux types créneaux, courbes qui reviennent en arrière, qui font des boucles, etc.. Le tracé est ici accompli dans le registre graphique sans référence directe au contexte des fonctions.

Dans le cas où les élèves tracent plusieurs courbes, nous déterminerons s'ils restent dans la même stratégie (par exemple ils tracent toujours des courbes ressemblant à la courbe initiale), ou s'ils en changent et enfin s'ils tracent des courbes qui ne respectent plus la définition d'une fonction.

5.2.2 Deuxième temps : exercice 2

Il met en lien tableau de valeurs et tableau de variations. Cependant la courbe n'est pas loin, puisque nous avons utilisé le même tableau de valeurs que dans l'exercice 1, sauf que les élèves ne l'ont plus sous les yeux. La question de l'unicité est aussi explicitement posée.

Cet exercice est aussi un moyen de tester les capacités des élèves à gérer la signification d'un tableau de variations et les connaissances qu'il véhicule dans une situation un peu inhabituelle. En effet, comme nous l'avons dit plus haut, nos analyses ont montré que la façon de coder un tableau de variations d'une fonction est souvent considérée comme non problématique par les professeurs et les manuels, si bien qu'on ne trouve dans aucun manuel d'explication sur la façon de faire ce tableau. Ainsi, l'élève ne se voit pas souvent renseigné explicitement sur la construction de cet outil et, le plus souvent, le professeur montre par un geste (exemple de tableau de variations tracé au tableau devant les élèves) sans expliquer vraiment les parentés et les différences entre un tableau de variations et les courbes ou les tableaux de valeurs.

Dans le tableau de variations donné, il s'agit d'abord de remplir les valeurs correspondantes de certaines valeurs de x. C'est une première étape simple qui permet de mettre en évidence qu'il y a certains points communs entre tableau de valeurs et tableau de variations. Mais l'essentiel est ailleurs. En effet, nous imposons que la fonction ne soit pas monotone sur l'intervalle [2 ; 3], ce qui n'est pas visible dans le tableau de valeurs donné. Nous voulons ainsi tester la résistance des élèves à l'idée reçue qu'entre deux points d'un tableau de valeurs, la fonction ne change pas de sens de variation. Dans le même ordre d'idée, nous avons laissé un grand point d'interrogation sur les variations de f sur l'intervalle [-1 ; 2], afin de vérifier si les élèves peuvent penser à introduire d'eux-mêmes la non monotonie à un endroit où le tableau de valeurs ne donne pas d'information. Inventer des valeurs qui ne sont pas produites par un calcul, ou imaginer des variations, là où on ne sait rien, peut gêner les élèves.

Face à cette tâche inhabituelle, plusieurs procédures peuvent ainsi être repérées, les principales sont les suivantes :

- On peut compléter le tableau de variations en utilisant uniquement les données du tableau de valeurs. Dans ce cas, on n'introduit aucune valeur entre 2 et 3, voire même, on dit que c'est impossible. Cela revient à considérer implicitement que la fonction est croissante sur [-1 ; 3] ce qui est compatible avec le tableau de valeurs donné, mais ne respecte pas la consigne.
- On peut répondre « *on ne peut pas répondre à cette question, car on ne nous donne que certaines valeurs de x et il y a plusieurs valeurs qu'on ne connaît pas. On ne peut pas deviner le x et son correspondant, etc.* » sans compléter le tableau de variations donné. Ces réponses montrent un certain degré de compréhension, mais reflètent une maîtrise encore insuffisante du tableau de variations pour répondre correctement.
- On peut introduire un point dans l'intervalle [2 ; 3] dont les coordonnées sont les moyennes des coordonnées de (2 ; 1) et de (3 ; 2), ce qui n'est pas conforme avec les variations de la fonction. Cette stratégie, comme les précédentes, fonctionne essentiellement dans le registre numérique, les flèches ont encore un sens obscur.

Par ailleurs, on peut vouloir reporter toutes les valeurs du tableau de valeurs dans le tableau de variations, donc rajouter des valeurs qui n'ont pas de raison d'être dans le tableau de variations. Cette stratégie risque de renforcer l'idée que la fonction ne peut qu'être croissante sur [-1 ; 3], selon les données du tableau de valeurs. Ces réponses indiquent certainement que les élèves ont du mal à abandonner certaines informations lors du passage au tableau de variations, et donc à distinguer la nature et la fonction du tableau de valeurs et du tableau de variations.

Pour répondre à cette question correctement ou non, certains élèves vont certainement passer par une représentation graphique. Cependant nous n'aurons que peu d'indices sur cette procédure sauf si l'élève trace effectivement une courbe ou bien s'il en rend compte dans ses explications.

Les élèves peuvent remplir avec des coordonnées compatibles se trouvant dans l'intervalle [2 ; 3], sans introduire des variations et des valeurs dans l'intervalle [-1 ; 2]. Le choix de la valeur 2,5 entre 2 et 3 sera certainement le plus fréquent. Pour la question b, ils peuvent réagir d'au moins deux façons distinctes : soit ils n'introduisent pas, non plus, des variations et des valeurs dans l'intervalle [-1 ; 2], ils ne changent donc que des valeurs qu'ils ont intercalé dans l'intervalle [2 ; 3]. Soit ils peuvent, pour produire d'autres tableaux de variations, introduire des valeurs dans [-1 ; 2].

Certains peuvent également commencer à introduire des valeurs dans [-1; 2] dès le début (question a).

5.2.3 Troisième temps : retour sur l'exercice 1

C'est un moyen de faire rejaillir la question des variations dans le questionnement entre les objets tableau de valeurs et graphique. En effet, les réponses à l'exercice 2 peuvent permettre d'envisager d'autres courbes compatibles avec le tableau de valeurs. Dans ce sens, bien sûr, le tableau de variations que nous demandons de compléter comporte des informations non compatibles avec l'allure de la courbe « la plus simple » compatible avec le tableau de valeurs commun aux exercices 1 et 2.

Toutefois, ce retour n'est pas évident et ne jouera pas de la même façon selon les réponses données aux deux premiers exercices. La résistance des élèves à revenir sur un travail déjà accompli risque aussi de peser négativement. Toutefois les modifications touchent à l'introduction de nouveaux extremums, en particulier pour des élèves n'ayant pas su répondre à la question 1-b) ou n'ayant utilisé que la stratégie « courbes ressemblant à la courbe initiale ». On peut imaginer que dans certains cas, ce retour joue vraiment le rôle de déclencheur et conduise au tracé de « courbes libres ».

5.3 Analyse a posteriori

Cette séance a été réalisée en classe entière (28 élèves).

5.3.1 Exercice 1

L'hypothèse que nous avions faite, à savoir que les élèves, après avoir placé les points correspondants au tableau de valeurs, tracent une courbe « simple lisse » ou « rectiligne », est vérifiée pour tous les élèves.

Par ailleurs, tous, conformément à ce que nous avions prévu, tracent plusieurs courbes pour cette question. Cependant, peu tracent des courbes en changeant « significativement » la courbe initiale, (stratégie « courbes ressemblant à la courbe initiale » ou au plus « Introduction de nouveaux extremums »). 22 élèves (sur 28) utilisent la même stratégie chaque fois qu'ils tracent une nouvelle courbe. Notons que, la plupart des élèves tracent 3 courbes (exceptionnellement seulement 2) en plus de la courbe initiale. Mais certains tracent aussi plusieurs courbes sur un même repère.

a) *Ceux qui tracent toujours des courbes ressemblant à la courbe initiale :*

10 élèves se trouvent dans cette catégorie. Ils tracent chaque fois des courbes en faisant un léger changement sur une partie ou sur toute la courbure de la courbe initiale en gardant sa globalité. C'est donc la courbe initiale qui guide le tracé de ces courbes et les extremums de la courbe initiale sont conservés. Dans cette catégorie, certains élèves, en faisant des virages un peu plus accentués, à partir de la courbe initiale, tracent des « courbes vagues », selon les termes de notre analyse a priori.

Trois élèves de ce groupe donnent par écrit les explications suivantes :

> « Oui, car il y a une certaine liberté dans ce graphique. Aucune information précise à part les coordonnées des points n'est donnée. Si on devait ne tracer qu'une seule courbe il aurait fallu un tableau de variations. » (*élève redoublant*)
>
> « Oui, on peut en tracer d'autres car il suffit seulement que la courbe passe par les points. »

Ces élèves, même s'ils ont conscience qu'on peut tracer d'autres courbes, et qu'il y a des libertés entre deux valeurs du tableau, n'arrivent pas à sortir de l'influence de la courbe initiale et restent toujours dans la même stratégie. En particulier, toutes leurs courbes correspondent au même tableau de variations et les points fixés par les données de l'énoncé restent les seuls extremums possibles.

b) Ceux qui tracent toujours des courbes « libres » :

6 élèves se trouvent dans cette catégorie. Ils tracent des courbes « libres », se dégageant ainsi de la contrainte implicite de choisir les extremums de la fonction parmi les points donnés dans le tableau de valeurs. Un de ces élèves donne l'explication suivante :

> « Oui, je pense que nous pouvons en tracer d'autres. Mais celle-ci semble la plus logique »

Cette explication nous montre que, bien qu'il soit capable de trouver d'autres courbes, cet élève pense que la courbe la plus « logique » est la plus lisse, la première qu'il a tracée. Ses autres réponses semblent plus obéir à la pression du contrat didactique, dans le sens où la formulation de la question impose d'autres réponses.

Un autre élève indique « Oui, car seuls les points sont donnés », ce qui montre qu'il a certainement compris qu'à un tableau de valeurs peut correspondre plusieurs courbes, et qu'il arrive à tracer des courbes libres, ce qui est confirmé à l'exercice 2.

Enfin, parmi toutes les courbes tracées, notons que quelques-unes peuvent ne plus représenter une fonction, soit parce qu'elles ne respectent pas l'intervalle de définition, soit parce qu'elles « reviennent en arrière », autrement dit ne respectent plus l'unicité de l'image.

c) Ceux qui tracent quasi systématiquement des courbes qui ne représentent pas une fonction

6 élèves se trouvent dans cette catégorie. Ils tracent des courbes qui ne correspondent pas à des fonctions (tracé de segments verticaux comme des créneaux, des courbes qui reviennent en arrière, qui font des boucles, etc). Ces élèves opèrent donc comme pour un dessin, entièrement dégagé des contraintes liées à la représentation d'une fonction.

d) Plusieurs stratégies à l'œuvre :

Seuls 6 élèves utilisent au moins deux stratégies différentes pour tracer trois courbes.

A travers cet exercice, nous avons donc pu constater que les élèves étaient capables de tracer plusieurs courbes à partir d'un tableau de valeurs. Cependant une certaine proportion reste encore dans un mode nomographique et donc ne mobilise pas des connaissances sur les fonctions. Il reste donc à faire un travail plus spécifique qui leur permette de mieux saisir les enjeux de la représentation graphique des fonctions.

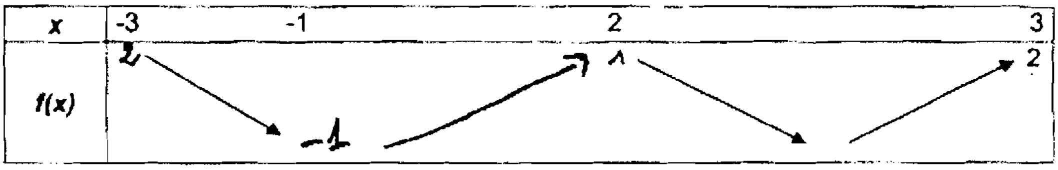
5.3.2 Exercice 2

6 élèves réussissent cet exercice et arrivent à donner une réponse compatible avec le tableau de valeurs. Tous choisissent la valeur « 2.5 » comme abscisse dans l'intervalle [2 ; 3]. 4 d'entre eux n'introduisent pas de nouvelle variation dans l'intervalle [-1 ; 2], ceci reste valable pour leurs réponses à la question b. 2 autres élèves introduisent une nouvelle variation en utilisant, chacun, les points (1,5 ; -3) et (1,5 ; -2) et pour la question b, ils continuent à introduire une nouvelle variation dans l'intervalle [-1 ; 2].

Les autres donnent des réponses partielles ou partiellement correctes dont nous donnons les grandes lignes ci-dessous.

9 élèves complètent le tableau de variations uniquement avec les données du tableau de valeurs.

Leur réponse indique que la fonction est croissante sur l'intervalle [-1 ; 2] (où nous avions mis un grand point d'interrogation). Voici le tableau de variations qu'ils donnent :

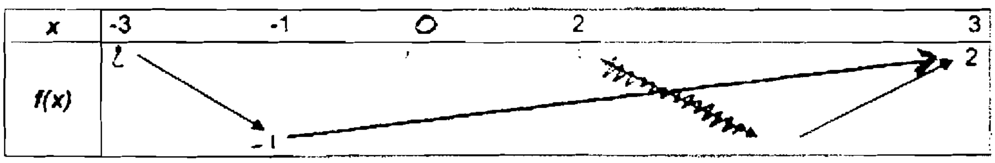


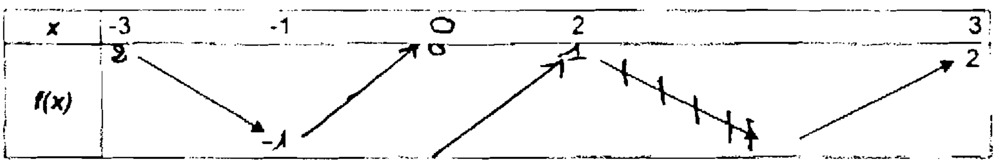
Cependant pour ces 9 élèves il y a trois types de façon de compléter la partie du tableau entre les valeurs 2 et 3 des abscisses.

- 4 élèves n'ont rien précisé pour la partie entre 2 et 3. Plusieurs indices montrent que ces élèves auraient certainement besoin de passer par le tracé d'une courbe avant de donner un tableau de variations (un élève le fait mais trace une courbe « simple lisse »). Or faute de courbes compatibles avec le tableau de variations à compléter, ils ne peuvent répondre à la question et se trouvent incapable de gérer la contradiction.

- 3 élèves concluent que le tableau de variations est faux car la fonction est croissante sur l'intervalle [-1 ; 3] selon les données du tableau de valeurs. Deux de ces élèves vont même jusqu'à barrer la flèche qui montre que la fonction est décroissante sur une partie de l'intervalle [2 ; 3].

7





Leurs explications montrent qu'ils n'arrivent pas à envisager que la fonction puisse ne pas être monotone entre deux valeurs d'abscisses entières et qu'ils ont du mal à abandonner certaines informations lors du passage au tableau de variations : « Je ne comprends pas la présence de la flèche (qui débute à 2) qui signifie que la courbe est décroissante alors qu'elle est croissante », « Je pense que ce tableau de valeurs est faux car entre l'intervalle [-1 ; 3], la ligne monte et reste continue donc pourquoi au point 2, la courbe descend ce qui est faux », ou encore « Le tableau est faux car la courbe de [-1 ; 3] est croissante »

- 2 élèves disent qu'on ne peut pas compléter la partie entre 2 et 3, car on ne connaît pas la fonction en indiquant « On n'a pas les données nécessaires pour compléter » ou bien « On ne peut pas remplir ce vide car on ne connaît ni x ni f(x) ». Ces réponses semblent être une réaction à une tâche hors contrat, puisque, comme nous l'avons vu dans l'analyse des manuels, les valeurs sont calculées à partir d'une formule ou déterminées à partir d'une courbe. Inventer des valeurs qui ne sont pas produites par un calcul peut gêner les élèves qui avouent ainsi ne pas pouvoir répondre.

8 élèves introduisent dans l'intervalle [2 ; 3] le point de coordonnées (2.5 ; 1.5) milieu des points de coordonnées (2 ; 1) et (3 ; 2).

Or, ce point n'est pas conforme avec les variations de la fonction. Il y a certainement là un effet de contrat relevant du numérique : les coordonnées de ce point doivent apparaître comme résultat d'un calcul (moyenne des coordonnées). De plus, comme nous l'avons déjà dit, cette question où il faut « inventer » les coordonnées d'un point est peu habituelle pour les élèves.

Dans leurs réactions à la question b, deux élèves gardent la même idée et ils choisissent des valeurs toujours comprises entre 2 et 3 pour les abscisses et entre 1 et 2 pour les ordonnées. Un autre ne change que les ordonnées et choisit les valeurs « 1.75 » et « 1.90 » et il garde l'abscisse « 2.5 » et les autres parties du premier tableau de variations. Un autre élève change en même temps les abscisses et les ordonnées et il choisit les points (2.1 ; 1.9) et (2.7 ; 1.2) en gardant les autres parties du premier tableau de variations. Enfin, les autres ne répondent pas à la question b.

On peut penser que ces élèves, comme les précédents, travaillent essentiellement dans le registre numérique. Ainsi, ils transforment la tâche « compléter un tableau de variations qui représente une fonction » en celle d'intercaler des nombres dans celui-ci. Le lien avec la fonction et ses variations n'est certainement pas fait.

5 élèves introduisent la valeur « 0,5 » comme ordonnée dans l'intervalle [2 ; 3].
Trois d'entre eux ne précisent pas la valeur de l'abscisse correspondante dans cet intervalle et les deux autres mettent « 2,5 » comme abscisse.

Au total, 22 élèves sur 28 n'arrivent pas à donner un tableau de variations compatible avec le tableau de valeurs donné. Ceci montre, qu'en tout début d'apprentissage, le tableau de variations reste un objet problématique que les élèves ont du mal à manier, notamment dans ses rapports avec le tableau de valeurs. Si certains de leurs blocages étaient déjà visibles ou prévisibles à la question 1, certains élèves montrent des difficultés bien spécifiques aux tableaux de variations alors qu'ils avaient été capables de gérer plutôt bien le rapport entre tableau de valeurs et courbe à la question 1.

5.3.3 Troisième étape: Retour en arrière

Comme nous l'avons vu, tous les élèves ont tracé plusieurs courbes en réponse à l'exercice 1, alors qu'ils ont majoritairement rencontré des difficultés dans l'exercice 2. Ainsi le retour en arrière prévu n'a pas pu jouer son rôle.

Seuls, 3 élèves ont fait une modification dans leur réponse pour l'exercice 1. Ces trois élèves, qui avaient correctement répondu à la question 2 (et représentent la moitié de ceux-ci), modifient seulement la première courbe qu'ils avaient donnée de façon à la rendre compatible avec le premier tableau de variations qu'ils viennent de compléter. Ceci renforce l'impression que les élèves, même s'ils donnent plusieurs réponses aux questions 1b et 2b, par conformité à la consigne, ont tendance à penser qu'il existe UNE bonne réponse.

Nous avons expérimenté à nouveau cette activité dans une autre classe quelques semaines plus tard. Dans cette classe, le chapitre « fonction » avait été entièrement étudié avant notre expérimentation (y compris le chapitre sur les fonctions de référence), contrairement à la classe précédente qui en était au contraire au début de l'enseignement des fonctions. Cette différence est bien entendu de nature à modifier les résultats. Pourtant, le tableau de variations en lui-même et son lien avec les autres représentations posent encore beaucoup de difficultés, puisque seulement la moitié de la classe donne une réponse correcte pour l'exercice 2. Il semble donc que, même si pour la plupart des enseignants le tableau de variations est un objet qui peut sembler parfaitement transparent, pour les élèves, de réelles difficultés subsistent même en fin de seconde.

Conclusion

Nos deux expérimentations montrent bien les limites et les dangers d'un travail qui ne porterait que sur les ostensifs liés aux fonctions. Les cadres numériques (tableaux de valeurs) et graphiques (courbes) sont peut-être plus intuitifs, mais ils véhiculent aussi de nombreuses conceptions et pratiques des élèves qui peuvent faire écran à la spécificité de la représentation d'une fonction. En référence aux travaux de Duval, il semble bien qu'un travail sur le traitement et les conversions portant sur ces registres ne suffise pas à lui seul à l'apprentissage de la notion de fonction. En effet, pour que courbes et tableaux de valeurs jouent effectivement le rôle de représentations sémiotiques de l'objet fonction de façon adéquate, il est nécessaire que leur place dans leur registre respectif soit mieux identifiée, par rapport à la spécificité qu'ils ont quand ils représentent des fonctions. Ainsi, doit-on prendre garde à l'attraction que ces deux modes de représentation peuvent avoir pour illustrer à eux seuls les notions liées aux fonctions dans le cadre du programme de seconde.

Néanmoins, nos expérimentations montrent, au-delà de ces insuffisances, qu'il y a lieu de mettre en place des situations permettant d'initier un questionnement des élèves sur les limites de la représentation d'une fonction par certains ostensifs. En effet, travailler sur la question de la non-univocité des correspondances entre les différents ostensifs est un point important en début d'apprentissage sur les fonctions. De plus, nos expérimentations ont pu montrer que le tableau de variations est un outil plus problématique qu'il n'en a l'air et sur lequel il y aurait intérêt à faire travailler les élèves. Enfin nous soulignons l'importance, dans ces types de situations, des différentes phases de travail (individuel, de groupe, collectif) et notamment du rôle du professeur pendant les phases collectives. Celui-ci, en organisant la discussion entre les élèves sur la validité et la multiplicité (éventuelle) des réponses produites, doit favoriser les mises en lien entre les divers ostensifs liés à une fonction et montrer leurs caractéristiques et leurs insuffisances dans les renseignements donnés sur la fonction.

Bibliographie

BLOCH, I. (2002) Un milieu graphique pour l'apprentissage de la notion de fonction au lycée, *Petit x*, **n° 58**, 25-46.

CHAUVAT, G. (1999) Courbes et fonction au collège. *Petit x*, **n° 51**, 23-44.

COMIN, E. (2005). Variables et fonctions, du collège au lycée : méprise didactique ou quiproquo interinstitutionnel, *Petit x*, **n° 67**, 33- 61.

COPPÉ, S. ; DORIER, J-L. et YAVUZ, I. (à paraître), Effets d'un changement de programme sur la prise en compte de nouveaux objets dans l'enseignement de la notion de fonction. Cas des tableaux de valeurs et de variations, *Recherches en Didactique des Mathématiques.*

DUVAL, R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de didactique et de Science Cognitives* **5**, 37-65, IREM de Strasbourg.

FALCADE, R. (2002). L'environnement CABRI-géomètre outil de médiation sémiotique pour la notion de graphe d'une fonction, *Petit x*, **n° 58**, 47-81.

HAUCHARD, C. et SCHNEIDER, M. (1996) Une approche heuristique de l'analyse, *Repères IREM,* **25**, 35-62.

LE VAN Tién (2001) *Etude didactique de liens entre fonctions et équations dans l'enseignement des mathématiques au lycée en France et au Viêt-nam*, Thèse de doctorat de l'Université J. Fourier et de l'Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville, équipe DDM, Laboratoire Leibniz, Grenoble.

LACASTA, E. (1995) *Les graphiques cartésiens de fonctions dans l'enseignement des mathématiques : illusions et contrôles,* Thèse de doctorat, Université Bordeaux I.

RENÉ DE COTRET, S. (1985) *Etude historique de la notion de fonction : analyse épistémologique et expérimentation didactique*, Thèse de doctorat de l'Université du Québec à Montréal.

SCHNEIDER, M. (1990) Aux confins de l'analyse et de la géométrie : un obstacle épistémologique, *Actes de la quatrième Université d'Eté d'Histoire des Mathématiques, IREM de Lille*

SIERPINSKA, A. (1992) On understanding the notion of function, in *The concept of function : Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes n°25, Mathematical Association of America, pp. 25-58.

YAVUZ, I. (2005) *Evolutions récentes de l'enseignement de la notion de fonction en France en classe de seconde Utilisation des tableaux de valeurs et de variations,* Thèse de doctorat, Université Lumière Lyon 2.