OÙ PLACER LE TRÉSOR ?

Magali CARCEL
Professeure des écoles – 26 Epinouze
Marlène SERME
Professeure des écoles – 26 Mercurol

Introduction*

En mathématiques, la résolution de problèmes est aujourd'hui considérée comme centrale dans les apprentissages ; elle a pour but principal de faire construire et approprier des connaissances nouvelles par les élèves comme des outils[1] de solution. Dans l'activité de résolution de problèmes, les connaissances nouvelles ne sont pas les seules engagées par les élèves car, de façon plus ou moins spontanée, ils mobilisent leurs connaissances anciennes. Celles-ci se sont constituées à partir de situations scolaires, mais aussi à partir de situations qui ne sont pas des situations d'enseignement et où ils ont eu l'occasion de développer ces connaissances à travers les schèmes mis en place.

Dans sa théorie des champs conceptuels, Gérard VERGNAUD (1990) décrit la composition des schèmes[2] et en arrive à des caractéristiques essentielles, les invariants opératoires (« concept-en-acte » et « théorème-en-acte »). Pour lui, un concept-en-acte est « *un concept (objet ou prédicat) implicitement tenu pour pertinent* » et un théorème-en-acte est « *une proposition [implicitement] tenue pour vraie* » ou encore un ensemble de « *relations saisies et utilisées par le sujet en situation de résolution de problèmes, étant entendu que cela ne signifie pas pour autant qu'il est capable de les expliciter ou de les justifier.* » (VERGNAUD, 1981, p. 220).
À titre d'exemple, VERGNAUD présente la série de calculs faite par un élève pour résoudre un problème et ajoute : *« En procédant ainsi, les élèves appliquent le théorème :*

$$f(\lambda x+\lambda' x)= \lambda f(x)+\lambda' f(x)$$

* La matière de cet article est issue du mémoire professionnel que nous avons réalisé lors de notre année de stage à l'IUFM de Valence comme professeures des écoles (PE2). Nous remercions tout particulièrement Henri-Claude ARGAUD qui nous a soutenues et conseillées tout au long de notre recherche, ainsi que Annabelle TALLARON-ROUX qui nous a permis de mener cette séquence dans sa classe.

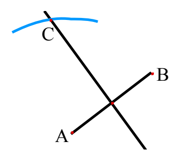
N.D.L.R : Ce travail s'inscrit dans les perspectives dessinées dans le travail de thèse de Henri-Claude ARGAUD (1998).

[1] Régine DOUADY appelle « connaissance outil », une connaissance utile pour résoudre un problème (DOUADY, 1986).

[2] VERGNAUD appelle « schème » « *l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations donnée* » et il ajoute : « *c'est dans les schèmes qu'il faut rechercher les connaissances-en-acte du sujet, c'est-à-dire les éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire*. » (VERGNAUD, 1990, p. 136)

C'est un « théorème en acte », car il est rarement explicité, et c'est aussi une production inventive des élèves car un tel théorème ne leur a jamais été enseigné. » (ibid., p. 221).
Ainsi, il apparaît que l'acception **théorème-en-acte** est composée, d'une part, de « théorème », en principe une proposition vraie de la théorie mathématique, d'autre part, de « en acte », c'est-à-dire d'une traduction de ce théorème en actions, en référence aux schèmes que le sujet « développe » dans la résolution. Les concepts-en-acte « qui constituent des briques indispensables à la construction des propositions » peuvent être éventuellement erronés. Les théorèmes-en-acte peuvent être vrais ou faux.
Dans les articles cités, VERGNAUD illustre son propos par des exemples d'invariants opératoires essentiellement pris dans le domaine numérique. Or, il s'avère que les élèves en mettent de nombreux en œuvre dans leurs activités géométriques ; il est vraisemblable qu'ils sont induits par la fréquentation et l'observation de configurations spatiales particulières de l'espace matériel au hasard des situations rencontrées à l'école et hors de l'école.

Voici un exemple de théorème-en-acte en géométrie.
Des élèves de CM1 doivent reproduire une face de polyèdre qui a la forme d'un triangle isocèle. Les contraintes rendent la reproduction par simple tracé du contour impossible. Disposant comme habituellement d'une boîte à outil contenant règles, équerres, compas, ficelles, papier-calque, ils procèdent ainsi :

– reproduction de la base, le segment [AB] , et repérage du milieu, – tracé de la droite perpendiculaire à (AB) et passant par ce milieu, – repérage du point C sur cette droite, à une distance de A égale à celle du côté AC du triangle (au compas), – contrôle des longueurs des côtés du triangle obtenu.	

Nous avons été surprises de voir les élèves de CM1 effectuer une telle construction. Une première question est alors venue : comment la connaissance associée s'est-elle constituée ? Comme il s'avérait que cette connaissance n'avait fait l'objet d'aucun enseignement antérieur dans l'école, nous pouvions seulement répondre : les élèves étaient capables, dans la résolution du problème, de mobiliser une connaissance implicite, de développer un théorème-en-acte que nous référons au théorème mathématique suivant :

> **Tout point de la droite perpendiculaire à un segment en son milieu est équidistant des extrémités de ce segment.**

Remarquons que cette connaissance n'est qu'une partie d'un théorème plus général qui établit un lien d'équivalence entre deux relations : une relation d'égalité (de longueurs ou de distances) et, soit une relation d'incidence (l'appartenance d'un point à une droite particulière, la médiatrice), soit la perpendicularité ((MI) perpendiculaire à (AB), I étant le milieu de [AB]) :

> **Soient A, B et C trois points du plan :**
> **CA = CB** si et seulement si **C appartient à la médiatrice de [AB].**
> ***proposition (1)*** ***proposition (2)***

Dans la suite, nous appellerons ce théorème : **théorème de la médiatrice**.

Cette connaissance s'est-elle constituée à partir de l'observation par l'élève d'objets de l'espace environnant dont beaucoup présentent des axes de symétrie dans leurs éléments plans : bâtiments, logos... ? Ou bien, plutôt, a-t-elle été déterminée par un travail antérieur dont nous n'avons pas connaissance ?

Nous avons pensé que ce théorème-en-acte pouvait exister chez un assez grand nombre d'élèves. Du fait que son référent théorique est un théorème vrai, une seconde question s'est alors posée : est-il possible de commencer l'apprentissage de la propriété caractéristique de la médiatrice à l'école élémentaire ?

Ces questions nous ont amenées **à élaborer une situation visant à « développer » le théorème-en-acte vrai** (supposé présent chez la plupart des élèves de CM) en tant qu'outil de résolution d'un problème, et à faire évoluer les « formes d'expression »[3] selon lesquelles les élèves pourraient le mobiliser.
Cette situation a donné lieu à une séquence des six séances conduite dans une classe composée de 11 élèves de CM 1 et de 11 élèves de CM 2.

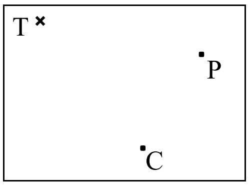
Nous allons d'abord présenter la situation, en nous attachant à décrire les éléments qui peuvent avoir une influence sur le développement du théorème : le choix, d'abord, d'un contexte de jeu, avec les conditions de mise en place de la règle du jeu, puis celui de plusieurs problèmes autour desquels s'articule la séquence[4].
Après cette analyse a priori, nous donnerons une description détaillée de l'organisation des séances avec leur déroulement effectif. Enfin, l'analyse des comportements des élèves et de leur évolution permettra de rendre compte des apprentissages réalisés.

La situation et son appropriation par les élèves

Un choix général

La situation a été construite autour du problème général suivant :

Produire[5] un point T à égale distance de deux points P et C donnés



Le théorème de la médiatrice devant avoir le caractère outil pour le problème, la proposition (1) – à savoir TC = TP – doit être réalisée au moyen de la proposition (2). Les contraintes doivent donc être telles que les élèves ne puissent obtenir le point T directement à l'aide des distances TP et TC, via la réalisation de la condition TP = TC = d.
La résolution du problème sous ces contraintes – produire T – pose des difficultés notables, en particulier :

- l'existence de plusieurs relations en jeu non indépendantes que les élèves devront articuler à travers le développement du théorème-en-acte (TP = TC pour le point T cherché, IP = IC pour le milieu de [PC], (IT) perpendiculaire à (PC)) ;
- l'existence de plusieurs points solutions, contraire à la règle du contrat didactique usuel selon laquelle un problème n'admet le plus souvent qu'une solution.

La situation a été contextualisée pour deux raisons essentielles : faciliter l'appropriation du

[3] Nous préciserons plus loin ce que nous entendons par le terme générique « forme d'expression ».

[4] Pour élaborer cette situation, nous avons pris appui sur des éléments de la théorie des situations (pour une présentation, voir MARGOLINAS, 1993).

[5] « Produire » pouvant être pris dans plusieurs sens : tracer (ou dessiner) soi-même, faire tracer par un autre…

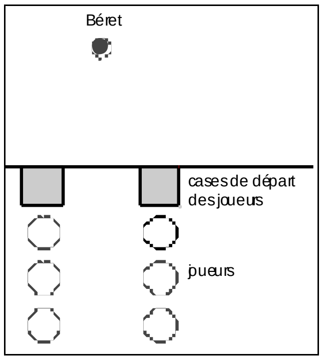
problème et disposer d'un moyen de faire accéder les élèves aux relations en jeu dans le théorème en acte sans avoir à les expliciter. Le contexte cherché devait ainsi « porter » en lui-même la relation à produire (TC = TP), c'est-à-dire que les faits du contexte devaient faire apparaître comme allant de soi la relation d'égalité de distances TC = TP.

De la complexité du réel pour le choix d'un contexte

Le choix d'un contexte adapté au problème n'a pas été facile. Il devait bien évidemment permettre de confronter les élèves à une configuration spatiale correspondant à celle du théorème que l'on voulait faire mobiliser. Mais cette seule condition ne suffisait pas ; il existe en effet des caractéristiques propres au contexte qui peuvent entrer en compte et le rendre inapproprié aux objectifs poursuivis. Expliquons pourquoi.

Dans un premier temps, en référence à l'article « *Le jeu du béret* »[6], le choix a été fait de choisir le contexte de ce jeu (l'égalité des distances du béret à l'équipe 1 et à l'équipe 2 devant aller de soi pour que le jeu soit équitable) et de mettre en place une variante dans laquelle on pouvait retrouver la configuration spatiale recherchée. Contrairement aux activités proposées dans l'article cité, où les problèmes reposant sur le jeu sont posés à partir de dessins, le choix a été fait de jouer effectivement lors de la séance initiale car une situation de jeu vécue devait améliorer la prise de sens. Le déroulement a été le suivant :

- le béret (un seul pour les deux équipes) n'est pas situé sur la ligne de départ des deux équipes, mais placé de la façon suivante :



- les joueurs passent dans un ordre défini au préalable, depuis un point de départ fixe (case de départ),
- à chaque coup, après le signal du départ, il s'agit, pour chaque joueur, de rapporter le béret dans sa case sans être touché par l'adversaire.

Ce choix semblait pertinent puisque les conditions de mise en place du jeu font intervenir les relations mises en jeu dans le théorème (égalité des distances du béret aux joueurs et appartenance à la médiatrice du segment formé par les points représentant le départ des équipes).
Une séance d'EPS a donc été consacrée à ce jeu, avec un objectif à caractère mathématique implicite : « Faire apparaître que le jeu est **équitable** s'il y a **égalité des distances** et que dans le cas contraire, il ne l'est pas ».
Pour cela, lors de certaines parties, le béret a été placé, de façon nettement perceptible, plus près d'une équipe que de l'autre, avec le souhait que les élèves réagissent à propos de l'équité du jeu.

[6] *Activités géométriques en 6° et 5°*, IREM-CRDP de Grenoble, 1987, p. 215

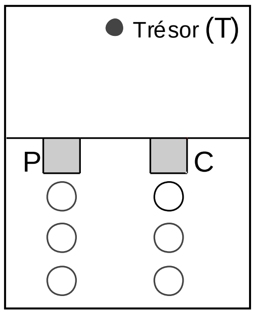
Or, il s'est avéré que l'équipe ainsi favorisée n'était pas nécessairement la gagnante. En effet, la règle du jeu permet de développer des stratégies compensant l'inégalité des distances, ce qui n'a pas manqué[7]. Les élèves n'ont donc jamais contesté l'emplacement du béret.

Le lien entre « jeu équitable » et « conditions de jeu » ne pouvant être établi par ce jeu effectif, il a fallu changer le contexte en inventant un nouveau jeu, éliminant ces interactions entre joueurs.

L'entrée dans le contexte du « jeu de l'île au trésor »

De nouveau, toujours dans le but d'aider les élèves à s'approprier le problème et, en particulier, de leur permettre de prendre conscience de la nécessité de satisfaire l'égalité des distances relatives aux points de départ des deux équipes pour que la partie soit équitable, deux équipes ont été constituées (des Pirates et des Corsaires) et se sont affrontées lors d'une séance d'EPS.

Deux équipes (les Pirates et les Corsaires) s'affrontent en relais, pour rapporter, le plus vite possible, les lingots (un pour chaque élève) d'un trésor situé comme suit :



L'équipe la plus rapide est déclarée gagnante.

Cette fois, les élèves ont réagi rapidement lorsque le trésor n'était pas placé à même distance des points de départ deux équipes. Les propos des élèves (« *C'est pas juste ! C'est plus près des Pirates !* ») ont été appuyés et reformulés à plusieurs reprises par l'enseignante (« *Oui, ce n'est pas juste, ce n'est pas équitable* »). Le mot **équitable** a ainsi été introduit et de plus :

- l'expression « jeu équitable » était claire pour tous les élèves, et associée à l'égalité des distances PT et CT (« *Si le trésor est au milieu des deux équipes, le jeu est équitable* »),
- l'expression « jeu non équitable » était, elle, associée à « *plus près d'une équipe que de l'autre* ».

Autrement dit, les élèves se sont approprié la condition d'équité du jeu et ont compris que toutes les positions du trésor ne sont pas équivalentes quant à l'équité. Le jeu a permis de ne pas formuler la relation à produire en tant que telle.

La situation mathématique mise en place par la suite prend appui sur ce jeu et sa règle.

---

[7] Si le joueur le plus près du béret était effectivement bien le premier à l'attraper, le second joueur n'en était pas pour autant lésé ; sa tâche pour gagner se trouvait simplement modifiée : il pouvait alors couper la « trajectoire-retour » de l'autre joueur, afin de le toucher. Le plus souvent, la victoire revenait à ce second joueur.

Problèmes et variables de la situation : analyse a priori

Nous avons inventé une situation générale, **« la situation de l'île au trésor »,** *où des Pirates (P) et des Corsaires (C) imaginaires ont découvert un trésor (T) sur une île. Plutôt que de se battre, ils décident de jouer : l'équipe gagnante remportera le trésor. Malheureusement, ils ne parviennent pas à se mettre d'accord sur l'emplacement du trésor pour la partie. Ils demandent donc aux élèves de les aider.*
Nous avons spécifié ces demandes par trois problèmes distincts :

	Problèmes
1	*Les emplacements des deux équipes étant donnés, déterminer une position équitable pour le trésor.*
2	*Les emplacements des deux équipes étant donnés, et des positions pour le trésor étant proposées, ces positions sont-elles équitables ?*
3	*Décider s'il existe une seule position pour le trésor, ou plusieurs.*

Examinons ici quelques éléments théoriques permettant de décrire les caractéristiques de cette situation et les choix faits : les problèmes mathématiques, les procédures de résolution, les variables didactiques.

Les problèmes mathématiques

La situation du jeu de l'île au trésor se formalise donc ainsi :
- trois variables-points : T, P et C
- une relation : « T est à la même distance de P et de C » et sa complémentaire : « la distance de P à T est différente de la distance de C à T ».

Les problèmes proposés relèvent de deux types :

- ***type 1 : problème de production***
  - produire un point
    Problème P1 *: les points P et C étant donnés, produire un point T vérifiant la relation, dans une zone donnée.*
  - produire la valeur de vérité d'une relation
    Problème P2 : *les points P et C étant donnés ainsi qu'un ensemble de points, quels sont les points pour lesquels la relation est vraie et ceux pour lesquels elle ne l'est pas ?*

- ***type 2 : problème de jugement***
  - ***Problème P3*** *: On considère deux assertions :*
    - *Il existe un unique point T, tel que PT = CT*
    - *Il existe « beaucoup » de points T tels que PT = CT*

    Choisir l'assertion vraie.
    Il s'agit donc de décider du vrai entre deux énoncés a priori contradictoires.

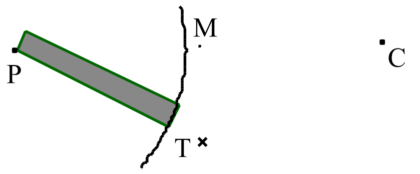
Les principales variables didactiques

Nous avons cherché à faire évoluer les procédures vers la mobilisation du théorème en tant qu'outil de résolution, ainsi que les « formes d'expression », en modifiant les valeurs des deux principales variables didactiques.

Variable 1 : le rapport entre les distances PT et CT et la longueur des outils disponibles pour l'évaluation des distances

– Soit les distances PT et CT sont inférieures à la longueur des différents outils ; dans ce cas, les procédures s'appuyant sur les côtés PT et CT sont réalisables : le passage par la médiatrice n'est pas particulièrement favorisé.

– Soit, au contraire, elles lui sont supérieures ; les conditions sont alors plus favorables au développement du théorème-en-acte.



M est le milieu de [PC]

Autrement dit, cette première variable serait donc telle que, suivant ses valeurs, il pourrait y avoir ou non, mobilisation du théorème en acte.

Plutôt que de changer le contenu de la boîte à outils dont les élèves disposent, et ainsi risquer un « effet de contrat », nous avons préféré jouer sur les distances PT et CT, afin de modifier le rapport entre ces distances et la longueur des outils (séances 3 et 4).

Variable 2 : le domaine des objets

Cette variable peut prendre différentes valeurs. Les objets sur lesquels travaillent les élèves au cours de notre séquence relèvent :
– du domaine spatial : le méso-espace ou le micro-espace
– du domaine « théorique ».

Nous avons fait évoluer les valeurs de cette variable, conjointement aux types de problèmes, de la manière suivante :
– dans un premier temps, les élèves ont à résoudre des problèmes de production dans le domaine spatial, dans le méso-espace (problème 2 dans les séances 1 et 2), puis dans le micro-espace (problème 1 en séance 3, problème 2 en séance 4 , à nouveau problème 2 en séance 5) ;
– dans un second temps, ils sont confrontés au problème 3 de jugement, dans le domaine théorique (séance 6).

Ainsi, le changement de valeur de cette variable (passage à des objets théoriques), joint à un changement de type de problème (passage à un problème de jugement), crée une rupture. Ceci devrait amener les élèves à mobiliser le théorème en tant qu'argument, compte tenu du fait que la situation devient « théorique ». En effet, ils n'ont alors ni à produire un dessin, ni à contrôler des relations spatiales ; ils doivent expliciter des relations « théoriques » et les justifier en utilisant des formes du théorème comme arguments et en s'appuyant sur des dessins, des schémas à main levée, fondés sur la situation de référence qui est spatiale.

Les productions attendues

Les procédures de résolution

Problème P1

P1.1 : **Essais** : choix de la position d'un point (par la perception visuelle notamment) suivi du contrôle de distances et choix éventuel de nouvelle position (pas de développement du théorème).

P1.2 : **Tracé d'arcs de cercle** (au compas ou avec des fils suivant les contraintes de la situation) de même rayon et de centres P et C avec placement du point à l'intersection.

P1.3 : **Développement du théorème-en-acte** : production d'un point comme appartenant à la perpendiculaire à [PC] passant par son milieu.

Problème P2

P2.1 : **Comparaison** directe ou mesure des distances PT et CT.

P2.2 : **Développement du théorème** : tracé de la médiatrice et vérification de l'appartenance ou non du point à celle-ci.

Problème P3

Le problème de jugement P3 est comme P2 un problème de recherche de valeur de vérité mais il s'en distingue parce qu'il faut décider de la valeur de vérité de propositions utilisant notamment le théorème-en-acte en question.

Les outils de l'expression

Pour justifier leurs productions, aussi bien lors de phases de recherche sur leur feuille-réponse que lors de phases de bilan, les élèves peuvent utiliser divers « outils d'expression » pouvant aller du geste au langage géométrique.

Gestes

– désignant les côtés du triangle et évoquant les distances PT et CT,
– désignant une droite et traduisant sa perpendicularité au segment [PC],
– désignant le milieu du segment [PC] et les distances le séparant de P et de C.

Langage usuel et contextualisé

- pour désigner les points : *le trésor, les Pirates, les Corsaires*
- pour désigner la médiatrice : *trait, ligne*
- pour désigner le milieu : *milieu, centre, trop près/loin de telle équipe, …*
- pour désigner la perpendicularité : *droit, vertical, penché…*
- pour formuler le théorème : *Si le trésor est sur cette ligne droite, bien au milieu, la partie sera équitable. Sinon, ce n'est pas équitable.*

Langage géométrique, relativement décontextualisé

- pour désigner la médiatrice *: La droite passant par le milieu et perpendiculaire,*
- pour formuler le théorème *: Tous les points de cette droite sont à la même distance des deux équipes.*

Figuration matérielle d'éléments géométriques participant tant au développement du procédé de résolution qu'à l'expression de la réponse

- des éléments matériels (fil tendu, …),
- des traces au sol dans le méso-espace et des dessins (résultat d'une construction) dans le micro-espace lors des problèmes de production,
- des croquis ou des schémas (à main levée) lors des problèmes théoriques, en tant qu'argument.

Les activités mathématiques

Pour la durée de la séquence, les élèves sont par groupes hétérogènes de trois. Sauf pour la séance 6, ils ont à disposition leur boîte à outils dont le contenu est le suivant : compas, rapporteur, bandelette de papier, double-décimètre, équerre, ficelle de 10 cm, cordelette de 10 m. Cette cordelette est retirée dès la séance 3. Les plans éventuellement donnés seront présentés au fur et à mesure dans les activités.

Séance 1

Objectif – établir des critères de validité (perception visuelle, mesurage, appartenance à la médiatrice etc.) pour un point-trésor donné, dans le méso-espace.
Matériel – des plots numérotés matérialisant les points-trésors situés à moins de 10 m des points de départ des équipes, aucun n'étant situé de manière équitable, – des croix, tracées au sol, symbolisant les emplacements de départ des équipes, – une boîte à outils contenant, entre autres, une cordelette de 10 m, – une feuille de route : un tableau dans lequel les groupes notent, pour chaque plot, s'il est équitable ou non, en expliquant pourquoi.
Problème Problème 2

Cette séance a lieu dans la cour de l'école. Cependant, les élèves sont d'abord réunis dans la classe, où la consigne leur est communiquée par le biais d'un message des Pirates et des Corsaires :

> *Nous avons trouvé un trésor ; pour savoir à qui il va revenir, nous avons décidé de jouer au jeu de l'île au trésor. L'équipe gagnante le remportera.*
>
> *Malheureusement, nous n'arrivons pas à nous mettre d'accord sur l'emplacement du trésor, pour que le jeu soit équitable. Nous vous proposons plusieurs positions. Pouvez-vous nous aider en nous disant lesquelles sont équitables ?*
>
> *Merci pour votre aide.*
>
> *Le Capitaine Crochet*

Les élèves se rendent alors dans la cour, groupe après groupe, avec leur feuille de route et leur boîte à outils. L'enseignante leur donne alors les informations concernant le remplissage de la feuille et leur présente le dispositif (plots, croix).
Lors de la phase de recherche, certains groupes **comparent les deux côtés du triangle**, soit en comptant le nombre de pas, soit à l'aide de la cordelette.
D'autres mettent en œuvre des **connaissances relevant du théorème de la médiatrice**, soit sans effectuer de vérification, soit en vérifiant par le recours au mesurage des côtés du triangle :

– groupes 1 et 6 :
  Dans ces groupes, un élève se place sur l'emplacement du trésor à valider. Il visualise mentalement la médiatrice, délimitant ainsi deux zones de chaque côté de celle-ci. Ensuite, il détermine, à l'œil, la zone dans laquelle se situe le trésor.
– groupe 2 :
  Un élève se place près du trésor à valider. Il se déplace jusqu'au segment [PC] selon une direction revenant à projeter le point-trésor sur [PC], et trace le point projeté. Il

mesure, à l'aide de pas, les distances séparant ce point de P et de C ; il les compare et conclut.

– groupe 4 :
Ils vérifient le point 2, qui leur paraît équitable, par comparaison des longueurs PT et CT, à l'aide de la cordelette. Puis ils valident ou invalident les autres points de manière perceptive, selon qu'ils sont alignés ou non avec ce premier point et le milieu du segment [PC].

Le bilan collectif se fait en deux temps. Un premier, en classe, où sont comparés les résultats des groupes. Un second, sur le terrain, pour valider à l'aide d'un décamètre les différentes positions. Cette validation par mesurage met en évidence un **manque de précision des procédures** mettant en œuvre des connaissances relatives au théorème. Nous verrons qu'ainsi ces procédures pourront être remises en cause par la suite …

Séance 2

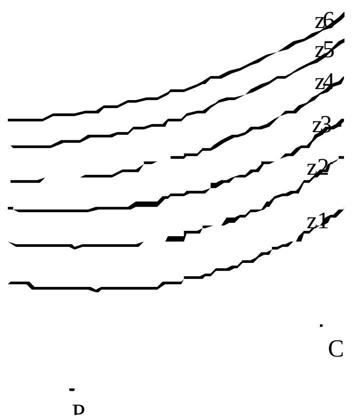
Objectifs

- construire dans le méso-espace un point à même distance de deux autres,
- constater l'existence et l'alignement de plusieurs points-solutions dans différentes zones.

Matériel

- des croix tracées au sol pour l'emplacement des joueurs,
- des zones tracées au sol (en sorte que tout point de la médiatrice de [PC] dans ces zones soit à moins de 10 m des départs des équipes),
- une bâche,
- des plots,
- la boîte à outils comprenant toujours la cordelette de 10 m.

Sur le terrain le dispositif est le suivant :



Problème

Problème 2

Tout comme dans la séance 1, la classe reçoit un message du Capitaine Crochet :

Nous vous remercions pour l'aide que vous nous avez apportée. Comme vous avez pu le constater, aucune position ne permettait de jouer. Nous avons de nouveau besoin de vous pour nous indiquer une position équitable.
Encore merci.

Le Capitaine Crochet

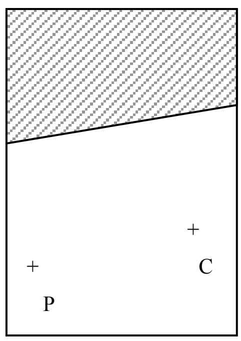
Chaque groupe doit donc construire un point qu'il trace sur le sol, de manière à ce que le jeu soit équitable, dans une zone définie. Au fur et à mesure du passage des groupes, leur zone est recouverte d'une bâche.
Les zones étant accessibles depuis P et C par la cordelette, la procédure de production d'un point comme intersection d'arcs de cercles semble la plus adaptée**.**
Seul **un groupe la met en place**. Les autres procèdent de la manière suivante : soit par **détermination perceptive d'une position approximative**, qu'ils réajustent en fonction du mesurage des distances à P et à C, soit par **projection orthogonale** pour vérifier un point placé par essai (mobilisation du théorème) :

– groupe 4 :
  Les élèves repèrent le milieu du segment [PC] en comptant les pas entre P et C. Ils tendent la cordelette entre ce point et la zone, et forment un angle droit à l'aide de l'équerre (matérialisation de la médiatrice par la cordelette).
➢ groupe 6 :
  Ils positionnent un point de manière approximative et le vérifient par projection sur le segment [PC]. Ils ajustent leur point si le projeté n'est pas au milieu du segment.
  Notons qu'un groupe a utilisé les extrémités de la frontière de la zone comme référence[8], et en a cherché le milieu.

Lors du bilan collectif, la bâche est retirée et des plots sont disposés sur les emplacements déterminés par les groupes. Les points sont alors validés, un par un, par mesurage à l'aide du décamètre. **Peu de points se révèlent alors équitables**. Les enfants n'ayant **aucun moyen de discuter les procédures, et pouvant discuter seulement le résultat,** les procédures des groupes 4 et 6 sont alors implicitement discréditées.

Séance 3

La majorité des points construits dans la séance précédente étant mal placés, l'alignement n'a pas pu être mis en évidence. C'est pourquoi, nous avons repris la question sous la forme du problème 1, en représentant la configuration du terrain de la séance 2, avec une seule zone, identique pour tous les groupes.

Objectifs - construire dans le micro-espace un point à même distance de deux autres, - constater l'existence et l'alignement de plusieurs points-solutions dans une même zone.
Matériel - une boîte à outils sans cordelette par groupe, – un rétroprojecteur. – un transparent A4 par groupe 
Problème : *Problème 1*

[8] Dans le dispositif proposé aux élèves, la distance entre ces extrémités correspondait à la distance PC ; cela a sans doute induit leur procédure et aurait pu être évité.

Une affiche au tableau relate une nouvelle anecdote des Pirates et des Corsaires :
En nous rendant à votre école afin de nous partager le trésor, notre navire a été attaqué, et nous avons échoué sur une île… !!! En voici le plan avec nos positions.
Merci de nous indiquer où placer le trésor dans la forêt.
En espérant que cette fois sera la bonne,

Le Capitaine Crochet

Chaque groupe doit indiquer sur son transparent où placer le trésor dans la zone, pour que le jeu soit équitable. La zone est disposée de manière à être accessible par les outils, notamment par la règle, ce qui ne nécessite pas la mobilisation du théorème.

Au cours de cette séance, la plupart des groupes **mobilisent le théorème** ; certains tracent même la médiatrice :

– groupe 2 :
  Il trace le segment [PC], repère son milieu et trace la perpendiculaire à [PC] passant par le milieu, à l'aide de l'équerre. Il choisit un point sur cette droite et vérifie ensuite qu'il est équidistant de P et de C.

– groupe 3 :
  Il trace successivement les perpendiculaires à [PC] en P, en C et en son milieu, puis choisit un point de cette troisième perpendiculaire et « constate » par la mesure que ce point est équidistant de P et de C.

– groupe 6 :
  Il mesure le demi-segment [PC]. Puis il positionne la règle en P, perpendiculairement à [PC], et fait coulisser l'équerre le long de la règle, jusqu'à la zone. Il reporte la mesure du demi-segment sur l'équerre[9].

[9] Le point ainsi obtenu peut être «vu » comme sommet d'un rectangle : par construction, ce point appartient bien à la droite perpendiculaire à [PC] passant par le milieu de [PC].

- groupe 7 :
  Il repère le milieu du segment [PC] par mesurage, puis positionne la règle perpendiculairement, de manière approximative, en ce milieu. Il choisit un point le long de la règle.
  Deux groupes procèdent par essais pour construire un triangle isocèle.
  Notons qu'un groupe développe une procédure inadaptée qui s'appuie sur les éléments rectilignes du support[10].

Lors du bilan, les solutions sont validées par mesurage ; les points équitables sont entourés en rouge. Les transparents sont alors superposés afin d'observer l'existence et l'alignement de plusieurs points-solutions. Une discussion s'engage alors à propos du plan à renvoyer au Capitaine Crochet. Certains élèves **prennent conscience de la pluralité des positions** (« *On n'a qu'à envoyer tous les justes au Capitaine Crochet* »), d'autres remettent en cause la validation (« *On a mal mesuré, moi je dis que c'est celui-là le juste* ») pour ne proposer qu'un seul point.

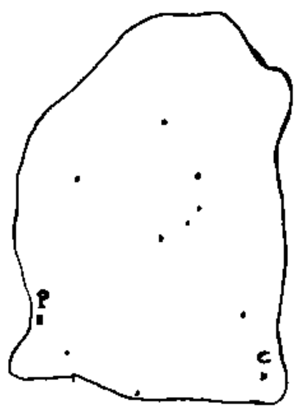
Séance 4

Objectifs

- mettre en œuvre des critères de validité (perception visuelle, appartenance à la médiatrice) d'un point-trésor, dans le micro-espace,
- adapter les critères aux positions des points.

Matériel

- pour chaque groupe, le plan d'une île en format A3 sur lequel figurent les emplacements des Pirates et des Corsaires ainsi que plusieurs points-trésors de couleurs différentes. Certains peuvent être invalidés à l'œil, d'autres nécessitent une procédure plus précise. De plus, quelques-uns sont inaccessibles par mesurage direct des longueurs PT et CT :



- une boîte à outils par groupe
- une feuille-réponse sur laquelle chaque groupe indique si chacun des trésors permet une partie équitable ou non, et explique pourquoi.

Problème

Problème 2

[10] Pour bloquer ces procédés indirects, il convient de donner aux élèves des supports sans éléments rectilignes (bords découpés, zones quelconques, ...).

Comme précédemment, la consigne est donnée sous forme d'un message affiché au tableau :

Nous avons essayé de placer le trésor selon vos indications. Nous ne sommes pas très forts en maths et n'avons pas réussi à nous mettre d'accord…Voilà les positions que nous avons trouvées… Aidez-nous… !!!

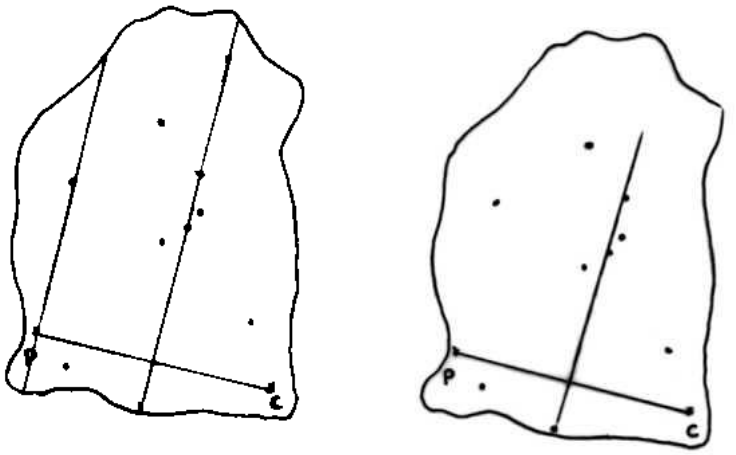
Le Capitaine Crochet

Une phase de recherche permet aux groupes de décider du caractère équitable ou non des positions des différents points. Ils notent leurs réponses.

Beaucoup d'élèves ont **« contourné » le problème engendré par la contrainte** sur les outils qui ne permettaient pas, pour certains points, de mesurer les longueurs PT et CT. Ces élèves ont fait des reports de mesure entre les points-sommets ou ont mis leurs divers instruments bout à bout[11]. Notons qu'un groupe a invalidé **visuellement** les points dont la non-appartenance à la médiatrice était évidente.

Seuls deux groupes ont mobilisé le théorème :

– groupes 2 et 3 :
  Ils tracent la médiatrice de [PC] à l'aide de l'équerre, puis utilisent les implications « (proposition 2) ⇒ (proposition 1) » et « non (proposition 2) ⇒ non (proposition 1) » (cf. l'introduction) pour valider les différents points.



Lors de la mise en commun, les points sont examinés un par un ; ceux pour lesquels les groupes sont unanimes sont traités rapidement. Pour les autres, les différentes procédures sont explicitées et le mesurage effectif, à l'aide d'une règle de 40 cm, permet de départager les groupes. Cela permet de **mettre en valeur l'efficacité des procédures** des groupes 2 et 3, et de **disqualifier les autres** du fait de leur manque de rigueur.
Cette séance a permis aux élèves de constater **l'existence de plusieurs points équitables.**

Séance 5
Cette séance reprend la situation de la séance 3. Mais les outils à disposition sont tous rendus insuffisants par la taille du support (format A3) et, plus particulièrement, par la distance entre la zone où placer le trésor et les positions des Pirates et des Corsaires, ce qui doit amener les élèves à mobiliser le théorème.

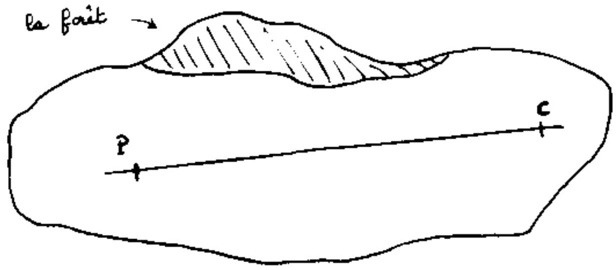
[11] Nous aurions pu bloquer cette procédure en la rendant coûteuse pour un nombre beaucoup plus important de points à valider.

Objectif

- construire dans le micro-espace un point T à même distance de deux autres (P et C), comme point de la droite perpendiculaire au segment [PC] en son milieu.

Matériel

- une boîte à outils par groupe
- pour chaque groupe, le plan d'une île en format A3 sur lequel figurent les positions des Pirates et des Corsaires ainsi qu'une zone représentant la forêt. Le segment [PC] est tracé de sorte que le repérage de son milieu soit possible à l'aide d'une mesure par report). La zone dans laquelle il faut placer le trésor est inaccessible depuis P et C par les instruments.



Problème

Problème 1

Pour cette séance, la consigne est la suivante :

Les Pirates et les Corsaires ont décidé de placer, cette fois-ci, le trésor dans la forêt de l'île dont voici le plan. Aidez-les.

Lors de la phase de recherche, seul un groupe a mis en place une procédure inadaptée. La majorité des groupes a mobilisé le théorème, en passant par la droite perpendiculaire au milieu de [PC] (sans forcément l'avoir tracée) ; beaucoup de constructions ont été jugées « inexactes » après la validation, à cause de difficultés de manipulation des instruments. En effet, pour tous les groupes, des problèmes de manipulation des outils géométriques, en particulier de l'équerre sont survenus ; des points construits à partir d'une procédure adaptée mobilisant le théorème ont donc dû être invalidés.[12]

La mise en commun permet la validation des réponses des élèves par mesurage à l'aide de la règle de 40 cm. Bien que certains points soient invalidés, pour beaucoup d'élèves **ce n'est pas la procédure qui est remise en cause, mais la précision** dans la construction graphique (*« Le trait* [la médiatrice] *n'est pas bien droit ; il est penché* »).

Séance 6

Objectifs

- décider de l'unicité ou de la pluralité des points-solutions,
- justifier son choix.

Matériel

- une feuille vierge et un feutre par groupe

Problème

Problème 3

[12] Il apparaît donc important qu'un travail sur les droites perpendiculaires et, en particulier, sur l'usage de l'équerre soit mené en amont de cette séquence.

La consigne est délivrée à travers le dialogue suivant :

Les Corsaires pensent qu'il n'y a qu'un seul emplacement possible pour le trésor. Les Pirates ne sont pas d'accord et affirment qu'il y en a beaucoup. Qui a raison ?

Lors de cette séance, seuls **deux groupes mobilisent le théorème**. Les autres développent les arguments suivants : « *l'autre jour* [séance 4], *il y avait trois points qui étaient bons : alors il y en a beaucoup* »; le mot « beaucoup » qui figure dans la consigne est alors source de débat *(« Est-ce que trois c'est beaucoup ? »)* et éloigne les élèves du problème à résoudre.
D'autres ne tiennent pas compte du fait que le problème se rapporte à une seule île et considèrent qu'il y a beaucoup de points puisqu'au moins un par île ; pour eux, chacune des séances précédentes se déroulaient sur une île différente et les affirmations des Pirates et des Corsaires ont été considérées comme se rapportant à toutes ces îles.
La phase collective est un **débat d'arguments** qui s'avère sans **validation possible**[13].

Analyses globales

Vers la mobilisation du théorème

Lors des trois premières séances bien que les outils aient été suffisants pour évaluer les distances PT et CT, la majorité des groupes d'élèves mobilise le théorème. **Pour les deux séances suivantes,** nous avons voulu amener progressivement les élèves à développer le théorème en modifiant la valeur de la variable 1 (rapport entre les distances PT et CT et la longueur des outils) de telle sorte que les outils soient insuffisants pour employer des procédures faisant intervenir les distances PT et CT.
Examinons le comportement des différents groupes au cours de la séquence.

	Longueur des outils > PT			**Longueurs des outils > ou < PT**	**Longueur des outils < PT**
	Séance 1	**Séance 2**	**Séance 3**	**Séance 4**	**Séance 5**
Groupe 1	Mobilisation				Mobilisation
Groupe 2	Mobilisation		Mobilisation	Mobilisation	Mobilisation
Groupe 3			Mobilisation	Mobilisation	Mobilisation
Groupe 4	Mobilisation	Mobilisation			
Groupe 5					Mobilisation
Groupe 6	Mobilisation	Mobilisation	Mobilisation		Mobilisation
Groupe 7			Mobilisation		Mobilisation

La variable didactique 1 semble être efficace pour amener les élèves à développer le théorème. En effet, même si quelques groupes le développaient dès le début, c'est lorsque nous modifions complètement la valeur de cette variable (séance 5) qu'il est développé de manière quasi-unanime. Elle a donc permis à ceux qui possédaient des connaissances relatives au théorème, de les mettre en œuvre en tant qu'outil efficace pour résoudre un problème et donc de les renforcer, en faisant le lien entre les deux membres du théorème.
Pour les autres[14] , elle a permis de découvrir un nouvel outil.

[13] Le problème a été donné à résoudre sur papier libre : les points P et C n'ont pas été donnés. Ceci a pu être à l'origine des dysfonctionnements observés.

Nous pouvons penser qu'en la conjuguant à d'autres variables telles que : le type d'espace dans lequel les élèves doivent résoudre le problème, le nombre de points à valider (pour le problème 2), son efficacité en serait renforcée.
Toutefois, nous devons noter une difficulté que le comportement du groupe 4 met bien en évidence. A l'issue de la séance 2, sa réponse a été invalidée et ce groupe n'a plus mobilisé le théorème par la suite. Or, ses résultats découlaient des dispositifs matériels qu'il avaient utilisés dans le méso-espace avec l'imprécision qui s'ensuivait (comptage de pas, usage d'une équerre de dessin). On a là un phénomène déjà manifeste lors du bilan de la séance 1 : les élèves n'ayant pas les connaissances nécessaires pour discuter des procédures, la disqualification du résultat met un discrédit implicite sur la procédure..

Les « formes d'expression » : quelle évolution ?

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à chacun des groupes, afin d'analyser l'influence du changement de domaine d'objets (ou pour le domaine spatial, du changement d'espace) sur l'évolution des formes d'expression utilisées pour développer le théorème. Notons que nous nous intéressons à ces formes d'expression seulement lorsque le théorème est développé.

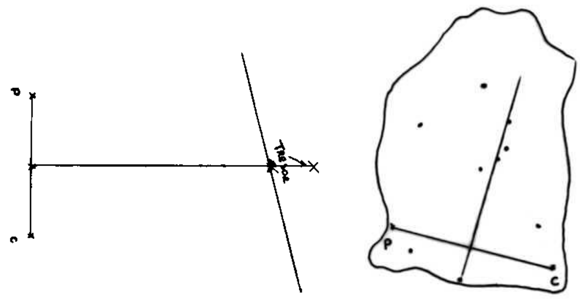
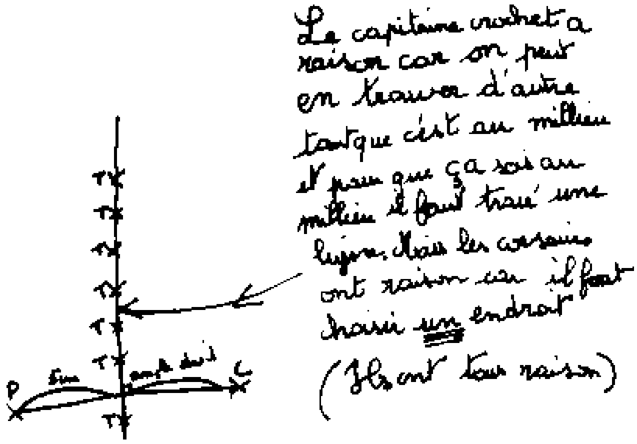
Groupe 1

<table>
<tr><td rowspan="3">Domaine des objets :
Méso-espace (séance 1)</td><td>gestes :
– positionnements sur le terrain : un élève est placé sur le point T à valider
– direction des regards : l'élève en T regarde droit devant lui, pour visualiser la position du projeté de T</td></tr>
<tr><td>langage :
– expressions contextualisées : « Le trésor est entre les 2 », « Il est trop à gauche », ...</td></tr>
<tr><td>traces : aucune</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Domaine des objets :
Micro-espace (séance 5)</td><td>gestes : aucun</td></tr>
<tr><td>langage :
– langage usuel : « On a tracé une ligne »</td></tr>
<tr><td>traces :
– dessin de la médiatrice</td></tr>
<tr><td>Domaine « théorique »</td><td>----------------</td></tr>
</table>

Les actions de ce groupe se sont précisées ; de la simple intuition perceptive, elles sont devenues une succession de constructions, à l'aide d'instruments géométriques, qu'ils ne verbalisent pas.

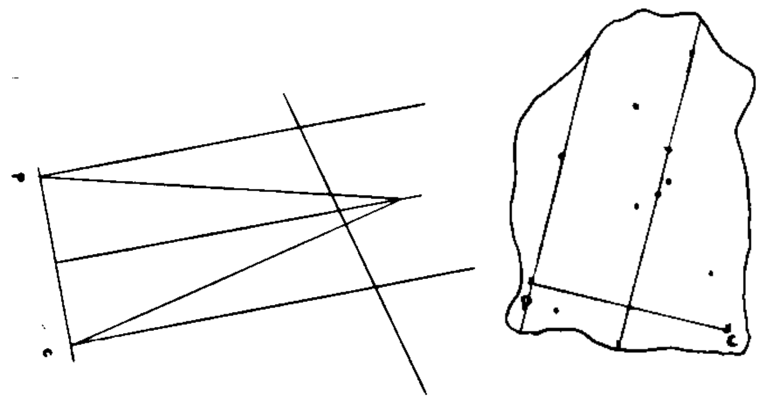
[14] En particulier le groupe 5, qui ne mobilise le théorème qu'à partir de la séance 5 et pour lequel on suppose donc qu'il s'agit d'une nouvelle connaissance.

Groupe 2

<table>
<tr><td rowspan="3">Domaine des objets :
Méso-espace (séance 1)</td><td>gestes :
– positionnements : un élève est placé sur le trésor à valider et tourné vers la ligne de départ,
– gestes : l’élève utilise ses bras comme « viseurs »,
– direction des regards : l’élève regarde droit devant lui,
– déplacements : l’élève se déplace selon cette direction depuis le trésor jusqu’au segment [PC] (qu’il visualise mentalement). Puis il mesure, en comptant les pas, la distance entre l’endroit où il se trouve et les deux extrémités.</td></tr>
<tr><td>langage : usuel : « Il faut marcher bien droit », « Là y’a 4, et là y’à 3 ».</td></tr>
<tr><td>traces : aucune</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Domaine des objets :
Micro-espace
(séances 3, 4, 5)</td><td>gestes : aucun</td></tr>
<tr><td>langage :
– début de langage géométrique et contextualisé : « Nous avons pris le milieu entre les corsaires et les pirates, et nous avons mis l’équerre : cela tombait juste (ou : le point était 2 mm à côté) », « Ceux qui sont sur l’équerre sont bons, les autres sont pas bons. Les points qui sont pas au milieu, ils sont plus près [d’une équipe que de l’autre] ».</td></tr>
<tr><td>traces :
– dessin de la médiatrice :
</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Domaine « théorique »</td><td>gestes : aucun</td></tr>
<tr><td>langage :
– langage usuel décontextualisé : « Tous les points sur cette ligne, font la même distance ».</td></tr>
<tr><td>traces :

</td></tr>
</table>

Tout au long de la séquence, ce groupe développe le théorème. Cela se traduit, d'abord, par de nombreuses actions (domaine spatial) prenant en compte toutes les caractéristiques de la médiatrice, puis, par des formes d'expression de plus en plus élaborées. En effet, les constructions et les termes employés s'affinent jusqu'à acquérir un statut de plus en plus théorique et l'implication (proposition 2) $\Rightarrow$ (proposition 1) apparaît comme élément de preuve lors du changement de domaine et de problème**.**

Groupe 3

<table>
<tr><td>Domaine des objets :
Méso-espace</td><td>--------------------</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Domaine des objets :
Micro-espace
(séances 3, 4, 5)</td><td>gestes : aucun</td></tr>
<tr><td>langage :
– langage usuel décontextualisé :
pour expliquer la construction : « J'ai tracé deux lignes de manière à délimiter une grande zone. J'ai mesuré le milieu et j'ai tracé un trait ».
pour justifier une erreur de précision : « Je sais, c'est à cause du trait : il est pas très direct ».
– langage contextualisé :
pour conclure : « On a constaté que la distance était la même », « Là le trésor est le mieux équitable, là il est trop vers les pirates ».</td></tr>
<tr><td>traces :
– dessin de la médiatrice et des perpendiculaires à [PC] en P et C.
</td></tr>
<tr><td>Domaine « théorique »</td><td>----------------</td></tr>
</table>

Le théorème est exprimé à travers des constructions graphiques, complétées par des expressions relevant d'un langage non-expert.
Remarquons qu'au cours de leur recherche, ces élèves ont été amenés à exprimer (indirectement) le fait que : si un point n'est pas à même distance de P et de C, alors il n'est pas sur la médiatrice de [PC] (non (proposition 1) $\Rightarrow$ non (proposition 2)).

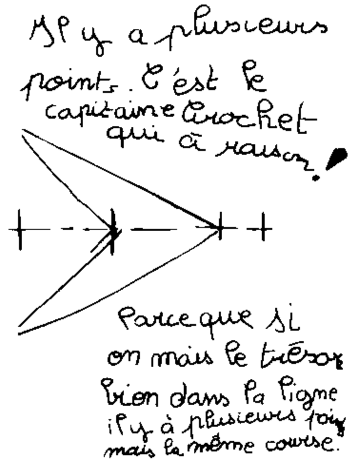
Groupe 4

Domaine des objets : Méso-espace (séances 1 et 2)	**gestes** : – positionnement : sur la droite reliant un plot validé avec le milieu de [PC], face au segment, – direction du regard : droit devant soi, selon cette même droite.
	langage : – langage géométrique décontextualisé : pour conclure : « *Est dans le bon alignement [ou non*] » ou « *Aligné entre les deux plots du départ* », « *Il fallait prendre le milieu et l'équerre pour faire un angle droit* ».
	traces : – construction : il matérialise la médiatrice par la ficelle, après avoir repéré le milieu (par comptage de pas), qu'il oriente à l'aide de l'équerre.
Domaine des objets : Micro-espace	--------------------
Domaine « théorique »	---------------------

Il est surprenant de voir surgir dès la séance 2, lors d'activités dans le méso-espace, un procédé dans lequel le théorème apparaît sous la forme d'une construction matérialisant la médiatrice en prenant en compte toutes ses propriétés (droite, milieu, perpendicularité). Le recours à l'équerre prouve que ce groupe raisonne déjà sur des objets théoriques, ce qui est confirmé par le langage qu'il utilise.

Groupe 5

Domaine des objets : Méso-espace	--------------------
Domaine des objets : Micro-espace (séance 5)	**gestes** : aucun
	langage : – langage géométrique : pour expliquer la construction : « *On a pris le milieu et l'équerre pour faire un angle droit, on a tracé un trait »,* – langage contextualisé : pour conclure *:* « *Le trésor est là* ».
	traces : – dessin de la médiatrice
Domaine « théorique »	**gestes** : – désignant un grand nombre de points solutions
	langage : – langage usuel contextualisé faisant référence à des situations du méso-espace : « *C'est une ligne verticale»* , « *Quand on a fait sur le stade, ça faisait une grande ligne …* », « *Le trésor peut être là, là, là, là… ; il y aura toujours une course à faire !* », « *Si on met le trésor sur la ligne, il y a plusieurs points* ».

Domaine « théorique »	**traces** : 

Le changement de domaine, joint au changement de type de problème, a eu pour effet de les faire passer de l'emploi d'un vocabulaire relativement théorique à l'emploi d'un vocabulaire contextualisé. Nous supposons que la complexité de la séance 6 était trop importante pour eux : elle les a amenés à se rattacher aux situations déjà rencontrées et donc à « recontextualiser ».

Groupe 6

Domaine des objets : Méso-espace (séances 1 et 2)	**gestes :** – positionnements : un enfant se place près du trésor, les deux autres se mettent sur les croix matérialisant les points de départ des équipes, – gestes : l'enfant sur le trésor utilise ses bras comme « viseurs », – direction du regard : celui-ci regarde dans la direction du projeté orthogonal T', puis « balaye » du regard le segment [PC] pour comparer T'P et T'C.
	langage : – langage usuel et contextualisé : « *Il [le trésor] est plus de ce côté/plus près que là-bas* », « *il est bon parce qu'il est parallèle* » et « *Il n'est pas bon parce qu'il n'est pas parallèle* ».
	traces : aucune
Domaine des objets : Micro-espace (séances 3 et 5)	**gestes** : – coulissement de l'équerre le long de la règle pour construire un point.
	langage : – langage usuel : « *On a pris le milieu et tracé un trait* », « *On a mesuré la moitié* ».
	traces : – dessin de la médiatrice
Domaine « théorique »	----------------------

Les constructions graphiques apparaissent suite au changement d'espace, mais le registre de langue reste courant.

Groupe 7

Domaine des objets : Méso-espace	**----------------------**
Domaine des objets : Micro-espace (séances 3 et 5)	**gestes :** aucun
	langage : – langage usuel : « *On a tracé un trait avec la règle, bien au milieu* » (séance 3), « *On a tracé le milieu, on a pris l'équerre pour tracer droit, et on a mis le trésor en haut* » (séance 5).
	traces : – dessin de la médiatrice
Domaine « théorique »	---------------------

Pour ce groupe, il n'y a pas eu d'évolution dans les formes d'expression utilisées. On peut toutefois remarquer qu'il y a eu développement du théorème en acte seulement pour la résolution du problème 1 dans le micro-espace.

Globalement, les formes d'expression utilisées dans le domaine spatial sont de l'ordre des actions physiques et des expressions orales relevant du langage usuel. Elles sont même parfois plus évoluées, par exemple le groupe 4 qui matérialise la médiatrice dans le méso-espace, en ayant le souci de respecter ses différentes caractéristiques.
En revanche, la rupture créée par le changement de domaine, joint au changement de type de problème, n'a pas eu l'effet escompté sur l'évolution des formes d'expression. Au contraire, nous pensons qu'elle a été trop importante (peut-être est-elle intervenue trop tôt ?) et qu'elle a donc constitué une difficulté trop grande. Cela, ajouté à la difficulté de décontextualisation globale rencontrée en fin de séance, a amené la plupart des élèves à contourner le problème.

CONCLUSION

Le théorème que nous avons retenu comme objet d'apprentissage a été développé en tant qu'outil efficace par de nombreux élèves dès le début de la séquence. Cela nous a confortées dans notre hypothèse selon laquelle le théorème-en-acte pouvait être outil de résolution d'un problème spatial dans lequel, plus particulièrement, la variable 1 (rapport entre les distances PT et CT et les longueurs des outils) pouvait être significative, comme nous l'avons analysé précédemment. Ce développement s'est exprimé de différentes manières, allant du geste à la construction graphique, et du langage courant au langage théorique. Cependant, si notre analyse a mis en évidence les formes mathématiques du théorème (théorème direct ou théorème réciproque) **explicitées** de manière contextualisée au cours des phases collectives de bilan, elle ne nous a pas permis de conclure quant à celles **mobilisée**s (donc encore moins p**ossédées**) par les élèves pour résoudre les différents problèmes. En effet, ils peuvent :
– utiliser une seule implication pour résoudre le problème, mais justifier leur production par l'implication inverse,
– ou, ce qui est plus probable, faire des allers-retours entre les deux propositions (égalité de distances, appartenance à la médiatrice), ou leurs complémentaires (non-égalité de distances et non-appartenance à la médiatrice), mais n'en expliciter qu'une seule au cours du bilan.

Il apparaît donc que l'ensemble des connaissances des élèves qui ont pu être observées à travers les formes d'expression employées est sans doute beaucoup moins riche que celui dont ils disposent réellement.

En conséquence, **la poursuite d'un tel apprentissage** (développement par l'élève d'un théorème-en-acte vrai dans la perspective de l'apprentissage du théorème mathématique correspondant dans la scolarité ultérieure) **peut paraître intéressant dès l'école primaire**, du moment que l'on peut disposer de situations qui le permettent. Vis-à-vis des connaissances qui s'y rattachent, un triple objectif peut être visé

– les faire développer en tant qu'outils de résolution de problèmes en vue de leur donner du sens, de leur faire acquérir un premier stade de validité et de les lier à une situation de référence,
– établir des liens logiques entre certaines d'entre elles,
– les faire expliciter (sous certaines formes) et leur donner un statut « local », c'est à dire rattaché à quelques situations de référence et non encore généralisé).

Par ailleurs, la confrontation de l'élève à diverses situations contextualisées pour lesquelles la même connaissance peut être mobilisée en tant qu'outil pourrait permettre d'en étendre le domaine de validité. Des situations de formulation greffées sur les situations d'action autour de ces contextes auraient pour but d'en faire évoluer les formes d'expression, en vue de parvenir aux formes institutionnelles. Il s'agit donc d'un travail à long terme, l'explicitation en termes institutionnels de la plupart de ces théorèmes relevant des programmes du collège. Il paraîtrait donc raisonnable de mener l'institutionnalisation à l'issue d'une période d'apprentissage assez longue, « à cheval » sur l'école élémentaire et le collège.

L'intérêt porté, tout particulièrement en géométrie, aux situations mathématiques autour de théorèmes-en-acte vrais développés par les élèves est récent, essentiellement parce que peu sont identifiés. D'un côté, **repérer les théorèmes-en-acte** est une tâche difficile qui ne peut se faire que par l'observation des élèves en situation ; d'un autre côté, **l'élaboration de situations d'apprentissage adéquates** par le maître l'est tout autant.

BIBLIOGRAPHIE

ARGAUD H.-C. (1998) *Problèmes et milieux a-didactiques, pour un processus d'apprentissage en géométrie plane à l'école élémentaire, dans les environnements papier-crayon et Cabri-géomètre*. Thèse de Didactique des Mathématiques. Université Joseph Fourier Grenoble.

DOUADY R. (1986) *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 7/2, pp. 5-33.

MARGOLINAS C. (1993*) De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques.* Ed. La Pensée Sauvage , Grenoble.

VERGNAUD G. (1981) *Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques.* Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 2/2, pp. 215-230.

VERGNAUD G. (1990) *La théorie des champs conceptuels.* Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. 10/2-3, pp. 133-170.